



UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

FACULTÉ DE GÉNIE

Rapport S5 APP2

<i>Auteur</i>	<i>Email</i>	<i>CIP</i>	<i>Promo</i>
Maxime Grenier-Castillo	grem3208@usherbrooke.ca	GREM3208	66
Pascal-Emmanuel Lachance	lACP3102@usherbrooke.ca	LACP3102	66

Présenté à :
Maude Blondin & François Boone

1^{er} février 2023

Table des matières

1	Résumé de la problématique	2
1.1	Spécifications générales	2
2.1	Conception de la trajectoire de la glissade et de la valve d'eau	3
2.1.1	Suppositions	3
2.1.2	Calcul de la trajectoire de la glissade	3
2.1.3	Approximation du coefficient de friction	5
2.1.4	Code Matlab de l'approximation	7
2.1.5	Calcul du travail de la friction	8
2.1.6	Calcul de la vitesse	9
2.1.7	Code Matlab	10
2	Présentation des démarches	3
2.2	Conception de la minuterie d'ouverture de la trappe	13
2.2.1	Suppositions	13
2.2.2	Calculs initiaux	13
2.2.3	Calculs dans le cas où le participant attrape la balle	13
2.2.4	Calculs dans le cas où le participant rebondit sur la balle	14
2.2.5	Calcul du délai d'ouverture	14
2.2.6	Code Matlab	15
2.3	Conception du coussin-trampoline	16
2.3.1	Suppositions	16
2.3.2	Calculs	17
2.3.3	Code Matlab	18
2.4	Conception du bassin d'eau	19
2.4.1	Suppositions	19
2.4.2	Calculs de la chute	20
2.4.3	Calculs de la profondeur sécuritaire	20
3	Synthèse des résultats	23
3.1	Résultats	23
3.1.1	Résultat de la glissade	23
3.1.2	Résultat de la minuterie	23
3.1.3	Résultat du coussin-trampoline	23
3.1.4	Résultat du bassin	24
3.2	Conclusion	24

Table des figures

1	Approximation du coefficient de friction selon l'ouverture de la valve	6
2	DCL du participant sur la glissade.	8
3	Vitesse du participant sur la glissade	10
4	Participant rencontrant la balle au point E au dessus de la trappe	13
5	Ammortissage de la chute du participant et du ballon par le trampoline	16
6	DCL du participant sur le trampoline. La trampoline est à la position $h = 0$	18

7	Diagramme cinématique du participant. L'axe z pointe vers le bas	19
8	DCL du participant dans le bassin. L'axe z pointe vers le bas	20

Liste des tableaux

1	Coordonnée de la trajectoire.	3
2	Coefficient de friction dynamique en fonction de l'ouverture de la valve. . . .	3
3	Résultat de la glissade	23
4	Résultat de la minuterie	23
5	Résultat du coussin-trampoline	23
6	Résultat du bassin	24

1 Résumé de la problématique

1.1 Spécifications générales

Dans cet APP, notre mandat consiste à concevoir une section d'un parcours *WIPE – OUT*. Pour nous assurer de la sécurité des participant, nous devons suivre les normes de conception du *WOQ*. Les 4 sections à développer sont : la glissade, la minuterie de la trappe, le coussins trampoline et le bassin d'eau. Nous devons appuyer nos calculs avec des simulations, graphique et démarche sur Matlab.

2 Présentation des démarches

2.1 Conception de la trajectoire de la glissade et de la valve d'eau

2.1.1 Suppositions

1. Trainée aérodynamique négligée par rapport à la friction sur la glissade.
2. Coefficient de friction dynamique entre participant et glissade μ_f qui dépend du débit d'eau sur la glissade.
3. Force de friction $F_f = \mu_f \times F_n$ ce qui donne : $F_f = \mu_f mg \cos(\theta)$ où θ est l'angle entre la normale à la surface de la glissade et la direction de la gravité.

Points	A	B	C	D	E
Coordonnées horizontales (m)	0	8	15	20	25
Coordonnées verticale (m)	30	19	20	16	$10 \leq y_f \leq 15$

TABLEAU 1: Coordonnée de la trajectoire.

Tests	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ouverture (%)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Coefficient	0.87	0.78	0.71	0.61	0.62	0.51	0.51	0.49	0.46	0.48	0.46

TABLEAU 2: Coefficient de friction dynamique en fonction de l'ouverture de la valve.

2.1.2 Calcul de la trajectoire de la glissade

Grâce a notre liste de points du tableau 1 nous pouvons interpoler une fonction polynomiale d'ordre 4 qui intersecte tout les points d'intérêt.

$$f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 \quad (1)$$

Nous pouvons calculer sa dérivée :

$$\frac{df(x)}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 + 4a_5x^3 \quad (2)$$

Le calcul des coefficients de la fonction polynomiale peut se faire avec la méthode d'inversion de matrice. Les fonctions $\phi_n(x) = x^{n-1}$ nous permettent de générer la matrice P suivante :

$$P = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \phi_3(x_1) & \phi_4(x_1) & \phi_5(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \phi_3(x_2) & \phi_4(x_2) & \phi_5(x_2) \\ \phi_1(x_3) & \phi_2(x_3) & \phi_3(x_3) & \phi_4(x_3) & \phi_5(x_3) \\ \phi_1(x_4) & \phi_2(x_4) & \phi_3(x_4) & \phi_4(x_4) & \phi_5(x_4) \\ \phi_1(x_5) & \phi_2(x_5) & \phi_3(x_5) & \phi_4(x_5) & \phi_5(x_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 512 & 4096 \\ 1 & 15 & 225 & 3375 & 50625 \\ 1 & 20 & 400 & 8000 & 16000 \\ 1 & 25 & 625 & 15625 & 390625 \end{bmatrix}$$

