Rapport d'article - Mathématiques financières Utility maximization with random horizon : a BSDE approach

Alexandre Martin

2019

1 Contexte et problème étudié

1.1 Introduction

L'étude et la compréhension du risque est depuis plusieurs années une question centrale en modélisation financière. Cet article traite ainsi de l'apparition d'une incertitude sur le marché par une cause externe à celui-ci, et qui causerait alors une inaccessibilité totale et irréversible du marché. Ce type d'incertitude se retrouve notamment dans la prise en compte du risque de crédit, où la cause externe est la faillite de la contrepartie, ou encore dans les placements de type assurance-vie, dont la maturité excède largement l'espérance de vie du détenteur.

1.2 Formulation économique du problème

On considère ici que l'investisseur ne sera plus en mesure d'investir dans le marché après un événement imprévisible et indépendant du marché : par exemple son décès dans le cas de l'assurance-vie. Ce moment où cet événement se produit peut ainsi être vu comme la "mort" du marché ou de l'investisseur. Il existe d'ailleurs certains types de marchés limités dans le temps : c'est le cas par exemple du marché des émissions de carbone aux Etats-Unis. De plus, on supposera que l'investisseur rationnel cherchera à maximiser son utilité lors de sa période d'investissement T. Par conséquent, on va rechercher une stratégie qui réalisera ce maximum.
A noter que l'on peut effectuer une distinction selon les valeurs pouvant être prises par ce "temps de mort" :
- soit l'investisseur a peur d'un certain événement qui peut ne pas se produire (pour un temps non borné par T)
- soit il sait qu'un événement va se produire, mais pas quand (pour un temps inférieur à T avec probabilité 1) Ces deux problèmes seront bien différents en pratique.

1.3 Formulation mathématique du problème

Mathématiquement, on cherche ainsi la stratégie π^* qui réalise :
$\pi^* = argmax_{\pi \in A} E[U(X^{\pi}_{\min(T,\tau)} - \xi)]$
où :
- A est l'ensemble des stratégies admissibles pour l'agent
- X est le processus de richesse associé à la stratégie
- T est l'horizon de la période d'investissement
- τ est un temps aléatoire représentant le “temps de mort” du marché
- ξ est une variable aléatoire représentant la valeur de la dette
- U est la fonction d'utilité modélisant les préférences

La distinction évoquée précédemment se caractérise alors par le support de τ :
- soit celui-ci n'est pas borné, et il se peut alors que la “mort” du marché ne se produise pas durant la période d'investissement
- soit celui-ci est de la forme $[0, S]$, où $S \leq T$: dans ce cas, on sait à l'avance que la “mort” du marché aura bel et bien lieu, mais pas à quel moment précis.

2 Méthode de résolution

2.1 Résultats antérieurs

Il a été montré précédemment qu'il était possible de transformer ce problème de maximisation en un problème de résolution d'une équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR; nous y reviendrons par la suite), où il intervient un processus prédictible λ représentant l'influence de τ. Dans les articles antérieurs, notamment en modélisation du risque de crédit, il a été usuel de supposer que ce processus λ est borné. Cependant, une telle hypothèse implique que le support de τ est alors non borné : on fait alors l'impasse sur l'une des deux parties de la distinction que nous avons effectuée précédemment.
L'objectif de cet article est donc d'obtenir une théorie unifiée qui puisse permettre le traitement mathématique conjoint des deux versions du problème. Il est à noter que dans le cas où le support de τ est borné, λ ne l'est pas. Plus particulièrement, une singularité est remarquée dans le sens où λ est intégrable sur tout intervalle $[0, t]$, où $t \leq T$, mais pas sur $[0, T]$

.

2.2 Principe d'Optimalité Martingale adapté

Afin de représenter une incertitude totalement extérieure au marché, τ est supposé ne pas être un temps d'arrêt. Pour pallier cela, on va choisir d'adopter une nouvelle filtration G légèrement étendue. G sera choisie comme la plus petite filtration continue à droite, contenant la filtration de départ, et telle que τ soit un temps d'arrêt relativement à celle-ci.
Vis-à-vis de cette nouvelle filtration, on peut alors adapter le principe d'optimalité martingale à notre problème :
Soit R^π une famille de processus stochastiques tels que :
(i) $R^\pi_{\min(T,\tau)} = U(X^\pi_{\min(T,\tau)} - \xi)$ pour toute stratégie admissible
(ii) $R^\pi_{\min(.,\tau)}$ est une surmartingale dans la nouvelle filtration pour toute stratégie admissible
(iii) Tous les R^π_0 sont constants de même valeur
(iv) Il existe une stratégie admissible π^* telle que R^{π^*} soit une martingale pour la nouvelle filtration
Alors π^* est solution de notre problème.

2.3 Lien avec une EDSR

On se place dans le cas où le rendement sans risque est nul (le même problème étudié avec un rendement non nul serait en effet bien plus compliqué).
La fonction d'utilité sera choisie exponentielle : $U(x) = -exp(-\alpha x), \alpha > 0$
Le processus de richesse représente la valeur détenue dans mactifs risqué et s'écrit donc sous la forme :
$X^\pi_t = x + \int_0^t \pi_s.\sigma_s dW_s + \int_0^t \pi_s.b_s ds$,
où les composantes de π représentent la valeur investie dans chaque actif risqué, et b et σ sont respectivement les vecteurs de dérive et de volatilité des actifs.
Le processus de richesse peut se réécrire :
$X^\pi_t = x + \int_0^t p_s dW_s + \int_0^t p_s.\theta_s ds$,
où $\theta = \sigma^T(\sigma\sigma^T)^{-1}b$ et $p = \sigma^T p$.
Une stratégie sera dite admissible ($\pi \in A$) si $E[\int_0^T ||p_s||^2 ds] < \infty$.

