# Principes de dynamique et méthodes numériques

## GUIDE DE L'ÉTUDIANT

## S5 Électrique et S5 Informatique – APP 2

**Hiver 2023 – Semaines 3 et 4**

Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté de génie
Université de Sherbrooke

**Version janvier 2023** © Jean de Lafontaine, ing.

**Hiver 2023 :** révision des lectures – Ajout des objectifs dans le procédural et les laboratoires – Reformulation de l'exercice du ressort | M. Blondin et F. Boone
**Automne 2022 :** document mis à jour : Guide_Etudiant_APP2_S5_A22 – Retour à la version de 2014, ajout des qualités et de la linéarisation | M. Blondin et F. Boone


Ce document a été réalisé à l'aide de KOMA-Script et de LaTeX

**Colophon**

Les polices de caractères sont :
Sérif – XCharter, dérivé de *Original Bitstream Charter*
(Michael Sharpe) ;
Sans Sérif – Helvetica (1957, Max Miedinger) ;
Mono – beramono, dérivé de *Original Bitstream Vera*
(Malte Rosenau et Walter Schmidt, 2004-09-30).
Bitstream charter et Bitstream vera sont des marques enrégistrées de Bitstream INC.

**Note :** En vue d'alléger le texte, le masculin est utilisé pour désigner tout le monde.

Document original : Guide_Etudiant_APP2_S4_E14
Version mai 2013 – Rédigée par Jean de Lafontaine, ing.
Version avril 2014 – Révisée par Jean de Lafontaine, ing.

## Table des matières

# 1 Énoncé de la problématique

Dans le but de rendre l'initiation des étudiantes et étudiants plus passionnante, la Faculté de génie a décidé de créer un parcours à obstacles de style Wipe-Out (`https://www.tbs.com/shows/wipeout`). Elle a donc fait appel à la société WOQ Inc. [1] qui, en toute intelligence, a engagé comme stagiaire un étudiant de génie, vous, pour concevoir un tel parcours. Basé sur son expérience de conception sur d'autres cascades du genre, un ingénieur de WOQ a préparé un devis pour une des épreuves, une glissade à obstacles (voir le document DEVIS_de_WOQ).

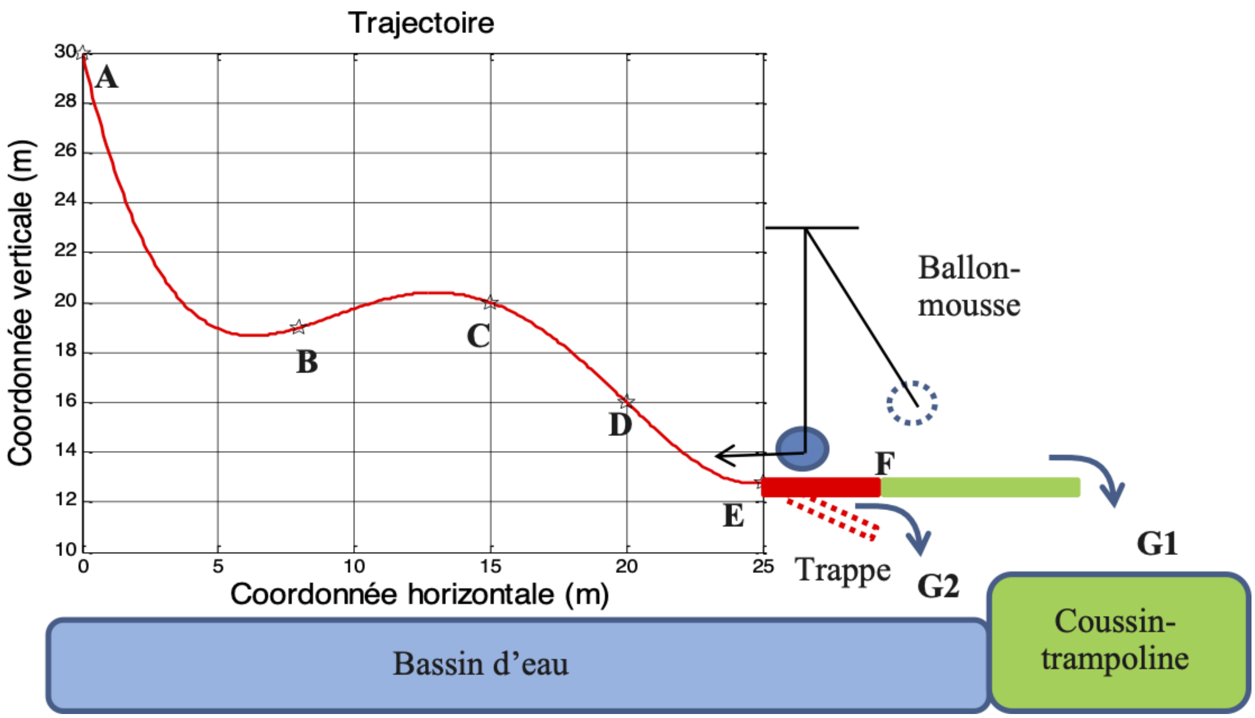


**FIGURE 1 –** Illustration schématisée de la problématique

Dans cette glissade à obstacles, le participant fera face aux étapes suivantes (voir figure 1) :

1. une glissade d'eau sur une distance horizontale de 25 m qui doit obligatoirement passer par les coordonnées A, B, C, D (étoiles sur le dessin) où des obstacles seront prévus (ces obstacles ne font pas partie de vos tâches de conception) ;
2. un impact avec un ballon-mousse, avec conservation de la quantité du mouvement (aucune impulsion externe) au point E ;
3. une trappe reliant les points E et F qui s'ouvre après un certain temps, activée par une minuterie déclenchée par le passage du participant au point E ;

1. Wipe-Out Québec Inc.

4. un coussin-trampoline : si le participant réussit à attraper le ballon, l'ensemble participant-ballon aura le temps de passer au-dessus de la trappe avant qu'elle ne s'ouvre et le participant glissera vers le point G1 pour tomber sur le coussin-trampoline ;
5. un bassin d'eau : si le participant ne réussit pas à attraper le ballon (collision semi-élastique), le ballon rebondit sur le participant avec un coefficient de restitution e ; la vitesse du participant après collision sera diminuée et il sera encore sur la trappe quand la minuterie activera son ouverture ; le participant tombera dans le bassin d'eau au point G2 et il aura perdu le défi..

La conception doit assurer la sécurité des participants, autant lors de la chute dans le bassin que sur le coussin-trampoline, tout en respectant des vitesses minimales et maximales lors du parcours. La conception se divise en 4 modules :

1. la conception de la trajectoire de la glissade et de la valve d'eau
2. la conception de la durée de la minuterie d'ouverture de la trappe
3. la conception du coussin-trampoline
4. la conception du bassin d'eau.

Les détails numériques sont dans le devis. L'ingénieur de WOQ Inc. vous donne les recommandations et conseils suivants.