La matrice des coefficients $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]'$ peut être calculée en multipliant l'inverse de la matrice P avec la matrice $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]'$ où notre hauteur finale a été choisie à 12.55m :

$$\begin{aligned} P &= AY \\ A &= P^{-1}Y \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A &= [30, -4.625, 0.6510, -0.034421, 5.9146e - 04]' \\ f(x) &= 30 - 4.625x + 0.6510x^2 - 0.034421x^3 + 0.00059146x^4 \\ \frac{df(x)}{dx} &= 4.625 + 1.302x + 0.103263x^2 + 0.00236584x^3 \end{aligned} \quad (5)$$

Nous allons avoir besoin de la longueur de la glissade. Pour la calculer, nous pouvons utiliser l'intégrale suivante :

$$\mathcal{L} = \int_0^{25} \sqrt{dx^2 + dy^2} \, dx \quad (6)$$

En utilisant la dérivée de notre polynôme, nous pouvons calculer l'angle θ de notre fonction a chaque point.

$$\angle f(x) = \arctan \left(\left(\frac{df(x)}{dx} \right) \right) \quad (7)$$

2.1.3 Approximation du coefficient de friction

La fonction représentant les coefficients de friction selon l'ouverture de la valve peut être approximée par une fonction polynomiale du 2e ordre en utilisant la méthode de la projection orthogonale. Les calculs sont très similaires à ceux utilisés pour l'interpolation de la trajectoire de la glissade, et commencent par le calcul de la matrice P avec les fonctions $\phi_n(x)$:

$$P = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \phi_3(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \phi_3(x_2) \\ \phi_1(x_3) & \phi_2(x_3) & \phi_3(x_3) \\ \phi_1(x_4) & \phi_2(x_4) & \phi_3(x_4) \\ \phi_1(x_5) & \phi_2(x_5) & \phi_3(x_5) \\ \phi_1(x_6) & \phi_2(x_6) & \phi_3(x_6) \\ \phi_1(x_7) & \phi_2(x_7) & \phi_3(x_7) \\ \phi_1(x_8) & \phi_2(x_8) & \phi_3(x_8) \\ \phi_1(x_9) & \phi_2(x_9) & \phi_3(x_9) \\ \phi_1(x_{10}) & \phi_2(x_{10}) & \phi_3(x_{10}) \\ \phi_1(x_{11}) & \phi_2(x_{11}) & \phi_3(x_{11}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \\ 1 & x_6 & x_6^2 \\ 1 & x_7 & x_7^2 \\ 1 & x_8 & x_8^2 \\ 1 & x_9 & x_9^2 \\ 1 & x_{10} & x_{10}^2 \\ 1 & x_{11} & x_{11}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 30 & 900 \\ 1 & 40 & 1600 \\ 1 & 50 & 2500 \\ 1 & 60 & 3600 \\ 1 & 70 & 4900 \\ 1 & 80 & 6400 \\ 1 & 90 & 8100 \\ 1 & 100 & 10000 \end{bmatrix} \quad (8)$$

La matrice de coefficients $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]'$ est calculée de façon légèrement différente que pour l'interpolation, car il faut multiplier l'inverse de la transposée de P fois P par la transposée de P, avant de la multiplier par la matrice $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]'$:

$$\begin{aligned} P &= AY \\ A &= (P^T P)^{-1} P^T Y \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A &= [0.86678, -0.00916, 0.00005]' \\ g(x) &= 0.86678 - 0.00916x + 0.00005x^2 \end{aligned} \quad (10)$$

L'erreur RMS et le coefficient de corrélation R peuvent être calculés pour notre fonction d'approximation $g(x)$:

$$RMS_{g(x)} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (g(x_n) - y_n)^2} \quad (11)$$

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (g(x_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n)^2}{\sum_{n=1}^N (y_n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n)^2}} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} RMS &= 0.01804 \\ R &= 0.9910 \end{aligned} \quad (13)$$

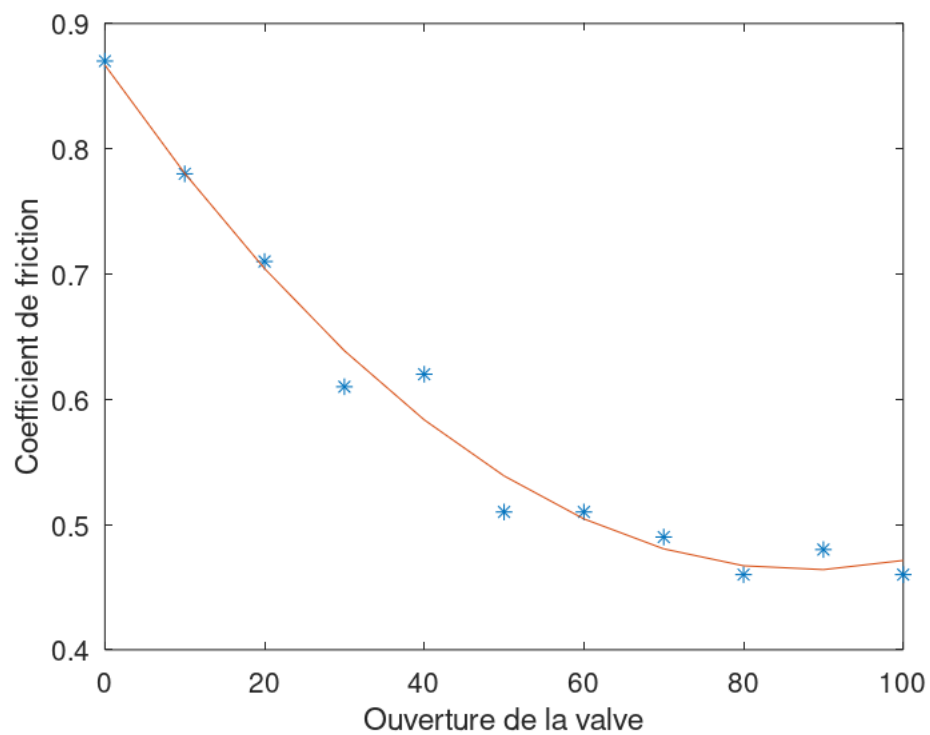
Approximation du coefficient de friction selon l'ouverture de la valve

