Fundamentos de imagens digitais
23/03/2018

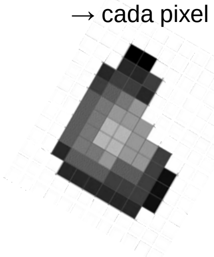
- **Transformações geométricas no plano**
- Propriedades características das transformações geométricas
- Equações na forma do mapeamento direto e do mapeamento inverso
- Determinação dos parâmetros da transformação geométrica
    - Coordenadas homogêneas
    - Resolução de equações com matrizes com coordenadas homogêneas

- Exercício: Aplicação da transformação geométrica para o caso de medição a partir de uma imagem.

- Medida de coordenadas de imagem com o software Multispec

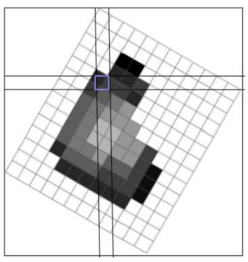
<u>Motivação:</u>

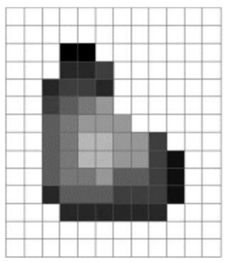
O pixel (contração de "picture element") é a unidade básica de uma imagem.
→ o píxel é adimensional
→ cada pixel é individualizado pela sua posição (linha,coluna)



Quando precisamos medir a dimensão de um objeto a partir da imagem, necessitamos conhecer a área (ou a dimensão linear) correspondente a um pixel.
→ Precisamos estabelecer a relação (por meio de uma transformação de coordenadas) entre o sistema de coordenadas de imagem e um outro sistema de coordenadas com significado métrico.

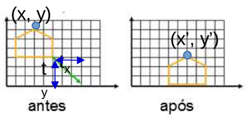
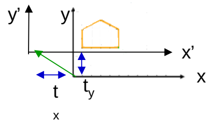
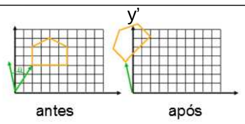
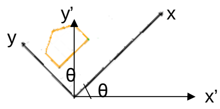
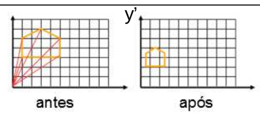
As transformações geométricas permitem gerar uma nova imagem de acordo com determinadas propriedades geométricas desejadas, tais como rotação do objeto e mudança de sua escala. Neste caso, é necessário reamostrar a imagem original para gerar cada pixel da nova imagem.

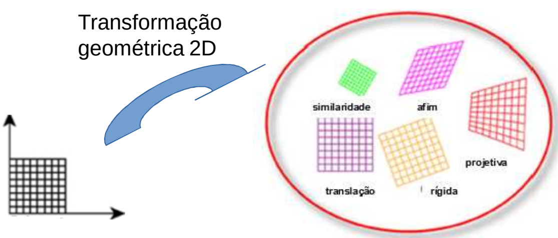




Transformação geométrica no plano

Casos:
- Transformação ativa: movimento de um objeto;
- Transformação passiva: posição do mesmo objeto em dois sistemas de coordenadas.

Elementos da transformação	Transformação ativa	**Transformação passiva**	Expressão
Translação			$x' = x + t_x$ $y' = y + t_y$
Rotação			$x' = a\,x - b\,y$ $y' = b\,x + a\,y$ Onde $a = \cos(\theta)$ $b = \text{sen}(\theta)$
Mudança de escala			$x' = s\,x$ $y' = s\,y$ Onde s é fator de escala

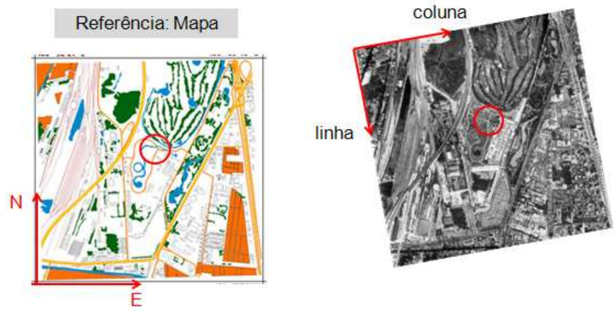


Transformação linear	Fatores modelados	Propriedade característica
Ortogonal ou Rígida (O)	Translação (2) e rotação	Comprimento invariante
Similaridade (S)	Translação (2), rotação e escala	Forma invariante
Afim (A)	Translação (2), rotação, escala (2), e não ortogonalidade	Paralelismo invariante
Projetiva (P)	Centros perspectivos (2)	Colinearidade invariante

