Mécanique Analytique

I) Formalisme lagrangien

1) Principes variationnels.

Ω : espace de fonctions
$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ fonctionnelle
Principe variationnel : Extrémiser F sur Ω

Exemple : * Chemin dans un espace : Ω
Longueur d'un chemin : F
⇝ géodésiques

* Ω : surface dans $\mathbb{R}^3$
F : aire de la surface
⇝ surface minimale

* Ω : trajectoire
F : Action

* Ω : Champ
F : Action du champ

* F est différentiable en $f \in \Omega$ ssi il existe une fonctionnelle linéaire $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall \varepsilon > 0, \forall h \in \Omega$

$$F(f+\varepsilon h) = F(f) + \varepsilon\phi(h) + O(\varepsilon^2)$$

On note $\phi(h) = dF_f(h)$

Principe variationnel : f satisfait au principe si $dF_f(h) = 0$ $\forall h \in \Omega$

2) Espace des configurations et action.

Un système est holonome s'il est soumis à des contraintes

$$C_k(\underbrace{x_1(t), \dots, x_{3N}(t)}_{\text{positions}}, t) = 0 \qquad k = 1, \dots, K$$

$\Rightarrow$ On utilise plutôt un paramétrage des contraintes par des coordonnées indépendantes $(q_i \mid i=1,\dots,3N-K)$ telles que $x_i(t) = X_i(q_1;\dots;q_{3N-K})$ soit une solution des contraintes.

↳ Coordonnées généralisées $(q_i \mid i=1;\dots;3N-K)$

↳ Espace des configurations.

Remarque : Contraintes non-holonomes $C_h(\dots) \geq 0$
$C_h(x_i, v_i) = 0$

⇝ Multiplicateur de Lagrange

Système lagrangien :

* Espace des états $(q_i ; \dot{q}_i)_{i=1,\dots,3N-K}$ coordonnées indépendantes

pour l'instant pas de lien entre les deux juste des coordonnées

* Fonction de Lagrange ou Lagrangien :

$$L(q_i, \dot{q}_i ; t)$$

Principe variationnel : On définit l'action :

$$S(q_i(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$$

chemin donc pas besoin de dépendance en $\dot{q}_i$

Extrémiser S

On, on a :

$$dS_{q_i(t)}(h_i) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N-K} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) h_i + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{h}_i \right]$$

$$dS_{q_i(t)}(h_i) \overset{\text{IPP}}{=} \sum_{i=1}^{3N-K}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} h_i\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N-K}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right] h_i$$

=> L'action est extrémale sur l'espace des chemins dans l'espace des configurations tels que $q_i(t_1) = q_i^{(1)}$ et $q_i(t_2) = q_i^{(2)}$

($\Rightarrow h_i(t_1) = h_i(t_2) = 0$) => pour respecter les conditions initiales

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, 3N-K}$$

Euler-Lagrange

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot q_i} \equiv$ impulsion généralisée

$F_i = \dfrac{\partial L}{\partial q_i} \equiv$ force généralisée

Alors : $\boxed{\dfrac{dp_i}{dt} = F_i}$ équations du mouvement

Remarque : Le lagrangien d'un système lagrangien est non-unique. Si L_1 et L_2 sont deux lagrangiens tels que :

$$L_2(q_i, \dot q_i, t) - L_1(q_i, \dot q_i, t) = \frac{d\alpha}{dt}$$

pour une fonction α, alors ils ont la même action et donc les mêmes équations du mouvement

Exemple : Systèmes des points matériels soumis à des forces conservatives

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{m_\alpha}{2} \dot x_{\alpha,i}^2$$

