

LP19: Diffraction de Fraunhofer

①

Niveau: L3

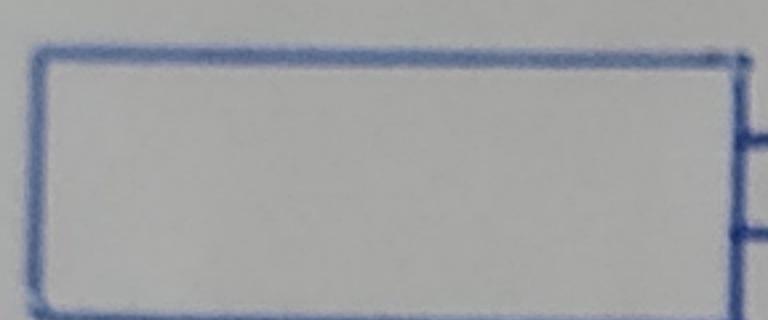
Pré-requis: Optique géométrique, interférences à deux ondes, transformée de Fourier, produit de convolution

- I) Présentation du phénomène de diffraction.
- II) Quelques figures de diffraction.
- III) Limitations dues à la diffraction / applications.

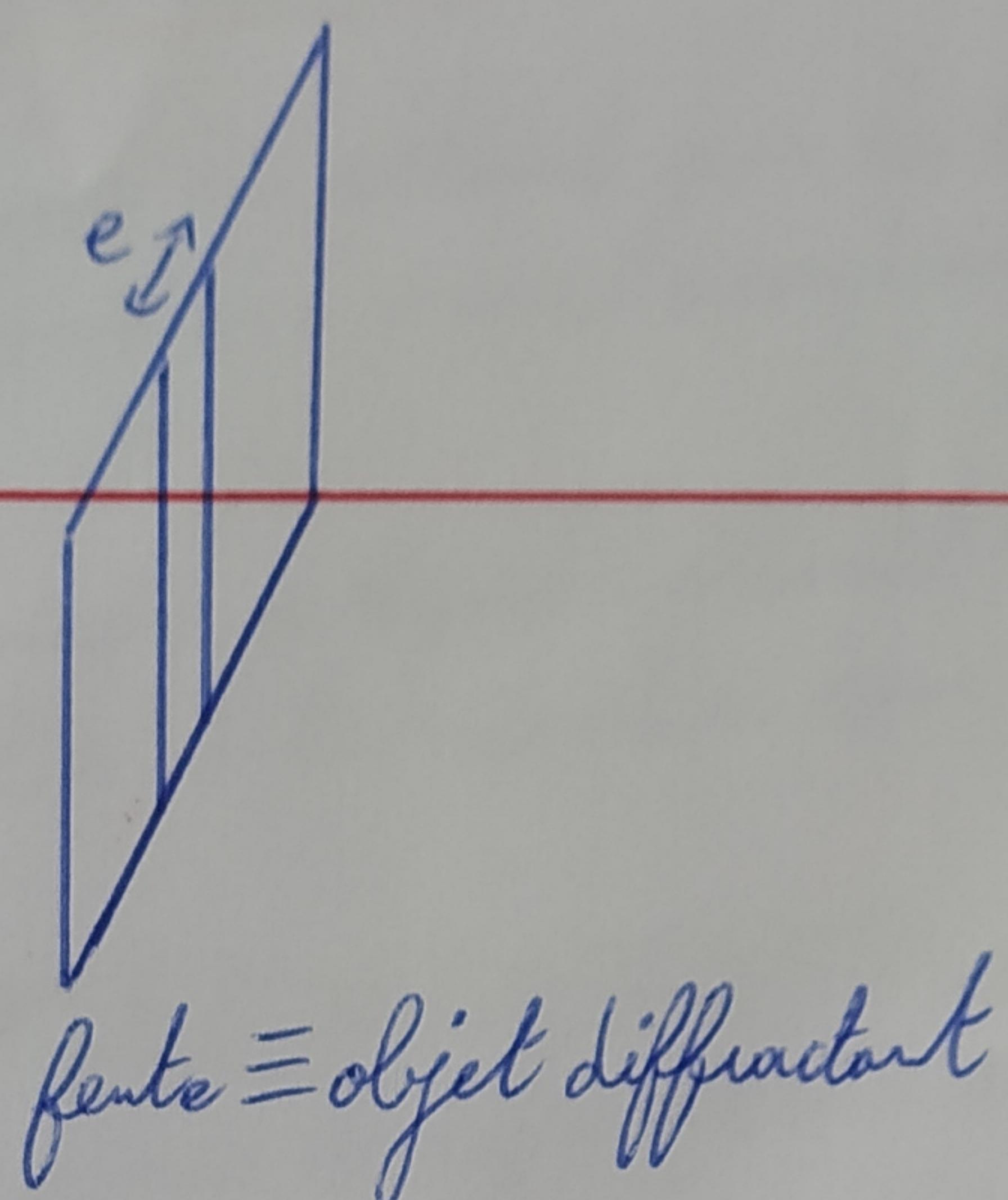
Introduction:

Expérience qualitative 1:

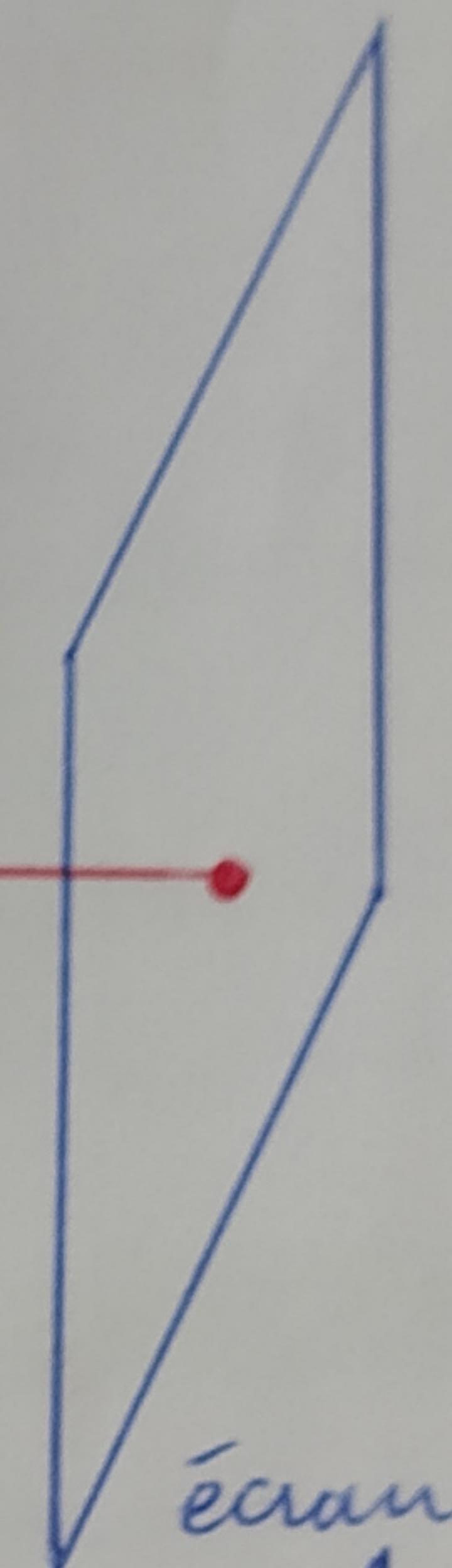
①



laser



fente = objet diffractant

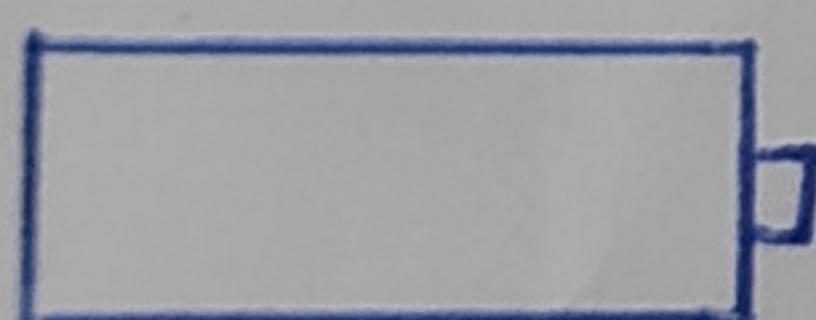


écran

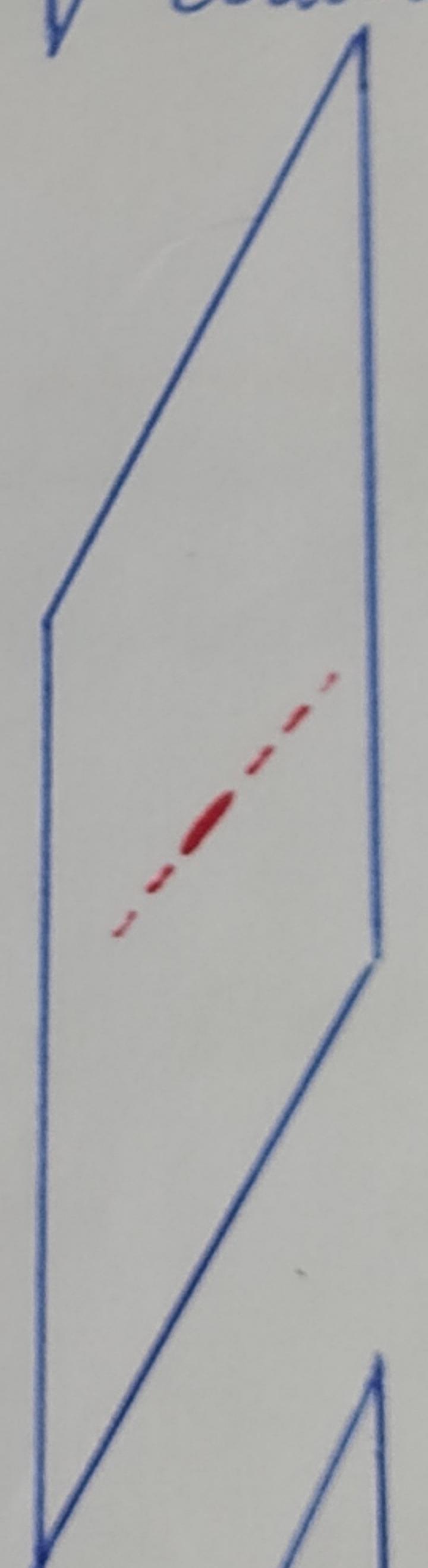
fente étroite

1 spot dans
la direction
de l'optique
géométrique

②

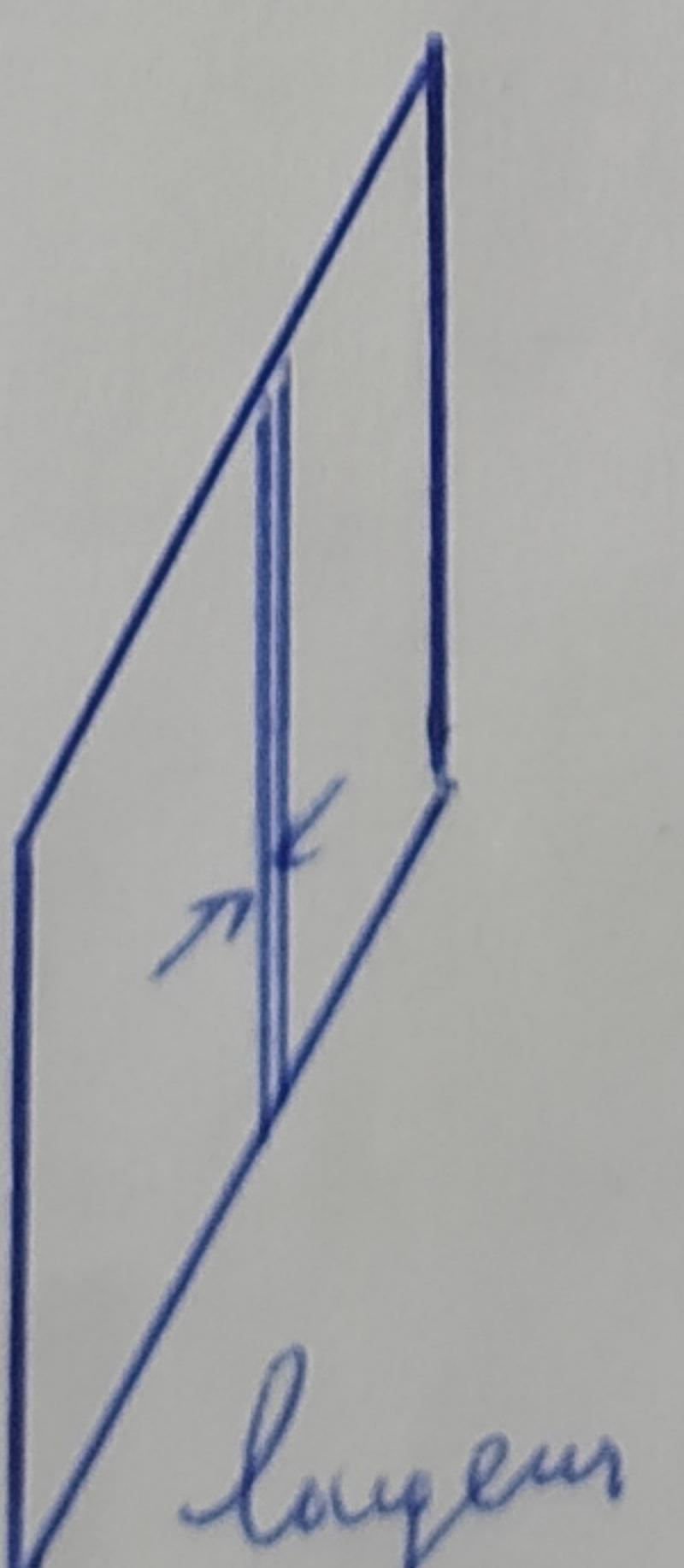
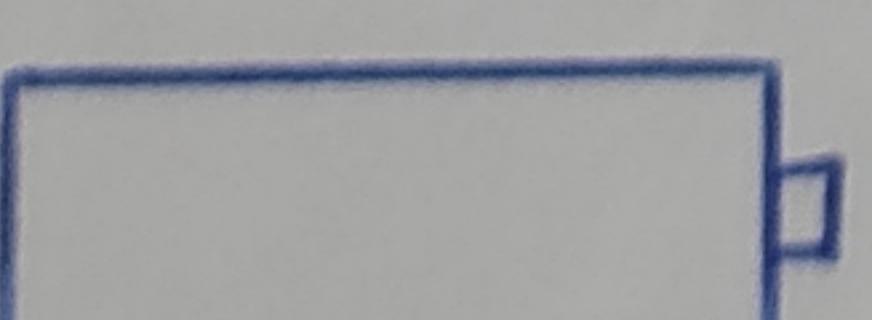


largeur
e de la
fente

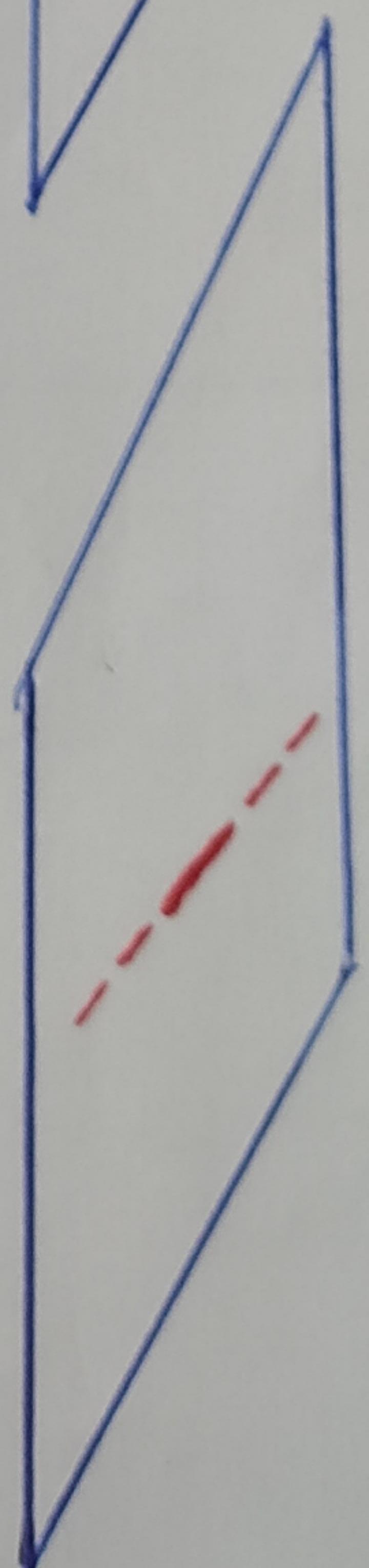


lorsque
 $e > \lambda$
le faisceau
lumineux
est diffusé

③



largeur
e encore
diminuée



lorsque $e \rightarrow$
la largeur
de la fente
central augmente

CE PHÉNOMÈNE
NE PEUT ÊTRE
EXPLIQUÉ À L'AIDE
DE L'OPTIQUE
GÉOMÉTRIQUE
(OPTIQUE ONDULATOIRE)

I) Présentation du phénomène de diffraction.