### Conception de la trajectoire et de la valve

Une représentation mathématique de la trajectoire, à l'aide d'un polynôme d'interpolation des 5 points (A, B, C, D, E), sera nécessaire pour les travaux. La hauteur du dernier point E sera choisie par le concepteur entre certaines limites pour assurer une sortie à peu près horizontale. Pour raison de sécurité, des vitesses maximales sont imposées le long du parcours. Des vitesses minimales sont aussi imposées pour donner un peu d'adrénaline au participant : c'est quand même une initiation. Pour rencontrer ces critères, la transformation de l'énergie potentielle du participant en énergie cinétique doit bien être gérée le long du parcours. En plus de la hauteur de sortie ajustable au point E, le concepteur peut gérer l'énergie du participant en ajustant le coefficient de friction entre le participant et la glissade. En effet, le débit d'eau à l'entrée de la glissade est ajustable. Selon le pourcentage d'ouverture de la valve, le coefficient de friction dynamique peut être ajusté adéquatement. Dans ces calculs, l'utilisation du théorème de l'énergie mécanique est recommandée. La relation entre le pourcentage d'ouverture de la valve et le coefficient de friction dynamique a été obtenue de façon expérimentale pour différents débits d'eau, avec des volontaires qui ont servi de cobayes sur une glissade instrumentée. Toutes les approbations déontologiques avaient été obtenues pour ces essais. Les mesures sont bruitées à cause des différences physiques de chacun des volontaires et des erreurs de mesure de l'énergie dissipée le long de la trajectoire. Un lissage de ces mesures sera requis pour obtenir une relation mathématique entre ces deux variables.

### Conception de la durée de la minuterie

La masse du ballon-mousse et sa vitesse à l'impact sont basées sur des designs existants et sont fournies dans le devis. Dans le cas d'une collision plastique (c.-à-d. le participant attrape le ballon), la vitesse après impact sera calculée. La minuterie devra être ajustée de façon à ce que le participant-ballon quitte la surface de la trappe avant que la trappe s'ouvre. Dans le cas d'une collision semi-élastique (le ballon rebondit sur le participant), le même ajustement de la minuterie devra garantir que le participant soit encore sur la trappe quand celle-ci s'ouvrira. Le réglage de la minuterie doit assurer une marge de sécurité entre les deux événements (le participant passe de façon sécuritaire au-dessus de la trappe ou tombe dans le bassin).

### Conception du coussin-trampoline

Pour assurer la sécurité du participant, la distance verticale sur laquelle se déforme le coussin-trampoline doit être calculée pour assurer une distance raisonnable du participant par rapport au plancher lors de la déflexion maximale du trampoline. La rigidité du coussin-trampoline (considéré comme un ressort) est basée sur un design existant et est fournie dans le devis. La hauteur de tombée du participant est aussi spécifiée dans le devis. L'utilisation du principe de conservation de l'énergie mécanique est recommandée dans cette conception.

### Conception du bassin d'eau

Ici aussi, on doit assurer la sécurité du participant en prévoyant une profondeur minimum du bassin d'eau pour éviter un impact trop brutal du participant avec le fond du bassin lors d'une chute. En appliquant la 2$^{e}$ loi de Newton à la dynamique d'un objet dans l'eau, on obtient une équation différentielle non linéaire à cause de la traînée hydrodynamique. Une linéarisation de cette équation différentielle est recommandée pour trouver analytiquement la vitesse du participant à l'équilibre dans l'eau et la profondeur sécuritaire du bassin.

## 2 Références essentielles à consulter

### 2.1 Livres de référence et lectures à faire

**Livre de référence**
J.L. Meriam et N.L.G. Kraige, « Engineering Mechanics : Dynamics », SI Version, Wiley, 8e édition, 2013, 723 pages, ISBN 978-1-119-28696-7.

Ce livre n'est pas du domaine public. Aussi, de ce livre, ont été extraites certaines pages. Le total limité de pages permet de mettre le document sur le site de l'APP en format PDF, seulement pour les fins de l'APP. Il ne peut être distribué publiquement. La déclaration des droits d'auteur est incluse et confirme la gratuité de ce document PDF dans le cadre de l'APP.

**Lectures du livre de référence**
Pour maîtriser les concepts introduits dans les sections du livre de référence, il est essentiel de les mettre en pratique en consultant les exemples présentés à la fin de chacune de ces sections.

- Chapitre 3, section 3.6 – Travail et énergie cinétique, pages 153 à 163.
- Chapitre 3, section 3.7 – Énergie potentielle, pages 173 à 179.
- Chapitre 3, section 3.8 et 3.9 – Quantité de mouvement et principe d'inertie, pages 188 à 193.
- Chapitre 3, section 3.12 – Chocs, pages 214 à 219.

**Notes de cours de référence : Méthodes numériques**
Ces notes de cours ont été écrites par le professeur Jean de Lafontaine. Elles ne sont pas du domaine public mais le document PDF est mis à votre disposition.

**Lectures de Méthodes numériques**

- Notes importantes, page 4.
- Chapitre 1, section 1.1 approximation discrète, sauf 1.1.2 (qui sera vu à l'APP6).
- Chapitre 2, section 2.1.

**Linéarisation**
Seulement la partie de linéarisation pour une variable sera utile pour l'APP.

### 2.2 Séquence d'étude suggérée

**Procédural 1**
Lire le chapitre 3, section 6 et 7 du livre de référence et le document sur la linéarisation.
La lecture du livre de référence présente le théorème de conservation de l'énergie soit l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le travail des forces. L'énergie potentielle est introduite de façon classique par la gravité et est généralisée aux forces dites conservatrices, c'est à dire aux forces

qui peuvent se déduire d'un potentiel, comme le ressort. Dans un second temps, le choc de deux particules est étudié. Le livre présente une approche particulière, c'est à dire en partant d'un cas particulier avant d'aborder le cas plus général. Certes, cela permet d'avancer en douceur. Mais n'oublier pas de faire l'inverse pour votre compréhension : partez du cas général, ajouter les hypothèses du cas particulier et vous devriez retrouver les équations du cas particulier

Pour la partie linéarisation, l'objectif est de comprendre que les problèmes non linéaires sont complexes et, si l'on dispose de ressources informatiques suffisantes, on peut toujours les résoudre par une méthode numérique telle que la méthode des éléments finis (FEM) dans le domaine du temps ou de l'espace. Cependant, dans les systèmes embarqués en temps réel, on ne dispose pas de telles ressources et le temps est compté : la linéarisation du problème devient alors intéressante car on peut obtenir une très bonne approximation sans beaucoup de ressources. Dans tous les cas, l'humain est nécessaire : dans le premier cas, il y aura toujours une solution mais est-elle physique ? Dans le second cas, on commet une erreur : quel est le niveau d'erreur permis ?
L'exemple du ressort, problème 6, laboratoire 1, sera abordé.

