Session S5 Informatique

APP-Unité 3
Traitement numérique des signaux

Examen formatif
SOLUTIONS

Question 1

Répondez à chacune des questions suivantes par une réponse brève, tel que demandé (par exemple, une valeur numérique, ou encore VRAI ou FAUX). Lorsque des choix de réponses sont donnés entre parenthèses, vous devez vous en tenir à ceux-ci.

(a) VRAI ou FAUX : Le produit des TFSD de deux signaux temporels est égal à la TFSD de la fonction de convolution entre ces deux signaux.

VRAI

(b) VRAI ou FAUX : Le module de la Transformée de Fourier Discrète du signal $x[n\text{-}k]$ est le même que le module de la Transformée de Fourier Discrète du signal $x[n]$, peu importe la valeur de m.

VRAI (pour le module, mais pas pour la phase)

(c) La réponse impulsionnelle d'un filtre numérique FIR est telle que la somme de ses échantillons vaut 0.5. Donnez le gain DC de ce filtre.

0.5 (pour un FIR, gain DC = module de la somme des coefficients de sa réponse impulsionnelle)

(d) On désire convoluer un signal $x[n]$, ayant N_x échantillons non-nuls, avec un signal $h[n]$, ayant N_h échantillons non-nuls, en appliquant la méthode de la multiplication en fréquences. Avant de prendre la FFT des signaux, combien de zéros *au minimum* devra-t-on ajouter respectivement à $x[n]$ et à $h[n]$? (On demande 2 réponses.)

On doit ajouter N_h-1 zéros à $x[n]$, et N_x-1 zéros à $h[n]$. Le signal convolué sera de longueur N_h+N_x-1.

(e) VRAI ou FAUX : Il est possible d'échantillonner le signal $x(t) = \cos(600\pi t + \pi/2)$ avec un fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz sans causer de repliement spectral.

VRAI, la fréquence du cosinus est f = 300 Hz ($2\pi f t = 600\pi t$), on doit donc échantillonner à une fréquence supérieure à 600 Hz.

Question 2

(a) Donnez le signal $x[n]$, de période N=32 échantillons, dont la transformée de Fourier discrète $X(m)$ (DFT) est donnée, sur l'intervalle $0 \le m \le 31$, par

$X(m)$ =	8	pour m = 0
	16 (1+j) /√2	pour m = 5
	16 (1- j) /√2	pour m = 27
	16	pour m = 10 et m = 22
	0	ailleurs

On doit prendre ici la transformée de Fourier inverse de X[m] sur N=32 points, pour obtenir $x[n]$:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X[m]e^{j(\frac{2\pi}{N})mn}$$

$$= \frac{1}{32}\sum_{m=0}^{31} X[m]e^{j\left(\frac{\pi}{16}\right)mn}$$

$$= \frac{1}{32}\left[8 + \frac{16(1+j)}{\sqrt{2}}e^{j\left(\frac{\pi}{16}\right)5n} + \frac{16(1-j)}{\sqrt{2}}e^{j\left(\frac{\pi}{16}\right)27n} + 16e^{j\left(\frac{\pi}{16}\right)10n} + 16e^{j\left(\frac{\pi}{16}\right)22n}\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[8 + 16e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{j\left(\frac{\pi}{16}\right)5n} + 16e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}e^{-j\left(\frac{\pi}{16}\right)5n} + 16e^{j\left(\frac{\pi}{16}\right)10n} + 16e^{-j\left(\frac{\pi}{16}\right)10n}\right]$$

$$= \frac{1}{32}[8 + 16e^{j(\frac{\pi}{4})}e^{j(\frac{\pi}{16})5n} + 16e^{-j(\frac{\pi}{4})}e^{-j(\frac{\pi}{16})5n} + 16e^{j(\frac{\pi}{16})10n} + 16e^{-j(\frac{\pi}{16})10n}]$$

$$= \frac{1}{32}\left[8 + 16e^{j\left[\left(\frac{\pi}{16}\right)5n+\frac{\pi}{4}\right]} + 16e^{-j\left[\left(\frac{\pi}{16}\right)5n+\frac{\pi}{4}\right]} + 16e^{j\left(\frac{\pi}{16}\right)10n} + 16e^{-j\left(\frac{\pi}{16}\right)10n}\right]$$

$$= \frac{1}{4} + \cos(\frac{5n\pi}{16} + \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{10n\pi}{16})$$

