

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté de génie

Département de génie électrique et génie informatique

# **RAPPORT APP5**

Probabilités, Statistiques et Simulations Monte Carlo

Présenté à

Monsieur Eric Plourde

Présenté par

Pascal-Emmanuel Lachance – LACP3102

Anthony St-Laurent Cyr – STLA0801

Sherbrooke 4 avril 2023

# TABLE DES MATIERES

1. Analyse descriptive des données .....	1
1.1. Tableau .....	1
1.1.1. Tableau des caractéristiques .....	1
1.1.2. Règle de Sturges .....	2
1.1.3. Tableau des classes .....	2
1.2. Graphique .....	3
2. Inférence statistique sur la moyenne .....	4
2.1. Estimateur non-biaisé et convergent de la moyenne .....	4
2.2. Estimateur non-biaisé et convergent de la variance .....	5
2.3. Vérification de l'homogénéité par coefficient de variation .....	6
2.4. Estimateur par intervalle de confiance de l'écart-type .....	6
2.5. Test de l'affirmation du collègue A .....	7
2.5.1. Affirmation sur la moyenne .....	7
2.5.2. Affirmation sur l'écart-type .....	8
2.6. Test de Pearson (khi-deux) .....	9
3. Calculs de probabilité .....	11
3.1. Probabilité de non-respect de la garantie .....	11
3.2. Loi binomiale .....	11
4. Simulation de Monte-Carlo .....	13
4.1. Générateur de nombre aléatoires .....	13
4.2. Loi de Rayleigh .....	14
4.2.1. Fonction de répartition du module de l'erreur .....	15
4.2.2. Inversion de la fonction de répartition .....	15
4.3. 10000 réalisations .....	16
4.4. Nuage de point de $[r, \theta]$ .....	17
4.5. Calcul de la distance radiale et de l'angle de visée .....	18
4.6. Calcul des distances axiales à partir des coordonnées polaires .....	19
4.7. Matrice de covariance des distances .....	21
4.8. Analyse des fréquences relatives .....	21

# TABLE DES FIGURES

Figure 1 - Histogramme des fréquences des données .....	3
Figure 2 : Histogramme du test de $\chi^2$ .....	10
Figure 3 - Graphique des différentes valeurs de $\theta$ générées uniformément.....	13
Figure 4 - Histogramme des distributions des nombres aléatoires .....	13
Figure 5 - Loi de Rayleigh .....	14
Figure 6 - 10000 valeurs de $r$ avec un $\sigma^2 = 4$ .....	16
Figure 7 - Comparaison des valeurs données par notre estimateur de la CDF inverse et la fonction Rayleigh de Python.....	16
Figure 8 - $r$ et $\theta$ s'ils étaient corrélés .....	17
Figure 9 - Nuages de points de la CDF inverse par rapport à $\theta$ .....	17
Figure 10 - Nuage de points de la distance radiale et l'angle de visée.....	18
Figure 11 - Graphiques des coordonnées axiales.....	19
Figure 12 - Nuage de points des coordonnées axiales .....	19
Figure 13 - Histogrammes des distances $D_x$ & $D_y$ .....	20

# 1. Analyse descriptive des données

## 1.1. Tableau

### 1.1.1. Tableau des caractéristiques

*Tableau 1 - Tableau des caractéristiques*

<b>Statistique Descriptive</b>	<b>Valeur</b>
<b>Moyenne</b>	9054
<b>Coefficient de variation</b>	2,34%
<b>Médiane</b>	9050
<b>Mode</b>	9000
<b>Écart-type</b>	212,09
<b>Variance</b>	44983,67
<b>Étendu</b>	1300
<b>Minimum</b>	8500
<b>Maximum</b>	9800
<b>Nombre d'échantillons</b>	50
<b>Nombre de classes</b>	7
<b>Étendue des classes</b>	190

### 1.1.2. Règle de Sturges

La règle de Sturges arrondi à la hausse nous donne le nombre de classes et l'arrondi à la hausse de l'étendue divisé par le nombre de classes nous donne l'étendue des classes.

$$Sturges = \lceil 1 + \log_2 N \rceil \quad (1)$$

$$Nbr_{classes} = \lceil 1 + \log_2 50 \rceil = 7 \quad (2)$$

$$Étendue_{classes} = \left\lceil \frac{étendue}{Nbr_{classes}} \right\rceil \quad (3)$$

$$Étendue_{classes} = \left\lceil \frac{1300}{7} \right\rceil = 190 \quad (4)$$

### 1.1.3. Tableau des classes

Tableau 2 - Tableau des classes

<i>Borne inférieure</i>	<i>Milieu de classe</i>	<i>Borne supérieure</i>	<i>Classes</i>	<i>Fréquences Absolues</i>	<i>Fréquences relatives</i>	<i>Fréquences cumulées croissantes</i>
8500	8595	8690	8500 <= x < 8690	2	4%	4%
8690	8785	8880	8690 <= x < 8880	3	6%	10%
8880	8975	9070	8880 <= x < 9070	20	40%	50%
9070	9165	9260	9070 <= x < 9260	21	42%	92%
9260	9355	9450	9260 <= x < 9450	2	4%	96%
9450	9545	9640	9450 <= x < 9640	1	2%	98%
9640	5E+98	1,00E+99	x > 9640	1	2%	100%
Somme				50	100%	