1) Principe de Huygens-Fresnel (1815).

(S1) \Rightarrow Montrer image diffraction vague pour parler de sources secondaires émettant des ondes sphériques!

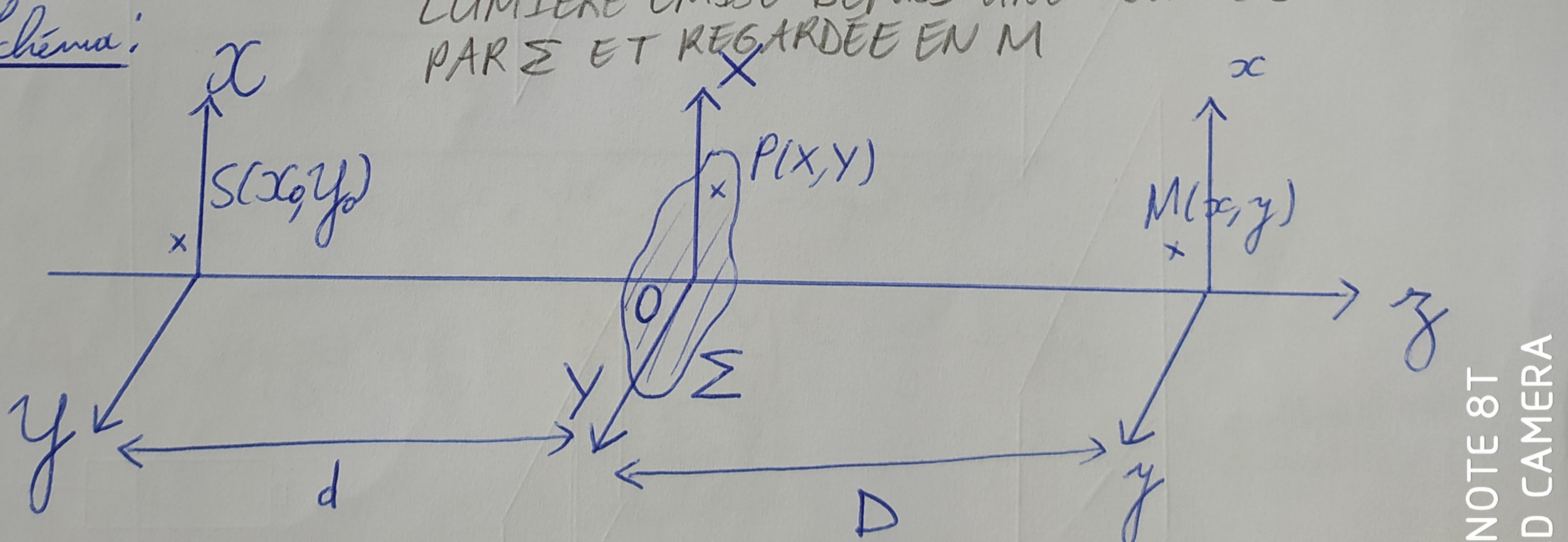
[Rappel:] Tout comme dans la leçon INTERFÉRENCES À DEUX ONDES, on va adopter le modèle scalaire de la lumière et travailler avec la vibration lumineuse $s(M)$ (aussi appelée amplitude de l'onde)

Enoncé du principe de Huygens-Fresnel:

- * Chaque point P d'une surface Σ atteint par la lumière émise par la source S se comporte comme une source secondaire émettant une onde sphérique.
- * La vibration lumineuse émise par le petit élément de surface $d\Sigma$ centré en P est proportionnelle à $d\Sigma$ et à la vibration lumineuse de l'onde incidente arrivant en P .
- * ~~La onde incidente arrivant en P et l'onde secondaire émise depuis P sont en phase.~~
- * Les vibrations lumineuses issues des différentes sources secondaires sont cohérentes entre elles et interfèrent pour donner l'onde finale.

[Remarque:] Ce principe n'en est pas vraiment un puisqu'il peut être redémonté en partant des équations de Maxwell dans le cadre de la théorie de Kirchhoff.

Schéma:



\Rightarrow On introduit la quantité complexe $t(x, y) = \frac{s(x, y, 0^+)}{s(x, y, 0^-)}$ = facteur de transmission

① Expression de l'ondelette émise par l'évolutée en M:

$$ds(M) = A \underbrace{s(P)}_{\substack{\text{fonction vibration} \\ \text{de la lumière}}} \frac{e^{i k PM}}{PM} \underbrace{t(x, y)}_{\substack{\text{fonction} \\ \text{onde sphérique}}} dx dy$$

facteur élément de surface secondaire

avec $s(P) = s_0 \frac{e^{i k SP}}{SP}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$; λ longueur d'onde de la vibration lumineuse

② Interférences entre les ondes secondaires cohérentes:

$$s(M) = A \iint t(x, y) s(P) \frac{e^{i k PM}}{PM} dx dy$$

$$\vec{PM} = \begin{pmatrix} x - X \\ y - Y \\ D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{SP} = \begin{pmatrix} X - x_0 \\ Y - y_0 \\ -d \end{pmatrix}$$

2) Approximation de Fraunhofer.

\Rightarrow On considère une source S à l'infini dont on observe la figure de diffraction à l'infini. \equiv diffraction d'une onde plane

(\rightarrow D et d très grands devant les autres longueurs caractéristiques du système)

$$PM = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + D^2}$$

$$PM = \sqrt{x^2 + y^2 + X^2 + Y^2 - 2xX - 2yY + D^2}$$

$$PM = D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2 + \left(\frac{X}{D}\right)^2 + \left(\frac{Y}{D}\right)^2 - \frac{2xX}{D^2} - \frac{2yY}{D^2}}$$

négligeable devant les autres termes \Rightarrow équivaut à taille de la tache fondamentale

après développement limité \Rightarrow

$$PM = D \left[1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} - \frac{xX}{D^2} - \frac{yY}{D^2} \right]$$

et de même

$$SP = d \left[1 + \frac{X_0^2}{2d^2} + \frac{Y_0^2}{2d^2} - \frac{x_0X}{d^2} - \frac{y_0Y}{d^2} \right]$$

Remarque: Dans $\frac{e^{ihPM}}{PM}$, on va dire $PM = D$ au dénominateur

et $PM = l'$ expression précédente dans la phase car on s'intéresse aux variations de PM à l'échelle de λ .