FIGURE 1 – Approximation du coefficient de friction selon l'ouverture de la valve

2.1.4 Code Matlab de l'approximation

```
1      o = [0 : 10 : 100];
2      c = [0.87, 0.78, 0.71, 0.61, 0.62, 0.51, 0.51, 0.49, 0.46, 0.48, 0.46];
3
4      % phi_n(x) = x^(n-1)
5      phi_1 = [o.^0].';
6      phi_2 = [o.^1].';
7      phi_3 = [o.^2].';
8
9      % Calcul des coefficients
10     P = [phi_1, phi_2, phi_3]
11     Y = c';
12     A = (inv(P.' * P) * P.' * Y).';
13
14     % Fonction g(x) approximant la courbe
15     f = A(1) + A(2) .* o + A(3) .* o.^ 2;
16
17     figure
18     plot(o, c, "*")
19     hold on
20     plot(o, f)
21     xlabel("Ouverture de la valve")
22     ylabel("Coefficient de friction")
23     title("Approximation du coefficient de friction")
24
25     % Calcul de l'erreur
26     E = sum((f - c).^2);
27     RMS = sqrt(1/length(c) .* E)
28
29     y = 1/length(c) * sum(c);
30     R = sqrt(sum((f - y).^2) ./ sum((c - y).^2))
```

2.1.5 Calcul du travail de la friction

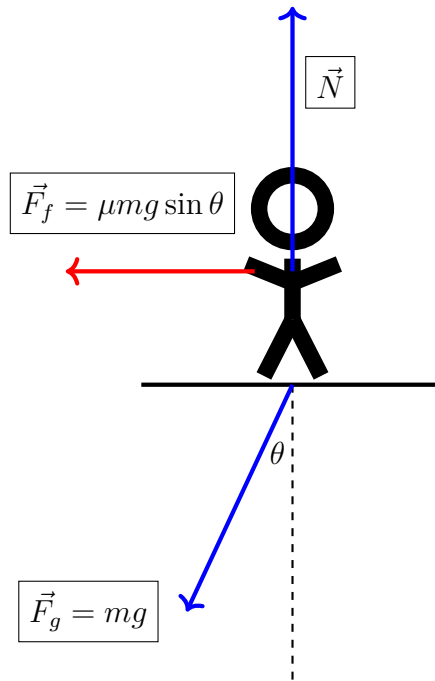


FIGURE 2 – DCL du participant sur la glissade.

Nous allons définir notre référentielle du DCL (voir figure 2 avec la force normale qui pointe vers le haut. Ainsi, la force de frottement peut être facilement calculée :

$$\vec{F}_f = -m_p g \mu_f \cos \theta \quad (14)$$

Par la suite nous pouvons calculer le travail fait par la force de frottement sur toute la longueur de la glissade :

$$W_f = \int_0^L F_f(L) dl \quad (15)$$

2.1.6 Calcul de la vitesse

Nous allons trouver l'énergie cinétique à n'importe quel point x en utilisant la loi de la conservation d'énergie :

$$\begin{aligned} E_{total} &= E_k(x) - E_{pg}(x) - E_f(x) \\ E_k(x) &= 30m_pg - m_pg \cdot f(x) - W_f(x) \end{aligned} \quad (16)$$

Pour finir, nous pouvons calculer notre vitesse à n'importe quel point :

$$\begin{aligned} E_k(x) &= \frac{m_pv^2}{2} \\ v &= \sqrt{\frac{2 \cdot E_k(x)}{m_p}} \end{aligned} \quad (17)$$

Nous devons nous assurer que la position de la pente finale soit approximativement horizontale et que nous respectons les requis de vitesses sur toute la glissade. La position finale de 12.55m a été choisie itérativement en prenant en compte l'inclinaison finale ainsi qu'en s'assurant que la vitesse de sortie respectait les critères du mandat. Le coefficient de friction μ_f choisi de 0.625 (32.5% d'ouverture de la valve) a également été choisi de pair avec la hauteur finale, pour rester dans les vitesses demandées, tout en restant le plus haut possible afin de fournir le plus d'émotions chez le participant.

La vitesse finale est calculée au point E pour nous donner une vitesse v_f contenue par $[21.204 \leq v_f \leq 21.983]$ (21.593km/h sans facteur d'erreur).

