Programa:

- Morfologia matemática
- **Representação e descrição**
- Reconhecimento de padrões

Momentos

São propriedades numéricas (quantidades escalares) usadas para caracterizar uma função (região) ou descrever suas características significativas.

Serão abordados:

Momentos simples
Momentos centrais
Momentos centrais normalizados
Momentos de Hu

Momentos

São quantidades escalares usadas para caracterizar uma função (um objeto) ou capturar suas características significativas.

Representando por M_{pq} o momento de uma imagem, sendo p e q inteiros não regativos, e **r = p+q** é a ***ordem* do momento**.

-> Ex: m_{30}, m_{03}, m_{21} e m_{12} são momentos de terceira ordem.

Sendo f(x,y) função contínua bidimensional, o momento de ordem p+q é definido como:

$$M_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x,y)\, dx\, dy$$

Para uma função discreta bidimensional I(i,j):

$$M_{pq} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} i^p j^q I(i,j) \Rightarrow M_{pq} = \sum_{i} \sum_{j} i^p j^q I(i,j)$$

Momentos centrais

Momentos geométricos não são invariantes à translação, à escala e à rotação.

-> Deseja-se obter momentos invariantes a tais fatores.
O primeiro passo consiste em obter os momentos centrais m_{pq} para então calcular os momentos centrais normalizados η_{pq}.

. Os momentos centrais podem ser expressos como

$$\mu_{pq} = \sum_{i} \sum_{j} (i - \bar{x})^p (j - \bar{y})^q \; I(i,j)$$

Onde o centróide da imagem é obtido através de

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad e \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

Momentos centrais: $\mu_{pq} = \sum\sum (\mathrm{i} - \bar{x})^p (\mathrm{j} - \bar{y})^q \; \mathrm{I}(\mathrm{i},\mathrm{j})$

IMPLEMENTAÇÃO 2 | IMPLEMENTAÇÃO 1

$$\mu_{00} = \boxed{\sum_i\sum_j (\mathrm{i}-\bar{x})^0(\mathrm{j}-\bar{y})^0\,\mathrm{I}(\mathrm{i},\mathrm{j})} = \boxed{m_{00}}$$

$$\mu_{01} = \sum_i\sum_j (\mathrm{i}-\bar{x})^0(\mathrm{j}-\bar{y})^1\,\mathrm{I}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = m_{01} - \frac{m_{10}}{m_{00}}(m_{00}) = 0$$

$$\mu_{10} = \sum_i\sum_j (\mathrm{i}-\bar{x})^1(\mathrm{j}-\bar{y})^0\,\mathrm{I}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = m_{10} - \frac{m_{10}}{m_{00}}(m_{00}) = 0$$

$$\mu_{11} = \sum_i\sum_j (\mathrm{i}-\bar{x})^1(\mathrm{j}-\bar{y})^1\,\mathrm{I}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = m_{11} - \frac{m_{10}m_{01}}{m_{00}}$$

$$\mu_{20} = \sum_i\sum_j (\mathrm{i}-\bar{x})^2(\mathrm{j}-\bar{y})^0\,\mathrm{I}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = m_{20} - \frac{2m_{10}^2}{m_{00}} + \frac{m_{10}^2}{m_{00}} = m_{20} - \frac{m_{10}^2}{m_{00}}$$

$$\mu_{02} = \sum_i\sum_j (\mathrm{i}-\bar{x})^0(\mathrm{j}-\bar{y})^2\,\mathrm{I}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = m_{02} - \frac{m_{01}^2}{m_{00}}$$

$$\mu_{30} = \sum_i\sum_j (\mathrm{i}-\bar{x})^3(\mathrm{j}-\bar{y})^0\,\mathrm{I}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = m_{30} - 3\bar{x}m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{10}$$

$$\mu_{12} = \sum_i\sum_j (\mathrm{i}-\bar{x})^1(\mathrm{j}-\bar{y})^2\,\mathrm{I}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = m_{12} - 2\bar{y}m_{11} - \bar{x}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{10}$$

$$\mu_{21} = \sum_i\sum_j (\mathrm{i}-\bar{x})^2(\mathrm{j}-\bar{y})^1\,\mathrm{I}(\mathrm{i},\mathrm{j}) = m_{21} - 2\bar{x}m_{11} - \bar{y}m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{01}$$

$$\mu_{03} = \sum_i\sum_j (x-\bar{x})^0(y-\bar{y})^3 f(x,y) = m_{03} - 3\bar{y}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{01}$$

