Préparation à l'agrégation de physique

DM Hydrodynamique 2017–2018

Devoir à rendre lundi 4 décembre 2017

Tom BIENAIMÉ (*tom.bienaime@ens.fr*)

Une étude dynamique de la couche limite

Ce problème met en jeu la notion de couche limite qui intervient lorsqu'on étudie les écoulements laminaires, à nombres de Reynolds néanmoins importants, autour d'un solide. Cette couche assure le raccordement entre la solution d'écoulement parfait qui prévaut loin du corps et la condition de vitesse nulle sur les parois. L'étude simplifiée proposée repose sur les travaux de deux physiciens allemands spécialistes en mécanique des fluides.

- Ludwig Prandtl (1875-1953) qui introduisit en 1904 la notion de couche limite dans l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle. Ses travaux le conduisirent également à établir la théorie hydrodynamique de l'aile portante d'envergure infinie dans un fluide parfait.
- Heinrich Blasius (1883-1970) qui publia de nombreux mémoires sur les écoulement de fluides visqueux autour d'obstacles et dans les tuyaux cylindriques.

Formulaire : équation de Navier-Stokes d'un fluide newtonien visqueux incompressible

$$\mu\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right]=\mu\vec{g}-\overrightarrow{\mathrm{grad}}p+\eta\Delta\vec{v}$$

I Préliminaire

On s'intéresse à un régime variable d'écoulement au sein d'un fluide visqueux et incompressible dont le champ des vitesses s'écrit $\vec{v}=v_x(y,t)\vec{u}_x$. L'axe Ox est horizontal et la pression ne dépend pas de x. Cela peut, par exemple, concerner le régime transitoire d'accès à un écoulement stationnaire de cisaillement simple.

I.A – Rappeler, en introduisant la viscosité dynamique η dont on indiquera l'unité S.I., l'expression de la force de viscosité exercée, au niveau de la surface élémentaire d'aire dS et de normale $\vec{u}_y$, par la portion de fluide d'abscisses supérieures à y sur la portion de fluide d'abscisses inférieures à y.

On dit que cette force traduit un transfert diffusif de quantité de mouvement. Préciser cette notion en soulignant en quoi cela diffère d'un transfert convectif. Quel phénomène simple explique le brassage moléculaire qui est à l'origine de cette diffusion ?

I.B – Établir l'expression $d\vec{F}_{\mathrm{visc}}$ de la résultante des forces de viscosité agissant sur l'élément de volume $d\tau$ défini par les intervalles $(x,x+dx)$, $(y,y+dy)$, $(z,z+dz)$.

I.C –

I.C.1) Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule de fluide de volume $d\tau$ et constater que l'on retrouve l'équation de Navier-Stokes dans le cas particulier d'écoulement envisagé.

En cas d'échec à cette question (en particulier si l'on n'a pas répondu à la **question I.B**) on poursuivra en utilisant l'équation de Navier-Stokes proposée dans le formulaire dont on donnera toutefois la signification des différents termes.

I.C.2) En projetant cette équation sur $\vec{u}_x$, obtenir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v_x(y,t)$ appelée équation de diffusion. Lui donner une forme remarquable commune à toutes les équations de diffusion en introduisant la diffusivité de quantité de mouvement ou viscosité cinématique ν que l'on exprimera à l'aide de η et de la masse volumique μ. Quelle est l'unité S.I. de ν ?

I.D – En quoi le phénomène de diffusion est-il irréversible et comment cela est-il pris en compte dans l'équation de diffusion ? Donner une autre forme d'équations aux dérivées partielles régissant des phénomènes réversibles que l'on nommera.

I.E – Grâce à l'équation de diffusion, établir un lien très simple entre la viscosité cinématique ν, la distance caractéristique selon Oy L_y, et la durée caractéristique τ du phénomène de diffusion. (On pourra exploiter un raisonnement en ordre de grandeur ou une analyse dimensionnelle.)

II Ordre de grandeur de l'épaisseur d'une couche limite

On se propose d'évaluer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite (affectée par la viscosité) au voisinage d'une plaque plane sur laquelle arrive un écoulement laminaire uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{x}$ parallèle à la plaque.