## 1.2.Graphique

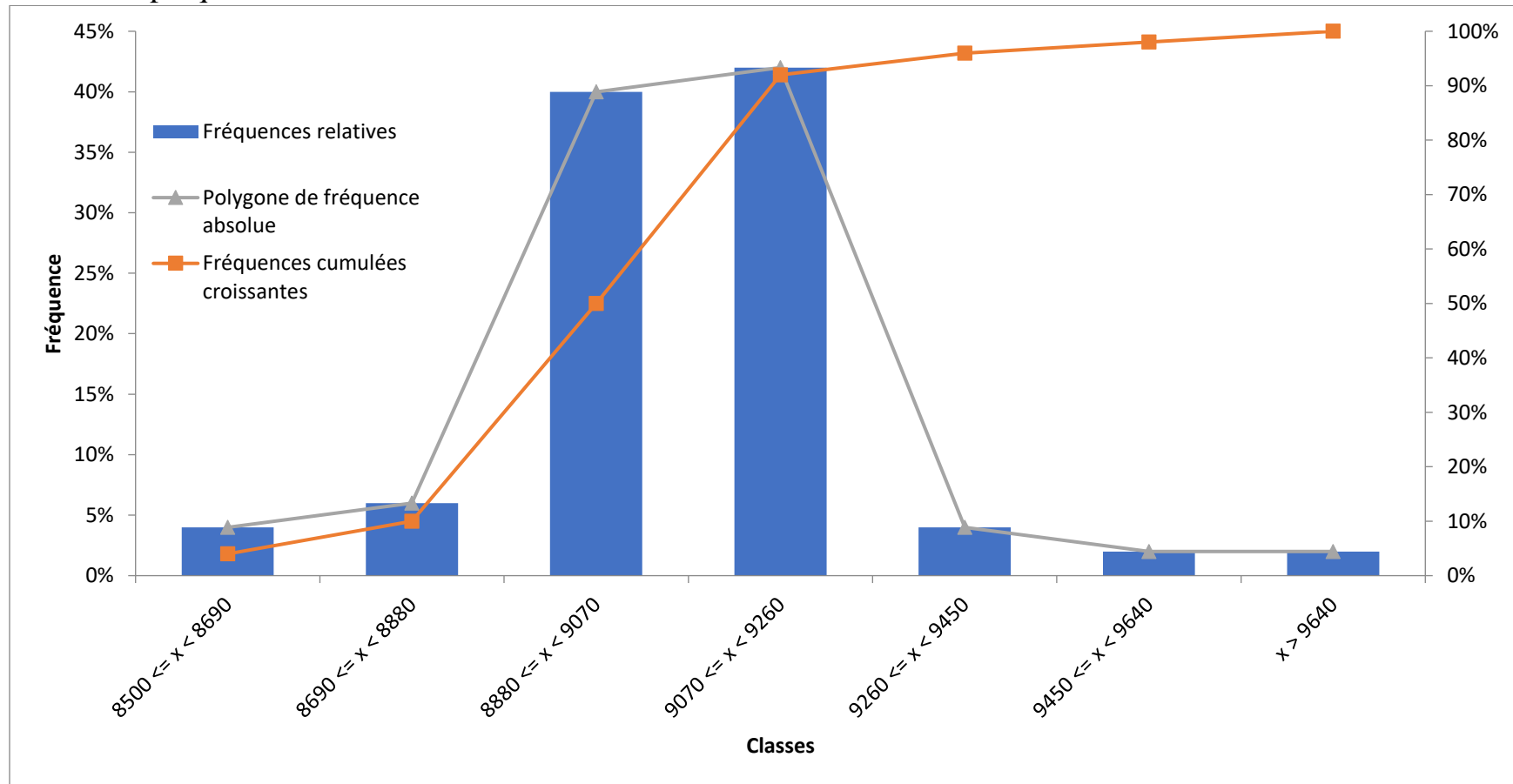


Figure 1 - Histogramme des fréquences des données

On peut remarquer que la distribution semble être normale, avec une moyenne proche de la médiane et un faible coefficient de variation. La moyenne est également inférieure à celle que le collègue A propose.

## 2. Inférence statistique sur la moyenne

### 2.1. Estimateur non-biaisé et convergent de la moyenne

L'estimateur sélectionné  $V$  suivant nous permet d'estimer efficacement  $\mu$ , car il est non-biaisé et convergent tels que démontré ci-dessous.

$$V = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (5)$$

$$V = \frac{452700}{50} = 9054 \quad (6)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Var(V) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} x_i}{\infty} \quad (7)$$

$$V = \frac{x}{\infty} = 0 \quad (8)$$

CQFD !

$$E\{V\} = E\left\{\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}\right\} \quad (9)$$

$$E\{V\} = \frac{1}{N} E\left\{\sum_{i=1}^N x_i\right\} \quad (10)$$

$$E\{V\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{x_i\} \quad (11)$$

$$E\{V\} = \frac{1}{N} NE\{x_i\} \quad (12)$$

$$E\{V\} = \mu \quad (13)$$

CQFD!

## 2.2. Estimateur non-biaisé et convergent de la variance

L'estimateur sélectionné est le U suivant nous permettant d'obtenir une variance très précise. De plus, elle est convergente, car on obtient 0 si on fait tendre N vers l'infini dans U on obtient une variance de 0. De plus, il est non-biaisé, car on obtient effectivement  $\sigma^2$ , lors de la preuve.

$$U = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1} \quad (14)$$

$$U = \frac{2204200}{50 - 1} = 44983.6735 \quad (15)$$

$$\sigma = \sqrt{44983.6735} = 212.09 \quad (16)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Var(U) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \bar{x})^2}{\infty - 1} \quad (17)$$

$$U = \frac{x}{\infty} = 0 \quad (18)$$

CQFD !

$$E(U) = E \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1} \right\} \quad (19)$$

$$E(U) = \frac{1}{N - 1} E \left\{ \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N \bar{x}^2 \right\} \quad (20)$$

$$E(U) = \frac{1}{N - 1} E \left\{ \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^N \bar{x}^2}{N} \right\} \quad (21)$$

$$E(U) = \frac{1}{N - 1} E \left\{ \sum_{i=1}^N x_i^2 \right\} - n E \left\{ \sum_{i=1}^N \bar{x}^2 \right\} \quad (22)$$

$$E(U) = \frac{1}{N - 1} E \left\{ \sum_{i=1}^N (\sigma^2 + \mu^2) \right\} - n \left( \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \quad (23)$$

$$E(U) = \frac{1}{N - 1} [n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2] \quad (24)$$

$$E(U) = \frac{1}{N - 1} [\sigma^2(n - 1)] \quad (25)$$

$$E(U) = \sigma^2 \quad (26)$$

CQFD!



### 2.3. Vérification de l'homogénéité par coefficient de variation

L'homogénéité est valide si on a un coefficient de variation inférieur à 15% ce qui est le cas, puisqu'il est de 2.34%.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad (27)$$

$$CV = \frac{212.09}{9054} = 2.34\% \quad (28)$$

### 2.4. Estimateur par intervalle de confiance de la moyenne

L'estimateur par intervalle de confiance est obtenu par l'équation suivante. Pour obtenir une moyenne  $\mu$  entre 8995.211 et 9112.789 avec une erreur de 58.789.

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} \leq \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}}, \alpha = 0.05 \quad (29)$$

$$z_{0.025} = 1.96 \quad (30)$$

$$9054 - 1.96 \cdot \frac{212.09}{\sqrt{50}} \leq \mu < 9054 + 1.96 \cdot \frac{212.09}{\sqrt{50}} \quad (31)$$

$$8995.211 \leq \mu < 9112.789 \quad (32)$$

$$Erreur = \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (33)$$

$$Erreur = \pm 58.789 \quad (34)$$

### 2.5. Estimateur par intervalle de confiance de l'écart-type

L'estimateur par intervalle de confiance est obtenu par l'équation suivante. Pour obtenir une moyenne  $\sigma$  entre 177.169 et 264.297 avec une erreur de 58.789.

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}} \leq \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}} \quad (35)$$

$$\sqrt{\frac{49 \cdot 212.09^2}{70,2224}} \leq \sigma < \sqrt{\frac{49 \cdot 212.09^2}{31,5549}} \quad (36)$$

$$177.169 \leq \sigma < 264.297 \quad (37)$$

$$Erreur_{Inf} = \sigma_{inf} - s = -34.925 \quad (38)$$

$$Erreur_{sup} = \sigma_{sup} - s = 52.203 \quad (39)$$

## 2.6. Test de l'affirmation du collègue A

### 2.6.1. Affirmation sur la moyenne

Le collègue A a posé comme hypothèse que la moyenne est de 9150, de cette information nous posons  $H_0$  est la moyenne vaut 9150 et  $H_1$  la moyenne ne vaut pas 9150. Nous connaissons le seuil de signification  $\alpha$  de 5% ainsi nous pouvons trouver les  $z$  limites pour rejeter  $H_0$  qui sont de 1.96. Dans notre cas, le  $z$  trouvé vaut 3,201 ce qui nous fait rejeter  $H_0$  et confirmer que le collègue A avait tort. Pour ce qui est de l'erreur nous la connaissons puisqu'il s'agit de la même valeur que le seuil de signification  $\alpha$ . Pour ce qui est de la seconde espèce il s'agit de la probabilité de rejeter  $H_0$  alors que  $H_0$  est vrai. Pour ce faire on calcule les bornes avec notre  $\alpha$  centré à la valeur moyenne estimée et on les centre-réduit par rapport à la moyenne échantillon pour obtenir leur  $z$  on trouve la probabilité entre-elles. Ce qui nous donne un  $\beta$  de 10.75 %.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad (40)$$