(b) Que serait le signal $x[n]$ si on ajoutait la phase $-m(2\pi/32)$ à chaque coefficient $X(m)$ (en général complexe) de la partie (a) ?

Ajouter une phase de $-m(2\pi/32)$ à chaque coefficient $X[m]$ revient à multiplier chaque coefficient par $e^{-j(2\pi/32)m}$. En appliquant la DFT^{-1} pour calculer le résultat:

$$x'[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\{X(m)e^{-j(\frac{2\pi}{32}m)}\}e^{j(\frac{2\pi}{N}m)n}$$

$$x'[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X(m)e^{j\frac{2\pi}{N}m(n-1)} = x[n-1]$$

où $x'[n]$ est un signal différent du $x[n]$ calculé à l'exercice précédent. Cependant, puisque la période du signal d'origine est aussi de longueur N=32, on constate en regardant l'expression ci-haut que c'est simplement une DFT^{-1} du signal $x[n]$ décalé de 1 échantillon, i.e. avec (n-1) à l'exposant au lieu de n, donc $x'[n] = x[n-1]$.

Ajouter une phase de $-m(2\pi/32)$ à chaque coefficient $X[m]$ est donc équivalent à décaler temporellement $x[n]$ de 1 échantillon vers la droite (retard de 1 échantillon dans le temps). En remplaçant n par n-1 dans $x[n]$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} x'[n] &= \frac{1}{4} + \cos\left(\frac{5(n-1)\pi}{16} + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{10(n-1)\pi}{16}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \cos\left(\frac{5n\pi}{16} - \frac{\pi}{16}\right) + \cos\left(\frac{10n\pi}{16} - \frac{10\pi}{16}\right) \end{aligned}$$

Question 3

On demande de calculer la TFD à 4 points de la fonction périodique $x_2[n]$ définie par : $x_2[n] = 1$ pour $n = 4l + 1$ où $l = [0, \pm1, \pm2 \ldots]$ et $x_2[n] = 0$ partout ailleurs. Présenter les spectres d'amplitude et de phase, de même que les graphiques de la partie réelle et de la partie imaginaire du spectre.

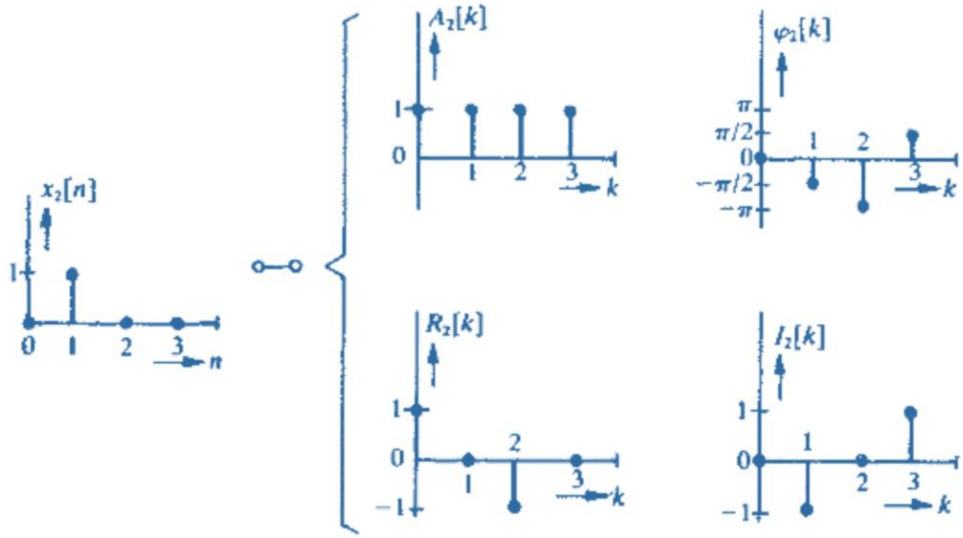
$$X_2[m] = \sum_{n=0}^{3} x_2[n] \cdot e^{-j(2\pi/4)mn}$$