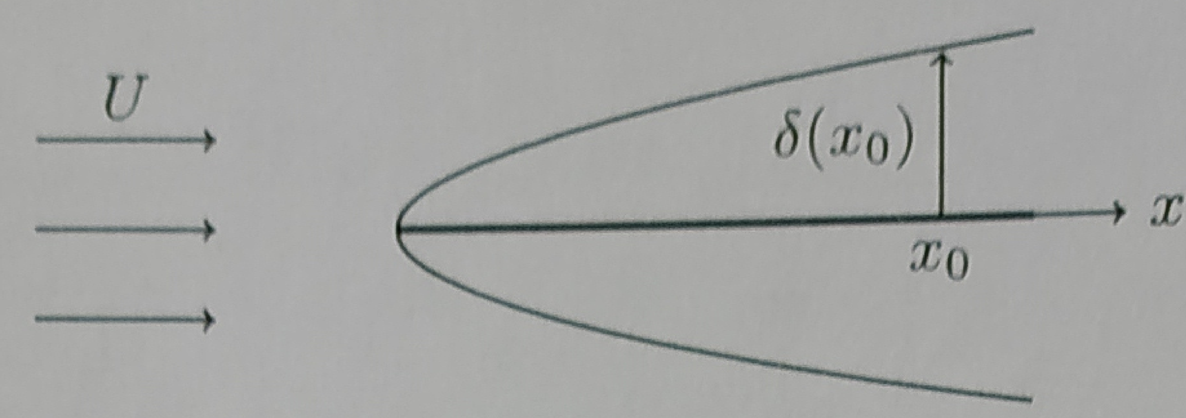


Figure 1

Cette zone qui assure le raccordement entre la condition de vitesse nulle contre la plaque et l'écoulement uniforme, s'établit par diffusion perpendiculairement à la plaque à partir du moment ou le fluide aborde l'extrémité de celle-ci.

Estimer l'ordre de grandeur $\delta(x_0)$ de l'épaisseur de la couche limite en exploitant le résultat de la **question I.E** et en tenant compte du fait que lorsque le fluide atteint l'abscisse x_0 (à partir de l'extrémité de la plaque), le phénomène diffusif perpendiculairement à la plaque, s'est déjà produit pendant la durée x_0/U.

Rappeler l'expression du nombre de Reynolds si l'on prend x_0 comme dimension caractéristique d'écoulement : Re_{x_0}.

Exprimer $\delta(x_0)/x_0$ à l'aide de Re_{x_0}.

Proposer alors un critère de pertinence pour l'utilisation de la notion de couche limite.

III Cas d'un écoulement de Poiseuille plan

On considère maintenant l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux plans horizontaux d'abscisses $y = -d/2$ et $y = +d/2$. L'axe horizontal Ox définit la direction et le sens de l'écoulement tandis que l'axe Oy est vertical ascendant : $\vec{g} = -g\vec{u}_y$.

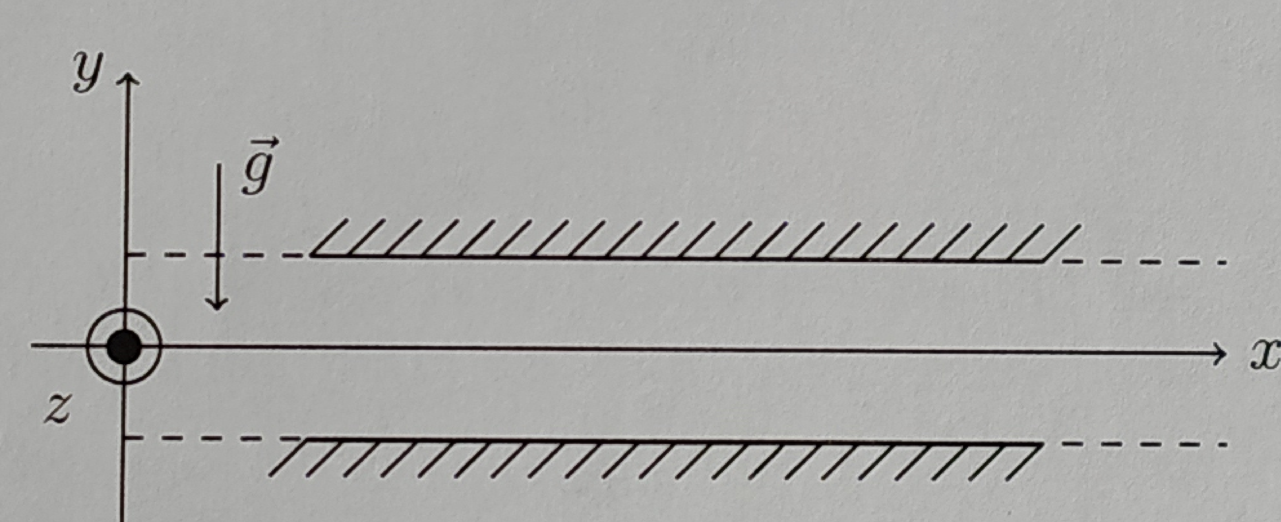


Figure 2

III.A – On considère une zone suffisamment éloignée de l'extrémité par laquelle le fluide aborde le dispositif pour ignorer tout phénomène d'entrée et faire comme si les parois étaient illimitées. On étudie alors un écoulement stationnaire caractérisé par le champ des vitesses $\vec{v} = v_x(y)\vec{u}_x$ et un champ de pression $p(x, y)$.