$$z = \frac{9054 - 9150}{\frac{212.09}{\sqrt{50}}} = \quad (41)$$

$$z = \pm 3.201 \quad (42)$$

$$z_{H_0} > z_{\alpha}, \text{ rejet de } H_0$$

$$\alpha = P(z < 1.96) \cdot 2 \quad (43)$$

$$\alpha = 2.5\% \cdot 2 = 5\% \quad (44)$$

$$\text{Borne} = \mu \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (45)$$

$$\text{Borne}_g = 9150 - 1.96 \cdot \frac{212.09}{\sqrt{50}} \quad (46)$$

$$\text{Borne}_g = 9091.21 \quad (47)$$

$$\text{Borne}_d = 9150 + 1.96 \cdot \frac{212.09}{\sqrt{50}} \quad (48)$$

$$\text{Borne}_d = 9208.79 \quad (49)$$

$$Z = \frac{\text{Borne} - \bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \quad (50)$$

$$Z_g = \frac{9091.21 - 9054}{\frac{212.09}{\sqrt{50}}} \quad (51)$$

$$Z_g = 1.24, p(z < 1.24) = 0.3925 \quad (52)$$

$$Z_d = \frac{9091.21 - 9054}{\frac{212.09}{\sqrt{50}}} \quad (53)$$

$$Z_d = 5.16, p(z < 5.16) = 0.5 \quad (54)$$

$$\beta = p(Z_d) - p(Z_g) \quad (55)$$

$$\beta = 0.1075, 10.75\% \quad (56)$$

### 2.6.2. Affirmation sur l'écart-type

Le collègue A posé comme hypothèse que l'écart-type est inférieur ou égal à 1000, de cette information nous posons H0 étant l'écart-type plus petit ou égal à 1000 et H1 l'écart type est supérieur à 1000. Nous connaissons le seuil de signification  $\alpha$  de 5%, ainsi nous pouvons trouver le  $\chi^2$  maximum pour rejeter H0, qui est de 66.3387, avec un degré de liberté  $v$  de 49. Dans notre cas, le  $\chi^2$  trouvé vaut 2.2042 ce qui nous permet d'accepter H0 et confirmer que le collègue A avait raison sur son affirmation concernant l'écart-type.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \quad (57)$$

$$\chi^2 = \frac{49 \cdot 212.09^2}{1000^2} \quad (58)$$

$$\chi^2 = 2.2042 \quad (59)$$

## 2.7. Test de Pearson (khi-deux)

Pour le test de  $\chi^2$ , nous devons tout d'abord poser une hypothèse nulle  $H_0$ , qui est que la distribution est normale, et  $H_1$  que la distribution ne soit pas une distribution normale. Nous devons par la suite créer une classification respectant le fait d'avoir minimalement 5 éléments par classes, pour pouvoir obtenir notre  $k$ . Ensuite avec le  $k$  et le  $r$  (notre nombre de variable mis à 2 (écart-type et moyenne)), nous pouvons trouver notre degré de liberté  $v$ . Nous connaissons notre niveau de confiance de 95% avec lequel on peut trouver notre  $\chi^2_{\alpha;v}$  qui ici vaut 5.9915. Avec le Tableau 3 on peut obtenir notre  $\chi^2$  qui est la somme des  $\frac{(F_{gi}-f_{ti})^2}{f_{ti}}$  pour obtenir 5.6613, qui est inférieur au Khi-deux théorique, ce qui nous permet de garder l'hypothèse  $H_0$  : il s'agit bien d'une distribution normale.

Tableau 3 - Test de Pearson (khi-deux)

Classes	Limites	Borne gauche	Borne droite	Borne gauche	Borne droite	Pi( $z_g < z < z_d$ )	$f_{oi}$	Relative	$f_{ti}$	$(F_{gi}-f_{ti})^2/f_{ti}$
1	$x < 8900$	0	8900	-42,69	-0,73	0,2327	5	10%	11,635	3,7836893
2	$8900 \leq x < 9000$	8900	9000	-0,73	-0,255	0,1686	8	16%	8,43	0,02193357
3	$9000 \leq x < 9100$	9000	9100	-0,26	0,22	0,1819	12	24%	9,095	0,92787521
4	$9100 \leq x < 9200$	9100	9200	0,22	0,69	0,1717	11	22%	8,585	0,67935061
5	$x \geq 9200$	9200	1,00E+99	0,69	4,7149E+96	0,2451	14	28%	12,255	0,24847205
Somme						1	50	100%	50	5,66132074