Implementação (1) em Matlab dos momentos centrais até a ordem 3:

$$\mu_{00} = m_{00}$$
$$\mu_{01} = 0$$
$$\mu_{10} = m_{10} - \frac{m_{10}}{m_{00}}(m_{00}) = 0$$
$$\mu_{11} = m_{11} - \frac{m_{10}m_{01}}{m_{00}}$$
$$\mu_{20} = m_{20} - \frac{2m_{10}^2}{m_{00}} + \frac{m_{10}^2}{m_{00}} = m_{20} - \frac{m_{10}^2}{m_{00}}$$
$$\mu_{02} = m_{02} - \frac{m_{01}^2}{m_{00}}$$
$$\mu_{30} = m_{30} - 3\bar{x}m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{10}$$
$$\mu_{12} = m_{12} - 2\bar{y}m_{11} - \bar{x}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{10}$$
$$\mu_{21} = m_{21} - 2\bar{x}m_{11} - \bar{y}m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{01}$$
$$\mu_{03} = m_{03} - 3\bar{y}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{01}$$

```
mi_00 = M_00;

mi_01 = 0;

mi_10 = 0;

mi_11 = M_11 - (M_10 * M_01) / M_00;

mi_20 = M_20 - (M_10 ^2)/ M_00;

mi_02 = M_02 - (M_01 ^2)/ M_00;

mi_30 = M_30 - 3*xm*M_20 + 2*(xm^2)*M_10;

mi_12 = M_12 - 2*ym*M_11 - xm*M_02 + 2*(ym^2)* M_10;

mi_21 = M_21 - 2*xm*M_11 - ym*M_20 + 2*(xm^2)* M_01;

mi_03 = M_03 - 3*ym*M_02 + 2*(ym^2)*M_01;
```

Implementação (2) dos momentos centrais até a ordem 3:

```
% fazendo
x = x – xm;
y = y – ym;


% momentos centrais de ordens 0 e 1:
mi_00 = M_00;
mi_01 = 0;
mi_10 = 0;
```

```
% momentos centrais de ordens 2 e 3:
for i= 1:m
for j = 1:n
      T3(i,j) = y(i,1)*I(i,j)*x(1,j);
      T4(i,j) = I(i,j)*(x(1,j)^2);
      T5(i,j) = (y(i,1)^2)*I(i,j);
      T6(i,j) = (y(i,1))*I(i,j)*x(1,j)^2;
      T7(i,j) = (y(i,1)^2)*I(i,j)*x(1,j);
      T8(i,j) = I(i,j)*(x(1,j)^3);
      T9(i,j) = (y(i,1)^3)*I(i,j);
end
end

mi_11 = sum(sum(T3))
mi_20 = sum(sum(T4))
mi_02 = sum(sum(T5))
mi_21 = sum(sum(T6))
mi_12 = sum(sum(T7))
mi_30 = sum(sum(T8))
mi_03 = sum(sum(T9))
```

Exercício:

Calcule os momentos centrais para as chaves.

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{\gamma}} \qquad \text{para} \quad \gamma = \frac{p+q}{2} + 1$$

p = 1, q = 1 -> $\eta_{11} = \dfrac{\mu_{11}}{\mu_{00}^{2}}$

p = 2, q = 1 -> $\eta_{21} = \dfrac{\mu_{21}}{\mu_{00}^{3/2+1}}$

```
% momentos centrais normalizados
eta_11=mi_11/mi_00^2;
eta_20=mi_20/mi_00^2;
eta_02=mi_02/mi_00^2;
eta_21=mi_21/mi_00^(5/2);
eta_12=mi_12/mi_00^(5/2);
eta_30=mi_30/mi_00^(5/2);
eta_03=mi_03/mi_00^(5/2);
```

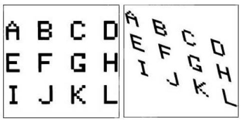
$$\phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$$
$$\phi_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2$$
$$\phi_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2$$

```
% momentos de Hu
Hu_1=eta_20 + eta_02;

Hu_2=(eta_20 - eta_02)^2 + (2*eta_11)^2;

Hu_3=(eta_30 - 3*eta_12)^2 + (3*eta_21 - eta_03)^2;
```

Momentos invariantes afins

- foram introduzidos por Flusser e Suk em1993.