énergie cinétique

$U(x_{\alpha,i})$ énergie potentielle

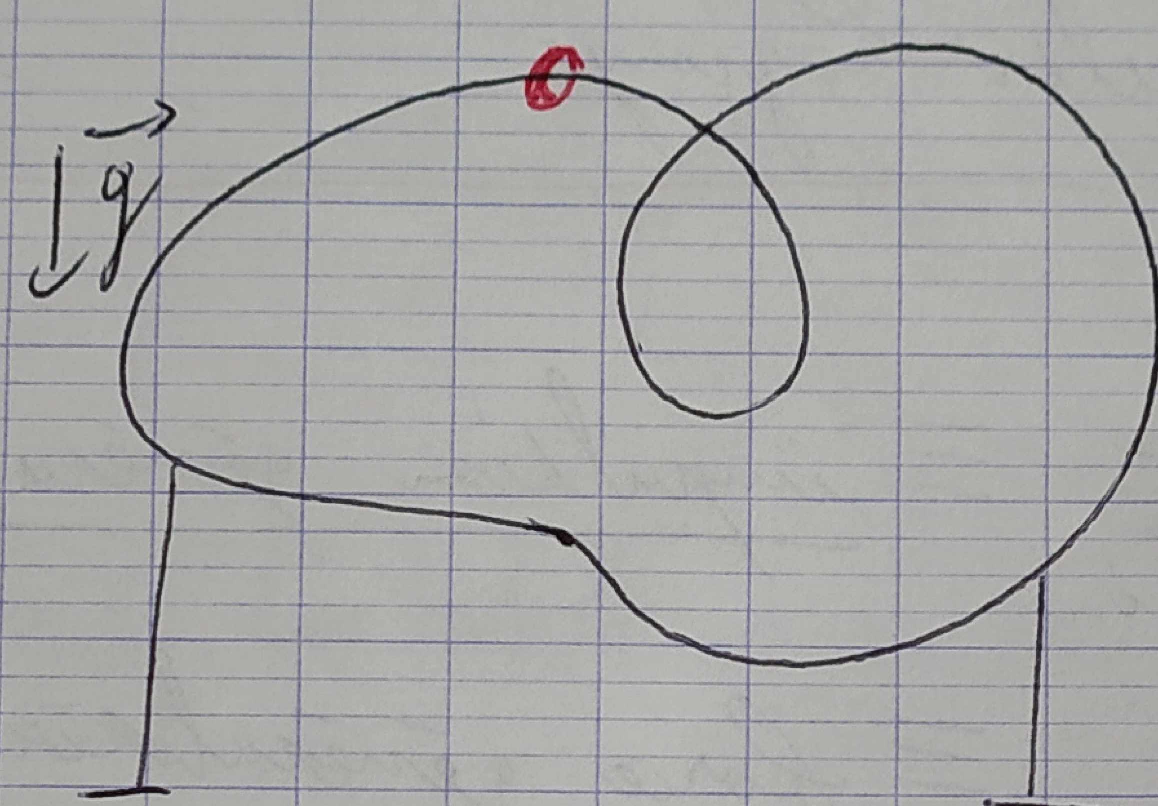
Alors $L = T - U$

et donc $p_{\alpha,i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} = m_\alpha \dot{x}_{\alpha,i}$

$$F_{\alpha,i} = \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha,i}} = -\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}} = +F_{\alpha,i}$$

$$\Longrightarrow \quad m \frac{d^2 x_{\alpha,i}}{dt^2} = -\vec{\nabla}_{\alpha,i} U$$

Exemple :



paramétrisation du rail : $\vec{x}(s)$

Espace des configurations : $\{s\}$

Espace des états : $(s, \dot{s})$

Lagrangien : $L = T - U$

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m \overbrace{\left(\frac{d\vec{x}}{ds}\right)^2}^{\text{connu}} \dot{s}^2 \\ U = m g z(s) \end{array}\right\} \quad L = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{x}}{ds}\right)^2 \dot{s}^2 - m g z(s)$$

Equations d'Euler Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left[m \left(\frac{d\vec{x}}{ds}\right)^2 \dot{s} \right] - m \left(\frac{d\vec{x}}{ds}\right) \cdot \frac{d^2\vec{x}}{ds^2} \dot{s}^2 + m g \frac{dz}{ds}$$

$$\Longleftrightarrow \quad m \left(\frac{d\vec{x}}{ds}\right)^2 \ddot{s} + 2m \left(\frac{d\vec{x}}{ds}\right) \frac{d^2\vec{x}}{ds^2} \dot{s}^2 - m \left(\frac{d\vec{x}}{ds}\right) \cdot \frac{d^2\vec{x}}{ds^2} \dot{s}^2 + m g \frac{dz}{ds} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\left(\frac{d\vec{x}}{ds}\right)^2 \ddot{s} + \left(\frac{d\vec{x}}{ds}\right) \left(\frac{d^2\vec{x}}{ds^2}\right) \dot{s}^2 + g \frac{dz}{ds} = 0}$$

Remarque :

* On se débarrasse contraintes (holonomes) en travaillant avec des degrés de libertés effectifs.
* On se débarrasse des réactions qui ne travaillent pas grâce à un formalisme « énergétique ».