**Laboratoire n° 1**
Lire les notes importantes et la section 1.1 approximation discrète du chapitre 1 de Méthodes numériques, exceptée la section 1.1.2.
Le laboratoire commence par l'utilisation de Matlab pour étudier la linéarisation. Puis le laboratoire porte sur la résolution d'exercices utilisant les méthodes numériques introduites dans la section 1.1 approximation discrète.
Pour la programmation, quelque soit le langage, il faut en premier lieu écrire les équations pour comprendre ce que l'on cherche (les inconnus) et ce que l'on connaît. Dans cette unité, Matlab est utilisé. La question ici n'est pas d'évaluer votre code. Il existe de bonnes et de moins bonnes pratiques. Par exemple, mettre des noms de variable ayant un sens est une pratique universelle. Ne pas oublier que Matlab est spécialisé dans les matrices et les vecteurs…
L'activité se fait par équipe de deux.

1. But de l'activité
   – application de la linéarisation à un ressort, partie Matlab.
   – Mettre en pratique les procédures requises pour mettre en œuvre les techniques d'approximation de données dans le contexte du TEC et du TEM (théorème de la conservation de l'énergie pour être plus général).
   – Utiliser le logiciel MATLAB pour obtenir les polynômes d'approximation.
   – Remarque : développer le code pour qu'il soit générique et réutilisable pour la problématique.
2. Préparation avant la rencontre
   – Lire et comprendre le développement des équations normales pour l'approximation

  linéaire dans les démonstrations D1 et D2 de la section 1. et dans l'Annexe de Méthodes_numériques.
  - Lire la partie sur la projection orthogonale (section 1.1.4) Méthodes_numériques. De plus amples explications seront données en début de laboratoire n° 1
  - Étudier et comprendre le code MATLAB des démonstrations D4 et D5 fourni à la fin du document Méthodes_numériques.

3. Exercices à résoudre durant le laboratoire
   - Terminer la partie sur la linéarisation (problème 6).
   - Résoudre les problèmes 7 et 8 du Laboratoire 1 (voir les énoncés à la section 7, page 24).

**Laboratoire n° 2**

Relire la section 1.1 approximation discrète du chapitre 1 (sauf 1.1.2) et la section 2.1 du chapitre 2 de Méthodes numériques

Le laboratoire explore les limites de l'approximation et de l'interpolation selon la nature du problème et ce qu'on en connaît physiquement. À la fin des deux laboratoires, la personne étudiante devrait comprendre quand faire une approximation ou quand faire une interpolation et savoir être capable de choisir une méthode et de la mettre en œvre sous Matlab.

L'activité se fait par équipe de deux.

1. But de l'activité
   - Développer le modèle linéaire d'un système non linéaire.
   - Utiliser le logiciel MATLAB pour obtenir des polynômes d'approximation ou d'interpolation. Pouvoir mettre en évidence les problèmes lorsque que le choix entre l'approximation et l'interpolation est erroné.
2. Préparation avant la rencontre
   - Pour le ressort non linéaire, développer l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse (retour sur l'APP1). Développer la version linéaire de l'équation et trouver l'équation d'équilibre.
   - Préparer les équations d'interpolation pour le problème 11.
3. Exercices à résoudre durant le laboratoire
   - Résoudre les problèmes 9 à 11 du laboratoire 2 (voir les énoncés à la section 8, page 25).

## 3 Logiciel et matériel

Le logiciel Matlab sera utilisé. **Dans cette unité, aucune fonction de calcul formel ne sera acceptée dans les codes Matlab**

## 4 Productions à remettre

**Rapport**

Le rapport d'APP est à remettre par équipe de 2 étudiants (aussi appelée groupe d'APP). Remettez votre rapport, selon la procédure de dépôt électronique dans APP2_Rapport_et_codes, avant 8H30am le jour du 2e tutorat de l'APP. Il y aura une pénalité de 20% pour le premier jour de retard et 10% par journée supplémentaire. Ce service de dépôt électronique accepte les fichiers avec extensions ZIP, RAR et PDF (mettre les fichiers MATLAB dans un zip ou un rar). Le nom de votre fichier doit être formé des CIP de tous les signataires du rapport, séparés par un souligné (par exemple, levg1234_souj1204.pdf).

**Consignes**

- Fournir tous les livrables demandés dans le devis.
- Ceci doit comprendre :
  - une description des principales étapes de la solution
  - toutes les équations utilisées et/ou développées
  - toutes les figures et graphiques MATLAB pertinents.
  - Présenter une synthèse des principaux résultats.
  - Suggestion : dans la mesure du possible, utiliser la commande MATLAB disp pour afficher des résultats dans l'espace de travail MATLAB et faire un copié-collé de cet espace de travail dans votre rapport (tout en enlevant les espaces inutiles). Cela évite de recopier des résultats.

**Modalités d'évaluation du rapport d'APP**

L'évaluation du rapport d'APP contribue à l'évaluation des éléments de compétence de l'unité (voir section suivante). On évalue l'exactitude, la précision, la compréhension, la complétude, la valeur de chaque élément de solution.
La qualité de la communication ne sera pas évaluée de façon sommative mais si le rapport est fautif sur le plan de la qualité de l'écrit et de la présentation, il vous sera retourné pour correction avant qu'il ne soit noté.

## 5 Évaluations

La note attribuée aux activités pédagogiques de l'unité est une note individuelle. L'évaluation portera sur les compétences figurant dans la description des activités pédagogiques. Ces compétences, ainsi que la pondération de chacune d'entre elles dans l'évaluation de cette unité, sont :
Le barème utilisé pour les cotes dans cette APP sera le suivant :

**TABLEAU 1 –** Évaluation détaillée de l'APP

| Activité et éléments de compétence | | Rapport | Sommatif |
|---|---|---|---|
| **GEN441–Lois fondamentales de la mécanique** | | | |
| 2 | Résoudre des problèmes de mécanique de particules ou de corps rigides en appliquant les méthodes de quantité de mouvement, du travail et de l'énergie. | 60 | 120 |
| **GEL450–Méthodes numériques**<br>**GIF590–Méthodes numériques** | | | |
| 1 | Résoudre numériquement des problèmes d'ingénierie faisant apparaître des équations algébriques, différentielles, linéaires et non linéaires, des dérivées et des intégrales. | 30 | 95 |
| 2 | Évaluer l'erreur d'une solution numérique à un problème d'ingénierie. | 10 | 15 |
| | **Total :** | **100** | **230** |

**TABLEAU 2 –** Côtes utilisées pour l'APP2 de S5

| $A^+$ | A | $A^-$ | $B^+$ | B | $B^-$ | $C^+$ | C | $C^-$ | $D^+$ | D | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\geq 90$ | $\geq 86$ | $\geq 82$ | $\geq 78$ | $\geq 74$ | $\geq 70$ | $\geq 66$ | $\geq 62$ | $\geq 58$ | $\geq 54$ | $\geq 50$ | $< 50$ |

## 6 Procédural 1

Ce procédural aborde deux thématiques :

- la dynamique et le choc de particules
- la linéarisation : introduction et présentation du problème du ressort (problème 6, laboratoire no1).

Il est important de faire les lectures avant le procédural. Consulter la section « Séquence d'étude suggérée » pour bien organiser vos lectures.