$$v = k - r - 1, k = nbr_{classes}, r = nbr_{variables} \quad (60)$$

$$v = 5 - 2 - 1 = 2 \quad (61)$$

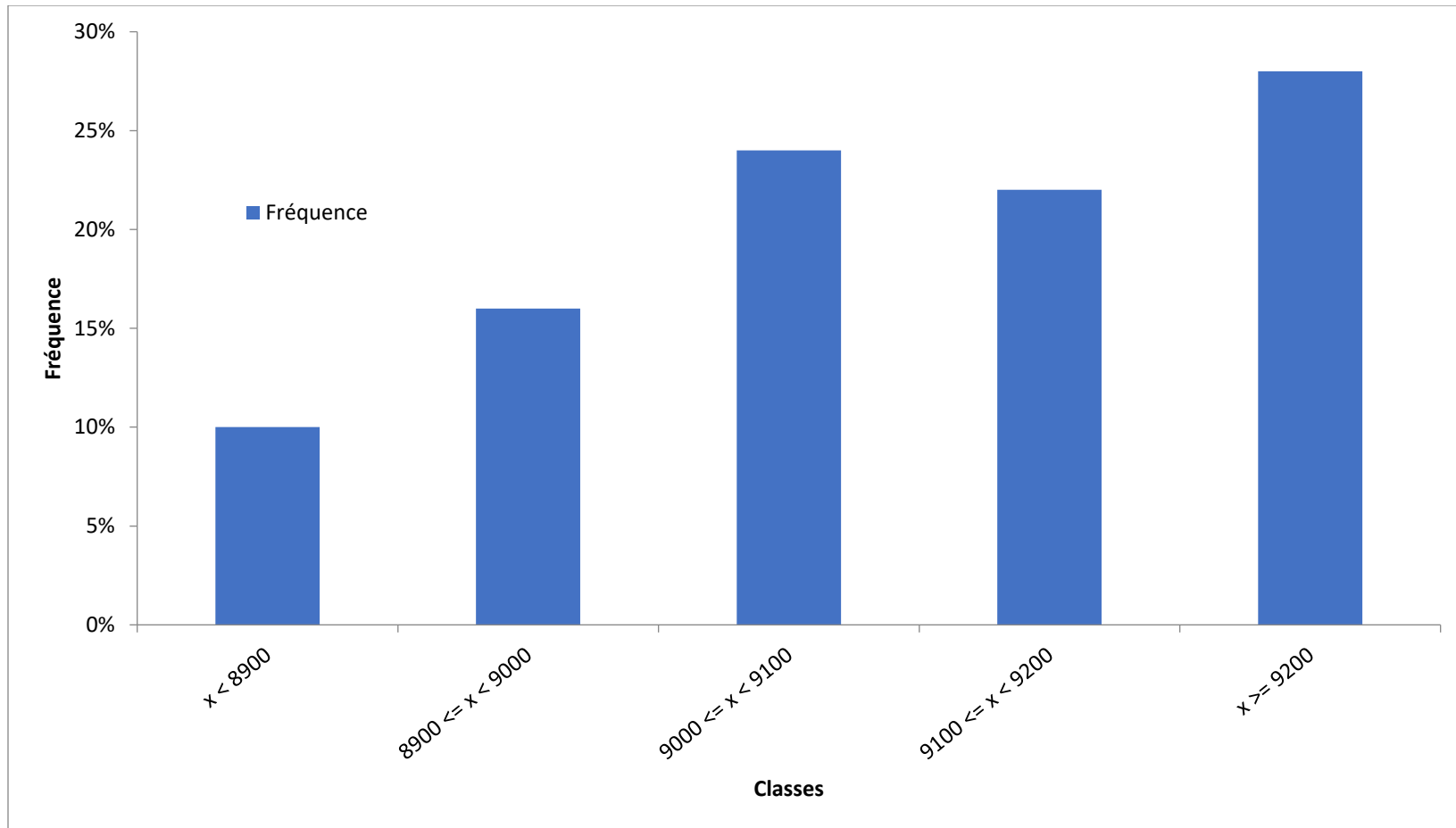


Figure 2 : Histogramme du test de  $\chi^2$

### 3. Calculs de probabilité

#### 3.1. Probabilité de non-respect de la garantie

On sait que la moyenne estimée est de 1770 heures/par ans et qu'on offre une garantie de 5 ans, on obtient donc une garantie couvrant 8850 heures. Pour obtenir la probabilité d'erreur nous considérons une loi normale, puisque nous avons plus de 30 échantillons. Avec la moyenne et l'écart-type trouvé en 1 nous pouvons centrer-réduire la valeur limite de la garantie pour obtenir un  $z$  (8850) de -0.962 ce qui nous donne une probabilité de 16.85% qu'un radar ne respecte pas la garantie.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (62)$$

$$Z = \frac{8850 - 9054}{212.09} \quad (63)$$

$$Z = -0,962 ; p(z < -0.962) = 16.85\% \quad (64)$$

#### 3.2. Loi binomiale

Avec la probabilité d'échec de 16.85% nous pouvons utiliser cette probabilité pour produire une fonction binomiale avec le nombre d'itération de 50 et un nombre d'erreur selon le cas. Nous obtenons ainsi nos quatre valeurs d'erreurs. Pour ce qui est de la moyenne et de la variance de la loi binomiale nous savons que la moyenne est  $N \times P$ , donc 8,425 et la variance est  $N \times P \times (1-P)$ , ce qui nous donne 7,005.

$$P(x) = \frac{N!}{x! * N!} \times (p_{err})^x \times (1 - p_{err})^N \quad (65)$$

$$P(0) = \frac{50!}{0! * 50!} \times (0.1685^0) \times (1 - 0.1685)^{50} \quad (66)$$

$$P(0) = 9,843 \times 10^{-5} \quad (67)$$

$$P(1) = \frac{50!}{1! * 50!} \times (0.1685^1) \times (1 - 0.1685)^{50} \quad (68)$$

$$P(1) = 9,973 \times 10^{-4} \quad (69)$$

$$P(2) = \frac{50!}{2! * 50!} \times (0.1685^2) \times (1 - 0.1685)^{50} \quad (70)$$

$$P(2) = 4,951 \times 10^{-3} \quad (71)$$

$$P(3) = \frac{50!}{3! * 50!} \times (0.1685^3) \times (1 - 0.1685)^{50} \quad (72)$$

$$P(3) = 1,605 \times 10^{-2} \quad (73)$$

$$P(3) = \frac{50!}{3! * 50!} \times (0.1685^3) \times (1 - 0.1685)^{50} \quad (74)$$

$$P(3) = 1,605 \times 10^{-2} \quad (75)$$

$$E\{binomiale\} = N \times P \quad (76)$$

$$E = 50 \times 0.1685 = 8.425 \quad (77)$$

$$Var\{binomial\} = (N \times P)(1 - P) \quad (78)$$

$$Var = (50 \times 0.1685) \times (1 - 0.1685) = 7.005 \quad (79)$$

## 4. Simulation de Monte-Carlo

### 4.1. Générateur de nombre aléatoires

Le générateur de nombres aléatoires a été fait avec la fonction `numpy.random.rand` de Python. Pour obtenir  $\theta$ , chaque résultat du générateur  $U[0, 1]$  a été multiplié par  $2\pi$ .

La distribution graphiquement semble être très uniforme, autant en regardant la Figure 3 que la Figure 4.