$$X_2[m] = \cancel{x_2[0] \cdot e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)m0}} + x_2[1] \cdot e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)m1} + \cancel{x_2[2] \cdot e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)m2}} + \cancel{x_2[3] \cdot e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)m3}}$$

$$X_2[m] = 0 + x_2[1] \cdot e^{-j(2\pi/4)m1} + 0 + 0$$

$$X_2[m] = e^{-j(\pi/2)m}$$

Ce spectre est complexe de module égal à 1, mais avec une phase non nulle égale à $-(\pi/2)m$. La figure suivante détail les spectres d'amplitude (A), de phase (φ), de même que la partie réelle (R) et imaginaire (I) :



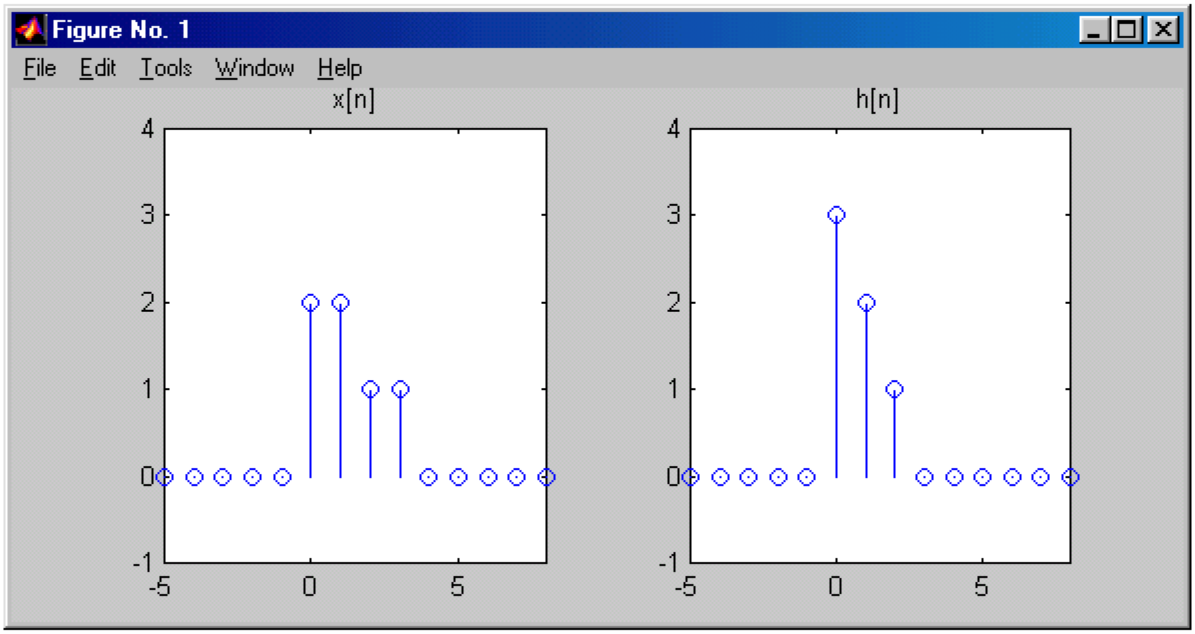
Question 4

Calculer la TFSD $x_3[n]$ définie par : $x_3[n] = \delta(n-1) + \delta(n-3)$. Simplifier le plus possible votre réponse.