III.A.1)

a) Écrire l'équation locale du mouvement en mettant à profit le résultat de la **question I.B** (ou en exploitant l'équation donnée dans le formulaire). La projeter sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$.

b) En déduire que $\partial p/\partial x = K$ (constante).

c) Donner la loi $v_x(y)$ en fonction de K, η, y et d. Montrer que le profil des vitesses est parabolique.

III.A.2) On note $\Delta p = p(x, y) - p(x + L, y)$ la différence de pression qui doit exister entre deux points de même altitude et distants de L selon Ox pour maintenir cet écoulement.

Établir l'expression du débit volumique D_V à travers une section de largeur h selon Oz en fonction de Δp, L, h, d et η.

Avec quelle loi électrique la relation entre Δp et D_V suggère-t-elle une analogie ? Introduire une résistance hydraulique.

III.A.3) Si, en maintenant Δp, on divise d par 2, que devient le débit ?

Quel débit total circule alors à travers deux dispositifs identiques d'épaisseur $d/2$, chacun étant soumis à la différence de pression Δp sur une longueur L ?

En déduire une différence importante avec la notion de résistance électrique.

III.B – On examine maintenant le phénomène d'entrée dans le dispositif précédent. Un fluide en écoulement laminaire uniforme de vitesse $\vec{U} = U\vec{u}_x$ pénètre dans l'intervalle situé entre deux plaques planes parallèles au plan xOz, distantes de d.

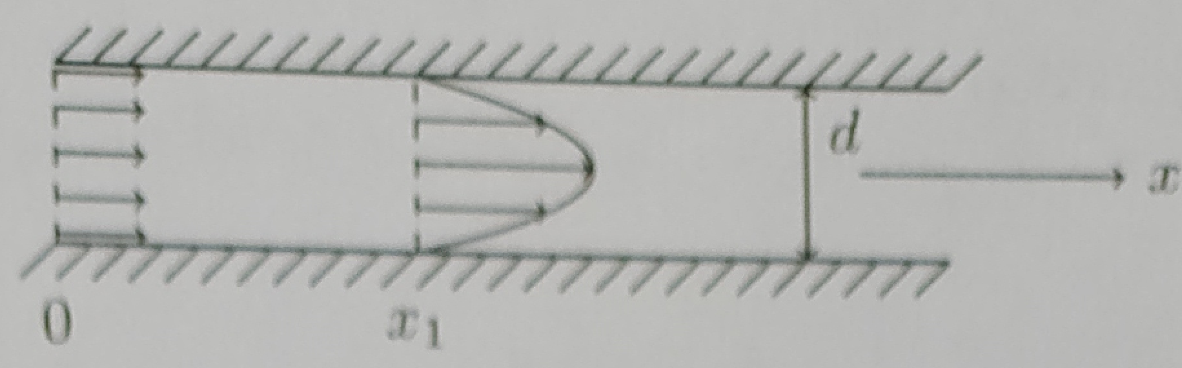


Figure 3

En exploitant le phénomène de croissance de couche limite à partir de l'arête de chaque plaque (cf. partie **II**), évaluer en fonction de U, d et ν, la distance x_1 parcourue par le fluide depuis son entrée dans le dispositif avant que s'établisse le profil parabolique de vitesse.

Montrer qu'on peut exprimer le rapport x_1/d à l'aide du nombre de Reynolds si l'on choisit judicieusement la dimension caractéristique de l'écoulement.

IV Équation du mouvement dans la couche limite

On considère un écoulement laminaire stationnaire et incompressible, près d'une plaque plane horizontale $y = 0$, à nombre de Reynolds grand devant 1, de façon que la notion de couche limite ait un sens. On se limite au cas d'un écoulement uniforme hors de la couche limite : $\vec{v}_{\text{ext}} = U\vec{u}_x$. Le fluide a la masse volumique μ et la viscosité dynamique η. On adopte le modèle d'un écoulement bidimensionnel dans la couche limite, caractérisé par le champ des vitesses $\vec{v} = v_x(x,y)\vec{u}_x + v_y(x,y)\vec{u}_y$ et le champ de pression $p(x,y)$.