Finalement :

$$S(M) = \frac{A_{SO}}{dD} \iint t(x, y) e^{ih\left[d + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d}\right]} e^{ih\left[D + \frac{x^2 + y^2}{2D}\right]} e^{-ih\left[\left(\frac{x}{D} + \frac{x_0}{d}\right)x + \left(\frac{y}{D} + \frac{y_0}{d}\right)y\right]} dx dy$$

terme indépendant
de x et y

On pose $\begin{cases} \alpha = \frac{x}{D} \\ \beta = \frac{y}{D} \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha_0 = -\frac{x_0}{d} \\ \beta_0 = -\frac{y_0}{d} \end{cases}$

Donc :

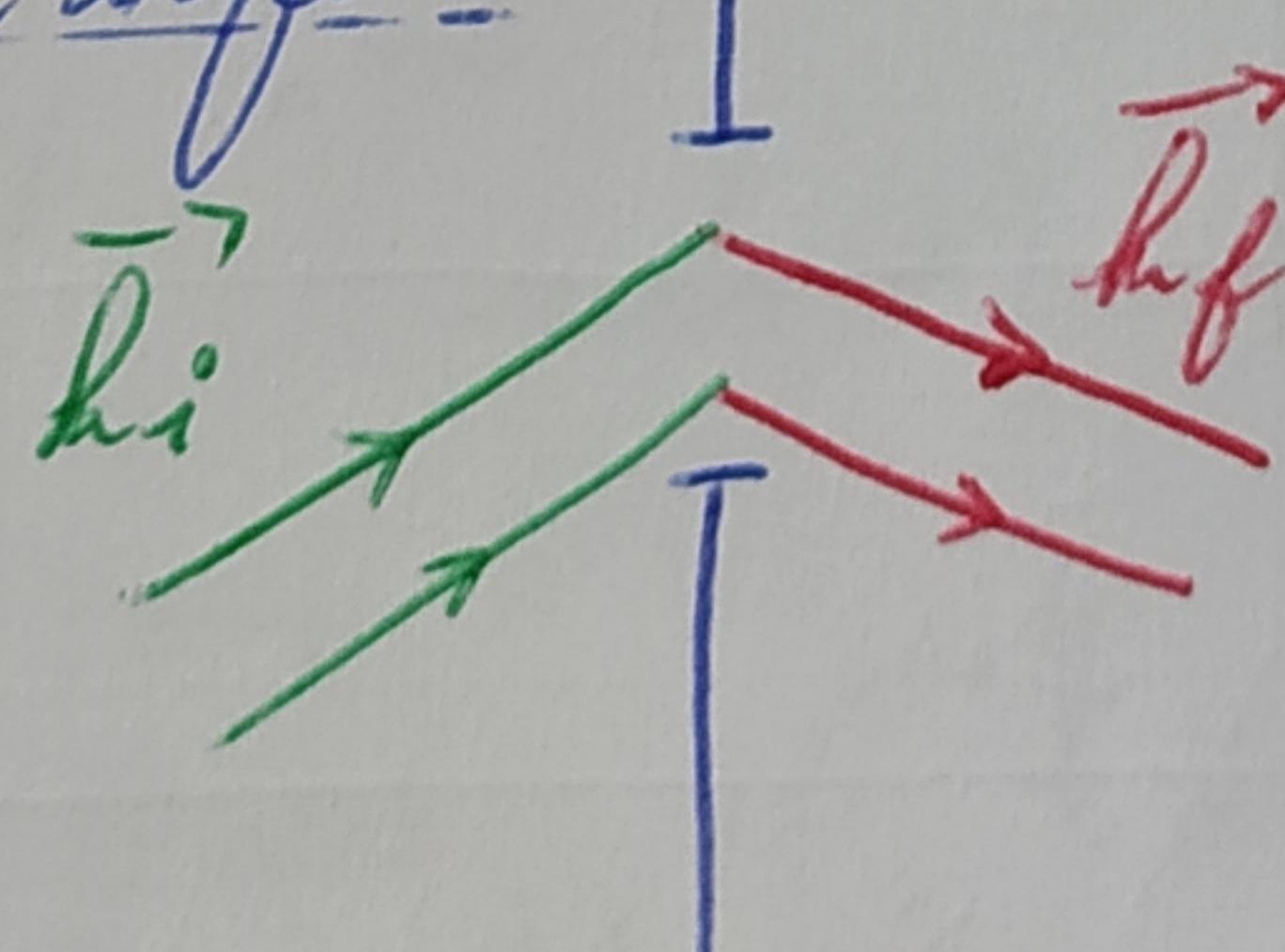
$$S(M) = \frac{A'_{SO}}{dD} \iint t(x, y) e^{-i2\pi\left[\frac{(\alpha - \alpha_0)}{\lambda}x + \frac{(\beta - \beta_0)}{\lambda}y\right]} dx dy$$

$\text{TF}[t(x, y)] \left(\frac{(\alpha - \alpha_0)}{\lambda}, \frac{(\beta - \beta_0)}{\lambda} \right)$

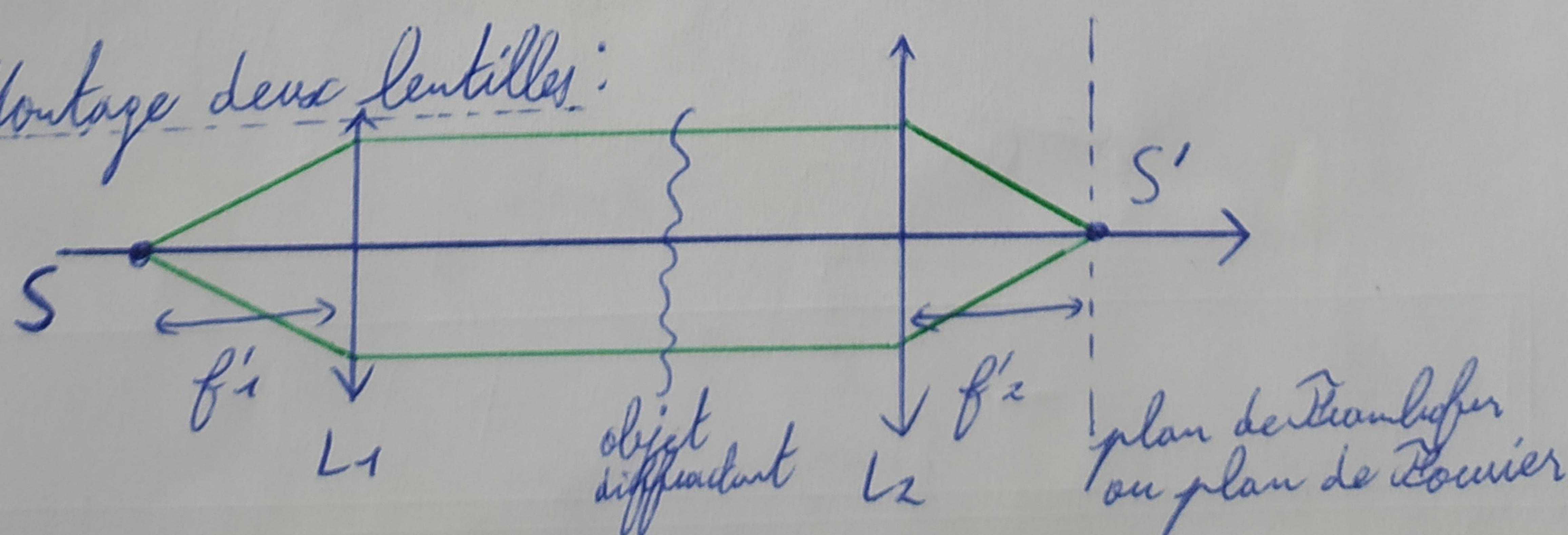
FORMULE DE FRAUNHOFER

3) Cadre d'application de la diffraction de Fraunhofer.