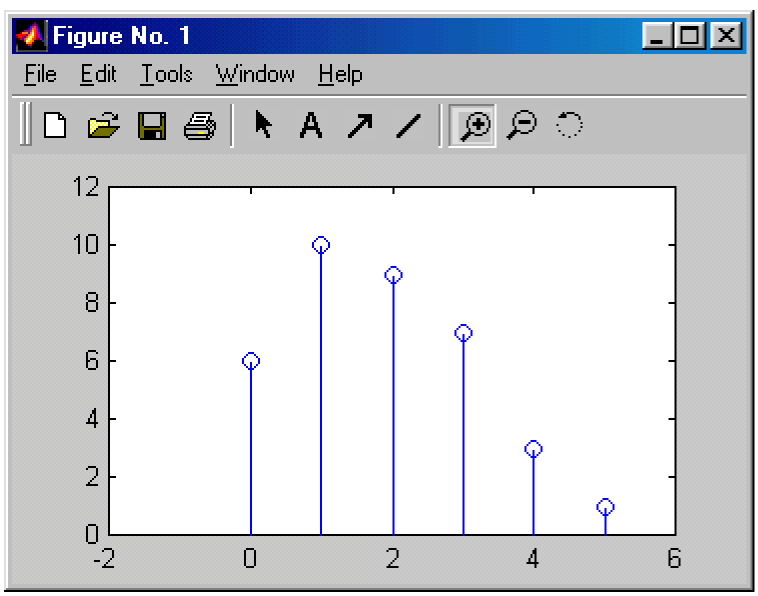
$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$
$$X(\omega) = \delta(n-1)e^{-jn\omega} + \delta(n-3)e^{-jn\omega}$$
$$X(\omega) = \delta(0)e^{-j\omega} + \delta(0)e^{-j3\omega} \quad \text{avec} \quad n = 1 \text{ et } n = 3$$
$$X(\omega) = e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}$$
$$X(\omega) = e^{-j2\omega}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)$$
$$X(\omega) = 2 \cdot \cos(\omega) \cdot e^{-j2\omega}$$

Question 5

Soient $x[n]$ et $h[n]$ deux signaux discrets apériodiques, donnés à la figure suivante. Donnez le résultat de la convolution de ces deux signaux.



Le résultat de la convolution de *x* avec *h* est montré ci-dessous :



Les valeurs sont: [6 10 9 7 3 1]

Question 6

Le signal

$$x(t) \quad = \quad 20 \sin(2\pi 1000t)$$

est échantillonné à la fréquence d'échantillonage Fe = 8000 échantillons/seconde, après avoir été préalablement filtré par un filtre analogique anti-repliement dont le déphasage à 1000 Hz est –0.5 radians. Le signal numérisé obtenu est $x[n]$.

On filtre ensuite $x[n]$ avec un filtre numérique dont l'équation aux différences est

$$y[n] \quad = \quad x[n] - 0{,}8\, x[n-1]$$

Donnez la forme du signal $y[n]$ obtenu à la sortie de ce filtre, en régime permanent.

Le signal analogique original

$$x(t) \quad = \quad 20 \sin(2\pi 1000t)$$

devient

$$x(t) \quad = \quad 20 \sin(2\pi 1000t - 0.5)$$

à la sortie du filtre anti-repliement.

Échantillonné à 8 kHz, ce signal devient

$$\begin{aligned} x[n] &= 20 \sin(2\pi 1000n/Fe - 0.5) \\ &= 20 \sin(2\pi 1000n/8000 - 0.5) \\ &= 20 \sin(n\pi/4 - 0.5) \end{aligned}$$

(la fréquence normalisée est $\omega = \pi/4$).

