Session S5 Informatique

APP-Unité 3
Traitement numérique des signaux

Examen formatif

Question 1

Répondez à chacune des questions suivantes par une réponse brève, tel que demandé (par exemple, une valeur numérique, ou encore VRAI ou FAUX). Lorsque des choix de réponses sont donnés entre parenthèses, vous devez vous en tenir à ceux-ci.

(a) VRAI ou FAUX : Le produit des TFSD de deux signaux temporels est égal à la TFSD de la fonction de convolution entre ces deux signaux.

(b) VRAI ou FAUX : Le module de la Transformée de Fourier Discrète du signal $x[n\text{-}k]$ est le même que le module de la Transformée de Fourier Discrète du signal $x[n]$, peu importe la valeur de m.

(c) La réponse impulsionnelle d'un filtre numérique FIR est telle que la somme de ses échantillons vaut 0.5. Donnez le gain DC de ce filtre.

(d) On désire convoluer un signal $x[n]$, ayant N_x échantillons non-nuls, avec un signal $h[n]$, ayant N_h échantillons non-nuls, en appliquant la méthode de la multiplication en fréquences. Avant de prendre la FFT des signaux, combien de zéros *au minimum* devra-t-on ajouter respectivement à $x[n]$ et à $h[n]$? (On demande 2 réponses.)

(e) VRAI ou FAUX : Il est possible d'échantillonner le signal $x(t) = \cos(600\pi t + \pi/2)$ avec un fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz sans causer de repliement spectral.

Question 2

(a) Donnez le signal $x[n]$, de période N=32 échantillons, dont la transformée de Fourier discrète $X(m)$ (TFD) est donnée, sur l'intervalle $0 \leq m \leq 31$, par

$X(m)$ =	8	pour m = 0
	$16\,(1+j)/\sqrt{2}$	pour m = 5
	$16\,(1-j)/\sqrt{2}$	pour m = 27
	16	pour m = 10 et m = 22
	0	ailleurs

(b) Que serait le signal $x[n]$ si on ajoutait la phase $-m(2\pi/32)$ à chaque coefficient $X(m)$ (en général complexe) de la partie (a) ?

Question 3

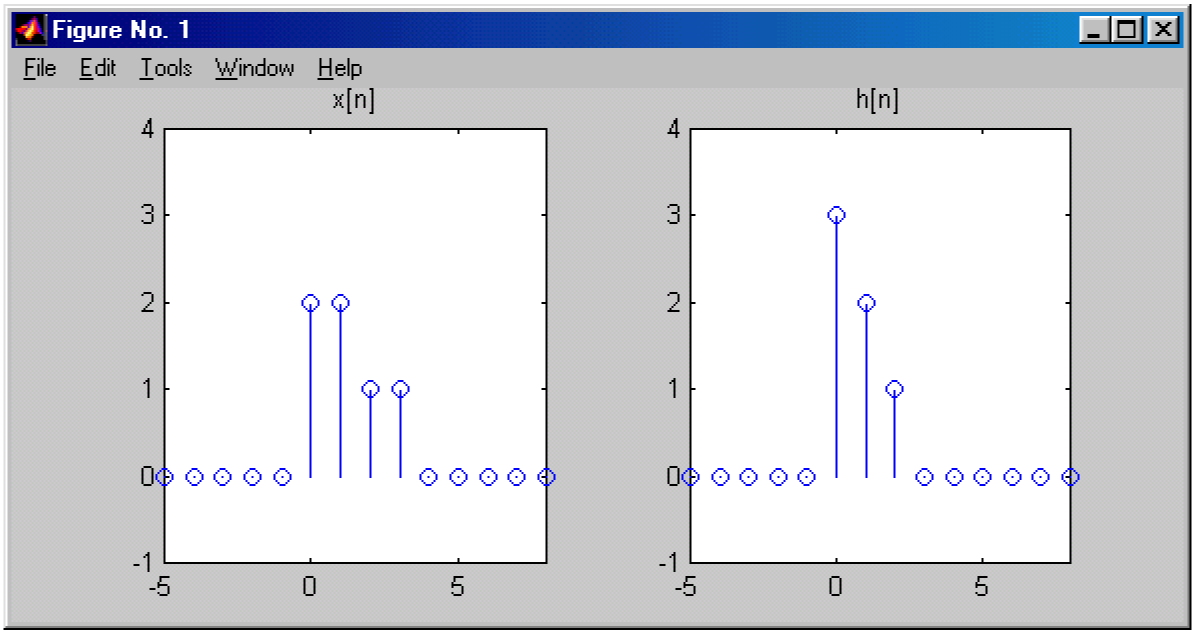
On demande de calculer la TFD à 4 points de la fonction périodique $x_2[n]$ définie par : $x_2[n] = 1$ pour $n = 4l + 1$ où $l = [0, \pm 1, \pm 2 \ldots]$ et $x_2[n] = 0$ partout ailleurs. Présenter les spectres d'amplitude et de phase, de même que les graphiques de la partie réelle et de la partie imaginaire du spectre.