Tais fatores são
a)Conhecidos **a priori**, ou
b)São **determinados** (calculados) a partir de pontos comuns (medidos) nos dois sistemas de coordenadas.

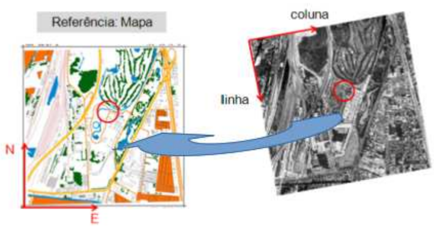
Pontos de controle são pontos cujas coordenadas são conhecidas (medidas) nos dois sistemas de coordenadas,

- devem ser bem definidos na imagem a ser modificada e na referência.
- devem ser bem distribuídos na área de interesse.



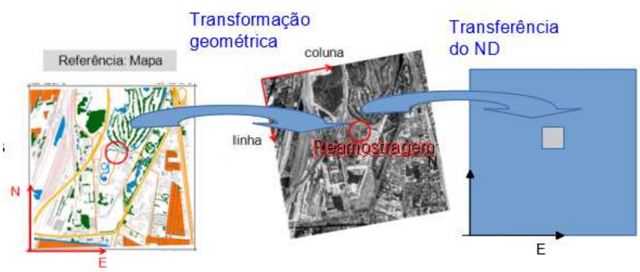
Mapeamento direto:
E = f(linha,coluna)
N = f (linha,coluna)

Cada pixel da imagem é projetado na correspondente posicão na sistema de coordenadas da imagem referencia.

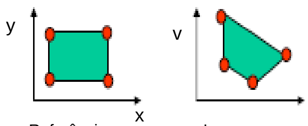


Mapeamento inverso:
linha = f(E,N)
coluna = f (E,N)

Para cada posição (E, N) da referência são calculadas as coordenadas (linha,coluna) na imagem, e é definido o valor (ND) a ser transferido para a posição (E,N) da imagem de saída.



Mapeamento inverso



Referência   Imagem a ser modificada

a) para um ponto i:

$u_i = a\,x_i + b\,y_i + c$
$v_i = d\,x_i + e\,y_i + f$

Transformações ortogonal, de similaridade e afim

b) matricialmente, para n pontos: B = A . X
Onde A é a matriz das derivadas em relação aos parâmetros

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \\ v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

$$u_i = \frac{a\,x_i + b\,y_i + c}{g\,x_i + hy_i + i} \qquad v_i = \frac{d\,x_i + e\,y_i + f}{g\,x_i + h\,y_i + i}$$

Transformação projetiva

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \\ v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1u_1 & -y_1u_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2u_2 & -y_2u_2 \\ \dots & & & & & & & \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_nu_n & -y_nu_n \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & y_0 & 1 & -x_0v_0 & -y_0v_0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1v_1 & -y_1v_1 \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -x_nv_n & -y_nv_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{bmatrix}$$

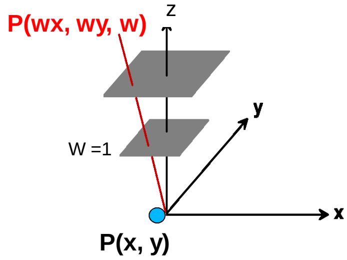
Coordenadas homogêneas

Um ponto em um espaço n-dimensional é representado em coordenadas homogêneas em um espaço (n+1)-dimensional.