Exemple : Charge ponctuelle q de masse m dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$.
On introduit les potentiels scalaire et vecteur $(\phi, \vec{A})$ et on pose :

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - q\,\phi(\vec{x}, t) + \underbrace{q\,\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)}$$

on l'ajoute pour décrire le champ

Équations d'Euler-Lagrange : $\forall i = 1, \dots, 3$

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{m\dot{x}_i + q A_i(\vec{x}, t)}_{\text{impulsion généralisée}}\Big] + q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - q\sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

$$= m\ddot{x}_i + q\sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + q\Big(\underbrace{\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i}}_{-E_i}\Big)$$

$$- q\sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

Finalement

$$\boxed{m\ddot{\vec{x}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \wedge \vec{B})}$$

Remarque : * $\vec{A} \longmapsto \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$

$\phi \longmapsto \phi + \dfrac{\partial \lambda}{\partial t}$

$$\begin{cases} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases}$$

Transformations de jauge $\Rightarrow$ Dynamique est la même !

* Pour L, on a : $L \longmapsto L \underbrace{- q\dfrac{\partial \lambda}{\partial t} + q\,\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}\lambda}_{q\frac{d\lambda}{dt}}$

3) Théorème de Noether.

* On considère que le lagrangien

$$L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

est invariant sous les transformations continues : $Q_i(s,t)$ $s \in \mathbb{R}$ et $(\dot{Q}_i(s,t))$

telle que $Q_i(0,t) = q_i(t)$

$$\dot{Q}_i(0,t) = \dot{q}_i(t)$$

Ainsi : $\forall s \in \mathbb{R}$

$$L(Q_i(s,t); \dot{Q}_i(s,t), t) = L(q_i(t), \dot{q}_i(t); t)$$

On dérive par rapport à s et on obtient :

$$0 = \sum_{i=1}^{3N-K} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} Q_i' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{Q}_i' \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{3N-K} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) Q_i' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{Q}_i' \right]$$

pour une solution de l'équation d'Euler-Lagrange

$$= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{3N-K} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i' \right]$$

Finalement, $\boxed{I = \sum_{i=1}^{3N-K} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i' = \text{constante}}$ $\forall s \in \mathbb{R}$ donc vrai en $\boxed{s=0}$

Théorème de Noether : (version lagrangienne)
À chaque invariance continue du lagrangien correspond une constante du mouvement.

Exemple : * Invariance par translation

$$\vec{Q}(s,t) = \vec{x}(t) + s\vec{u_y}$$

$$\left(\dot{\vec{Q}}(s,t) = \dot{\vec{x}}\right)$$

$$\vec{Q}'(0,t) = \vec{u_y}$$

* $I = p_y = $ constante

↳ impulsion généralisée

* Invariance par rotation :

$$Q(s,t) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos s - y\sin s \\ x\sin s + y\cos s \\ z \end{pmatrix}$$

$$Q'(0,t) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} x = -(p_x y - p_y x) = L_z$$

moment cinétique généralisé

* Invariance par translation dans le temps

$$L(q_i, \dot{q}_i, \cancel{t})$$

et donc $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$

On en déduit que, le long d'une solution

$$\frac{d}{dt}\left(L(q_i,\dot{q}_i)\right) = \sum_{i=1}^{3N-K}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{3N-K}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right]$$

sur une solution de l'équation d'Euler-Lagrange

$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{3N-K} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right] = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{3N-K} p_i \dot{q}_i\right]$$

Finalement, en posant :

$$H(q_i ; p_i) = \sum_{i=1}^{3N-K} p_i \dot{q}_i - L(q_i ; \dot{q}_i)$$

→ transformation de Legendre (changement de coordonnées)

On obtient $\boxed{\frac{dH}{dt} = 0}$

⟹ Conservation du hamiltonien, c'est-à-dire de l'énergie mécanique généralisée (⇒ cf section suivante)

II) Formalisme hamiltonien.

1) Hamiltonien et équations de Hamilton.

Espace des phases : Espace des coordonnées (q_i, p_i)

On pose : $H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{3N-K} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$ (1)

qu'on considère comme une transformation de Legendre entre $L(q_i ; \dot{q}_i)$ et $H(q_i ; p_i)$.