Le signal est filtré par un filtre numérique avec l'équation à différences:

$$y[n] \quad = \quad x[n] -0{,}8x[n-1]$$

On voit donc que les paramètres du filtre sont h[n] = [1 -0,8] et sa réponse en fréquence est:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{1} h[n]e^{-j\omega n} = 1e^{-j\omega 0} - 0{,}8e^{-j\omega} = 1 - 0{,}8e^{-j\omega}$$

Puisque la fréquence normalisée du sinus est $\pi/4$, on cherche le gain et la phase à $\pi/4$:

$$|H(\omega)| = \left|1 - 0{,}8e^{-j\omega}\right|$$

$$\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|1 - 0{,}8e^{-j\frac{\pi}{4}}\right| = \left|1 - 0{,}8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right| = |0{,}4344 + j0{,}5656| = 0{,}7132$$

$$\angle H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{atan}\left(\frac{0{,}5656}{0{,}4344}\right) = 0{,}916\, rad$$

Ainsi, la réponse $y[n]$ du filtre numérique sera :

$$\begin{aligned} y[n] &= 0{,}7132 * 20 \sin(n\pi/4 - 0.5 + 0.916) \\ &= 14{,}26 \sin(n\pi/4 + 0{,}416) \end{aligned}$$

Question 7

Calculez la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un filtre FIR coupe-bande idéal centré à 4 kHz, de largeur de bande 1 kHz, pour un système échantillonné à 16 kHz. Pour obtenir le filtre désiré, appliquez une transformation fréquentielle à un filtre passe-bas correctement calculé selon ces spécifications, prendre N = 16.

L'équation d'un filtre passe-bas provenant d'un spectre dont la réponse en fréquence est une fenêtre rectangulaire est données par :

$$h_{pb}[k] = \frac{1}{N}\frac{\sin(\pi k K/N)}{\sin(\pi k/N)}$$

On doit donc déterminer K. La largeur de bande du coupe-bande est 1 kHz, ce qui est 2 fois la largeur de bande du passe-bas de départ qui est de 500 Hz. On cherche donc le K qui permet de concevoir un filtre ayant une fréquence de coupure de 500 Hz.

$$\frac{f}{f_e} = \frac{(K-1)/2}{N}$$

$$\frac{500}{16000} = \frac{(K-1)/2}{16}$$

$$K = 2$$

L'expression de la réponse impulsionnelle idéale de ce passe-bas est :

$$\boldsymbol{h_{pb}[k]} = \begin{cases} \dfrac{1}{16}\dfrac{\sin(\pi k/8)}{\sin(\pi k/16)} & \text{pour } k \neq 0 \\ \dfrac{1}{8} & \text{pour } k = 0 \end{cases}$$

On doit ensuite appliquer l'équation de transformation permettant de passer d'un filtre passe-bas à un filtre coupe-bande dont la fréquence centrale est ω_o=2π(4000)/16000 = π/2 :