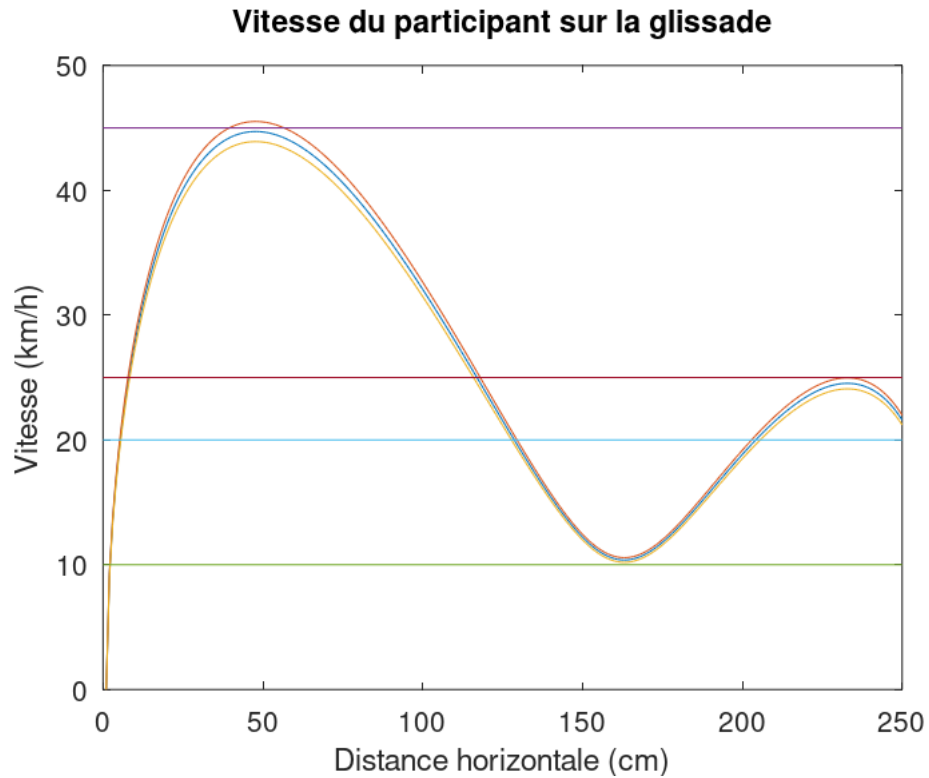


FIGURE 3 – Vitesse du participant sur la glissade

2.1.7 Code Matlab

```

1      clc
2      close all
3
4      h = [0, 8, 15, 20, 25];
5      y = [30, 19, 20, 16, 12.55];
6
7      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8      % Interpolation
9      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
10
11     phi_1 = (h.^0).';
12     phi_2 = (h.^1).';
13     phi_3 = (h.^2).';
14     phi_4 = (h.^3).';
15     phi_5 = (h.^4).';
16
17     Y = y';
18     P = [phi_1, phi_2, phi_3, phi_4, phi_5];
19
20     A = (inv(P) * Y).';

```

```

21
22     dx = 0.1;
23     x = [0:dx:25 - dx];
24
25     f = A(1) + A(2).* x + A(3) .* x.^2 + A(4) .* x.^3 + A(5) .* x.^4;
26
27     df = A(2) + 2.*A(3).*x + 3.*A(4).*x.^2 + 4.*A(5).*x.^3;
28
29     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
30     % Longueur de la courbe et Angle sur chaque dx
31     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
32     f_len=0;
33     for i=1:250
34         f_seg(i)=sqrt((dx^2)+(df(i)*dx)^2);
35         f_len=f_len+f_seg(i);
36         f_ang(i)=atan(df(i));
37     end
38
39     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
40     % Calcul Force friction
41     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
42     mg=80*9.81;
43     u=0.625;
44     for i=1:250
45         N(i)=mg*cos(f_ang(i));
46         Ff(i)=N(i)*u;
47         %F(i)=-mg*sin(f_ang(i))-Ff(i);
48     end
49
50     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
51     % Calcul Travail de frottement sur chaque points
52     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
53
54     Wf(1)=Ff(1)*f_seg(1);
55     for i=2:250
56         Wf(i)=Wf(i-1)+(Ff(i)*f_seg(i))
57     end
58
59     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
60     % Calcul Energie cinetique + vitesse
61     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
62     m=80;
63     for i=1:250
64         Ek(i)=mg*f(1)-mg*f(i)-Wf(i);
65         v(i)=3.6*sqrt((2*Ek(i)/m));

```

```
66     end
67
68     rms = 0.01804;
69     vmax = v.* (1+rms);
70     vmin = v.* (1-rms);
71
72     figure
73     plot(1:250,v)
74     hold on
75     plot(1:250,vmax)
76     plot(1:250,vmin)
77     plot([0, 250], [45, 45])
78     plot([0, 250], [10, 10])
79     plot([0, 250], [20, 20])
80     plot([0, 250], [25, 25])
81     xlabel("Distance horizontale (cm)")
82     ylabel("Vitesse (km/h)")
83     title("Vitesse du participant sur la glissade")
84
85     vf = v(length(v))
86     vfmax = vmax(length(v))
87     vfmin = vmin(length(v))
```

2.2 Conception de la minuterie d'ouverture de la trappe

2.2.1 Suppositions

1. L'impact est direct et central ; il a lieu au point E , avant de parcourir la longueur L_T de la trappe.
2. La friction entre le participant et la surface de la trappe est négligeable (pour simplifier).
3. Il y a conservation de la quantité du mouvement (aucune impulsion externe).