**Problème 1**

La grue illustrée sur la Figure 2 se déplace avec une vitesse constante de 3 km/h au moment où la grue s'arrête soudainement. Calculer l'angle maximum pour lequel la boule de destruction balance.

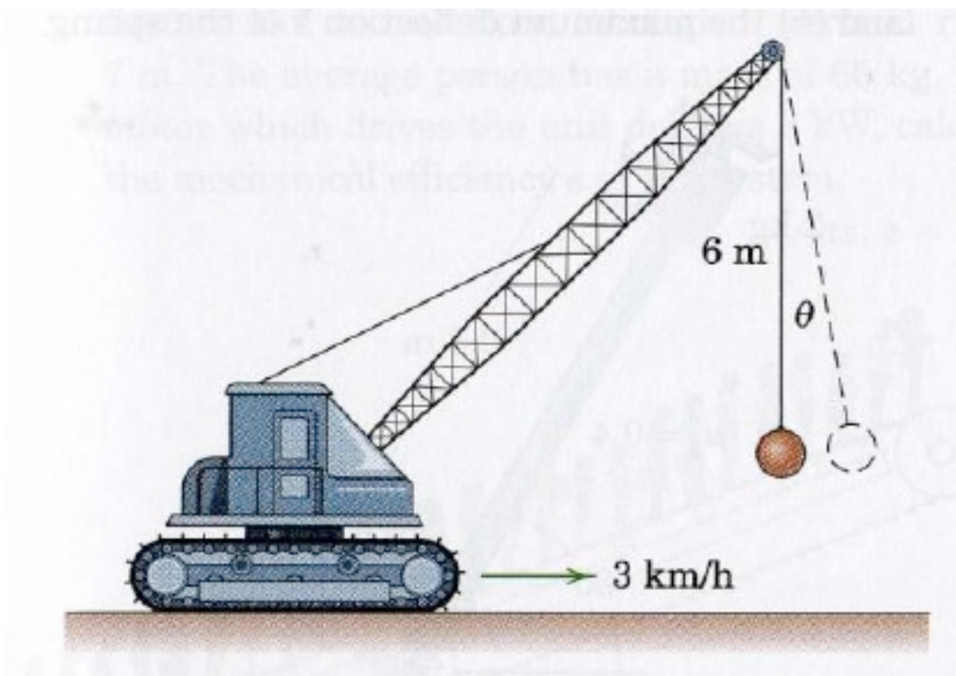


**FIGURE 2 –** Grue qui s'arrête soudainement

Réponse : $\theta = 6.22°$.

**Problème 2**

Sur la Figure 3, un bloc de masse de 2 Kg est libéré du point A à partir du repos et glisse sans frottement sur la tige vers le point B. Sachant que la raideur du ressort est de 160 N/m et sa longueur libre (c'est-à-dire la longueur du ressort quand il n'est ni étiré, ni compressé) est 15 cm. Calculer la vitesse du bloc $V_b$ au point B.

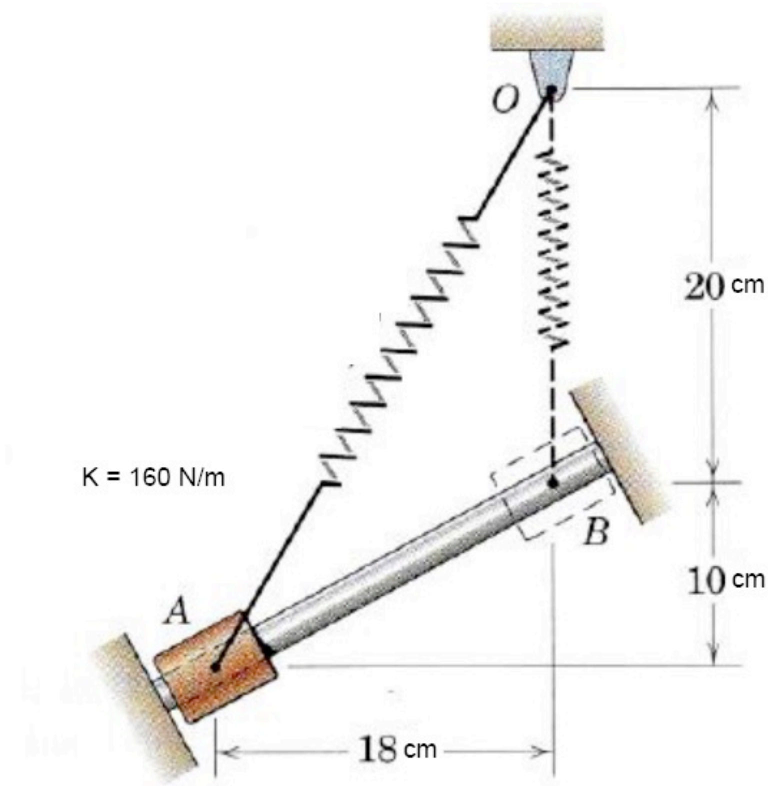


**FIGURE 3 –** Système bloc-masse (Source : problème 3/139, 7e édition du livre de référence)

Réponse : $V_b = 1,02 m/s$

**Problème 3**
Deux rondelles identiques de hockey se déplacent avec des vitesses initiales $V_A$ et $V_B$ se heurtent entre elles comme montré sur la Figure 4. Si le coefficient de restitution est e = 0.75, déterminer la vitesse ainsi que sa direction avec l'axe-x pour chacun des galets juste après l'impact. Prenez l'hypothèse que la vitesse en y du galet A sera nulle après la collision.

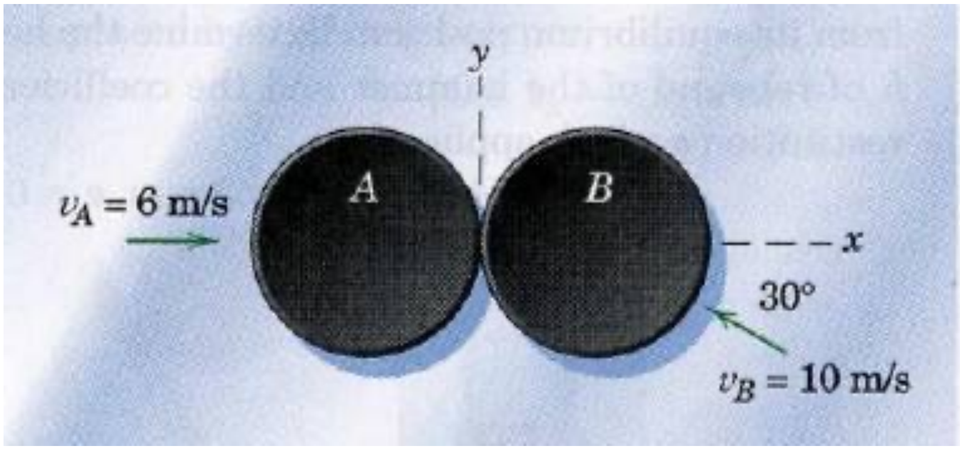


**FIGURE 4 –** Deux rondelles de hockey en collision (Source : problème 3/261, p224 du livre de référence)

Réponse : $V'_{ax}$ = -6.83 m/s et $\theta_A = 180°$. $V'_{bx}$ = 4.17 m/s et $\theta_B = 50.2°$.