$$h_{cb}[k] = \delta[k] - 2h_{pb}[k]\cos(\omega_o k)$$

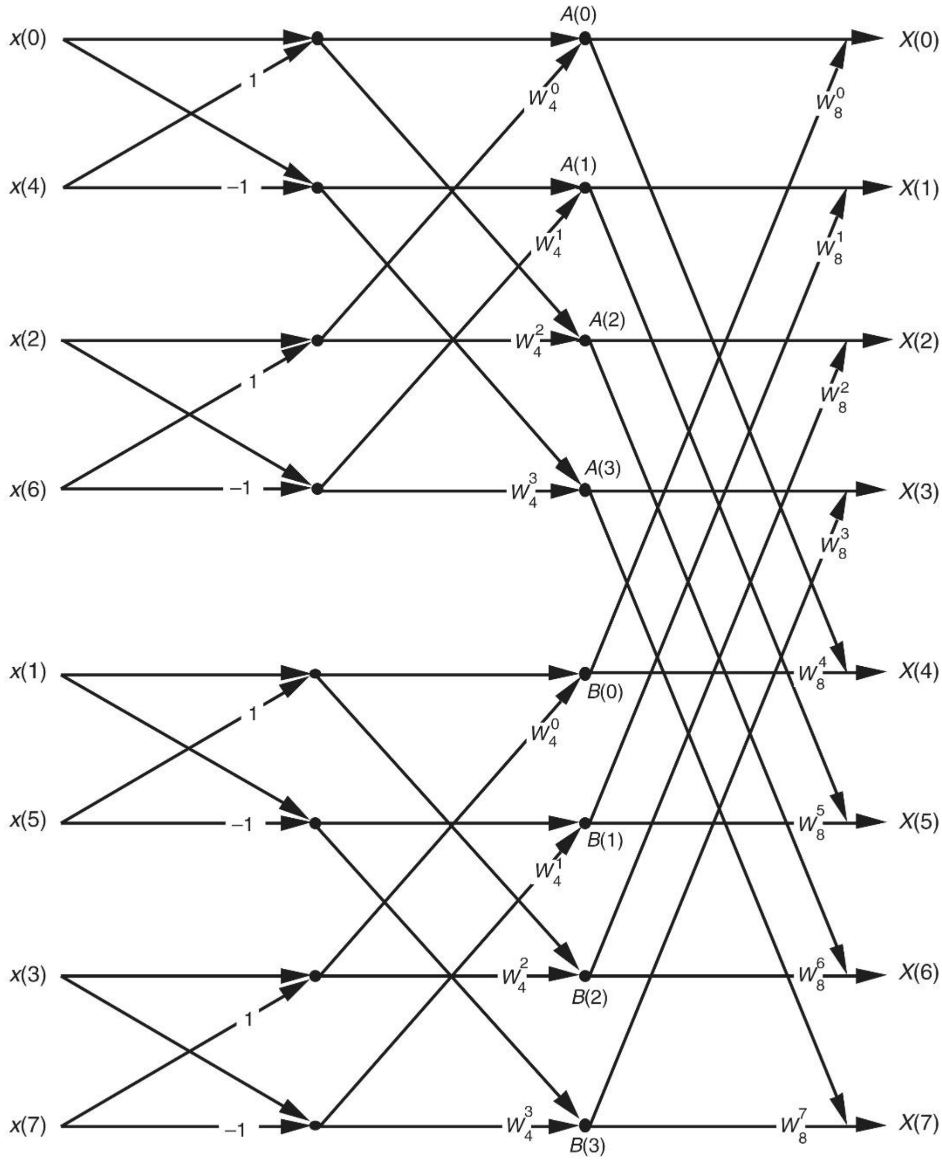
$$\boldsymbol{h_{cb}[k]} = \begin{cases} -\dfrac{1}{8}\dfrac{\sin(\pi k/8)}{\sin(\pi k/16)}\cos(k\pi/2) & \text{pour } k \neq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{4}\cos(k\pi/2) & \text{pour } k = 0 \end{cases}$$

Question 8

Soit le signal discret suivant :

$x[n]$ = [4 9 2 5 8 3 2 3]

À l'aide du diagramme d'une FFT à N=8 point ci-dessous, évaluer les sorties $X[0]$, $X[1]$ et $X[6]$.



En utilisant le fait que $W_N = e^{-j2\pi/N}$ et en suivant le diagramme, nous avons :

$X[0]$:

$$X[0] = A[0] + W_8^0 B[0]$$

où

$$A[0] = (x[0] + x[4]) + W_4^0(x[2] + x[6])$$
$$A[0] = 4 + 8 + 2 + 2 = 16$$

et

$$B[0] = (x[1] + x[5]) + W_4^0(x[3] + x[7])$$
$$B[0] = 9 + 3 + 5 + 3 = 20$$

$$X[0] = 16 + 20 = 36$$

$X[1]$:

$$X[1] = A[1] + W_8^1 B[1]$$

où

$$A[1] = (x[0] - x[4]) + W_4^1(x[2] - x[6])$$
$$A[1] = (4 - 8) + e^{-j2\pi/4}(2 - 2) = -4$$

et

$$B[1] = (x[1] - x[5]) + W_4^1(x[3] - x[7])$$
$$B[1] = (9 - 3) + e^{-\frac{j2\pi}{4}}(5 - 3) = 6 - 2j$$

$$X[1] = -4 + W_8^1(6 - 2j) = -4 + e^{-\frac{j2\pi}{8}}(6 - 2j)$$
$$X[1] = -4 + \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)(6 - 2j) = -1{,}17 - 5{,}65j$$