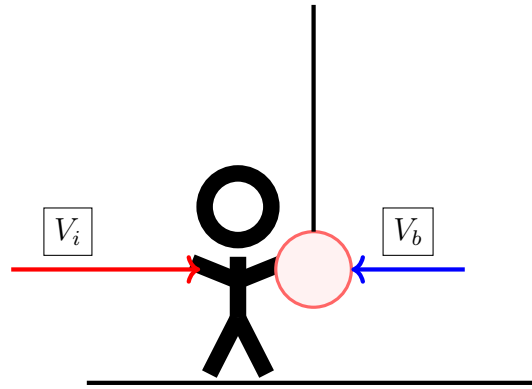


FIGURE 4 – Participant rencontrant la balle au point E au dessus de la trappe

2.2.2 Calculs initiaux

Le participant ayant une masse $m_p = 80\text{kg}$ sort de la glissade avec une vitesse $v_i = 21.593\text{km/h}$, et frappe la balle dont la masse $m_b = 8\text{kg}$ se déplaçant dans le sens inverse à une vitesse $v_b = -1\text{m/s}$.

Les équations de conservation de la quantité de mouvement et du coefficient de restitution peuvent être appliquées à cette situation, dans laquelle toutes les vitesses sont normales, afin de trouver la vitesse post-impact v_f du participant.

$$\begin{aligned}
 m_p v_i + m_b v_b &= m_p v_f + m_b v'_b \\
 e &= \frac{v'_b - v_f}{v_i - v_b}
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

2.2.3 Calculs dans le cas où le participant attrape la balle

Dans le cas où le participant attrape la balle, le coefficient de restitution $e = 0$, ce qui veut dire qu'après la collision, le participant et la balle se déplacent à la même vitesse v' dans la même direction.

$$e = \frac{v'_b - v_f}{v_p - v_b} = 0$$

$$v_f = v'_b = v' \quad (19)$$

On peut donc substituer v' dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'isoler pour obtenir l'équation de la vitesse après avoir attrapé le ballon.

$$m_p v_i + m_b v_b = v'(m_p + m_b)$$

$$v' = \frac{m_p v_i + m_b v_b}{m_p + m_b} = 5.3619 \text{ m/s} \quad (20)$$

Le temps nécessaire pour traverser la trappe est :

$$t_{G1} = \frac{L_T}{v'} \quad (21)$$

2.2.4 Calculs dans le cas où le participant rebondit sur la balle

Si le participant attrape la balle, l'équation du coefficient de restitution nous permet d'isoler v'_b pour le substituer dans l'équation de conservation du mouvement et en retirer v_f .

$$0.8 = \frac{v'_b - v_f}{v_i - v_b}$$

$$v'_b - v_f = 0.8(v_i - v_b) \quad (22)$$

$$v'_b = 0.8(v_i - v_b) + v_f$$

$$m_p v_i + m_b v_b = m_p v_f + 0.8 m_b (v_i - v_b) + m_b v_f$$

$$v_f = \frac{m_p v_i + m_b v_b - 0.8 m_b (v_i - v_b)}{m_p + m_b} = 4.8529 \text{ m/s} \quad (23)$$

Le temps de traversée de la trappe est calculée comme dans le cas où le participant attrape la balle :

$$t_{G2} = \frac{L_T}{v_f} \quad (24)$$

2.2.5 Calcul du délai d'ouverture

Pour maximiser la marge, nous plaçons le délai d'ouverture directement entre les temps $t_{G1} = 0.5595 \text{ s}$ et $t_{G2} = 0.6182 \text{ s}$, ce qui nous donne une marge de presque 0.3s au lieu du 0.2s demandé.

$$\Delta t_m = t_{G2} + \frac{t_{G1} - t_{G2}}{2} = 0.5888 \quad (25)$$

2.2.6 Code Matlab

```
1      Lt = 3;                % m
2      mb = 8;                % kg
3      mp = 80;               % kg
4      vf = 21.593 / 3.6;     % m/s
5      vb = -1;               % m/s
6      marge = 0.02;          % s
7      e = 0.8;
8
9      %% Cas G1 : e = 0
10     % Va' = Vb' = V_p
11     V_p = (mp * vf + mb * vb) / (mp + mb)
12     T_g1 = Lt / V_p
13
14     %% Cas G2 : e = 0.8
15     Va_p = (mp * vf + mb * vb - 0.8 * mb * (vf - vb)) / (mp + mb)
16     T_g2 = Lt / Va_p
17
18     %% Calcul de la valeur de la minuterie
19     tm = T_g1 + (T_g2 - T_g1) / 2    % 0.5888
20     marge = T_g2 - tm                % 0.29339
```