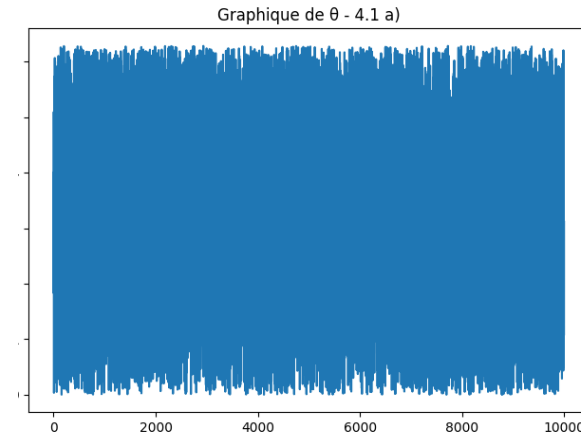


Figure 3 - Graphique des différentes valeurs de  $\theta$  générées uniformément

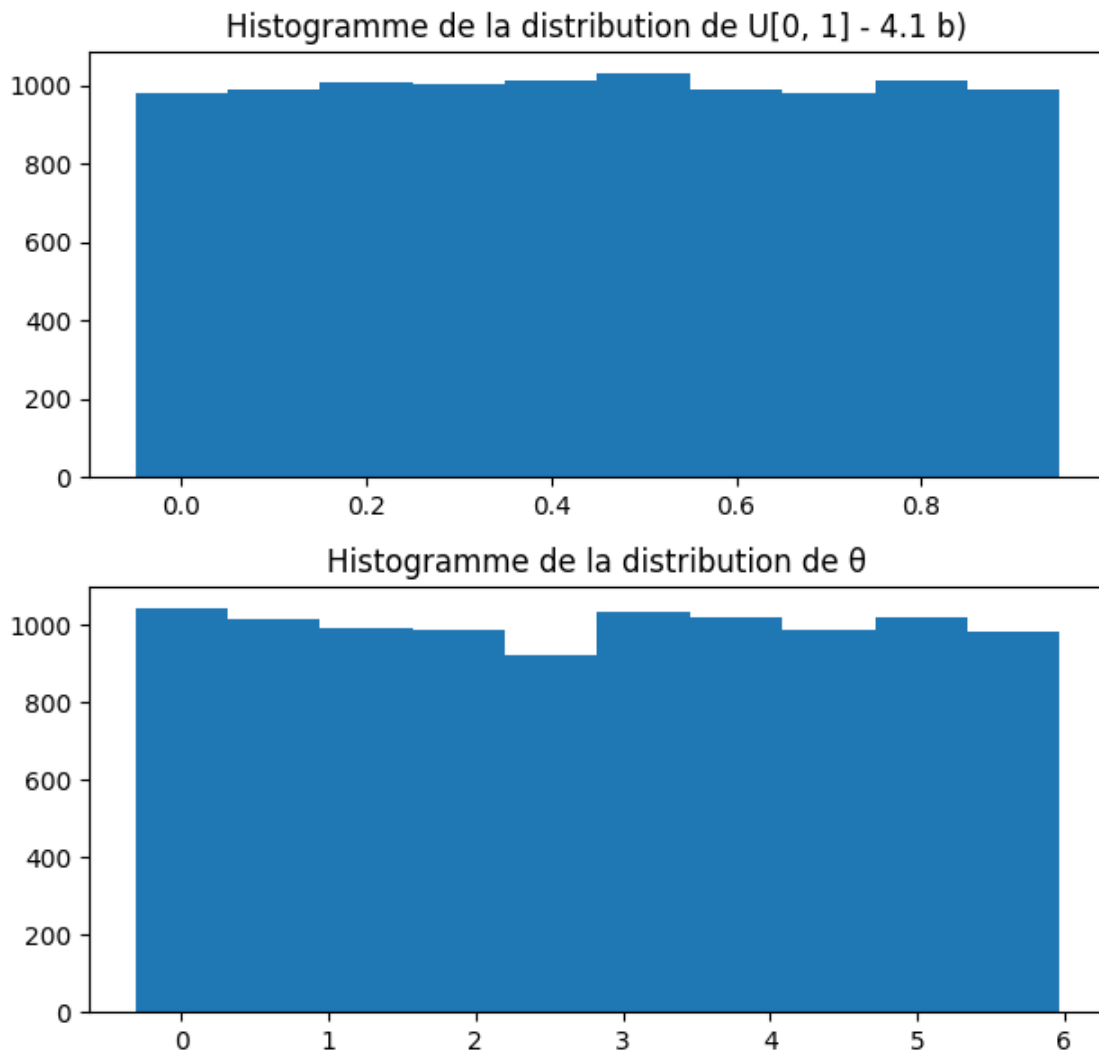


Figure 4 - Histogramme des distributions des nombres aléatoires



## 4.2.Loi de Rayleigh

La Figure 5 présente en premier la loi de Rayleigh théorique pour différentes valeurs de  $\sigma_r^2$ . Ces valeurs proviennent de l'équation  $f_R(r) = \frac{r}{\sigma_r^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}$ , traduites en l'expression Python :

```
r / sigma2 * np.exp(-r**2 / (2 * sigma2)).
```

Par la suite, la CDF (calculée en 4.2.1) est présentée

pour les mêmes valeurs de  $\sigma_r^2$ ,  $F(r) = 1 - e^{-\left(\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right)}$ , donnant l'expression :

```
1 - np.exp(-r**2 / (2 * sigma2)).
```

Finalement, notre fonction inverse de la CDF (calculée en 4.2.2) est présentée,

$$r = \sqrt{-2\sigma_r^2 \cdot \ln(1 - F(r))}$$

```
np.sqrt(-2 * sigma2 * np.log(1 - Fr)).
```

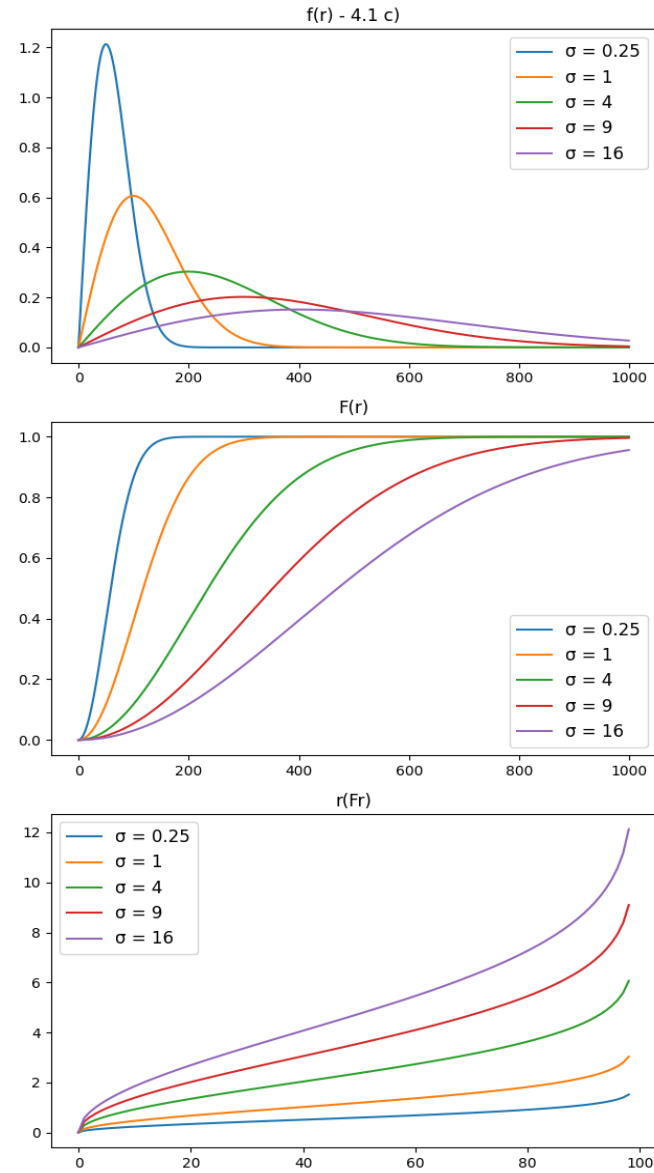


Figure 5 - Loi de Rayleigh

#### 4.2.1. Fonction de répartition du module de l'erreur

Notre CDF  $F(r)$  de la fonction de distribution de Rayleigh  $f(r)$  a été calculé en faisant l'intégrale de la PDF, en substituant  $u = \frac{r^2}{2\sigma^2}$  :

$$F(r) = \int_0^r \frac{r}{\sigma_r^2} \cdot e^{-\left(\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right)} dr = \int_0^r e^u du \quad (80)$$

$$= -e^{-u} \Big|_0^r = -e^{-\left(\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right)} \Big|_0^r \quad (81)$$

$$= 1 - e^{-\left(\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right)} \quad (82)$$

#### 4.2.2. Inversion de la fonction de répartition

L'inverse de la CDF est calculée en isolant  $r$  de  $F(r)$  :

$$F(r) = 1 - e^{-\left(\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right)} \quad (83)$$

$$1 - F(r) = e^{-\left(\frac{r^2}{2\sigma_r^2}\right)} \quad (84)$$

$$-\ln(1 - F(r)) = \frac{r^2}{2\sigma_r^2} \quad (85)$$

$$r = \sqrt{-2\sigma_r^2 \cdot \ln(1 - F(r))} \quad (86)$$

### 4.3.10000 réalisations

Pour tester l'inverse de la fonction de répartition, 10000 valeurs uniformément distribuées entre 0 et 1 ont été rentrées dans notre CDF inversée, pour nous donner un graphique présenté à la Figure 6.

Pour la Figure 7, 10000 valeurs ont été mises dans notre fonction de CDF inverse, ainsi que dans la fonction Python `numpy.random.rayleigh`, pour  $\sigma_r^2 = 4$  &  $\sigma_r^2 = 16$ . Il n'y a pas de différence visuelle majeure entre ce qui est généré par la fonction de numpy et celle que nous avons créée.