$X[6]$:

$$X[6] = A[2] + W_8^6 B[2]$$

où

$$A[2] = (x[0] + x[4]) + W_4^2(x[2] + x[6])$$
$$A[2] = (4 + 8) + e^{-2j2\pi/4}(2 + 2) = 12 + 4e^{-j\pi} = 12 - 4 = 8$$

et

$$B[2] = (x[1] + x[5]) + W_4^2(x[3] + x[7])$$
$$B[2] = (9 + 3) + e^{-2\frac{j2\pi}{4}}(5 + 3) = 12 + 8e^{-j\pi} = 12 - 8 = 4$$

$$X[6] = 8 + e^{-6\frac{j2\pi}{8}}(4) = 8 + 4e^{-\frac{j3\pi}{2}} = 8 + 4j$$

Formules mathématiques

Nombres complexes

Règles de base

$$j=\sqrt{-1}, j=\frac{1}{-j}, \pm j^2=\mp 1, (-j)(j)=1, e^{\pm j\pi}=-1, e^{\pm j\frac{\pi}{2}}=\pm j, \sqrt{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$$

Relation d'Euler

$$e^{\pm j\theta}=\cos(\theta)\pm j\sin(\theta)$$

$$\boldsymbol{\cos(\theta)=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin(\theta)=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{j2}, \quad \tan(\theta)=-j\left(\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}\right)}$$

Transformations de Fourier

Transformée de Fourier pour les signaux discrets

$$X(\varpi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\varpi} \quad \Leftrightarrow \quad x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\varpi)e^{j\varpi n}d\varpi \quad \text{où } \varpi=2\pi f/f_s$$

TFSD : Propriétés

$$\begin{aligned}
x[n] &\leftrightarrow X(\varpi)\\
\alpha x_1[n]+\gamma x_2[n] &\leftrightarrow \alpha X_1(\varpi)+\gamma X_2(\varpi)\\
x[n-i] &\leftrightarrow e^{-ji\varpi}X(\varpi)\\
x[n]e^{jn\varpi_0} &\leftrightarrow X(\varpi-\varpi_0)\\
x_1[n]*x_2[n] &\leftrightarrow X_1(\varpi)X_2(\varpi) \qquad * \ \text{:convolution}\\
x_1[n]x_2[n] &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\varpi)*X_2(\varpi)
\end{aligned}$$

TFSD : Transformées fréquentes

$$\begin{aligned}
\delta[n-k] &\leftrightarrow e^{-jk\varpi}, \quad \delta[n] \leftrightarrow 1\\
\cos(n\,\varpi_0) &\leftrightarrow \pi\delta(\varpi+\varpi_0)+\pi\delta(\varpi-\varpi_0)\\
\sin(n\,\varpi_0) &\leftrightarrow j\pi\delta(\varpi+\varpi_0)-j\pi\delta(\varpi-\varpi_0)\\
e^{jn\varpi} &\leftrightarrow 2\pi\delta(\varpi-\varpi_0), \quad 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\varpi)\\
\alpha^n u[n] &\leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha e^{-j\varpi}} \quad \text{où } |\alpha|<1\\
\begin{cases}1 & \text{pour } |n|\le N\\ 0 & \text{pour } |n|>N\end{cases} &\leftrightarrow \frac{\sin((2N+1)\,\varpi/2)}{\sin(\varpi/2)}\\
\begin{cases}\dfrac{\sin(n\varpi_0)}{n\,\pi} & \text{pour } n\neq 0\\ \varpi_0/\pi & \text{pour } n=0\end{cases} &\leftrightarrow \begin{cases}1 & \text{pour } |\varpi|<\varpi_0\\ 0 & \text{pour } |\varpi|>\varpi_0\end{cases}
\end{aligned}$$