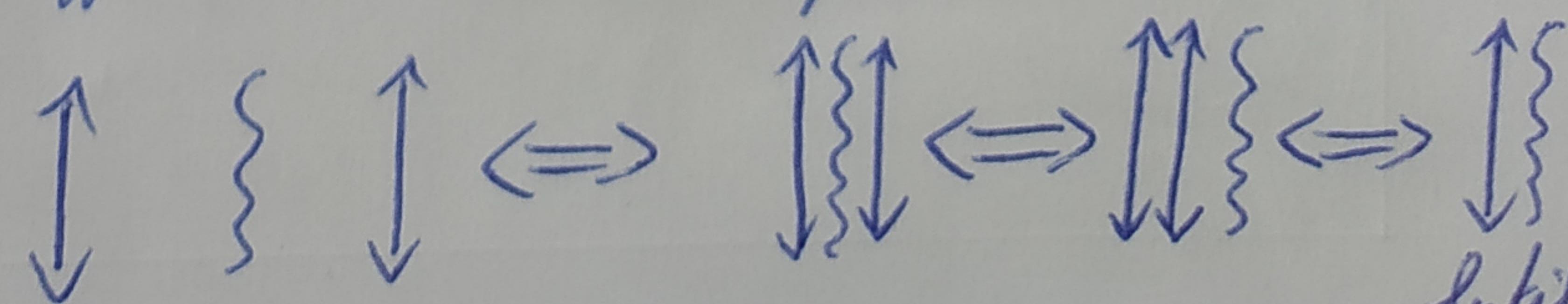
* onde plane à l'infini:



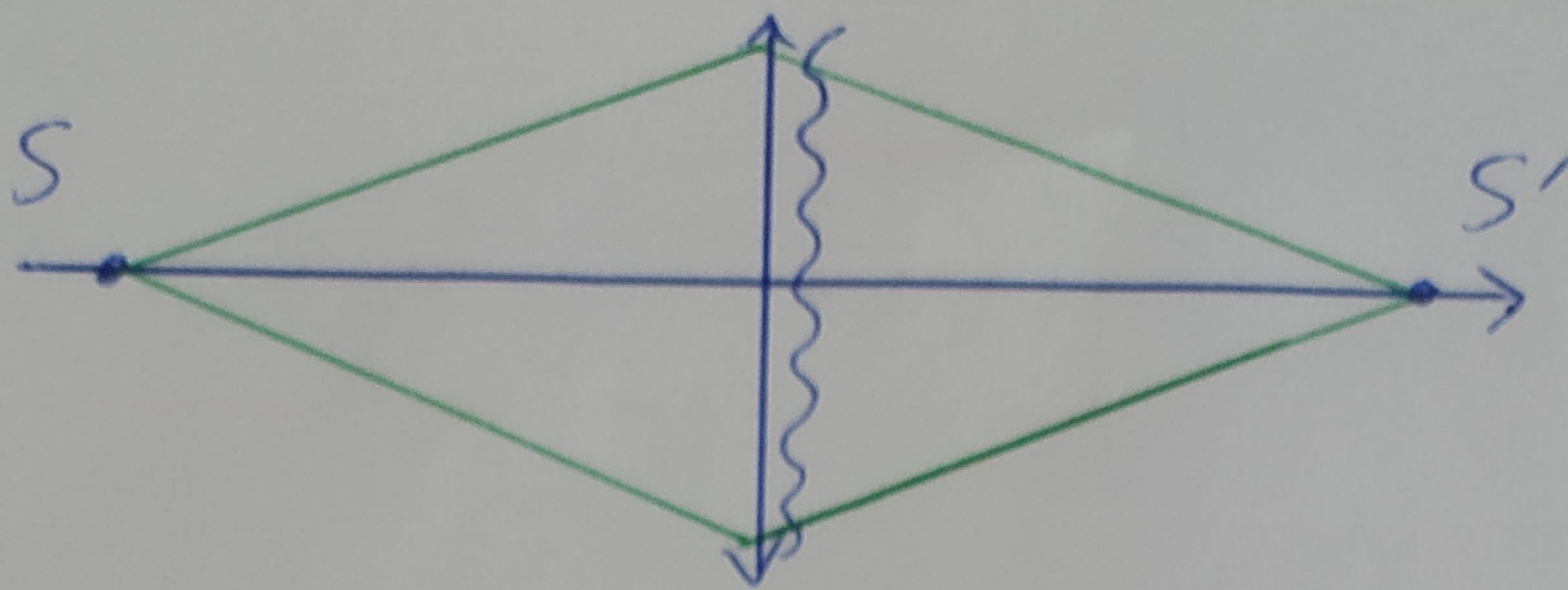
* Montage deux lentilles:



* Montage une lentille:



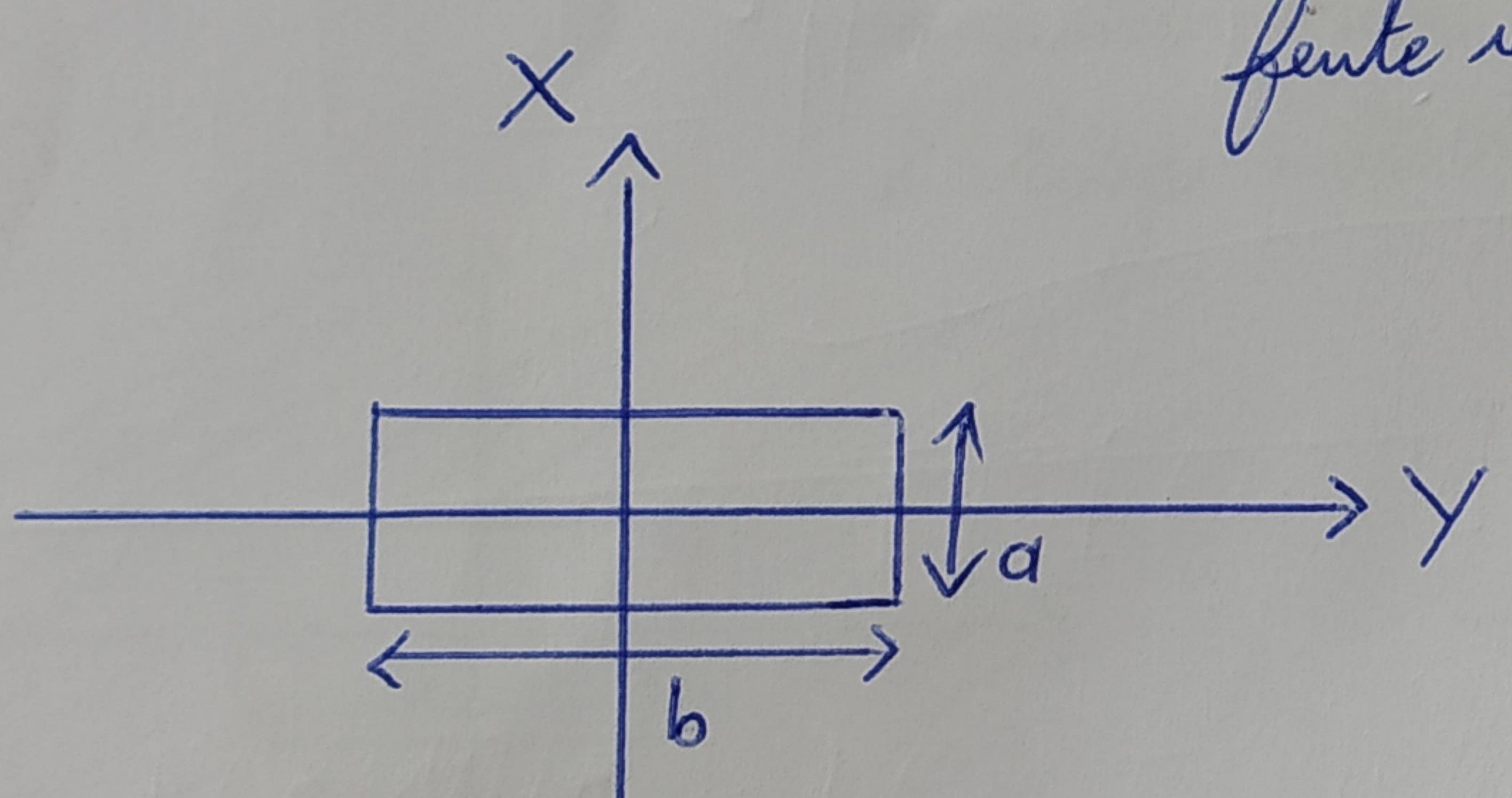
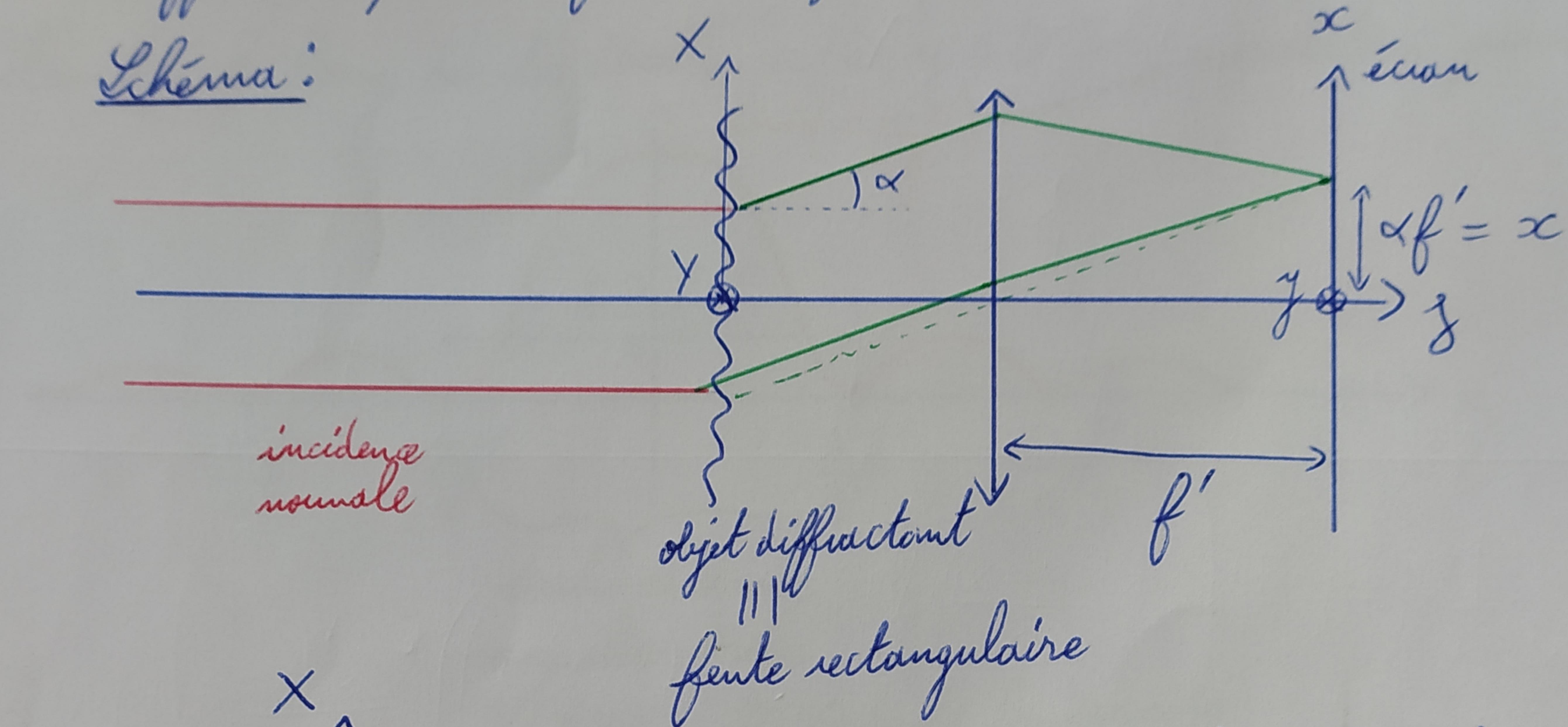
lentille placée à foyer différent