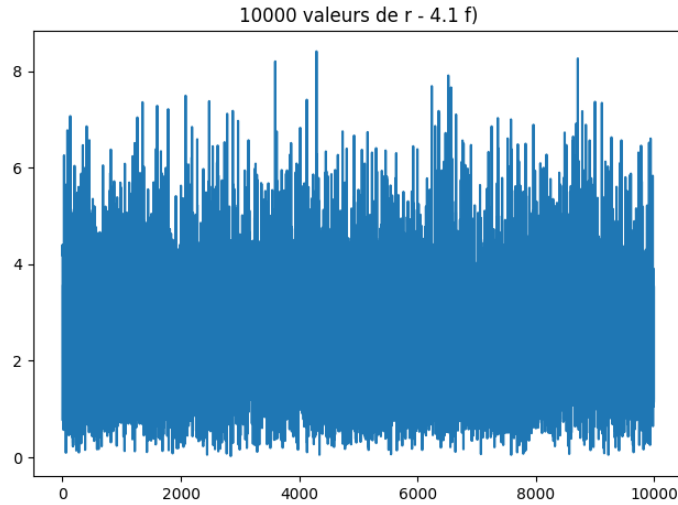


Figure 6 - 10000 valeurs de  $r$  avec un  $\sigma^2 = 4$

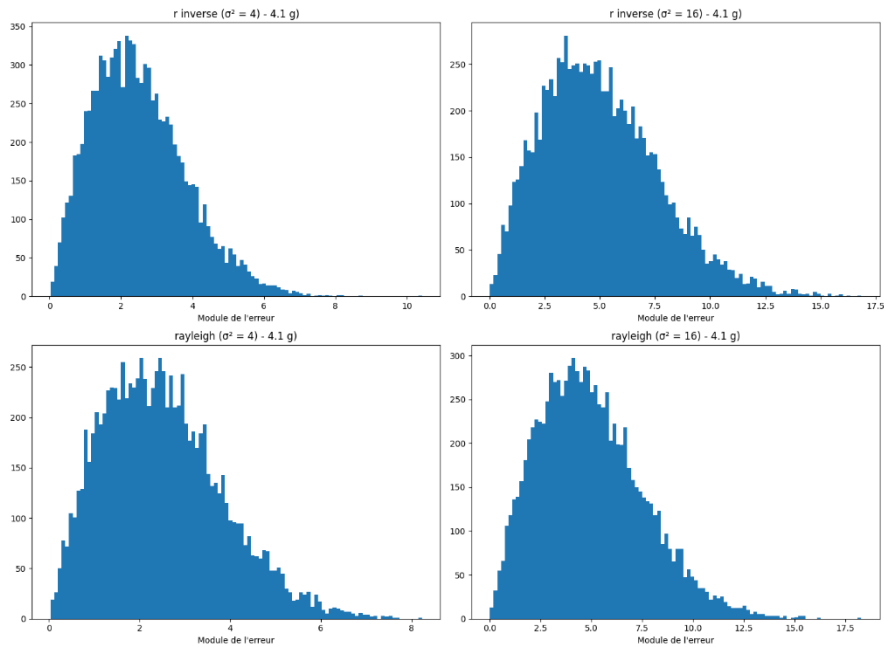


Figure 7 - Comparaison des valeurs données par notre estimateur de la CDF inverse et la fonction Rayleigh de Python

#### 4.4. Nuage de point de $[r, \theta]$

La Figure 9 présente un nuage de points avec  $\theta$  sur l'axe des x et  $r$  sur l'axe des y, avec 10000 points. Il n'y a aucun lien graphiquement visible entre  $\theta$  et  $r$  sur les deux graphiques, qui ressemble fort à celui de la Figure 6. Le nuage de point est très dispersé, avec un nombre de points égal pour chaque valeur de  $\theta$  et de moins en

Si  $\theta$  et  $r$  avaient été générés par le même générateur d'origine, on verrait une corrélation claire comme à la Figure 8.

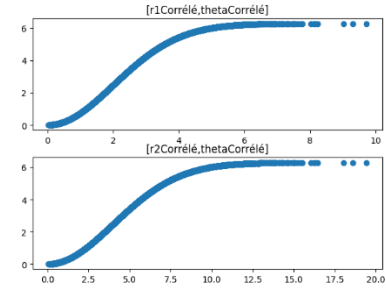


Figure 8 -  $r$  et  $\theta$  s'ils étaient corrélés

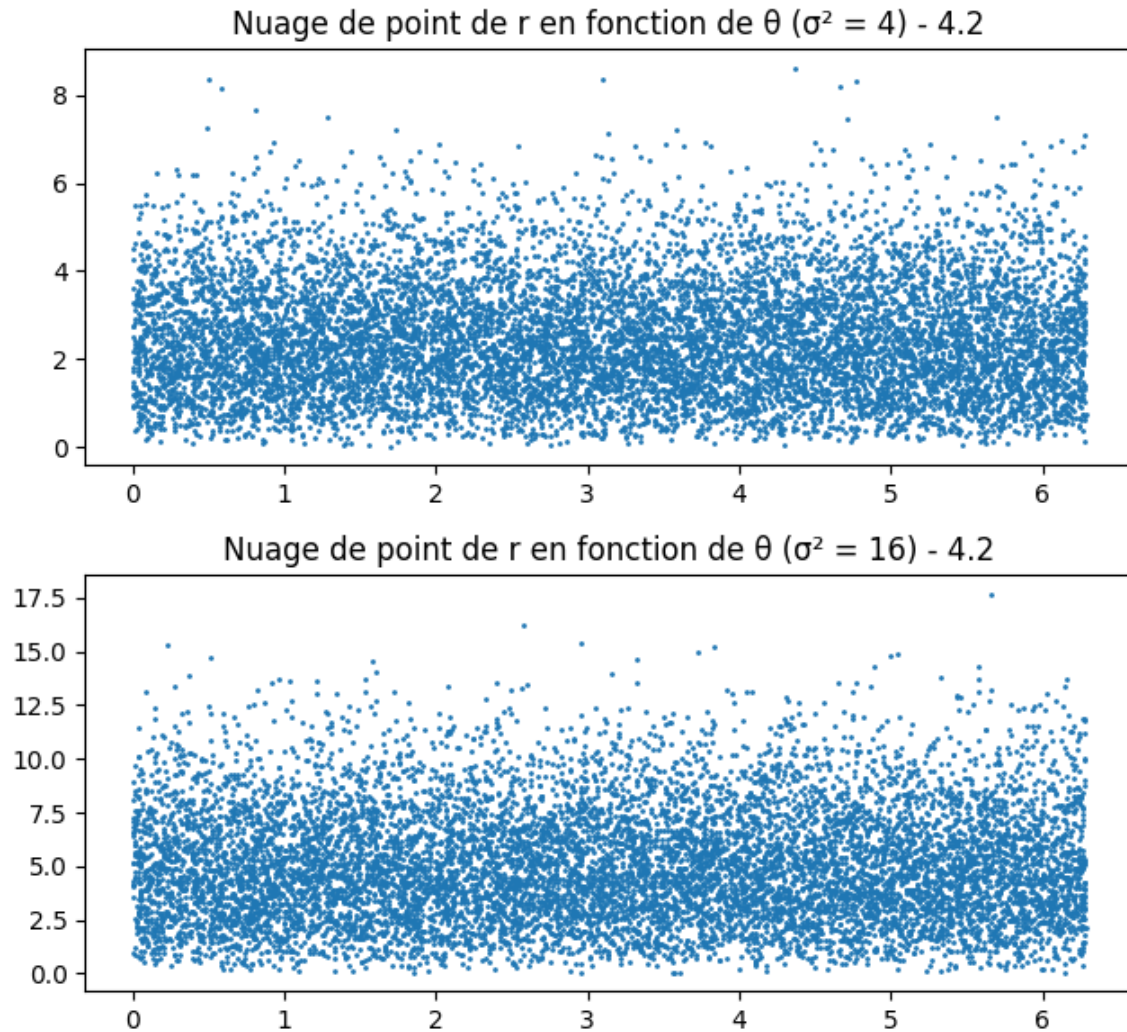


Figure 9 - Nuages de points de la CDF inverse par rapport à  $\theta$

#### 4.5. Calcul de la distance radiale et de l'angle de visée

La distance  $D$  et l'angle  $\varphi$  ont été calculés en utilisant Pythagore et de la trigonométrie de base plutôt qu'en utilisant les formules proposées dans le guide étudiant.

$$D_x = D_0 \cdot \cos \varphi_0 + r \cdot \cos(\theta + \varphi_0) \quad (87)$$

$$D_y = D_0 \cdot \sin \varphi_0 + r \cdot \sin(\theta + \varphi_0) \quad (88)$$

$$D = \sqrt{(D_x)^2 + (D_y)^2} \quad (89)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{D_y}{D_x}\right) \quad (90)$$

Le nuage de points est plutôt circulaire et n'a pas d'orientation significative, ce qui démontre que les données de distance et d'angle ne sont pas corrélées.