* En différentiant (1), on obtient :

$$dH = \sum_{i=1}^{3N-K}\left[dp_i \dot{q}_i + \cancel{p_i d\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} d\dot{q}_i\right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$$

$$dH = \sum_{i=1}^{3N-K}\left[-\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \dot{q}_i dp_i\right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Sur une solution des équations d'Euler-Lagrange

$$dH = \sum_{i=1}^{3N-K}\left[-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i\right] - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_{i=1}^{3N-K} \left[\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right] + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

On en déduit les équations de Hamilton (équivalent à Euler-Lagrange)

$$\begin{cases} \boxed{\begin{aligned} \dot{q_i} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p_i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}} \quad \forall i = 1, \dots, 3N-K \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{cases}$$

→ $2 \times (3N-K)$ ~~ses~~ équations d'ordre 1 au lieu de $3N-K$ équations d'ordre 2 (pour formule lagrangien)

↳ Ce sont des équations d'évolution ; la donnée de conditions initiales $(q_i(0), p_i(0))$ suffit à déterminer la solution

* Système hamiltonien :
  * espaces des phases $(q_i ; p_i)$
  * Hamiltonien $H(p_i ; q_i ; t)$

Exemple : Système de N points matériels soumis à des forces conservatives.

On avait $L(\vec{x_p} ; \dot{\vec{x_p}}) = T - U = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2} m_p \dot{\vec{x_p}}^2 - U(\vec{x_p})$

On en déduit $\vec{p} = \sum_{p=1}^{N} m_p \dot{\vec{x_p}}$

On a donc : $H = \sum_{p=1}^{N} \vec{p_p} \cdot \dot{\vec{x_p}} - L$

$$= \sum_{p=1}^{N} m_p \dot{\vec{x_p}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N} m_p \dot{\vec{x_p}}^2 + U(\vec{x_p})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N} m_p \dot{\vec{x_p}}^2 + U(\vec{x_p})$$

$$= T + U = E_m$$

Exemple : Pour une particule ponctuelle de charge q et de masse m, on a :

$$L(\vec{x};\dot{\vec{x}};t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - q\,\phi(\vec{x};t) + q\,\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x};t)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = m\dot{\vec{x}} + q\vec{A} \qquad \left(\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \right)$$

On en déduit : $H(\vec{x},\vec{p},t) = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + q\phi - q\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}$

$$= (m\dot{\vec{x}} + q\vec{A})\cdot\dot{\vec{x}} - \frac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^2 + q\phi$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + q\phi = E_m$$

! pas bonne variable

Finalement,

$$\boxed{H(\vec{x};\vec{p};t) = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi}$$

2) Observable et crochet de Poisson.

* **Observable** : Fonction sur l'espace des phases : $F(q_i;p_i;t)$

* Sur une solution des équations de Hamilton on a :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N-K}\left[\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i\right]$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N-K}\left[\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F,H\}$$

où on a posé :

$$\{F;G\} = \sum_{i=1}^{3N-K} \left[\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \right]$$

pour toutes observables ⟹ Crochets de Poisson

Relations de commutations canoniques :

$$\boxed{\begin{aligned} \{q_i ; q_j\} &= \{p_i ; p_j\} = 0 \\ \{q_i ; p_j\} &= \delta_{ij} \end{aligned}}$$

Propriétés :

* Identité de Jacobi pour $\{\,;\,\}$
* $\{F;G\} = -\{G;F\}$

Algèbre des observables est une algèbre de Lie

* $\{F;GH\} = \{F;G\}H + G\{F;H\}$

Exemple : Les composantes du moment cinétique généralisé $\vec{L} = \vec{q} \wedge \vec{p}$ vérifient

$$\boxed{\{L_i ; L_j\} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} L_k}$$

Algèbre de Lie de $SO(3)$

3) Théorème de Noether (version hamiltonienne).