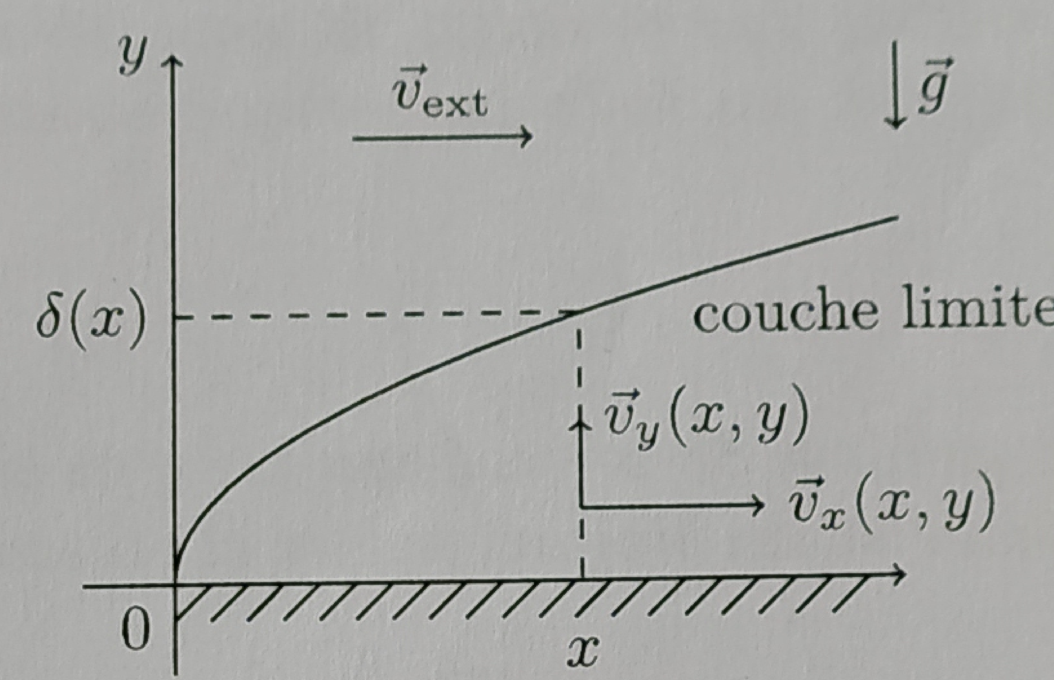


Figure 4

On admettra que, dans ce cas, la résultante des forces de viscosité agissant sur un élément de volume $d\tau$ s'écrit $d\vec{F}_{\text{visc}} = \eta(\Delta v_x \vec{u}_x + \Delta v_y \vec{u}_y)d\tau$.

IV.A – Écrire l'équation traduisant l'incompressibilité.

IV.B – Écrire les projections sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ de l'équation fondamentale de la dynamique en utilisant les constantes μ, ν et g.

IV.C – Raisonnement sur les ordres de grandeur

Pour évaluer (dans la couche limite) l'ordre de grandeur de la dérivée d'une grandeur par rapport à x, on considère le quotient de cette grandeur par x_0 (valeur « typique » de x) et pour la dérivée d'une grandeur par rapport à y, on considère le quotient de cette grandeur par $\delta(x_0)$ (épaisseur de couche limite en x_0).

Exemples : $\partial v_x/\partial x$ de l'ordre de v_x/x_0, $\partial v_x/\partial y$ de l'ordre de $v_x/\delta(x_0)$.

IV.C.1) En utilisant l'équation obtenue au **IV.A**, relier les ordres de grandeur de v_x et v_y au nombre de Reynolds Re_{x_0}. En déduire que $v_y \ll v_x$.

IV.C.2) Montrer également que

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

IV.C.3) Montrer que

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

sont du même ordre de grandeur.

Montrer, en se plaçant au bord extérieur de la couche limite, où v_x est de l'ordre de U que

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

est du même ordre que les deux termes précédents.

IV.C.4) Réécrire les équations du **IV.B** en les simplifiant grâce à **IV.C.2**. On admettra que la faiblesse de v_y (en comparaison à v_x) conduit à ignorer toutes les dérivées partielles de v_y lors de la projection sur $\vec{u}_y$. En déduire que

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx -\mu g$$

IV.D – Puisque la couche limite est très étroite en altitude, et compte tenu de la relation précédente, la pression p, à x donné, a quasiment la même valeur qu'à l'extérieur immédiat de cette couche. Hors de la couche limite (on rappelle que l'écoulement y est parfait) la pression dépend-t-elle de x ?
Que dire alors de $\frac{\partial p}{\partial x}$ dans la couche limite ?
En déduire l'équation :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Préparation à l'agrégation de physique

Corrigé - DM Hydrodynamique 2017–2018

L'énoncé est extrait de Physique 2 PC 2011 - Concours Centrale-Supélec

Tom BIENAIMÉ (*tom.bienaime@ens.fr*)

Si vous souhaitez en apprendre davantage sur la couche limite, je vous conseille de lire le chapitre 11 du cours de L3 d'hydrodynamique de Marc Rabaud. Le polycopié est disponible à l'adresse suivante :

`http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCoursL3_FIP.pdf`

Vous y trouverez, en particulier, des éléments de réponses aux parties V, VI, VII, VIII et IX du sujet Physique 2 PC 2011 du concours Centrale–Supélec qui n'ont pas fait l'objet de ce DM.