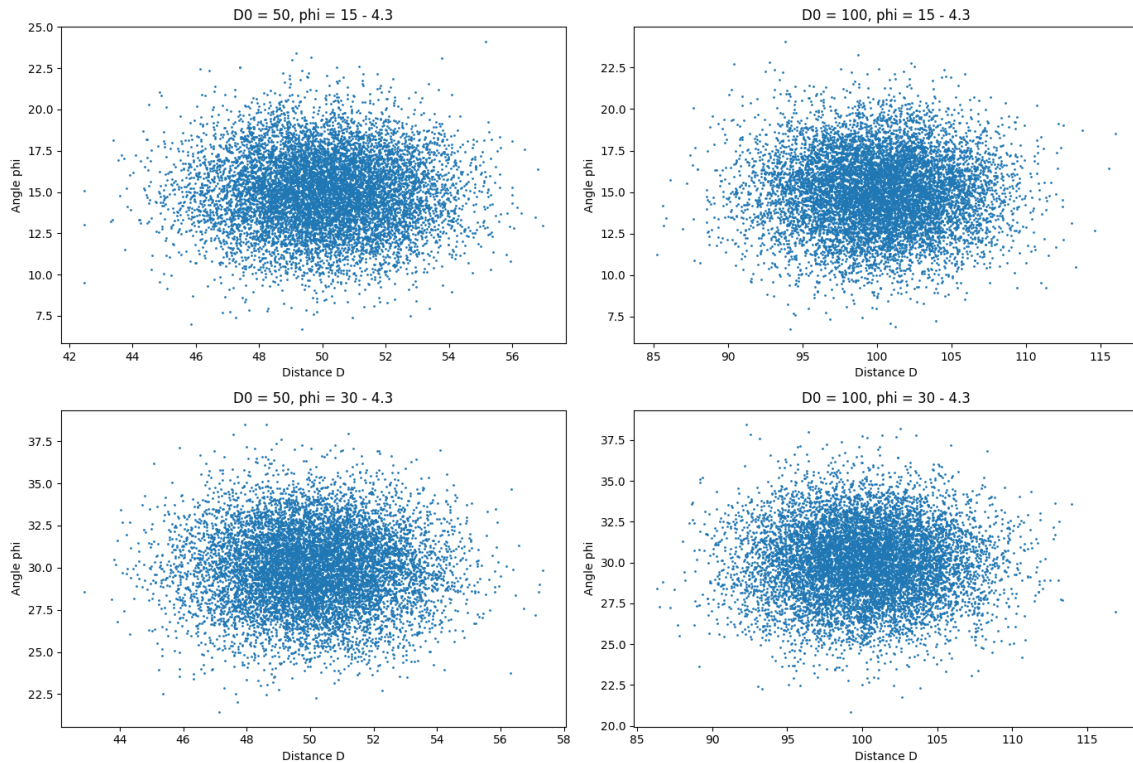


Figure 10 - Nuage de points de la distance radiale et l'angle de visée

#### 4.6. Calcul des distances axiales à partir des coordonnées polaires

Nos graphiques 1D des coordonnées axiales  $D_x$  &  $D_y$  (Figure 11) ne donne pas d'information particulièrement pertinentes, à part une tendance visible centrées autour de leurs moyennes.

Les nuages de points (Figure 12) sont beaucoup plus intéressants à analyser. Avec le  $\sigma_r^2$  plus petit, on voit que les valeurs de gauche pour les distances  $D_0 = 50m$  sont plus serrés, et que la forme presque circulaire du nuage de point n'est pas oblique, ce qui semble confirmer qu'il n'y a pas de corrélation entre les données.

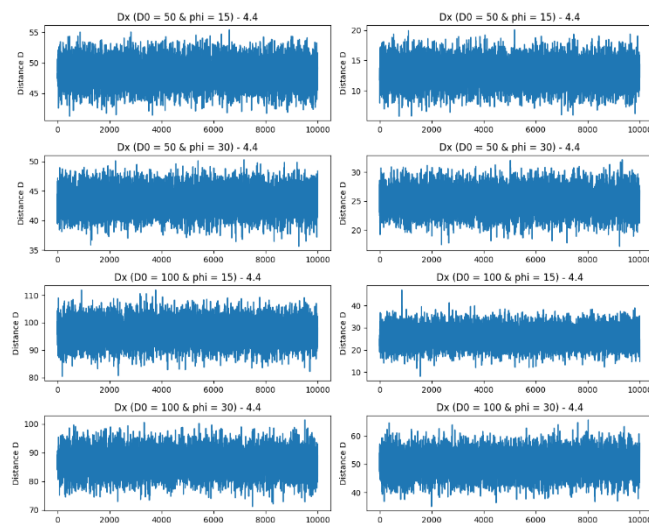


Figure 11 - Graphiques des coordonnées axiales

Les distances axiales sont aussi simplement une décomposition de la distance radiale  $D$  et de l'angle de visée  $\varphi$  (4.5), selon les équations :