**Problème 4**

Tel qu'illustré sur la Figure 5, une boule en acier heurte une plate-forme en acier avec une vitesse $v_0 = 24$ m/s qui fait un angle de 60° avec l'horizontal. Si le coefficient de restitution est e = 0.8, calculer la vitesse $v$ et son angle de direction avec lesquels la boule rebondit de la plate-forme.

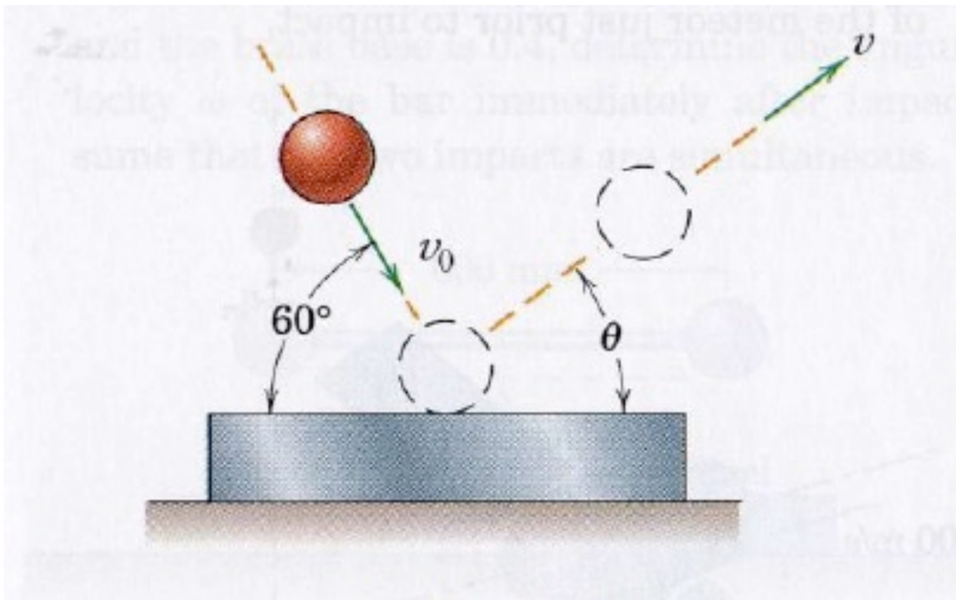


**FIGURE 5 –** Boule d'acier heurtant une plate-forme (Source : toujours à sa quête)

Réponse : $\theta = 54.2°$, $v = 20.5m/s$.

**Problème 5**
Voici une fonction non-linéaire :

$$f(x) = 0.1x^4 + 70x + 2$$

Le Figure 6 présente cette fonction.

1. Quelle est la linéarisation de la fonction $f(x)$ autour d'un point $x_0$ ?
2. En quel point la pente de la fonction linéarisée est nul ?

Réponse :

1. $$f(x_0 + \Delta x) = (0.4x_0^3 + 70)\Delta x + 0.1x_0^4 + 70x_0 + 2$$
2. -5.59

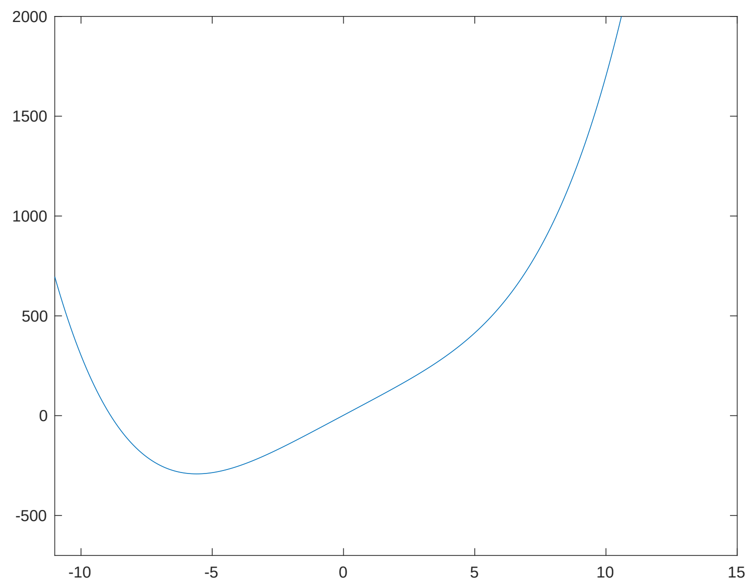


**FIGURE 6 –** Fonction non-linéaire - $f(x)$

## 7 Pratique en laboratoire nº 1

**But de l'activité**

- Résoudre un problème par linéarisation.
- Mettre en pratique les procédures requises pour mettre en œuvre les techniques d'approximation de données dans le contexte du TEC et du TEM (théorème de la conservation de l'énergie pour être plus général).
- Utiliser le logiciel MATLAB pour obtenir les polynômes d'approximation.
- Remarque : développer le code pour qu'il soit générique et réutilisable pour la problématique.

**Problème 6 - Linéarisation** Un ressort non linéaire sans compression est illustré (à gauche dans la figure 7) dans une position verticale. Sous une compression $x$, le ressort exerce une force de la forme :

$$F_R = k_1 x + k_3 x^3. \tag{1}$$

Une façon simple et très approximative de traiter un problème non linéaire est d'ignorer la partie non linéaire. Dans ce cas, on supposerait $k_3 = 0$ et la force du ressort aurait la forme $F_R = k_1 x$. Une autre façon de mieux traiter le problème est de linéariser l'équation non-linéaire à un point d'opération du ressort, $x_{\text{op}}$.

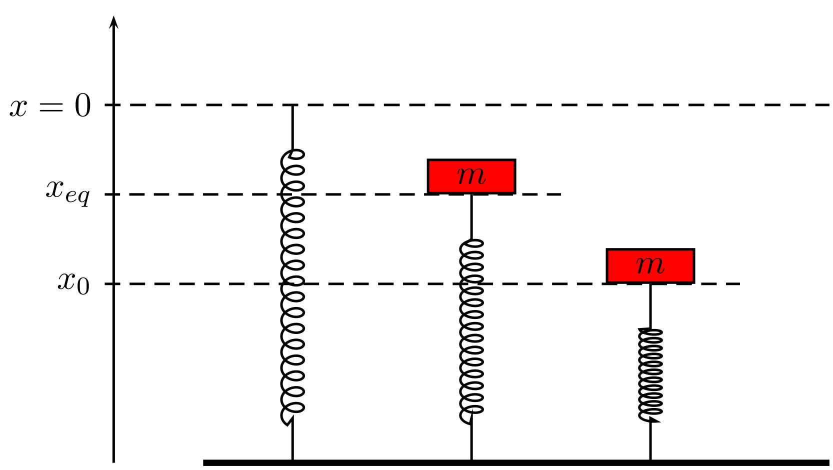


**FIGURE 7 –** Étude d'un ressort de constante $k$ non linéaire : l'axe des $x$ est vers le haut ; $x_{eq} < 0$ est la position d'équilibre ; $x_0 = -0.5$ est la position du ressort comprimé ; les données du système sont : $m = 10$ kg, $g = 9.81$ m/s$^2$, $x_0 = -0.50$ m, $k_1 = 500.0$ N/m et $k_3 = 200.0$ N/m$^3$.