I Préliminaire

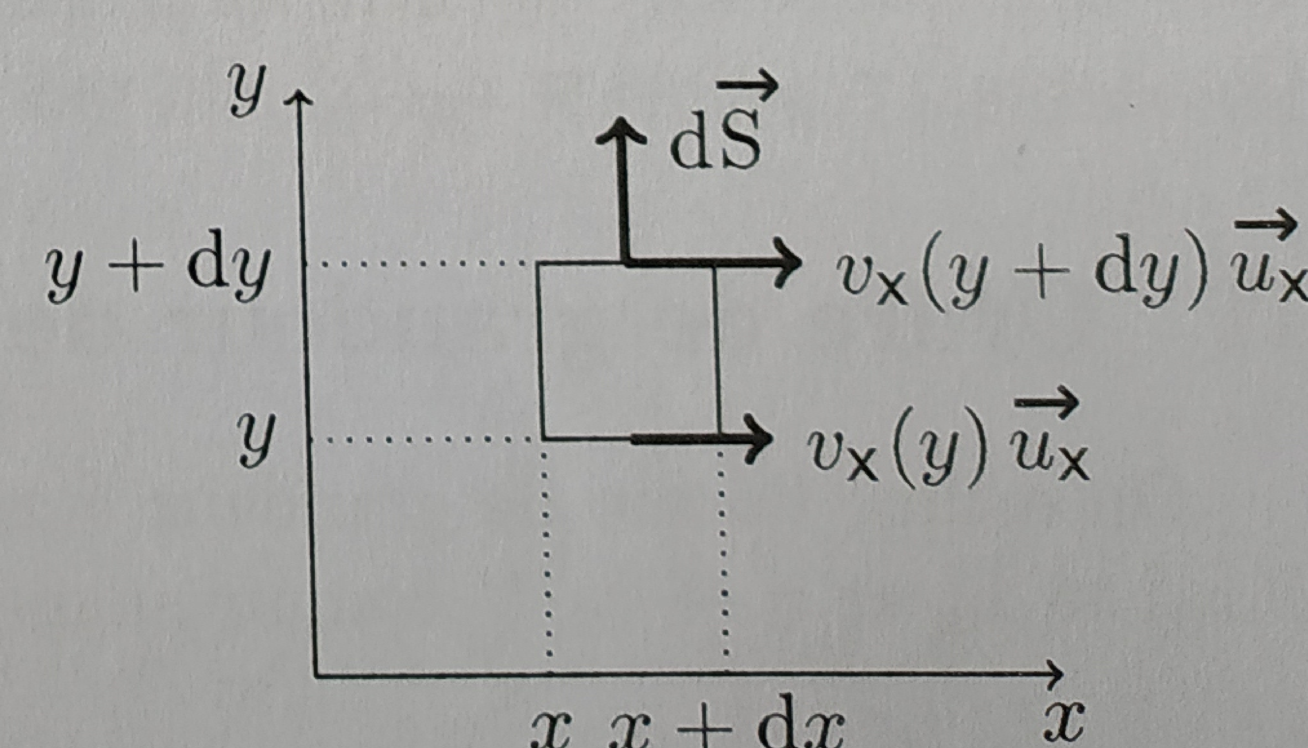
I.A La force élémentaire $\mathrm{d}\mathbf{F}$, exercée en y sur une surface $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}S\,\mathbf{u}_y$ par le fluide au-dessus sur celui en dessous, est proportionnelle au gradient de la vitesse projeté sur la direction de la normale à la surface et à l'aire de la surface :

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \mathrm{d}S\,\mathbf{u}_x.$$

L'unité de viscosité dynamique η du système international est le pascal-seconde. C'est une unité dérivée ; en termes d'unités de base il s'exprime comme suit : $1\,\mathrm{Pa\,s} = 1\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$. Le pascal-seconde s'est antérieurement appelé poiseuille (symbole Pl).

Cette force traduit un transfert diffusif de quantité de mouvement, car des molécules passent en permanence à travers la surface dS par diffusion et tendent à homogénéiser la quantité de mouvement moyenne de chaque côté de la surface. Ce type de transfert se distingue du transfert convectif, qui correspond au déplacement d'ensemble de toutes les molécules d'une particule fluide.

L'écart de vitesse d'une molécule par rapport à la vitesse moyenne des autres molécules d'une particule fluide est dû à l'agitation thermique. C'est cet écart qui est à l'origine du brassage moléculaire responsable de la diffusion.



I.B Calculons la résultante des forces de viscosité sur un volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Aucune force ne s'exerce sur les faces orientées suivant les vecteurs $\pm\mathbf{u}_x$ et $\pm\mathbf{u}_z$, car le gradient de la vitesse v_x, seule composante non nulle, n'a pas de projection selon ces deux directions (voir figure ci-contre). Ainsi, seules les faces de surface $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}z$ orientées suivant $\mathbf{u}_y$ subissent des forces de viscosité, si bien que la résultante s'écrit :

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}(y + \mathrm{d}y)\,\mathrm{d}S\,\mathbf{u}_x - \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}(y)\,\mathrm{d}S\,\mathbf{u}_x.$$

Un développement limité de cette dernière expression au premier ordre en $\mathrm{d}y$ donne, en tenant compte du fait que $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}S\mathrm{d}y$,

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,\mathrm{d}\tau\,\mathbf{u}_x.$$

I.C.1 Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, on considère une particule de fluide de masse $\mu d\tau$ située en (x, y, z) à l'instant t. Cette particule est soumise à :

— La force de pesanteur $\mu d\tau \mathbf{g}$, où μ est la masse volumique du fluide et $\mathbf{g}$ l'accélération de la pesanteur ;

— Les forces de pression de résultantes $-\mathbf{grad}\, p\, d\tau$;

— Les forces de viscosité, de résultante calculée en I.B : $\eta \partial_y^2 v_x\, d\tau\, \mathbf{u}_y$.