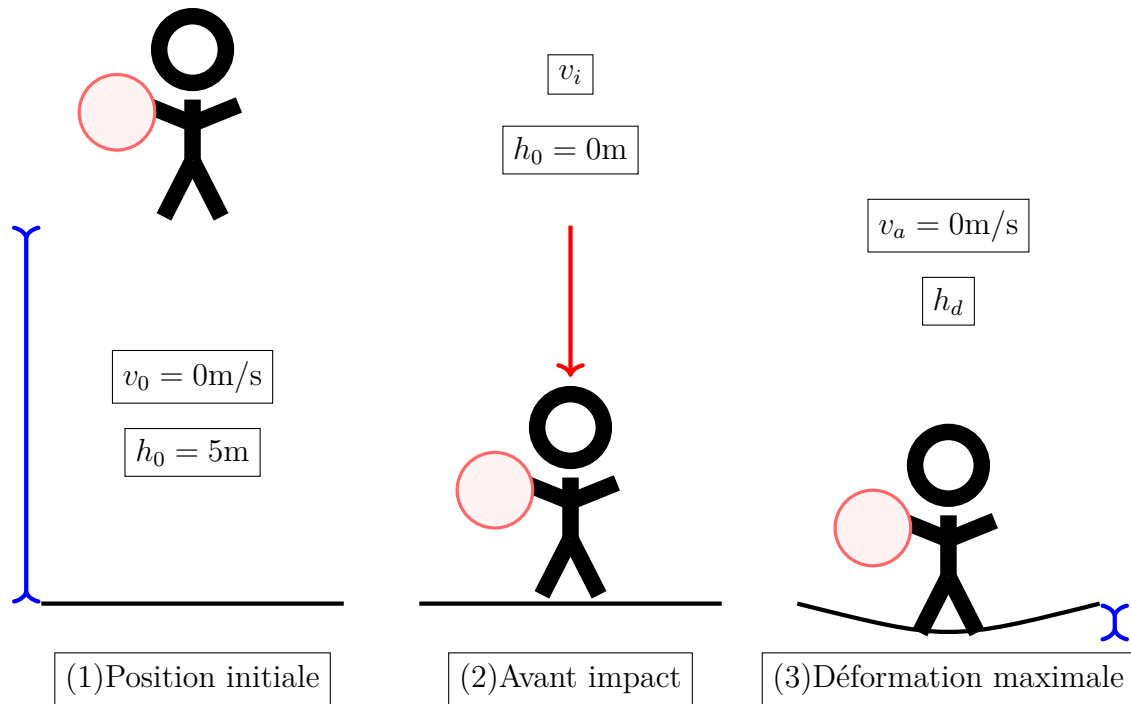


FIGURE 5 – Ammortissage de la chute du participant et du ballon par le trampoline

2.3 Conception du coussin-trampoline

2.3.1 Suppositions

1. Participant-ballon tombe d'une hauteur $h_0 = 5\text{m}$ avec vitesse initiale nulle.
2. Coussin-trampoline considéré un ressort linéaire de constante $k_c = 6000\text{N/m}$.
3. Masse du coussin-trampoline négligeable.
4. Traînée aérodynamique pendant la tombée négligeable.
5. Amortissement dans le coussin-trampoline négligeable.
6. Participant-ballon collé au coussin-trampoline après l'impact (pas de rebond du participant-ballon).

2.3.2 Calculs

Pour débiter, nous pouvons déterminer la quantité totale d'énergie dans le système à la position initiale (voir figure 2.3.1).

$$\begin{aligned} E_{total} &= E_{pg}(h_o) \\ &= (m_p + m_b)gh_o \\ &\approx 4316.4\text{J} \end{aligned} \quad (26)$$

Par la suite nous pouvons trouver la vitesse d'impact v_i du participant-ballon en utilisant la loi de la conservation d'énergie.

$$\begin{aligned} E_{total} &= E_c(v_i) = \frac{(m_p + m_b)v_i^2}{2} \\ v_i &= \sqrt{\frac{2E_{total}}{m_p + m_b}} \\ v_i &\approx 9.90\text{m/s} \end{aligned} \quad (27)$$

Les forces appliquées sur le participant-ballon seront importante pour les prochaines étapes. Un DCL est nécessaire (voir figure 6). On voit ainsi que $F = kh - mg$. En utilisant les forces appliquées sur le participant-ballon, nous pouvons utiliser l'équation du travail pour trouver la distance que le trampoline devra déformer pour combattre l'énergie d'impact du participant-ballon.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{-d} F(h) dh \\ W &= \int_0^{-d} (kh - mg) dh \\ W &= \left. \frac{kh^2}{2} \right|_0^{-d} - mgh \Big|_0^{-d} \\ W &= \frac{kh^2}{2} + mgh \\ 0 &= \frac{kh^2}{2} + mgh - W \end{aligned} \quad (28)$$

Nous pouvons remplacer le travail W par l'énergie cinétique totale du participant-ballon. Par la suite nous pouvons utiliser la formule quadratique pour trouver les racines et notre déformation :

$$\begin{aligned} a &= \frac{k}{2} \\ b &= (m_p + m_b)g \\ c &= -E_{total} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Delta h &\approx \{1.06\text{m}, -1.35\text{m}\} \end{aligned}$$

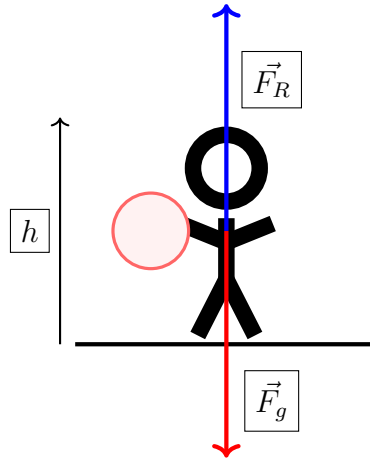


FIGURE 6 – DCL du participant sur le trampoline. La trampoline est à la position $h = 0$

Il est très intéressant de constater que les deux racines correspondent à la déformation selon la direction d'impact. Dans notre cas, notre vecteur \vec{v}_i a une composante négative dans l'axe des h . Cela nous donne une déformation nécessaire de 1.35m vers le bas.