\Leftrightarrow 

II) Exemples de figures de diffraction.

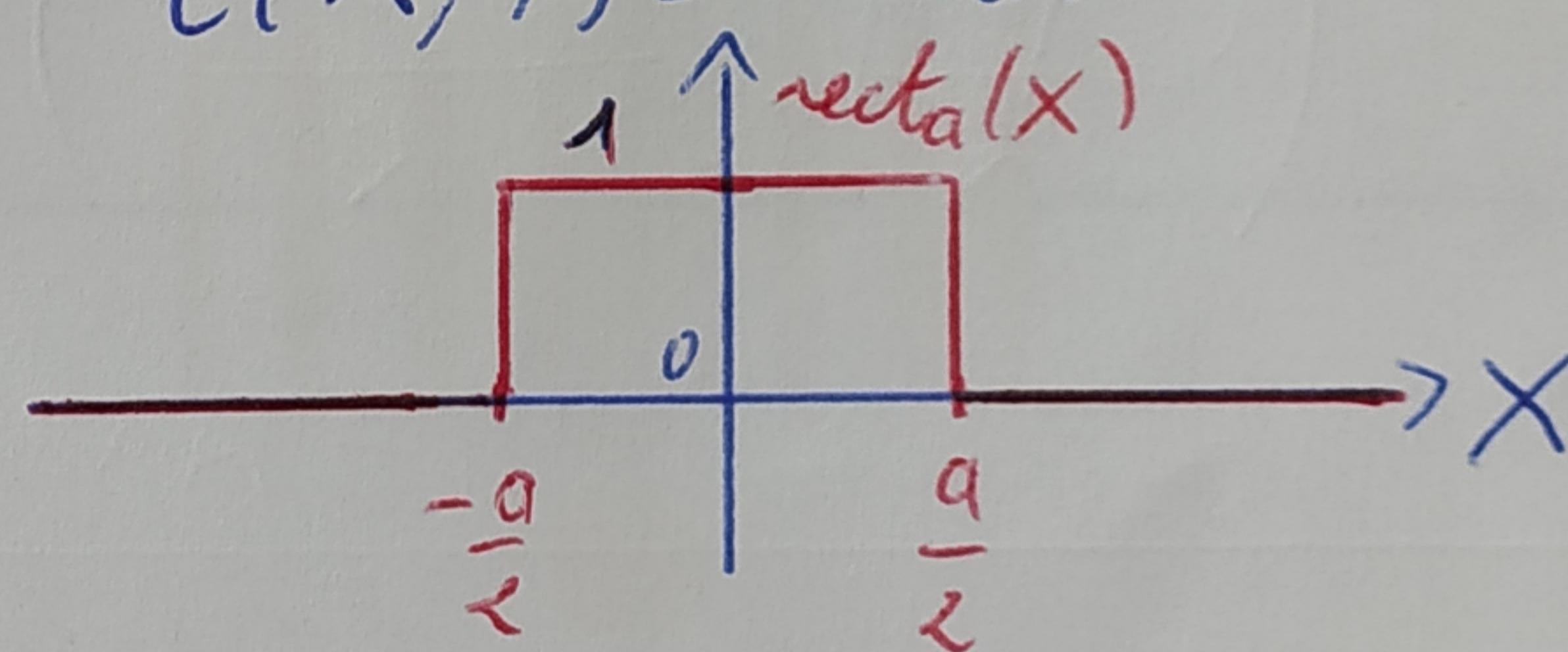
1) Diffraction par une fente rectangulaire.

Schéma :



Fonction de transmission :

$$t(X, Y) = \text{rect}_a(X) \text{rect}_b(Y)$$



Régle de Fraunhofer :

$$S(M) \propto \int_{X=-\infty}^{X=+\infty} \int_{Y=-\infty}^{Y=+\infty} \text{rect}_a(X) \text{rect}_b(Y) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \alpha X} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \beta Y} dX dY$$

$$S(M) \propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \alpha X} dX e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \beta Y} dY$$

$$S(M) \propto \left[\frac{i}{\frac{2\pi\alpha}{\lambda}} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \alpha X} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{i}{\frac{2\pi\beta}{\lambda}} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \beta Y} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$S(M) \propto \frac{i}{\frac{2\pi\alpha}{\lambda}} \underbrace{\left[e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \alpha a} - e^{+i \frac{2\pi}{\lambda} \alpha a} \right]}_{-2i \sin\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)} \frac{i}{\frac{2\pi\beta}{\lambda}} \underbrace{\left[e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \beta b} - e^{+i \frac{2\pi}{\lambda} \beta b} \right]}_{-2i \sin\left(\frac{\pi\beta b}{\lambda}\right)}$$