Transformée de Fourier discrète (directe et inverse) pour les signaux périodiques

$$X_{\mathrm{p}}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x_{\mathrm{p}}[n] e^{-j(2\pi/N)mn} \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{\mathrm{p}}[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X_{\mathrm{p}}[m] e^{j(2\pi/N)mn}$$

TFD : Propriétés

$$f_{\mathrm{p}}[n] \quad \leftrightarrow \quad F_{\mathrm{p}}[m]$$

$$\alpha f_{\mathrm{p}}[n] + \gamma g_{\mathrm{p}}[n] \quad \leftrightarrow \quad \alpha F_{\mathrm{p}}[m] + \gamma G_{\mathrm{p}}[m]$$

$$f_{\mathrm{p}}[n-i] \quad \leftrightarrow \quad e^{-j(2\pi/N)mi} F_{\mathrm{p}}[m]$$

$$e^{j(2\pi/N)ni} f_{\mathrm{p}}[n] \quad \leftrightarrow \quad F_{\mathrm{p}}[m-i]$$

$$f_{\mathrm{p}}[n] \otimes g_{\mathrm{p}}[n] \quad \leftrightarrow \quad F_{\mathrm{p}}[m] G_{\mathrm{p}}[m] \qquad \otimes \text{ :convolution circulaire}$$

$$f_{\mathrm{p}}[n] g_{\mathrm{p}}[n] \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{N} F_{\mathrm{p}}[m] \otimes G_{\mathrm{p}}[m]$$

<u>Convolution discrète</u>

$$\boldsymbol{y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

<u>Fenêtres</u>

Type	**Définition de la fenêtre**	**Lobe principal**	**Attén. (dB)**
Rectangle	$w_{\mathrm{R}}[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n < L \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$4\pi/L$	21
Triangle	$w_{\mathrm{T}}[n] = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{L+1} & 0 \le n \le \frac{L-1}{2} \\ \frac{2(L-n)}{L+1} & \frac{L-1}{2} < n < L \end{cases}$ ($w_{\mathrm{T}}[n]$ pour un L impair uniquement)	$8\pi/L$	25
Hann	$w_{\mathrm{han}}[n] = \frac{1}{2}\left\{1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right)\right\} w_{\mathrm{R}}[n]$	$8\pi/L$	44
Hamming	$w_{\mathrm{ham}}[n] = \left\{0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right)\right\} w_{\mathrm{R}}[n]$	$8\pi/L$	53
Blackman	$w_{\mathrm{B}}[n] = \left\{0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{L-1}\right)\right\} w_{\mathrm{R}}[n]$	$12\pi/L$	74
Kaiser	(à calculer avec Matlab ou Python)	variable	var.

Filtres RIF (FIR)

Filtre avec M coefficients

$$\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}] = \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{M}-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{h}[\boldsymbol{k}]\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}]$$

Équations de transformation pour les RIF (FIR)

Type de filtre (fréquence normalisée $\bar{\omega}$ de $-\pi$ à π)	**Réponse à l'impulsion**
Filtre passe-bas de 0 à $\bar{\omega}_1$	$h[n]$
Filtre passe-haut de (π - $\bar{\omega}_1$) à π	$(-1)^n h[n]$
Filtre passe-bande de ($\bar{\omega}_0$ - $\bar{\omega}_1$) à ($\bar{\omega}_0$ + $\bar{\omega}_1$)	$2h[n]\cos(\bar{\omega}_0 n)$
Filtre coupe-bande de ($\bar{\omega}_0$ - $\bar{\omega}_1$) à ($\bar{\omega}_0$ + $\bar{\omega}_1$)	$\delta[n] - 2h[n]\cos(\bar{\omega}_0 n)$

Série géométrique

$$\sum_{n=L}^{U} r^n = \frac{r^L - r^{U+1}}{1-r}$$

Méthode de la fenêtre

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin(\pi n K/N)}{\sin(\pi n/N)} & n \neq 0 \\ \dfrac{K}{N} & n = 0 \end{cases}$$