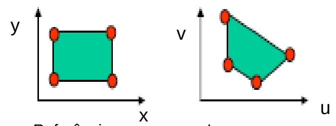
=> A ideia geral é a de que todo problema em um espaço n-dimensional possui pelo menos um equivalente em um espaço (n+1)-dimensional. A obtenção de um resultado no espaço (n+1)-dimensional é muitas vezes muito mais fácil do que em um espaço n-dimensional.Os resultados são então projetados de volta ao espaço n-dimensional.

Um ponto P(x,y) é representado no sistema de coordenadas homogêneo por P(X, Y, w), sendo **w** chamado de fator de escala e
x = X/w e
y = Y/w.

=> Utilizar w = 1 , equivale a posicionar o plano xy cartesiano no sistema de coordenadas homogêneo 2D na posição w=1 do eixo z.



Mapeamento inverso



Referência   Imagem a ser modificada

a) para um ponto i:

$$\begin{vmatrix} u \\ v \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \boxed{g \quad h} & & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

g = 0 ;
h = 0 ➤ Transformações ortogonal, de similaridade e afim

$$\begin{vmatrix} u \\ v \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \boxed{g \quad h} & & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

g ≠ 0 ;
h ≠ 0 ➤ Transformação projetiva

b) matricialmente, para n pontos: B = X . A

$$\overbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}}^{B} = \overbrace{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b \\ d & e \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} c \\ f \end{matrix}} \\ \boxed{g \quad h} & 1 \end{vmatrix}}^{X} \overbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}}^{A}$$

c, f : fatores de translação

a,b,d,e : fatores de rotação, cizalhamento, escala (2 fatores)

g,h: centros perspectivos

Exemplo de resolução de sistemas de equações:

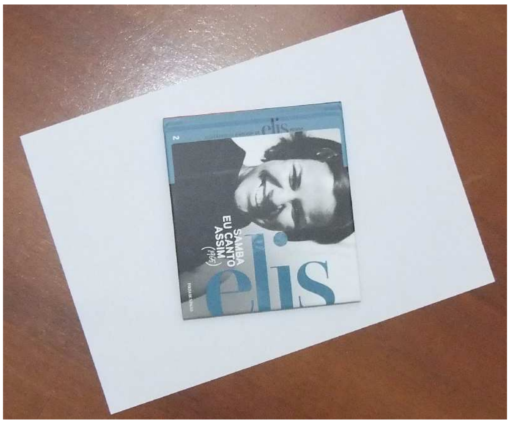
Resolva matricialmente os sistemas de equações:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 366 \\ 804 \\ 351 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercício 1:

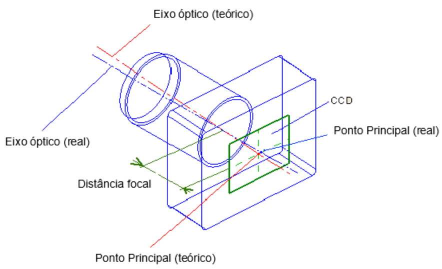
- **Descrição do Problema:** O livro foi colocado sobre uma folha A4 (210 mm x 297 mm). Deseja-se determinar as dimensões do livro a partir da fotografia.

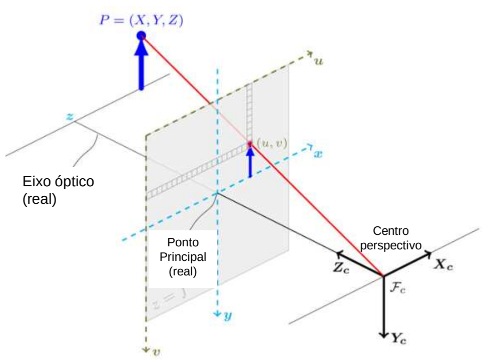


Obs. Estão sendo desconsiderados neste exercício os erros causados na imagem por fatores tais como distorções das lentes.

Obs. Estão sendo desconsiderados neste exercício os erros causados na imagem por fatores tais como distorções das lentes, e o desconhecimento da posição correta do ponto principal.