1. Une masse $m$ est fixée au ressort et est soumise à l'action du ressort et de la gravité.
   a) Quelle est l'équation des forces agissant sur le système lorsque ce dernier est à l'équilibre ?
   b) Quel est le point d'équilibre $x_{eq}$ du système non linéaire ? Est-ce que $x_{eq}$ est un bon point $x_{\text{op}}$ pour linéariser ?
   c) Quelle est la fonction linéaire du système ?
   d) Quelle est la constante équivalente du ressort $k_{eq}$ en fonction des constantes $k_1$ et $k_3$ ?
   e) Quel est le point d'équilibre $x_{eq}$ du système avec la constante de rappel $k_{eq}$ ?
   f) Quel est le point d'équilibre $x_{eq}$ du système avec le ressort linéaire où la partie non linéaire est nulle, soit $k_3 = 0$ ?
2. On compresse la masse sur le ressort avec une force extérieure jusqu'à une compression $\Delta x_c$ (figure de droite). On relâche soudainement la force. Avec le théorème de la conservation de l'énergie mécanique, calculer la hauteur maximale $x_{max}$ à laquelle la masse va s'élever. On suppose que la masse reste fixée au ressort. Faire le calcul avec les équations suivantes, dans lesquelles $\Delta x$ représente l'élongation du ressort :
   a) le ressort non linéaire où
   $$E_{p_r} = \frac{1}{2}k_1(\Delta x)^2 + \frac{1}{4}k_3(\Delta x)^4$$
   b) le ressort linéaire de constante équivalente $k_{eq}$ où
   $$E_{p_r} = \frac{1}{2}k_{eq}(\Delta x)^2$$
   c) le ressort linéaire où la partie non linéaire est nulle, soit $k_3 = 0$ et $k_1 = 500$ où
   $$E_{p_r} = \frac{1}{2}k_1(\Delta x)^2$$

   **Énergie potentielle du ressort** Dans les équations $E_{p_r}$, la valeur de $\Delta x$ est la variation de longueur du ressort par rapport à son état au repos.

   **Note :** pour trouver les racines d'un polynôme de la forme $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ sur MATLAB, on utilise la fonction **`roots`** avec, comme argument, les coefficients en ordre décroissant :
   » **`roots( [`**$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$**`])`**.
3. Sur MATLAB, faire le graphique de la vitesse de la masse en fonction de la distance de compression pour les trois cas (i) ressort non linéaire, (ii) ressort de constante équivalente $k_{eq}$ et (iii) ressort linéaire de constante $k_1$. Démontrer que, dans chaque cas, la vitesse maximum est au point d'équilibre.

4. Vérifier que la linéarisation avec la constante équivalente $k_{eq}$ donne un résultat plus près de la réalité (non linéaire) que la suppression de la partie non linéaire pour ne conserver que la constante $k_1$.
5. Que remarquez-vous concernant les différents modèles ?

**Réponses**

1. a) $mg = k_1 x + k_3 x^3$
   b) $x_{eq} = -0.19331$ m, oui
   c) $f(x_0 + \Delta x) = [k_1 + 3k_3 x_0^2]\Delta x - mg + k_1 x_0 + k_3 x_0^3$
   d) $k_{eq} = k_1 + 3k_3 \Delta x_e^2 = 522.42$ N/m$^3$
   e) $x_{eq} = -0.18778$ m
   f) $x_{eq} = -0.1962$ m
2. a) $x_{max} = 0.12744m$
   b) $x_{max} = 0.12444m$
   c) $x_{max} = 0.10760m$

   La solution avec le ressort équivalent (linéarisé) est plus près de la réponse exacte avec le ressort non linéaire qu'avec la solution où la non linéarité est négligée.
3. Voici la Figure que vous devriez obtenir.

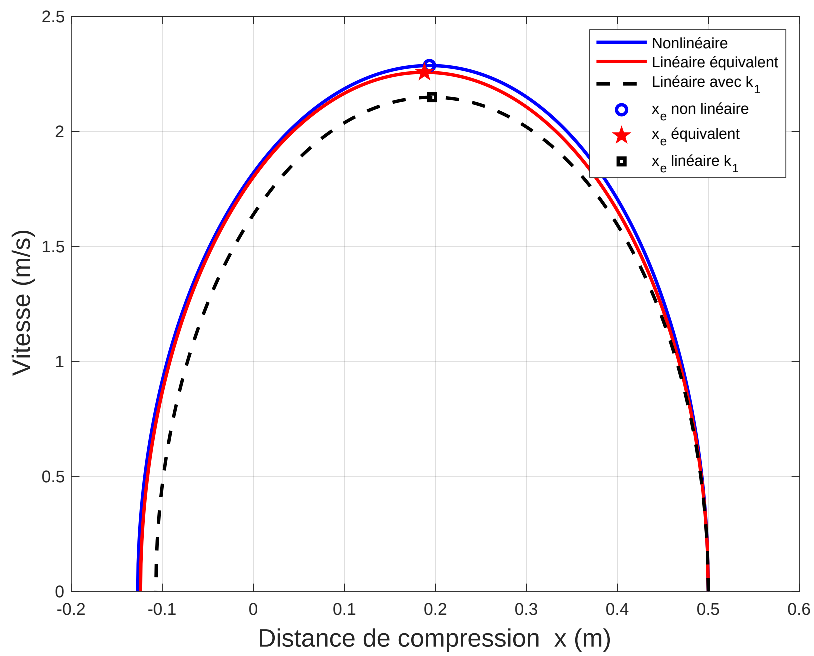


**FIGURE 8 –** Comparaison des vitesses obtenues en fonction du modèle du ressort

5. La linéarisation avec la constante équivalente $k_{eq}$ donne un résultat plus près de la réalité (non linéaire) que la suppression de la partie non linéaire pour ne conserver que la constante $k_1$. En effet, la rigidité équivalente d'un ressort non linéaire donne une bonne approximation du comportement du ressort non linaire tout en bénéficiant d'un modèle linéaire plus facile à analyser.

**Problème 7** Exercice E3 extrait des notes de cours – équations normales
La figure 9 présente certains points de la trajectoire d'une fusée d'un feu d'artifice à la fin de sa phase de propulsion. Le tableau 3 présente les mesures de ces points, c'est-à-dire, son altitude $h$ en fonction de son déplacement horizontal $x$.