Question 4

Calculer la TFSD de $x_3[n]$ définie par : $x_3[n] = \delta(n-1) + \delta(n-3)$. Simplifier le plus possible votre réponse.

Question 5

Soient $x[n]$ et $h[n]$ deux signaux discrets apériodiques, donnés à la figure suivante. Donnez le résultat de la convolution de ces deux signaux.



Question 6

Le signal $x(t) = 20 \sin(2\pi 1000t)$

est échantillonné à la fréquence d'échantillonnage $Fe = 8000$ échantillons/seconde, après avoir été préalablement filtré par un filtre analogique anti-repliement dont le déphasage à 1000 Hz est –0.5 radians. Le signal numérisé obtenu est $x[n]$.

On filtre ensuite $x[n]$ avec un filtre numérique dont l'équation aux différences est

$$y[n] = x[n] - 0{,}8\, x[n-1]$$

Donnez la forme du signal $y[n]$ obtenu à la sortie de ce filtre, en régime permanent.

Question 7

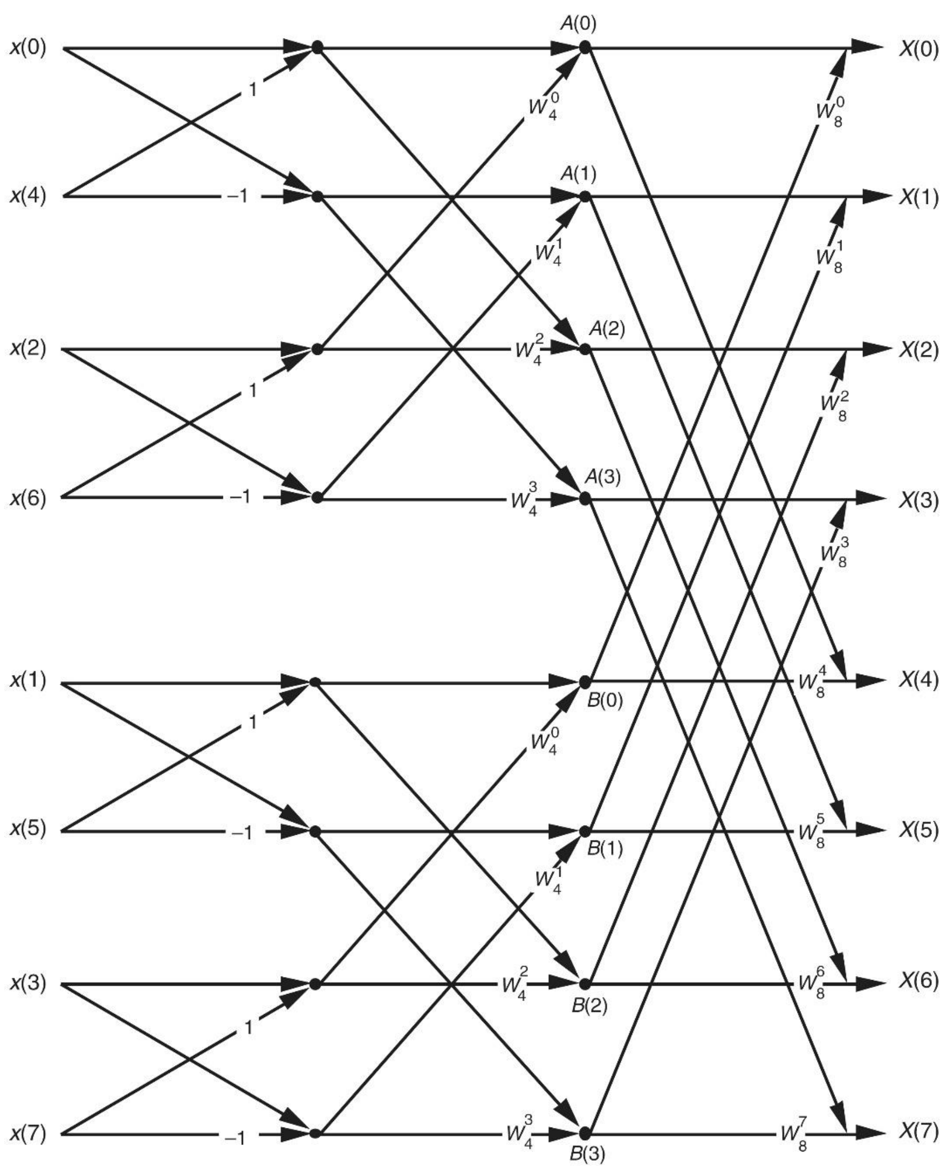
Calculez la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un filtre FIR coupe-bande idéal centré à 4 kHz, de largeur de bande 1 kHz, pour un système échantillonné à 16 kHz. Pour obtenir le filtre désiré, appliquez une transformation fréquentielle à un filtre passe-bas correctement calculé selon ces spécifications, prendre $N = 16$.