* Flot hamiltonien donné par :

$$dq_i = \{q_i ; H\}\, dt$$
$$dp_i = \{p_i ; H\}\, dt$$

Plus généralement, pour une observable $F(q_i ; p_i)$ indépendante du temps :

$$dF = \{F ; H\}\, dt$$

↪ version infinitésimale d'une translation dans le temps (version à tout t obtenue en résolvant $\frac{dF}{dt} = \{F;H\}$

* Soit X une observable et posons : $\frac{dF}{ds} = \{F ; X\}$

↳ transformation continue sur l'espace des phases

Version infinitésimale : $dF = \{F ; X\}\, ds$

* La dynamique est invariante sous la symétrie continue engendrée par X ssi : $0 = \frac{dH}{ds} = \{H ; X\} = 0$

$\{X, H\} = \frac{dX}{dt} = 0$

WAW TROP FORT ↳ X grandeur conservée

⇒ Donc X est conservée (X ne dépend pas du temps)

__Remarque :__ Les quantités conservées sont aussi les observables qui engendrent l'invariance l'invariance correspondante

4) Systèmes intégrables.

N degrés de liberté

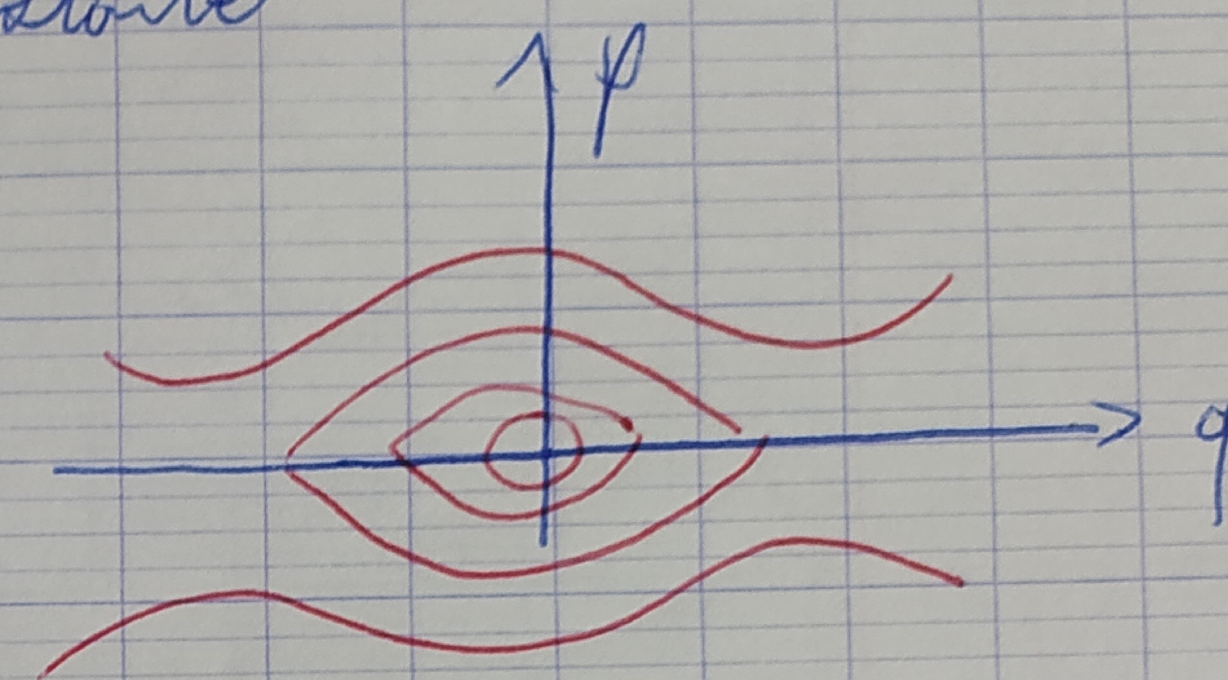
* $F_k(q_i, p_i) = f_k$ (équation de conservation réduit la taille de l'espace des phases disponible)

$k = 1, \ldots, N$

* On dit qu'un système hamiltonien à N degrés de liberté est intégrable si il admet N quantités conservées indépendantes $F_k(q_i, p_i)$ $k = 1, \ldots, N$ telles que : $\{F_k ; F_l\} = 0$