2.3.3 Code Matlab

```

1      h0 = 5;           % m
2      g = 9.81;         % m/s^2
3      k = 6000;         % N/m
4      mp = 80;          % kg
5      mb = 8;           % kg
6      m = mb + mp;      % kg
7
8      % Calcul de l'energie totale dans le systeme
9      E_pg = m * g * h0;
10     E_total = E_pg      % 4316.4
11
12     % Calcul de la vitesse d'impact;
13     % verification de l'energie
14     vi = sqrt(2 * E_total / m)      % 9.9045
15     E_c = m * vi^2 / 2              % 4316.4
16
17     % Calcul de la hauteur de deplacement du trampoline;
18     % verification du travail
19     h = roots([k / 2, m * g, -E_total]) % [-1.3520, 1.0642]
20     W = k * h.^2 / 2 + m * g * h      % 4316.4

```

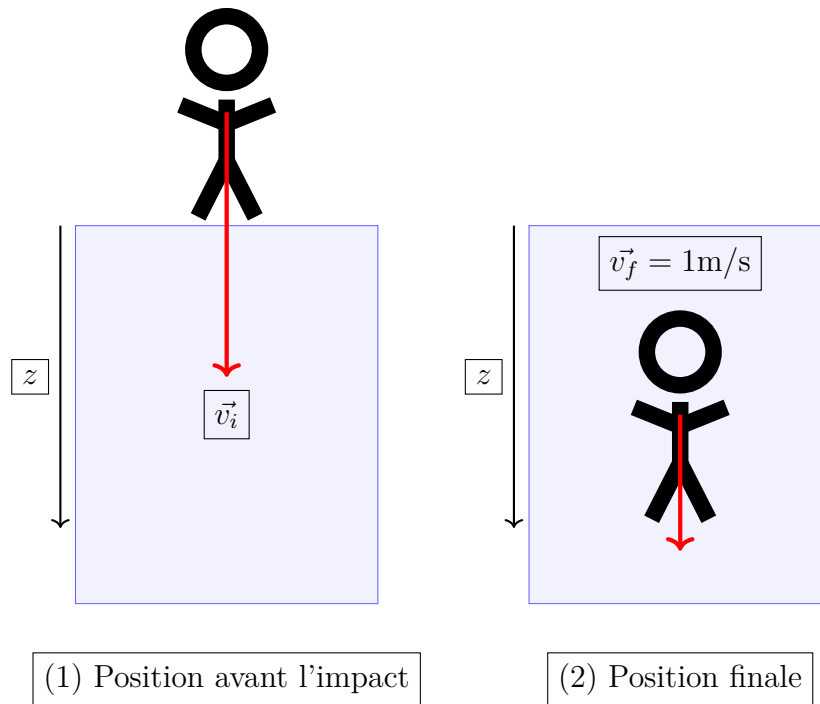


FIGURE 7 – Diagramme cinématique du participant. L'axe z pointe vers le bas

2.4 Conception du bassin d'eau

2.4.1 Suppositions

1. On néglige la traînée aérodynamique pendant la tombée dans l'air.
2. On ignore la forme physique du participant ; on ne considère que le déplacement de son centre de masse.
3. Les forces appliquées sur le participant une fois dans l'eau sont la gravité (mg), la flottabilité de forme $k_f mg$ et la traînée hydrodynamique de la forme bv^2 , les deux dernières s'opposant à la vitesse de descente dans l'eau, où b est le coefficient hydrodynamique, k_f le facteur de flottabilité et v la vitesse dans l'eau.
4. Les calculs se font sur la base de l'équation différentielle linéarisée.
5. On suppose que le participant tombe dans l'eau d'une hauteur $h_1 = 10\text{m}$ avec une vitesse initiale nulle.
6. La profondeur sécuritaire z_{bassin} du bassin d'eau est la profondeur à laquelle la vitesse du participant est réduite à une vitesse d'impact $v_f = 1\text{m/s}$ sécuritaire.

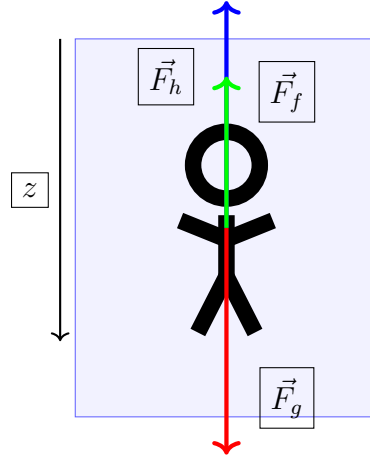


FIGURE 8 – DCL du participant dans le bassin. L'axe z pointe vers le bas

2.4.2 Calculs de la chute

Pour débiter, nous devons déterminer la quantité d'énergie cinétique du participant avant l'impact dans le bassin $z = 0$, $h_0 = 10\text{m}$ (voir figure 2.4.2).

$$\begin{aligned} E_k(0) &= E_{pg}(h_0) \\ &= m_p g h_0 \\ &\approx 7848\text{J} \end{aligned} \tag{30}$$

Nous pouvons utiliser cette valeur pour calculer la vitesse d'impact :

$$\begin{aligned} E_k(0) &= \frac{m_p v_i^2}{2} \\ v_i &= \sqrt{\frac{2E_k(0)}{m_p}} \\ v_i &\approx 14\text{m/s} \end{aligned} \tag{31}$$