Il est possible de montrer que, sous certains hypothèses, la famille de processus vérifiant le principe d'optimalité martingale peut s'écrire sous la forme $R^p_t = -exp(-\alpha(X^p_t - Y_t))$,
où Y_t est solution de l'EDSR suivante :
$Y_t = \xi - \int_{min(t,\tau)}^{min(T,\tau)} Z_s dW_s - \int_{min(t,\tau)}^{min(T,\tau)} U_s dH_s - \int_{min(t,\tau)}^{min(T,\tau)} f(s, Y_s, Z_s, U_s) ds$
où $f(s, y, z, u) = -\alpha/2 * dist^2(z + 1/\alpha * \theta_s, C_s(y)) + z.\theta_s + ||\theta_s||^2/(2*\alpha) - \lambda_s/\alpha(e^{au} - 1)$.
Dans ce cas, on a alors :
$V(x) = max_{\pi\in A} E[U(X^\pi_{\min(T,\tau)} - \xi) = -exp(-\alpha(x - Y_0))$.
Au final, le problème de maximisation d'utilité est ainsi transformé en problème de résolution d'une EDSR : on obtient de plus dans l'article une caractérisation explicite de la stratégie optimale. Il est possible de montrer formellement que cette EDSR admet une solution unique sous certaines hypothèses.

3 Résultats, hypothèses et interprétations

3.1 Une application numérique

On se place ici sous l'hypothèse que l'événement bloquant arrivera presque sûrement durant la période d'investissement, c'est-à-dire où le support de τ est l'intervalle $[0, T]$. La solution de l'EDSR sera calculée de proche en proche via un schéma de discrétisation, où l'on se sera réduit à une seule dimension (c'est-à-dire un seul actif risqué) par soucis de simplicité.
On simule le problème pour différentes valeurs de n (truncation level) : 1, 2, 10, 50. La valeur du portefeuille optimisé en l'existence d'un temps d'arrêt (tendance $n \to \infty$) est alors trouvée inférieure à celle en l'absence de temps d'arrêt (tendance $n \to 0$). La performance de l'investisseur est ainsi inférieure en l'existence d'un temps d'arrêt.
Dans le cas où l'on suppose que le temps τ survient presque sûrement avant l'échéance T, la stratégie optimale préconise d'adopter un comportement plus averse au risque, et par conséquent de moins investir dans l'actif risqué.

3.2 Interprétation des hypothèses

Il sera ici question de revenir sur certaines hypothèses mathématiques adoptées et d'essayer d'en tirer une analyse :
- 1) si $supp(\tau) = [0, T]$: l'investisseur sait à l'avance que l'événement bloquant se produira au cours de sa période d'investissement (exemple : placements de type assurance-vie)
2) si $supp(\tau)$ n'est pas borné, l'investisseur ne sait pas si cet événement aura lieu ou non, mais il sait qu'il est possible (exemple : risque de crédit). C'est la version la plus étudiée dans la littérature.
- la stratégie optimale réalise la maximisation de l'utilité : l'investisseur est donc supposé rationnel, et ses préférences sont modélisées par la fonction d'utilité exponentielle. Il aurait été possible d'adopter d'autres types de fonctions d'utilité et, sous certaines conditions (notamment $\xi = 0$), la même méthode de résolution s'applique.
- τ est supposé ne pas être un temps d'arrêt : en effet cette variable aléatoire ne doit pas être prédictible uniquement par l'information du marché, elle apporte ainsi une part d'incertitude indépendante de celle du marché.
- $r = 0$: cette condition est adoptée par soucis de simplicité, afin d'éviter dans cet article les questions liées à l'actualisation, et se concentrer sur la résolution de l'EDSR.

4 Conclusion

Il a été ici question de traiter la situation suivante : je suis un investisseur, et je sais qu'il existe un événement extérieur et indépendant du marché qui, s'il survient, m'empêche alors d'accéder au marché. Comme évoqué dans l'article, on peut se retrouver devant deux problèmes différents : soit je suis certain que cet événement se produira durant ma période d'investissement (typiquement le décès du détenteur d'une assurance-vie), soit je sais qu'il peut avoir lieu, mais il se peut également qu'il ne se produise pas (comme par exemple le défaut d'une contrepartie).
L'enjeu mathématique est ainsi d'exhiber une stratégie optimale sous une forme robuste, qui soit valide pour les deux moitiés du problème. Cette stratégie sera choisie comme celle qui maximise l'utilité de l'investisseur. Pour ce faire, il est nécessaire d'élargir la filtration utilisée pour faire de l'instant auquel l'événement limitant se produit un temps d'arrêt. Il est alors possible d'adapter le principe d'optimalité martingale et, sous certaines hypothèses, de montrer que ce problème de maximisation se transforme en problème de résolution d'une équation différentielle stochastique rétrograde, de laquelle on peut montrer l'existence et l'unicité de la solution.
Dans la situation où l'investisseur sait que l'événement bloquant arrivera durant sa période d'investissement, la stratégie optimale décrite par le modèle préconise alors d'être plus prudent en investissant moins dans l'actif risqué.