Question 8

Soit le signal discret suivant :

$x[n]$ = [4 9 2 5 8 3 2 3]

À l’aide du diagramme d’une FFT à N=8 point ci-dessous, évaluer les sorties $X[0]$, $X[1]$ et $X[6]$.



Formules mathématiques

Nombres complexes

Règles de base

$$j=\sqrt{-1}, j=\frac{1}{-j}, \pm j^2=\mp 1, (-j)(j)=1, e^{\pm j\pi}=-1, e^{\pm j\frac{\pi}{2}}=\pm j, \sqrt{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$$

Relation d'Euler

$$e^{\pm j\theta}=\cos(\theta)\pm j\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta)=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2},\quad \sin(\theta)=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{j2},\quad \tan(\theta)=-j\left(\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}\right)$$

Transformations de Fourier

Transformée de Fourier pour les signaux discrets

$$X(\overline{\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-jn\overline{\omega}} \qquad \Leftrightarrow \qquad x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\overline{\omega})e^{j\overline{\omega}n}d\overline{\omega} \quad \text{où } \overline{\omega}=2\pi f/f_s$$

TFSD : Propriétés

$$\begin{aligned}
x[n] &\quad\leftrightarrow\quad X(\overline{\omega})\\
\alpha x_1[n]+\gamma x_2[n] &\quad\leftrightarrow\quad \alpha X_1(\overline{\omega})+\gamma X_2(\overline{\omega})\\
x[n-i] &\quad\leftrightarrow\quad e^{-ji\overline{\omega}}X(\overline{\omega})\\
x[n]e^{jn\overline{\omega}_0} &\quad\leftrightarrow\quad X(\overline{\omega}-\overline{\omega}_0)\\
x_1[n]*x_2[n] &\quad\leftrightarrow\quad X_1(\overline{\omega})X_2(\overline{\omega}) \qquad * \text{ :convolution}\\
x_1[n]x_2[n] &\quad\leftrightarrow\quad \frac{1}{2\pi}X_1(\overline{\omega})*X_2(\overline{\omega})
\end{aligned}$$

TFSD : Transformées fréquentes

$$\begin{aligned}
\delta[n-k] &\quad\leftrightarrow\quad e^{-jk\overline{\omega}}, \quad \delta[n] \quad\leftrightarrow\quad 1\\
\cos(n\,\overline{\omega}_0) &\quad\leftrightarrow\quad \pi\delta(\overline{\omega}+\overline{\omega}_0)+\pi\delta(\overline{\omega}-\overline{\omega}_0)\\
\sin(n\,\overline{\omega}_0) &\quad\leftrightarrow\quad j\pi\delta(\overline{\omega}+\overline{\omega}_0)-j\pi\delta(\overline{\omega}-\overline{\omega}_0)\\
e^{jn\overline{\omega}} &\quad\leftrightarrow\quad 2\pi\delta(\overline{\omega}-\overline{\omega}_0), \quad 1 \quad\leftrightarrow\quad 2\pi\delta(\overline{\omega})\\
\alpha^n u[n] &\quad\leftrightarrow\quad \frac{1}{1-\alpha e^{-j\overline{\omega}}} \quad \text{où } |\alpha|<1\\
\begin{cases}1 & \text{pour } |n|\le N\\ 0 & \text{pour } |n|>N\end{cases} &\quad\leftrightarrow\quad \frac{\sin((2N+1)\,\overline{\omega}/2)}{\sin(\overline{\omega}/2)}\\
\begin{cases}\dfrac{\sin(n\overline{\omega}_0)}{n\,\pi} & \text{pour } n\neq 0\\ \overline{\omega}_0/\pi & \text{pour } n=0\end{cases} &\quad\leftrightarrow\quad \begin{cases}1 & \text{pour } |\overline{\omega}|<\overline{\omega}_0\\ 0 & \text{pour } |\overline{\omega}|>\overline{\omega}_0\end{cases}
\end{aligned}$$