La particule se déplaçant selon $\mathbf{u}_x$ (le vecteur vitesse possède seulement une composante selon $\mathbf{u}_x$), l'accélération de la particule dans la description eulérienne s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(x + \Delta x, y, t + \Delta t) - v_x(x, y, t)}{\Delta t} \mathbf{u}_x \\ &= \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \right) \mathbf{u}_x.\end{aligned}$$

Comme v_x ne dépend pas de x, on a $\partial_x v_x = 0$, donc $\mathbf{a} = \partial_t v_x\, \mathbf{u}_x$. Cette expression est la dérivée particulaire de la vitesse, qui s'écrit de manière générale comme dans l'équation de Navier-Stokes. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, et après simplification par $d\tau$,

$$\mu \partial_t v_x\, \mathbf{u}_x = \mu \mathbf{g} - \mathbf{grad}\, p + \eta \partial_y^2 v_x\, \mathbf{u}_x.$$

Pour l'écoulement unidimensionnel considéré $\mathbf{v} = v_x(y) \mathbf{u}_y$ on voit que $\Delta \mathbf{v} = \partial_y^2 v_x\, \mathbf{u}_x$, ce qui permet de conclure que l'application du principe fondamental de la dynamique permet de retrouver l'équation de Navier-Stokes.

I.C.2 On projette l'équation précédente sur le vecteur $\mathbf{u}_x$: $\mu \partial_t v_x = -\mathbf{grad}\, p \cdot \mathbf{u}_x + \eta \partial_y^2 v_x$. De plus, l'énoncé précise que la pression ne dépend pas de x, donc $\mathbf{grad}\, p \cdot \mathbf{u}_x = \partial_x p = 0$, ce qui nous donne l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \qquad \text{avec} \qquad \nu \equiv \frac{\eta}{\mu} \quad (\text{en m}^2\,\text{s}^{-1}).$$

I.D Le phénomène de diffusion est irréversible parce qu'il ne peut se dérouler que dans le sens d'une homogénéisation des vitesses dans l'espace. Le phénomène inverse (correspondant à un retournement du temps) ne se produit jamais spontanément.

Cela est pris en compte dans l'équation de diffusion en remarquant que si $v_x(y, t)$ est solution alors $\tilde{v}_x(y, t) \equiv -v_x(y, -t)$ est solution de $\partial_t \tilde{v}_x = -\nu \partial_y^2 \tilde{v}_x$ et donc n'obéit pas à la même équation car ν est changé en $-\nu$. Ceci traduit l'idée forte que la diffusion est un phénomène irréversible.

L'équation de d'Alembert, qui décrit la propagation des ondes, est un exemple d'équation régissant un phénomène réversible. Par exemple, en acoustique, le champ de surpression p_1 obéit à l'équation $\Delta p_1 - (1/c^2) \partial_t^2 p_1 = 0$ où c est la célérité des ondes sonores.

I.E On trouve un lien entre les échelles caractéristiques en faisant un raisonnement en ordre de grandeur : $|\partial_t v_x| \approx v_x/\tau$, $|\partial_y^2 v_x| \approx v_x/L_y^2$. En utilisant l'équation de diffusion on trouve : $L_y^2 \approx \nu\tau$.

II Ordre de grandeur de l'épaisseur d'une couche limite

On estime l'ordre de grandeur $\delta(x_0)$ en substituant dans la relation trouvée à la question précédente $\delta(x_0) \leftrightarrow L_y$ et $\tau \leftrightarrow x_0/U$ comme suggéré par l'énoncé. On obtient alors :

$$\delta(x_0) \approx \sqrt{\frac{\nu x_0}{U}}.$$

En prenant x_0 comme dimension caractéristique de l'écoulement, le nombre de Reynolds s'écrit :

$$Re_{x_0} = \frac{U x_0}{\nu}.$$

On en déduit :

$$\frac{\delta(x_0)}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}}.$$

La notion de couche limite est pertinente lorsque l'épaisseur de la couche limite $\delta(x_0)$ est plus petite que la taille de l'objet x_0, de telle sorte que les effets de viscosité restent confinés au voisinage de l'objet. Ceci est valable pour $\delta(x_0)/x_0 \ll 1$, c'est à dire $Re_{x_0} \gg 1$.