2.4.3 Calculs de la profondeur sécuritaire

On peut décrire le système une fois rentré dans le bassin par la somme des forces qui s'applique sur le participant une fois dans l'eau :

$$\begin{aligned} \sum F &= ma = m \frac{dv}{dt} = m \vec{v} \frac{dv}{dz} \\ \sum F &= mg - k_f mg - bv^2 \end{aligned} \tag{32}$$

Avec ces deux équations, il est possible d'isoler la dérivée de la vitesse par rapport à la position, ainsi que la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dz} &= \frac{g(1 - k_f)}{v} - \frac{bv}{m} \\ \frac{d^2v}{dz^2} &= -\frac{g(1 - k_f)}{v^2} - \frac{b}{m}\end{aligned}\quad (33)$$

Le système est décrit par des équations différentielles non-linéaires, qu'il faudrait qu'on linéarise avec les séries de Taylor. Il faut donc trouver un point v_0 proche du point d'intérêt $v_f = 1\text{m/s}$. Il est possible de trouver ce point en posant $\frac{dv}{dz} = 0\text{m/s}^2$.

$$v_0 = \sqrt{\frac{mg(1 - k_f)}{b}} = 0.9137 \quad (34)$$

Avec ce point v_0 il est possible de linéariser la fonction pour obtenir la forme suivante à partir des séries de Taylor :

$$\begin{aligned}f(x_0+) &= f(x_0) + \Delta x \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \\ \frac{d\Delta v}{dz} &= \left(-\frac{g(1 - k_f)}{v_0^2} - \frac{b}{m} \right) \Delta v + \left(\frac{g(1 - k_f)}{v_0} - \frac{bv_0}{m} \right)\end{aligned}\quad (35)$$

Par contre, dans notre cas, $\left. \frac{dv}{dz} \right|_{v_0} = 0$ par définition, donc l'équation simplifiée est :

$$\frac{d\Delta v}{dz} = \left(-\frac{g(1 - k_f)}{v_0^2} - \frac{b}{m} \right) \Delta v \quad (36)$$

Il est donc possible de réarranger la fonction et de l'intégrer pour trouver la profondeur z_{bassin} :

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta v}{\Delta v} &= \left(-\frac{g(1 - k_f)}{v_0^2} - \frac{b}{m} \right) dz \\ \int_{v_i}^{v_f} \frac{d\Delta v}{\Delta v} &= \int \left(-\frac{g(1 - k_f)}{v_0^2} - \frac{b}{m} \right) dz \\ \ln|\Delta v| \Big|_{v_i}^{v_f} &= \left(-\frac{g(1 - k_f)}{v_0^2} - \frac{b}{m} \right) z \\ z &= \frac{\ln|v_i - v_0| - \ln|v_f - v_0|}{\left(-\frac{g(1 - k_f)}{v_0^2} - \frac{b}{m} \right)} = -4.2743\text{m}\end{aligned}\quad (37)$$

2.4.4 Code Matlab

```
1      mb = 8;
2      mp = 80;
3      kf = 0.95;
4      b  = 47;
5      h  = 10;
6      g  = 9.81;
7      vf = 1;
8
9      %% Vitesse d'impact
10
11     % Calcul de l'énergie potentielle
12     E = mp * g * h;    % 7848 J
13
14     % Calcul de la vitesse d'impact
15     vi = sqrt(2 * E / mp);
16
17
18     %% Bassin
19
20     v0 = sqrt(m * g * (1 - kf) / b)    % 0.9137
21
22     K = -g*(1 - kf)/v0^2 - b/m        % -1.175
23     C = g*(1-kf)/v0 - b*v0/m         % presque 0
24
25     z = (log(vi - v0) - log(vf - v0)) / K    % -4.2743
```


3 Synthèse des résultats

3.1 Résultats

3.1.1 Résultat de la glissade

Résultat	Valeur
y_f (m)	12.55
μ_f	0.625
Ouverture de la valve (%)	32.5
v_f m/s	21.593

TABLEAU 3: Résultat de la glissade

3.1.2 Résultat de la minuterie

Résultat	Valeur
Δt_m (s)	0.5888
Marge obtenue (s)	0.29339
$v'_p b$ (m/s)	5.3619
t_{G1} (s)	0.5595
v'_p (m/s)	4.8529
t_{G2} (s)	0.6182

TABLEAU 4: Résultat de la minuterie

3.1.3 Résultat du coussin-trampoline

Résultat	Valeur
Δh_c (m)	1.35

TABLEAU 5: Résultat du coussin-trampoline

3.1.4 Résultat du bassin

Résultat	Valeur
$\frac{dv}{dz}$	$\frac{g(1-k_f)}{v} - \frac{bv}{m}$
$\frac{dv}{dz}$	$\sqrt{\frac{mg(1-k_f)}{b}}$
v_0 (m/s)	0.9137
$\frac{d\Delta v}{dz}$	$\left(-\frac{g(1-k_f)}{v_0^2} - \frac{b}{m}\right) \Delta v + \left(\frac{g(1-k_f)}{v_0} - \frac{bv_0}{m}\right)$
z_{bassin} (m)	4.2743

TABLEAU 6: Résultat du bassin

3.2 Conclusion

En conclusion, nous avons calculé les dimensions, vitesses, forces et durées qui garantissent la sécurité du participant pendant le défi Wipe-Out. Pour y arriver, nous avons utilisé plusieurs concepts tel que la conservation d'énergie, la longueur d'une courbe, l'interpolation, l'approximation, la linéarisation et appliqué des concepts physiques tels que la friction, les collisions plastiques et semi-élastiques, la flottabilité et la traînée hydrodynamique.