Transformée de Fourier discrète (directe et inverse) pour les signaux périodiques

$$X_\mathrm{p}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x_\mathrm{p}[n] e^{-j(2\pi/N)mn} \qquad \Leftrightarrow \qquad x_\mathrm{p}[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X_\mathrm{p}[m] e^{j(2\pi/N)mn}$$

TFD : Propriétés

$$f_\mathrm{p}[n] \quad \leftrightarrow \quad F_\mathrm{p}[m]$$
$$\alpha f_\mathrm{p}[n] + \gamma g_\mathrm{p}[n] \quad \leftrightarrow \quad \alpha F_\mathrm{p}[m] + \gamma G_\mathrm{p}[m]$$
$$f_\mathrm{p}[n-i] \quad \leftrightarrow \quad e^{-j(2\pi/N)mi} F_\mathrm{p}[m]$$
$$e^{j(2\pi/N)ni} f_\mathrm{p}[n] \quad \leftrightarrow \quad F_\mathrm{p}[m-i]$$
$$f_\mathrm{p}[n] \otimes g_\mathrm{p}[n] \quad \leftrightarrow \quad F_\mathrm{p}[m] G_\mathrm{p}[m] \qquad \otimes \text{ :convolution circulaire}$$
$$f_\mathrm{p}[n] g_\mathrm{p}[n] \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{N} F_\mathrm{p}[m] \otimes G_\mathrm{p}[m]$$

Convolution discrète

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Fenêtres

Type	**Définition de la fenêtre**	**Lobe principal**	**Attén. (dB)**
Rectangle	$w_\mathrm{R}[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n < L \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4\pi/L$	21
Triangle	$w_\mathrm{T}[n] = \begin{cases} \dfrac{2(n+1)}{L+1} & 0 \le n \le \dfrac{L-1}{2} \\ \dfrac{2(L-n)}{L+1} & \dfrac{L-1}{2} < n < L \end{cases}$ ($w_\mathrm{T}[n]$ pour un L impair uniquement)	$8\pi/L$	25
Hann	$w_\mathrm{han}[n] = \frac{1}{2}\left\{1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right)\right\} w_\mathrm{R}[n]$	$8\pi/L$	44
Hamming	$w_\mathrm{ham}[n] = \left\{0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right)\right\} w_\mathrm{R}[n]$	$8\pi/L$	53
Blackman	$w_\mathrm{B}[n] = \left\{0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{L-1}\right)\right\} w_\mathrm{R}[n]$	$12\pi/L$	74
Kaiser	(à calculer avec Matlab ou Python)	variable	var.

Filtres RIF (FIR)

Filtre avec M coefficients

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$$

Équations de transformation pour les RIF (FIR)

Type de filtre (fréquence normalisée $\overline{\omega}$ de $-\pi$ à π)	Réponse à l'impulsion
Filtre passe-bas de 0 à $\overline{\omega}_1$	$h[n]$
Filtre passe-haut de (π - $\overline{\omega}_1$) à π	$(-1)^n h[n]$
Filtre passe-bande de ($\overline{\omega}_0$ - $\overline{\omega}_1$) à ($\overline{\omega}_0$ + $\overline{\omega}_1$)	$2h[n]\cos(\overline{\omega}_0 n)$
Filtre coupe-bande de ($\overline{\omega}_0$ - $\overline{\omega}_1$) à ($\overline{\omega}_0$ + $\overline{\omega}_1$)	$\delta[n] - 2h[n]\cos(\overline{\omega}_0 n)$

Série géométrique

$$\sum_{n=L}^{U} r^n = \frac{r^L - r^{U+1}}{1-r}$$

Méthode de la fenêtre

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin(\pi n K/N)}{\sin(\pi n/N)} & n \neq 0 \\ \dfrac{K}{N} & n = 0 \end{cases}$$