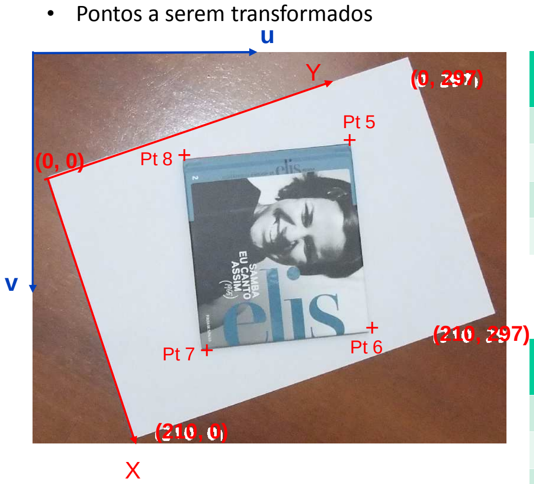
=> tais elementos são determinados mediante a calibração da câmera.





Resolução:

- Sistemas de coordenadas: referência e imagem
- Pontos de controle
- Pontos a serem transformados



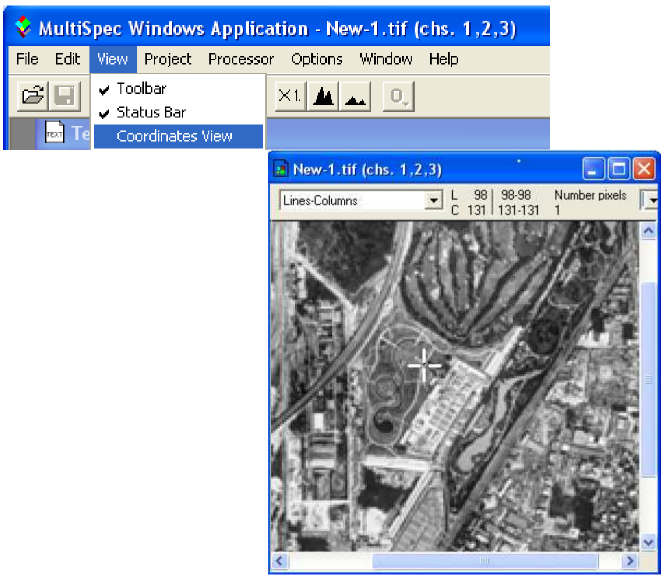
Pontos de controle

Número do ponto	u	v	x	y
1			0	0
2			210	0
3			210	297
4			0	297

Pontos a serem transformados para o sistema (X,Y):

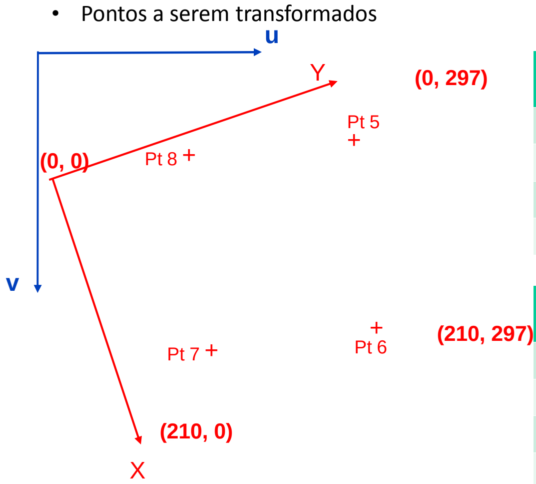
Número do ponto	u	v	x	y
5				
6				
7				
8				

Medida de coordenadas com o Multispec:



Resolução:

- Sistemas de coordenadas: referência e imagem
- Pontos de controle
- Pontos a serem transformados



Número do ponto	u	v	x	y
1	24	209	0	0
2	169	651	210	0
3	777	439	210	297
4	630	8	0	297

Número do ponto	u	v	x	y
5	533	153		
6	565	469		
7	284	499		
8	251	180		

Mapeamento direto ou mapeamento inverso?

Número do ponto	u	v	x	y
1	24	209	0	0
2	169	651	210	0
3	777	439	210	297
4	630	8	0	297

A =

B =

$X = B \cdot A^T \cdot inv(A \cdot A^T)$

->Verificar se a matriz da transformação está adequada

Número do ponto	u	v	x	y
5	533	153		
6	565	469		
7	284	499		
8	251	180		

A_livro =

B_livro =