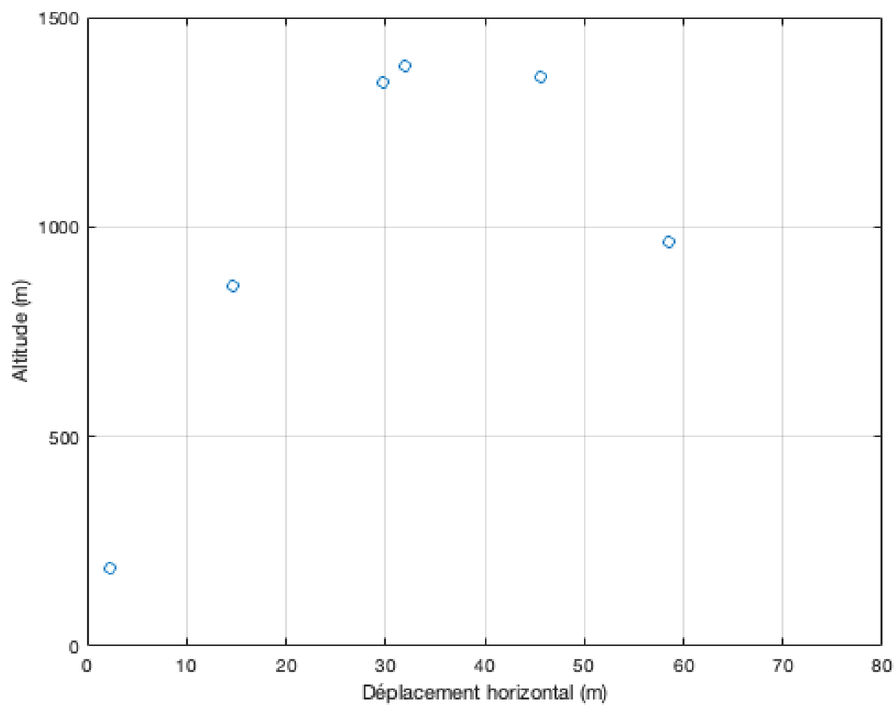


**FIGURE 9 –** Trajectoire parabolique obtenue à partir des données du tableau 3

**TABLEAU 3 –** Points mesurés de la trajectoire de la fusée

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 2.3 | 14.7 | 29.7 | 31.9 | 45.7 | 58.6 |
| $h_n$ | 184 | 860 | 1345 | 1385 | 1360 | 965 |

1. Déterminer une fonction candidate qui approximerait bien la trajectoire.
2. Écrire les équations normales de la fonction déterminée au point a) sous forme de produit matriciel.
3. Déterminer les coefficients d'approximation de la fonction candidate.
4. Valider la qualité de l'approximation en calculant la valeur du RMS.
5. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la fusée sans utiliser le graphique ?

**Réponses**

1. $h(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
2. $\begin{bmatrix} N & \sum x_n & \sum x_n^2 \\ \sum x_n & \sum x_n^2 & \sum x_n^3 \\ \sum x_n^2 & \sum x_n^3 & \sum x_n^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_n \\ \sum y_n x_n \\ \sum y_n x_n^2 \end{bmatrix}$
3. $a_2 = -0.990514$, $a_1 = 74.6124$, $a_0 = 3.90346$
4. 14.7263
5. $(x_{max}, h_{max}) = (37.6635, 1408.9836)$

**Problème 8** Fait référence aux exemples D4 et D5 – équations normales et projection orthogonale.

La position $y(t)$ en mètres de la masse de la grue est une superposition d'une translation linéaire et d'une oscillation dont la période $P$ est de 8s. La fonction suivante est une bonne fonction candidate pour approximer la position :

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t + Acos(\frac{2\pi t}{P}) + Bsin(\frac{2\pi t}{P})$$

Une caméra a permis de capter quelques positions de la masse en fonction du temps et elles sont reportées dans le tableau 4.

**TABLEAU 4 –** Position $y_n$ de la masse de la grue aux temps $t_n$

| $t_n$ | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_n$ | 2.11 | 1.61 | 1.25 | 0.820 | 0.737 | 0.810 | 0.880 | 0.443 | 0.070 | -0.493 |

1. En utilisant MATLAB et les équations normales généralisées, trouver l'équation approximative qui représente le mieux la trajectoire.
   a) Calculer l'erreur quadratique.
   b) Calculer l'erreur RMS.
   c) Calculer le coefficient $R^2$.
2. Avec la méthode de la projection orthogonale, trouver l'équation approximative qui représente le mieux la trajectoire.
   a) Calculer l'erreur quadratique.
   b) Calculer l'erreur RMS.
   c) Calculer le coefficient $R^2$.
3. Comparer les résultats obtenus avec la méthode des équations normales et la méthode de la projection orthogonale.

**Réponses**

1. $y(t) = 1.9998 - 0.1538t + 0.1074\cos(2\pi/P) + 0.3434\sin(2\pi/P)$
   a) E = 0.035161
   b) RMSE = 0.059297
   c) $R^2 = 0.99284$
2. $y(t) = 1.9998 - 0.1538t + 0.1074\cos(2\pi/P) + 0.3434\sin(2\pi/P)$
   a) E = 0.035161
   b) RMSE = 0.059297
   c) $R^2 = 0.99284$
3. La fonction d'approximation obtenue avec la méthode des équations normales est la même que celle obtenue avec la méthode de la projection orthogonale.

## 8 Pratique en laboratoire n° 2

L'activité se fait par équipe de deux.

1. But de l'activité
   - Utiliser le logiciel MATLAB pour obtenir des polynômes d'approximation ou d'interpolation.
   - Analyser le résultat obtenu (approximation versus interpolation).
2. Préparation avant la rencontre
   - Bien comprendre la méthode de projection orthogonale
   - Préparer les équations d'interpolation pour l'exercice E11.
3. Exercices à résoudre
   - Résoudre les Problèmes du laboratoire 2 (voir les énoncés à la section 8, page 25).

**Problème 9 - Approximation vs interpolation** Exercice E6 des notes de cours – projection orthogonale
On utilise la méthode de la projection orthogonale pour faire l'approximation de $N = 5$ paires de points $(x, y)$ donnés au tableau 5.

**TABLEAU 5 –** Points $(x_n, y_n)$ pour l'exercice E1.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_n$ | 1.0 | 3.0 | 4.0 | 6.0 | 7.0 |
| $y_n$ | -1.6 | 4.8 | 6.1 | 14.6 | 15.1 |

Cas 1 : On suppose que ce sont des données bruitées et qu'elles sont représentées par une relation linéaire. L'approximation aura donc $M = 2$ paramètres. Dans ce cas, $N - M = 3$.

Cas 2 : On suppose que ce sont des données exactes qu'il faut interpoler. L'approximation aura donc $M = N = 5$ paramètres. Dans ce cas, $N - M = 0$.

1. Faire sur MATLAB les deux cas précédents.
2. Calculer dans les deux cas l'erreur RMSE et la corrélation $R^2$ et comparer.

### Réponses

Cas 1 : Fonction : $g(x) = 2.9254x - 4.4868$, $E = 4.653$, RMSE = 0.9647, $R^2 = 0.9767$.