III Cas d'un écoulement de Poiseuille plan

III.A.1.a En exploitant le résultat de la question I.C.1 et le fait que l'écoulement soit stationnaire ($\partial_t \mathbf{v} = 0$), l'équation locale du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{0} = \mu\mathbf{g} - \mathbf{grad}\, p + \eta \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2}\mathbf{u}_x,$$

où la dérivée sur v_x est droite car le champ de vitessse v_x ne dépend que de y. En projetant cette équation sur $\mathbf{u}_x$, on obtient :

$$\partial_x p = \eta \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2}.$$

En projetant l'équation sur $\mathbf{u}_y$, on obtient :

$$\partial_y p = -\mu g.$$

III.A.1.b En intégrant l'équation $\partial_y p = -\mu g$, on obtient $p(x,y) = -\mu g y + f(x)$, où f est une fonction quelconque. Puis en exploitant $\partial_x p = \eta \partial_y^2 v_x$ on a :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \eta \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2}(y).$$

Le membre de gauche ne dépend que de x alors que le membre de droite ne dépend que de y. Donc ces deux membres ne peuvent être qu'une constante K. On obtient finalement :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = K.$$

III.A.1.c En intégrant l'équation

$$\eta \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2} = K \qquad \text{on obtient} \qquad v_x(y) = \frac{K}{2\eta} y^2 + by + c.$$

La symétrie par rapport à l'axe $y = 0$ impose $v_x(y) = v_x(-y)$ et donc $b = 0$. De plus, la vitesse doit s'annuler sur les parois, ce qui impose $v_x(y = -d/2) = v_x(y = d/2) = 0$ d'où $c = -Kd^2/(8\eta)$. Finalement, on obtient un profil des vitesses parabolique :

$$v_x = \frac{K}{2\eta}\left(y^2 - \frac{d^2}{4}\right).$$

III.A.2 On intègre $\partial p/\partial x = K$, ce qui donne $p(x + L, y) - p(x, y) = KL$ d'où $K = -\Delta p/L$ et

$$v_x = \frac{\Delta p}{2\eta L}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right).$$

Le débit volumique à travers une section de largeur h selon l'axe z s'obtient immédiatement :

$$D_V = h \int_{-d/2}^{d/2} \mathrm{d}y\, v_x(y) = \frac{\Delta p\, h\, d^3}{12\eta L}.$$

Le débit volumique est proportionnel à la différence de pression entre les extrémités de la conduite. Ce comportement ressemble à celui d'un conducteur ohmique en électrocinétique, pour lequel l'intensité du courant I (analogue du débit volumique) est proportionnelle à la différence de potentiel $V_1 - V_2$ (analogue de la différence de pression). En poursuivant cette analogie, on peut définir une résistance hydraulique :

$$R = \frac{\Delta p}{D_V} = \frac{12\eta L}{h\,d^3}.$$

III.A.3 Si on divise d par 2, le débit est divisé par $2^3 = 8$ (dans un géométrie équivalente, *en réduisant seulement une dimension spatiale* une barreau de cuivre aurait une résistance divisée par 2).

Le débit total qui circule à travers deux dispositifs identiques d'épaisseur $d/2$ (chacun étant soumis à la même différence de pression Δp sur une longueur L) est $D'_V = D_V/4$.

La résistance électrique d'un fil est proportionnelle à la section du fil. Si on prend deux fils de section S_1 et S_2 en parallèle, alors leur résistance totale est la même que celle d'un fil unique de section totale $S = S_1 + S_2$. Ce n'est clairement pas le cas avec la résistance hydraulique.

III.B La distance x_1 parcourue par le fluide depuis son entrée dans le dispositif avant que s'établisse le profil parabolique de vitesse est telle que $\delta(x_1) = d/2$, c'est à dire lorsque les profils des couches limites créés par la plaque du haut et la plaque du bas se rejoignent. En utilisant les résultats de la partie II, on a :

$$\delta(x_1) = \sqrt{\frac{\nu x_1}{U}} = \frac{d}{2} \qquad \text{d'où} \qquad x_1 = \frac{d^2 U}{4\nu}.$$

On peut donc exprimer le rapport x_1/d sous la forme :

$$\frac{x_1}{d} = \frac{U d}{4\nu} = \frac{Re}{4}.$$

IV Équation du mouvement dans la couche limite

IV.A Comme le fluide est incompressible, on a $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$, ce qui donne d'après le champ des vitesses fourni dans l'énoncé : $\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0$.