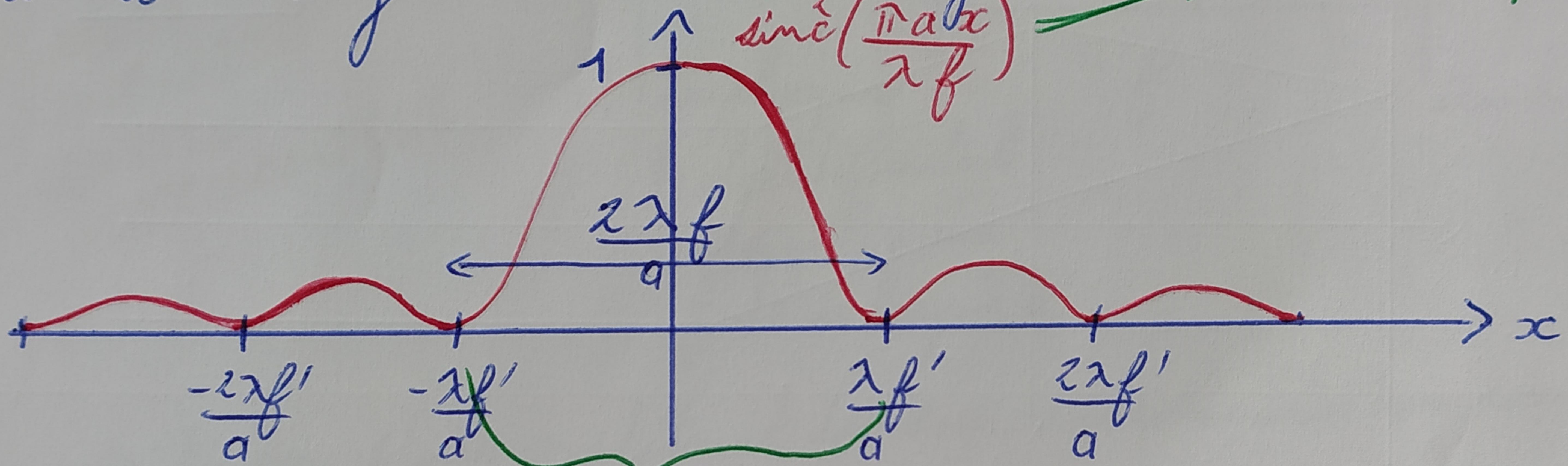
Finalement :

$$s(M) \propto \text{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda f'} x\right) \text{sinc}\left(\frac{\pi b}{\lambda f'} y\right)$$

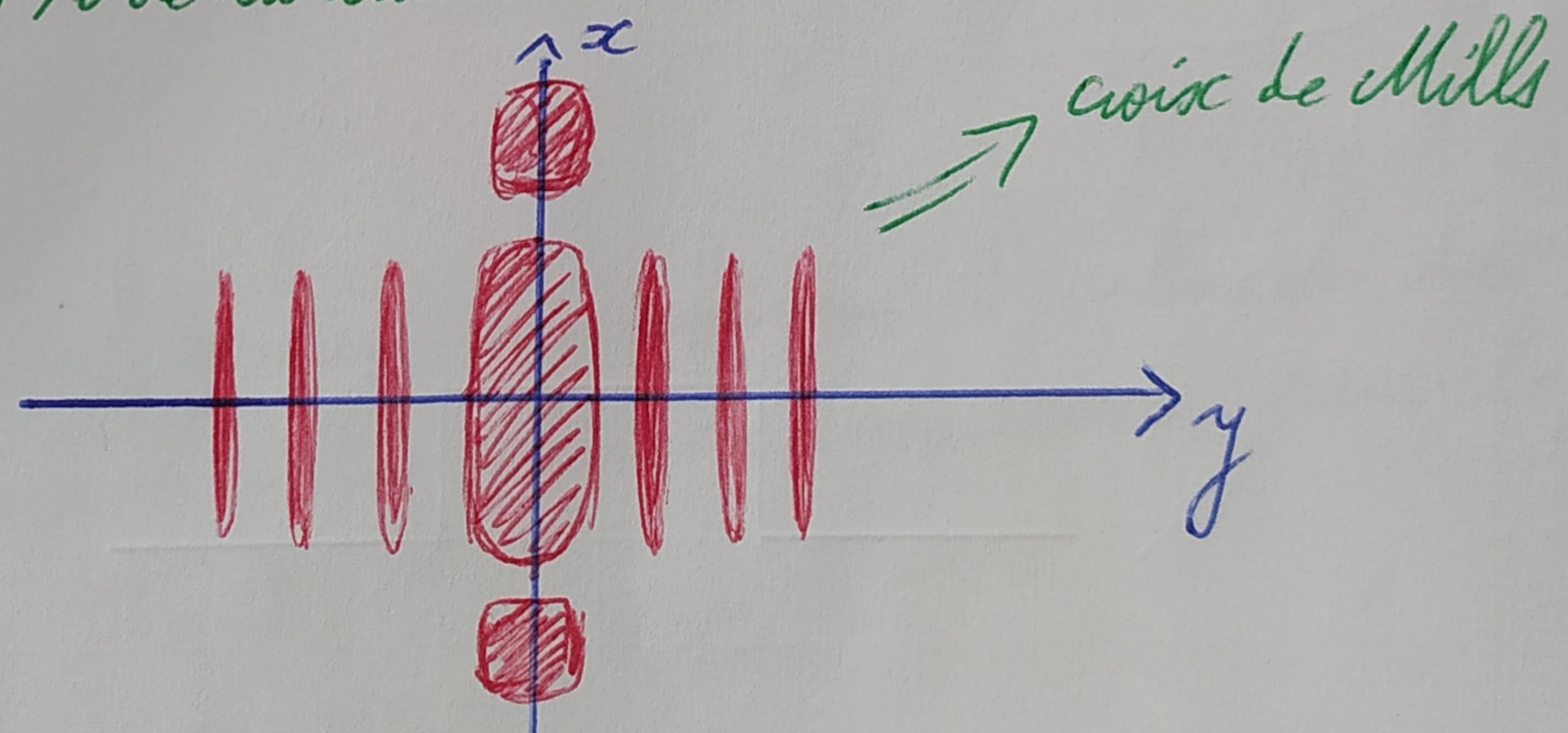
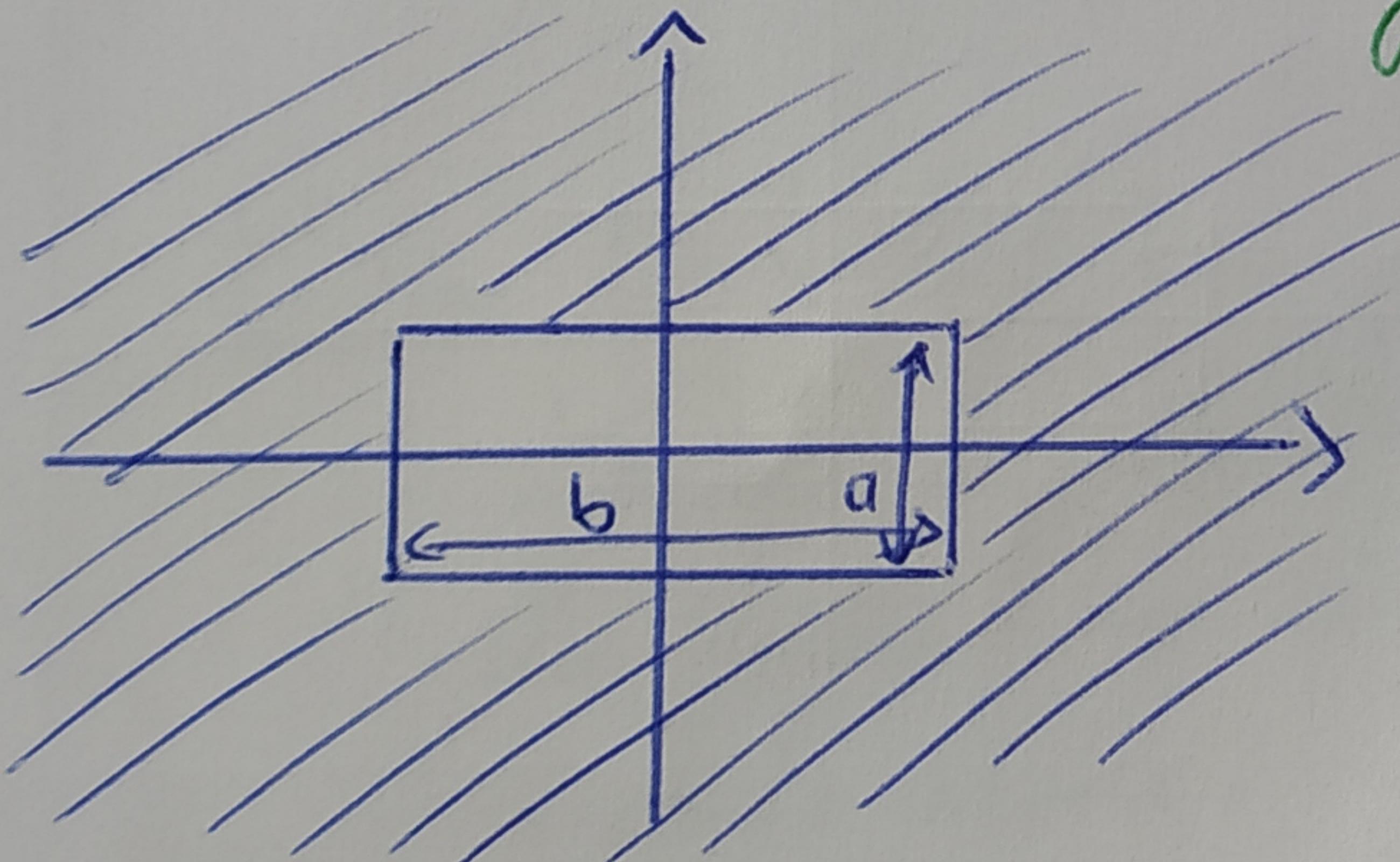
Et l'intensité est :