Cas 2 : $g(x) = -0.14694x^4 + 2.3806x^3 - 13.065x^2 + 30.392x - 21.16$, $E = 1.07e - 13$, RMSE = $1.46e - 07$, $R = 1.0000$.

**Problème 10** Exercice E7 des notes de cours – projection orthogonale, problème d'ondulation polynomiale.

Pour approximer la trajectoire au problème 8, il fallait connaître la période d'oscillation $P = 8\ s$. Lorsque cette information n'est pas disponible, nous ne pouvons pas utiliser des fonctions trigonométiques. Il est habituel d'utiliser une fonction polynomiale comme fonction candidate, c'est-à-dire une somme de fonctions puissance d'ordre croissant : $g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}$ où $n$ est le nombre maximale de coefficient de la fonction candidate .

1. Avec la méthode de la projection orthogonale, calculer les coefficients de la fonction candidate lorsque :
   a) $N = M$
   b) $N = M + 2$
   c) $N = M + 3$
   d) $N = M + 4$
   e) $N = M + 5$
2. Afficher sur un graphique Matlab les courbes obtenues avec les fonctions trouvées au problème 3.a).
3. Quel phénomène remarquez-vous lorsque $N = M$ ? Que faire pour l'éviter ?
4. Que remarquez-vous à l'extérieur du domaine des données originales ?

**Réponses**

1. a) $a_0 = 4.91$, $a_1 = -4.16$, $a_2 = 3.35$, $a_3 = -1.76$, $a_4 = 0.56$, $a_5 = -0.11$, $a_6 = 0.013$, $a_7 = -0.00096$, $a_8 = 3.80e-05$, $a_9 = -6.26e-07$
   b) $a_0 = 9.64$, $a_1 = -9.30$, $a_2 = 4.61$, $a_3 = -1.24$, $a_4 = 0.19$, $a_5 = -0.015$, $a_6 = 0.00067$, $a_7 = -1.15e-05$
   c) $a_0 = 3.68$, $a_1 = -1.22$, $a_2 = 0.35$, $a_3 = -0.089$, $a_4 = 0.013$, $a_5 = -0.00094$, $a_6 = 2.44e-05$
   d) $a_0 = 1.63$, $a_1 = 1.16$, $a_2 = -0.68$, $a_3 = 0.12$, $a_4 = -0.0092$, $a_5 = 0.00024$
   e) $a_0 = 4.65$, $a_1 = -1.75$, $a_2 = 0.30$, $a_3 = -0.022$, $a_4 = 0.00055$
2. La figure 10 présente les fonctions d'approximation obtenues.
3. Ce phénomène est appelé le problème d'ondulation polynomiale (*Polynomial Wiggle Problem*). Il est souvent présent lorsque le degré du polynôme est trop élevé par rapport au nombre de données utilisées pour l'approximation, i.e., $M \geq N - 3$. Il faut donc réduire le nombre de points utilisés pour minimiser le problème d'ondulation polynomiale.
4. Nous remarquons que l'approximation à l'extérieur des plages de données utilisées pour calculer les coefficients du polynôme varie beaucoup. Il faut donc être vigilant avec lorsque la fonction d'approximation est utilisée à l'extérieur de la plage des données originales.

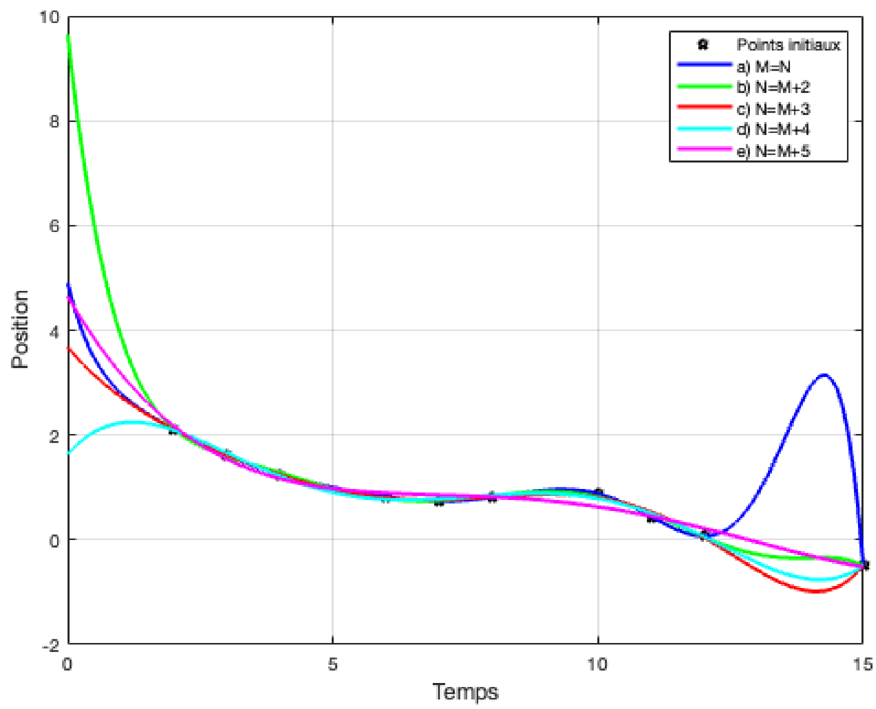


**FIGURE 10 –** Trajectoires de la masse d'une grue obtenues avec différents nombre de coefficients.

**Problème 11 - Interpolation de données** Exercice E11 (a), (b) et (c)
Plusieurs polynômes d'interpolation peuvent être utilisés. Ceux qui représentent mieux le problème physique de base (si ce dernier est connu) permettent une meilleure représentation des données.
On veut trouver un polynôme qui interpole les 6 données présentes dans le tableau 6.

**TABLEAU 6 –** Donnée pour le problème 11

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 0.0 | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 5.0 |
| $y$ | 0.0 | 2.608 | 1.350 | -1.909 | -2.338 | 0.6988 |

1. Calculer une fonction d'interpolation de ces données avec les fonctions de base suivantes :
   (a) $g(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + a_6x^5 = \sum_{n=1}^{6} a_n x^{n-1}$
   (b) $g(x) = a_1\cos(\omega x) + a_2\sin(\omega x) + a_3\cos(2\omega x) + a_4\sin(2\omega x) + a_5\cos(3\omega x) + a_6\sin(3\omega x)$ avec $\omega = 2\pi/4.8$.
   (c) $g(x) = a_1e^{x/c} + a_2e^{-x/c} + a_3e^{2x/c} + a_4e^{-2x/c} + a_5e^{3x/c} + a_6e^{-3x/c}$ avec $c = 10$

**Réponses**

Les coefficients obtenus sont données au tableau 7.

**TABLEAU 7 –** Solutions pour l'exercice E11 (a), (b) et (c)

| | a1 | a2 | a3 | a4 | a5 | a6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 0.000 | 2.989 | 1.478 | -2.520 | 0.7204 | -0.05968 |
| (b) | 0.000 | 2.700 | 0.002 | 0.001 | -0.002 | -0.001 |
| (c) | -12609 | 20436 | 7736.8 | -20322 | -1460.9 | 6220.7 |