  -> invariantes a transformações afins



- são obtidos a partir dos momentos centrais:

$$I_1 = \frac{\mu_{20}\cdot\mu_{02} - \mu_{11}^2}{\mu_{00}^4}$$

$$I_2 = \frac{\mu_{30}^2\cdot\mu_{03}^2 - 6\cdot\mu_{30}\cdot\mu_{21}\cdot\mu_{12}\cdot\mu_{03} + 4\cdot\mu_{30}\cdot\mu_{12}^3 + 4\cdot\mu_{21}^3\cdot\mu_{03} - 3\cdot\mu_{21}^2\cdot\mu_{12}^2}{\mu_{00}^{10}}$$

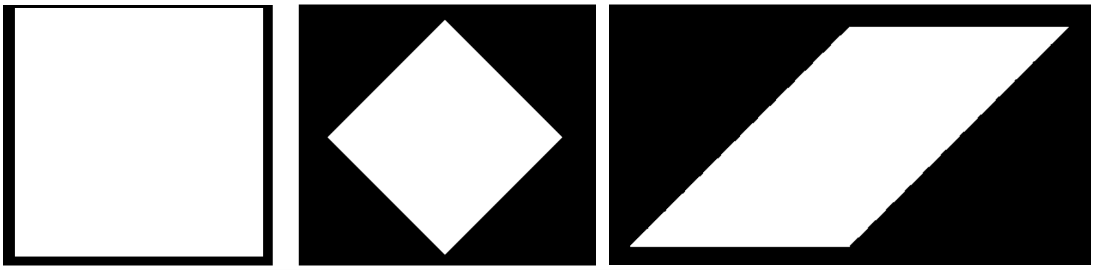
$$I_3 = \frac{\mu_{20}\cdot\left(\mu_{21}\cdot\mu_{03} - \mu_{12}^2\right) - \mu_{11}\cdot\left(\mu_{30}\cdot\mu_{03} - \mu_{21}\cdot\mu_{12}\right) + \mu_{02}\cdot\left(\cdot\mu_{30}\cdot\mu_{12} - \mu_{21}^2\right)}{\mu_{00}^7}$$

$$\begin{aligned} I_4 = \frac{1}{\mu_{00}^{11}}\Big(&\mu_{20}^3\cdot\mu_{03}^2 - 6\cdot\mu_{20}^2\cdot\mu_{11}\cdot\mu_{12}\cdot\mu_{03} - 6\cdot\mu_{20}^2\cdot\mu_{02}\cdot\mu_{21}\cdot\mu_{03} \\ &+ 9\cdot\mu_{20}^2\cdot\mu_{02}\cdot\mu_{12}^2 + 12\cdot\mu_{20}\cdot\mu_{11}^2\cdot\mu_{21}\cdot\mu_{03} + 6\cdot\mu_{20}\cdot\mu_{11}\cdot\mu_{02}\cdot\mu_{30}\cdot\mu_{03} \\ &- 18\cdot\mu_{20}\cdot\mu_{11}\cdot\mu_{02}\cdot\mu_{21}\cdot\mu_{12} - 8\cdot\mu_{11}^3\cdot\mu_{30}\cdot\mu_{03} - 6\cdot\mu_{20}\cdot\mu_{02}^2\cdot\mu_{30}\cdot\mu_{12} \\ &+ 9\cdot\mu_{20}\cdot\mu_{02}^2\cdot\mu_{21}^2 + 12\cdot\mu_{11}^2\cdot\mu_{02}\cdot\mu_{30}\cdot\mu_{12} - 6\cdot\mu_{11}\cdot\mu_{02}^2\cdot\mu_{30}\cdot\mu_{21} + \mu_{02}^3\cdot\mu_{30}^2\Big) \end{aligned}$$

```
% momentos invariantes afins
I1 = (mi_20*mi_02 - mi_11^2) / (mi_00^4);

I2 = ( (mi_30^2)*(mi_03^2) - 6* mi_30*mi_21*mi_12*mi_03 + 4*mi_30*(mi_12^3)+
4*(mi_21^3)*mi_03 - 3*(mi_21^2)*(mi_12^2) )/(mi_00^10);

I3 = ( mi_20*(mi_21*mi_03-mi_12^2) - mi_11*(mi_30*mi_03-mi_21*mi_12) +
mi_02*(mi_30*mi_12-mi_21^2) ) / (mi_00^7)
```

Exercício 2

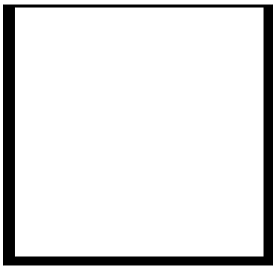
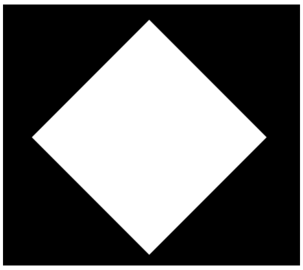
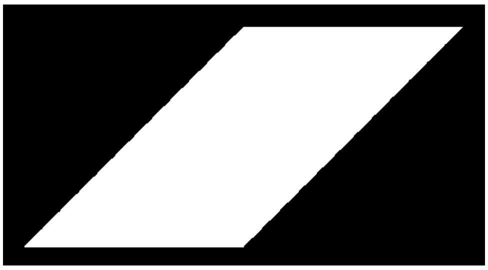
Calcule os três primeiros momentos invariantes afins para os objetos:



Momento	Quadrado 1b	Quadrado 2b	Quadrado 3b
Hu_1			
Hu_2			
Hu_3			
I_1			
I_2			
I_3			

Exercício 2

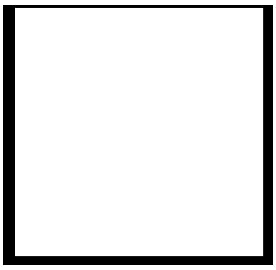
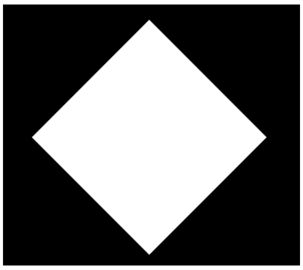
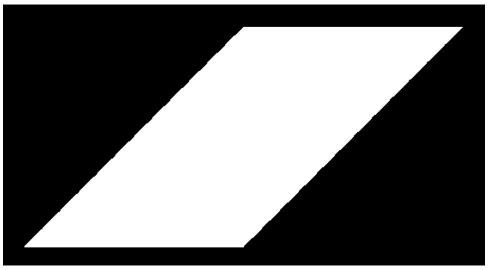
Calcule os três primeiros momentos invariantes afins para os objetos:

Momento	Quadrado 1b	Quadrado 2b	Quadrado 3b
Hu_1	0.1667	0.1667	0.2502
Hu_2	0	0	0
Hu_3	0	0	0
I_1	0.0069	0.0069	0.0069
I_2	0	0	0
I_3	0	0	0

Exercício 3

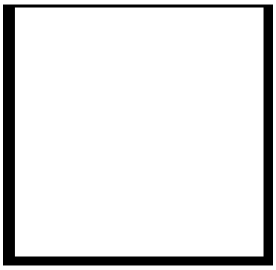
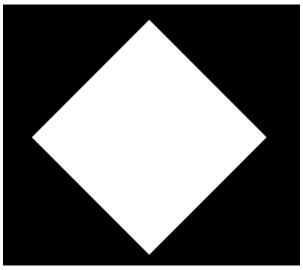
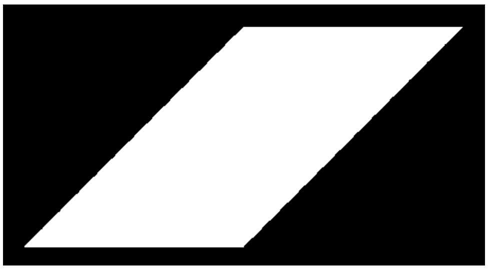
Calcule os três primeiros momentos invariantes afins para os objetos:

Momento	Quadrado 1	Quadrado 2	Quadrado 3
Hu_1			
Hu_2			
Hu_3			
I_1			
I_2			

Exercício 3

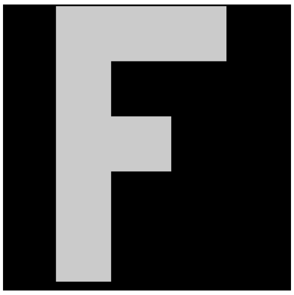
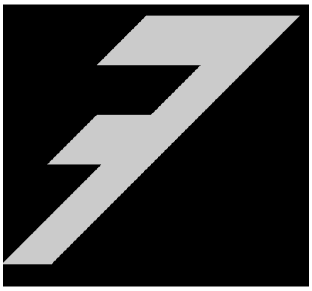
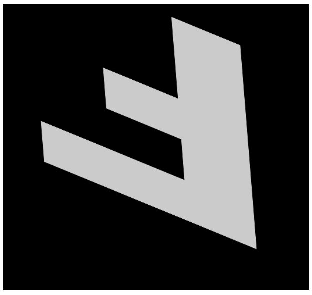
Calcule os três primeiros momentos invariantes afins para os objetos:

Momento	Quadrado 1	Quadrado 2	Quadrado 3
Hu_1	0.000654	0.000654	0.000981
Hu_2	0	0	0
Hu_3	0	0	0
I_1	1.068×10^{-7}	1.068×10^{-7}	1.068×10^{-7}
I_2	0	0	0
I_3	0	0	0

Exercício 4

Calcule os três primeiros momentos invariantes afins para os objetos:

Momento invariante afim	Letra 1	Letra 2	Letra 3
I_1			
I_2			
I_3			