IV.B L'écoulement est stationnaire donc $\partial_t \mathbf{v} = 0$. De plus, on a l'opérateur $\mathbf{v}\cdot\,\mathbf{grad} = v_x\partial_x + v_y\partial_y + v_z\,\partial_z = v_x\partial_x + v_y\partial_y$. L'équation fondamentale de la dynamique projetée sur $\mathbf{u}_x$ s'écrit :

$$v_x\partial_x v_x + v_y\partial_y v_x = -\frac{1}{\mu}\partial_x p + \nu\left(\partial_x^2 v_x + \partial_y^2 v_x\right),$$

et projetée sur $\mathbf{u}_y$:

$$v_x\partial_x v_y + v_y\partial_y v_y = -g - \frac{1}{\mu}\partial_y p + \nu\left(\partial_x^2 v_y + \partial_y^2 v_y\right).$$

IV.C.1 En utilisant l'équation obtenue en IV.A $\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0$, on obtient :

$$\frac{|v_x|}{x_0} \approx \frac{|v_y|}{\delta(x_0)} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{|v_y|}{|v_x|} = \frac{\delta(x_0)}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}}.$$

Si ce nombre de Reynolds est élevé $Re_{x_0} \gg 1$ (voir partie II), on a alors $|v_y| \ll |v_x|$.

IV.C.2 On continue de raisonner en ordre de grandeur :

$$|\partial_y^2 v_x| \approx |v_x|/\delta(x_0)^2 \quad \text{et} \quad |\partial_x^2 v_x| \approx |v_x|/x_0^2 \quad \text{donc} \quad \frac{|\partial_x^2 v_x|}{|\partial_y^2 v_x|} = \frac{\delta(x_0)^2}{x_0^2} = \frac{1}{Re_{x_0}} \ll 1,$$

ce qui montre que $|\partial_y^2 v_x| \gg |\partial_x^2 v_x|$.

Un raisonnement similaire donne $|\partial_y^2 v_y| \gg |\partial_x^2 v_y|$.

IV.C.3 En ordre de grandeur on a :

$$|v_y \partial_y v_x| \approx \frac{|v_y||v_x|}{\delta(x_0)} \quad \text{et} \quad |v_x \partial_x v_x| \approx \frac{|v_x|^2}{x_0} \quad \text{donc} \quad \frac{|v_y \partial_y v_x|}{|v_x \partial_x v_x|} \approx \frac{|v_y|}{|v_x|}\frac{x_0}{\delta(x_0)} \approx 1.$$

En se plaçant sur le bord extérieur de la couche limite où $|v_x| \approx U$ on a :

$$\frac{|\nu \partial_y^2 v_x|}{|v_x \partial_x v_x|} \approx \frac{\nu x_0}{U\delta(x_0)^2} = \frac{1}{Re_{x_0}} \frac{x_0^2}{\delta(x_0)^2} = 1.$$

On en déduit que sur le bord de la couche limite $|\nu \partial_y^2 v_x|$ est du même ordre de grandeur que $|v_y \partial_y v_x|$ et $|v_x \partial_x v_x|$.

IV.C.4 On réécrit les équations du IV.B en les simplifiant grâce à IV.C.2 et on admet, comme le suggère l'énoncé, que la faiblesse de v_y (en comparaison à v_x) conduit à ignorer toutes les dérivées partielles de v_y lors de la projection sur $\mathbf{u}_y$.

L'équation fondamentale de la dynamique projetée sur $\mathbf{u}_x$ s'écrit :

$$v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x = -\frac{1}{\mu}\partial_x p + \nu \partial_y^2 v_x,$$

et projetée sur $\mathbf{u}_y$:

$$0 = -g - \frac{1}{\mu}\partial_y p.$$

On remarque que cette dernière équation correspond à la forme proposée par l'énoncé $\partial_y p = -\mu g$.

IV.D Si l'on se place hors de la couche limite l'écoulement y est parfait et est décrit par l'équation d'Euler :

$$\mu\left[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v}\,\right] = \mu \mathbf{g} - \mathbf{grad}\, p.$$

L'écoulement est stationnaire donc $\partial_t \mathbf{v} = \mathbf{0}$. L'écoulement est unidimensionnel et uniforme $\mathbf{v} = U\,\mathbf{u}_x$ donc $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$. En projetant, cette équation selon $\mathbf{u}_x$ on a

$$\partial_x p = 0,$$

donc la pression ne dépend pas de x hors de la couche limite.

L'énoncé suggère que la pression p, à x donné, a quasiment la même valeur qu'à l'extérieur immédiat de la couche limite. Ainsi, si la pression ne dépend pas de x hors de la couche limite, celle ci ne doit pas dépendre de x à l'intérieur de celle-ci. On en déduit $\partial_x p = 0$ à l'intérieur de la couche limite.

Ceci permet de simplifier l'équation fondamentale de la dynamique projetée sur $\mathbf{u}_x$:

$$v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x = \nu \partial_y^2 v_x,$$

ce qui correspond à la forme proposée par l'énoncé.

Remarque La suite du problème aborde la résolution de cette équation pour en déduire le profil de vitesse dans la couche limite. Comme conseillé en début d'énoncé, vous pouvez lire le chapitre 11 du cours de L3 d'hydrodynamique de Marc Rabaud pour en apprendre davantage (`http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCoursL3_FIP.pdf`).