Exemple : * 1 degré de liberté avec forces conservatives

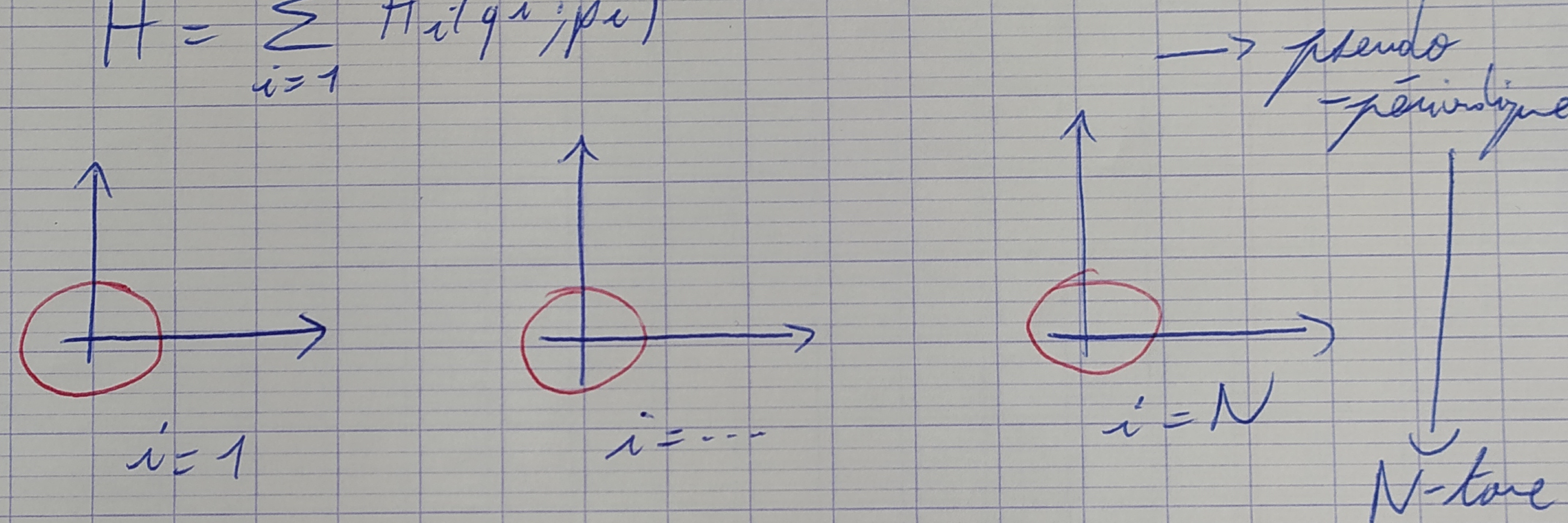
$H = \text{constante}$



* N systèmes isolés à 1 degré de liberté

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i(q_i;p_i)$$

états liés



Théorème : (Arnold-Liouville)

Les états liés d'un système intégrable à N degrés de liberté s'inscrivent sur un N-tore (dit tore de Liouville)

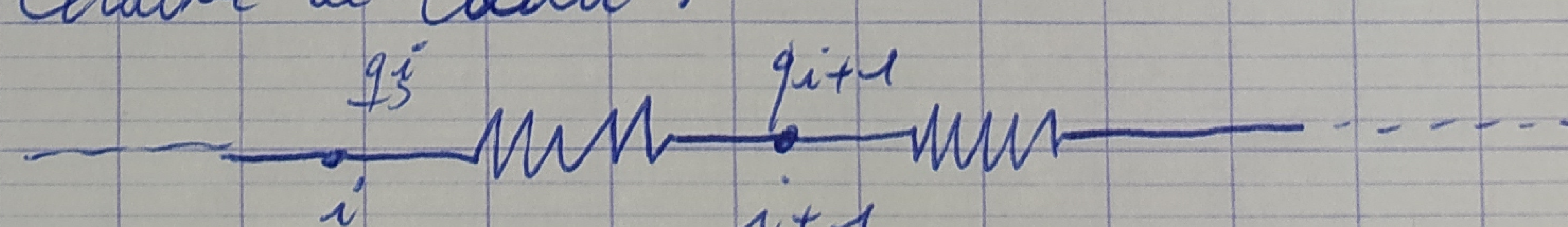
$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \dfrac{\partial H}{\partial I_i} \\ \dot{I}_i = \dfrac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0 \end{cases} \Rightarrow H(I_i) = \omega_i \text{ (constante du mouvement)}$$

$(H(\cancel{\theta_i};I_i))$

$\theta_i = \omega_i t + \theta_i(t=0)$

$\Leftrightarrow$ pseudo-périodique

Exemple : Chaîne de Toda :



$$H(q_i;p_i) = \sum_{i=1} \left[\frac{p_i^2}{2} + e^{2(q_i - q_{i+1})} \right]$$