$$D_x = D \cdot \cos(\varphi) \quad (91)$$

$$D_y = D \cdot \sin(\varphi) \quad (92)$$

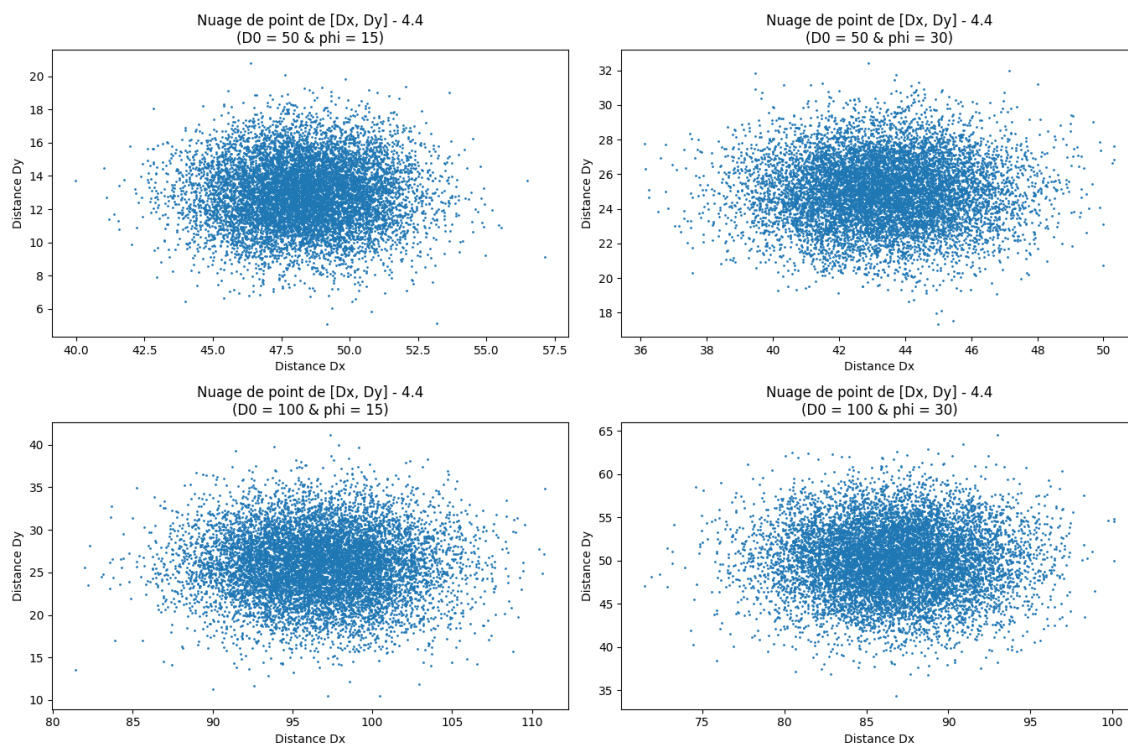


Figure 12 - Nuage de points des coordonnées axiales

Les histogrammes des distances  $D_x$  &  $D_y$  (Figure 13) ont une allure suivant une distribution normale. Un Pythagore des moyennes  $\bar{X}$  redonne une valeur proche du  $D_0$ , et l'écart-type  $s$  semble cohérent avec les valeurs de  $\sigma_{r_{D_0=50m}}^2 = 4$  &  $\sigma_{r_{D_0=100m}}^2 = 16$ . Les courbes de fréquence relatives ressemblent à une gaussienne. Un test de Pearson (khi-deux) pourrait permettre de s'assurer que la distribution est bien gaussienne. Pour  $D_0 = 50m$  par exemple, la PDF pour  $D_x$  serait décrite par l'équation d'en-dessous (avec un test pour  $D_y$  similaire avec un  $\sin(\varphi)$ ).

$$f(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x-D_0 \cdot \cos(\varphi)}{\sigma_{r_{D_0}}}\right)^2}}{\sigma_{r_{D_0}} \cdot \sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-\frac{(x-50 \cdot \cos(\varphi))^2}{8}}}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} \quad (93)$$

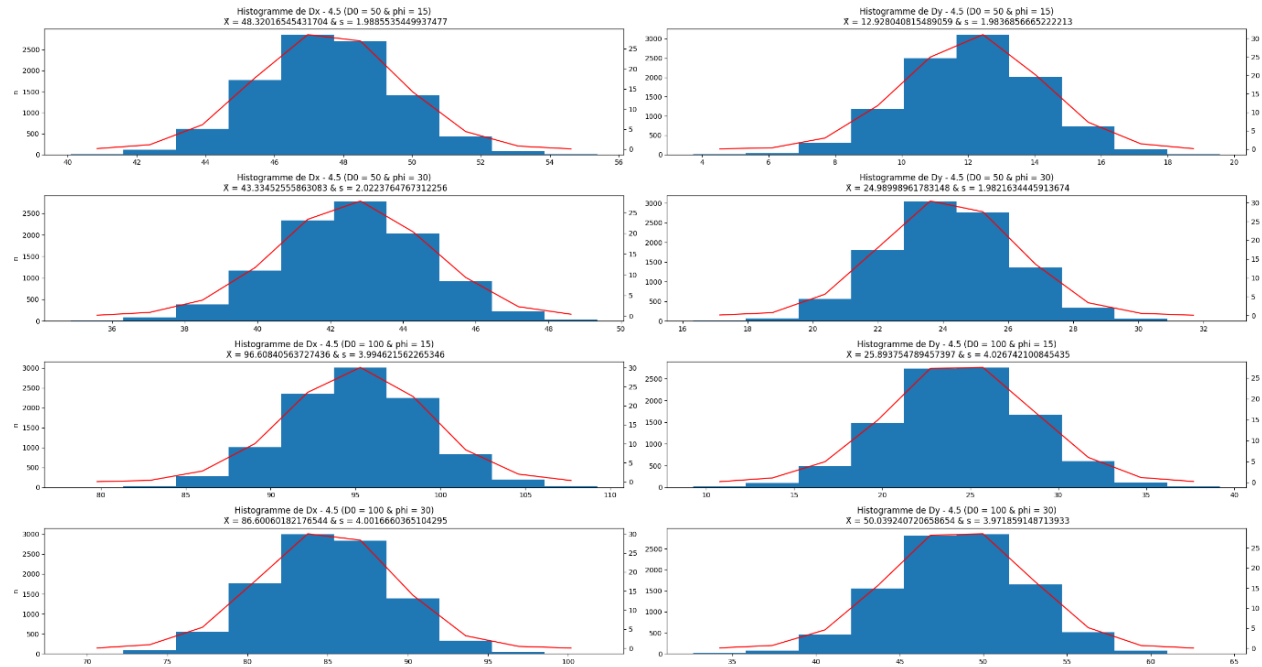


Figure 13 - Histogrammes des distances  $D_x$  &  $D_y$

#### 4.7. Matrice de covariance des distances

	$\varphi = 15^\circ$	$\varphi = 30^\circ$
$D_0 = 50m$	$\begin{bmatrix} 3.9735 & -0.0159 \\ -0.0159 & 4.022 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.0442 & -0.0085 \\ -0.0085 & 3.9886 \end{bmatrix}$
$D_0 = 100m$	$\begin{bmatrix} 15.4136 & -0.2221 \\ -0.2221 & 15.8929 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15.9685 & 0.2295 \\ 0.2295 & 16.1281 \end{bmatrix}$

#### 4.8. Analyse des fréquences relatives

Pour obtenir les longueurs des axes majeurs et mineurs de l'ellipse considérant que  $D_x$  et  $D_y$  ne sont pas corrélés, nous savons que la longueur de l'axe majeur est  $2\sigma_x\sqrt{S}$  et la longueur de l'axe mineur  $2\sigma_y\sqrt{S}$ , notre  $S$  pour un niveau de confiance de 95% est de 5.991. De plus, l'angle de l'ellipse est nul.

$$L_{Maj}(d_0=50;\varphi=15^\circ) = 2 \cdot 3.9735 \cdot \sqrt{5.991} \quad (94)$$

$$L_{Maj}(d_0=50;\varphi=15^\circ) = 19.45 \quad (95)$$

$$L_{Min}(d_0=50;\varphi=15^\circ) = 2 \cdot 4.022 \cdot \sqrt{5.991} \quad (96)$$

$$L_{Min}(d_0=50;\varphi=15^\circ) = 19.69 \quad (97)$$

$$L_{Maj}(d_0=50;\varphi=30^\circ) = 2 \cdot 4.0442 \cdot \sqrt{5.991} \quad (98)$$

$$L_{Maj}(d_0=50;\varphi=30^\circ) = 19.80 \quad (99)$$

$$L_{Min}(d_0=50;\varphi=30^\circ) = 2 \cdot 3.9886 \cdot \sqrt{5.991} \quad (100)$$

$$L_{Min}(d_0=50;\varphi=30^\circ) = 19.53 \quad (101)$$

$$L_{Maj}(d_0=100;\varphi=15^\circ) = 2 \cdot 15.4136 \cdot \sqrt{5.991} \quad (102)$$

$$L_{Maj}(d_0=100;\varphi=15^\circ) = 75.45 \quad (103)$$

$$L_{Min}(d_0=100;\varphi=15^\circ) = 2 \cdot 15.8929 \cdot \sqrt{5.991} \quad (104)$$

$$L_{Min}(d_0=100;\varphi=15^\circ) = 77.80 \quad (105)$$

$$L_{Maj}(d_0=100;\varphi=30^\circ) = 2 \cdot 15.9685 \cdot \sqrt{5.991} \quad (106)$$

$$L_{Maj}(d_0=100;\varphi=30^\circ) = 78.17 \quad (107)$$

$$L_{Min}(d_0=100;\varphi=30^\circ) = 2 \cdot 16.1281 \cdot \sqrt{5.991} \quad (108)$$

$$L_{Min}(d_0=100;\varphi=30^\circ) = 78.95 \quad (109)$$