$$I(M) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda f'} x\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda f'} y\right)$$

Intensité le long de la direction x à $y=0$: annulation pour $x = h \frac{\lambda f'}{a}$
 $h \in \mathbb{Z}^*$



tache centrale
appelée tache
d'Airy $\approx 80\%$ de la luminosité

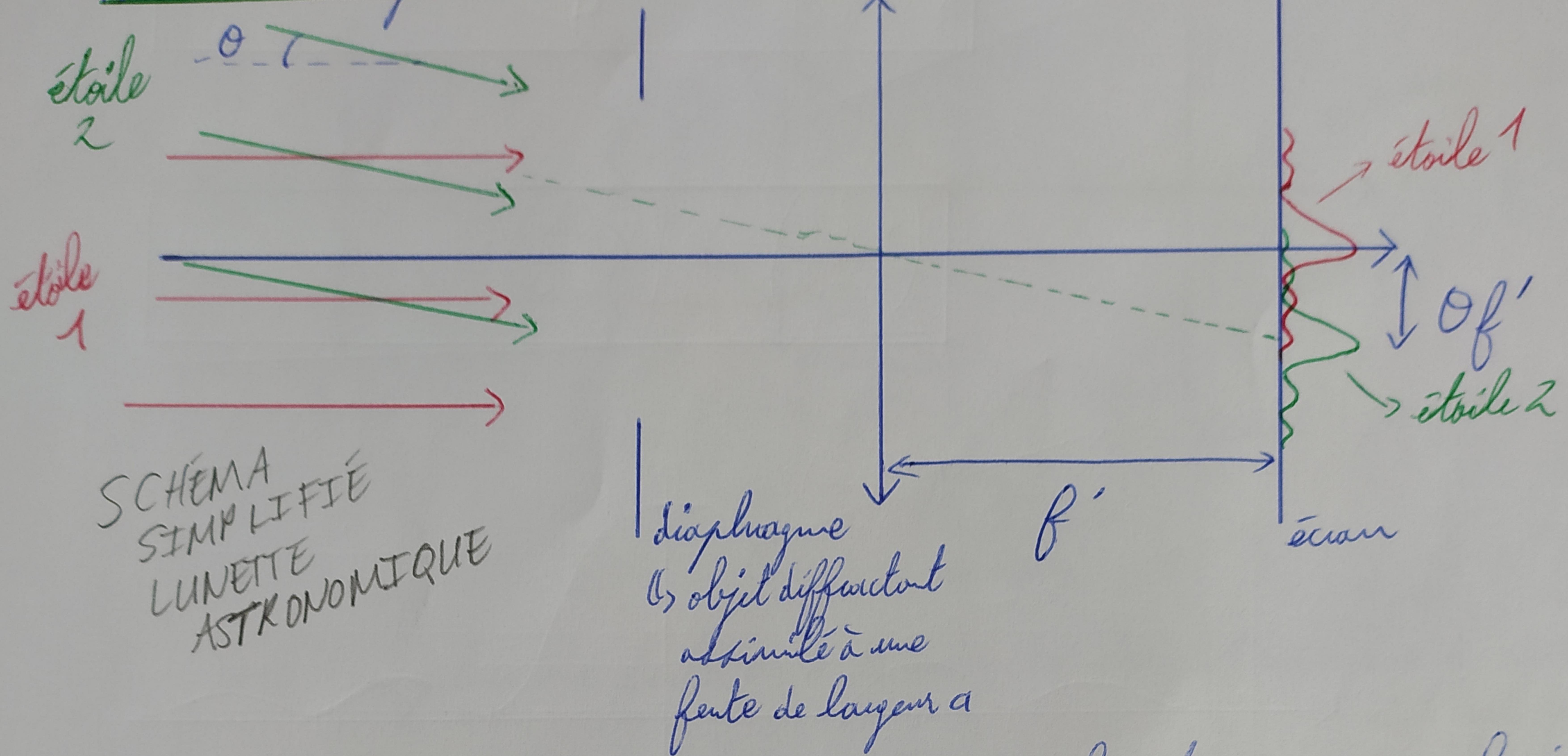


2) Retour sur les fentes d'Young.

⑤ Voir slide 2

III) Limitations dues à la diffraction / applications.

1) Résolution angulaire limite.

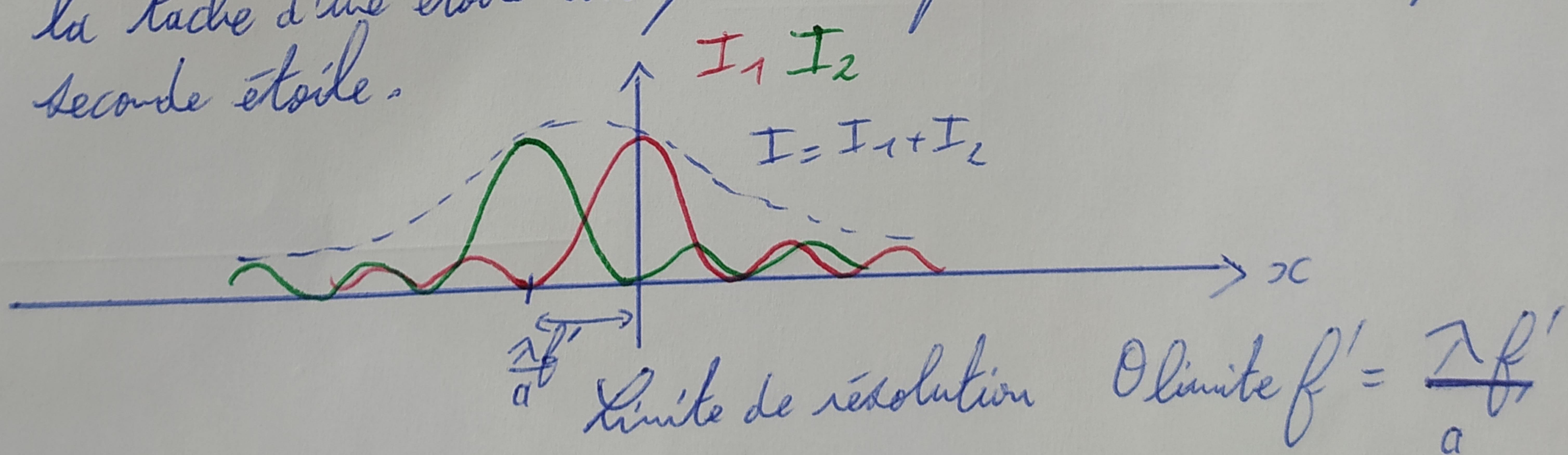


\Rightarrow Les deux étoiles constituent des sources incohérentes : on somme les intensités

\Rightarrow Si θ est trop petit les lobes vont se recouvrir et on ne pourra plus séparer les deux étoiles

Critère de Rayleigh :

Limite de résolution atteinte quand le maximum d'intensité de la tache d'une étoile correspond à la première annulation pour la seconde étoile.

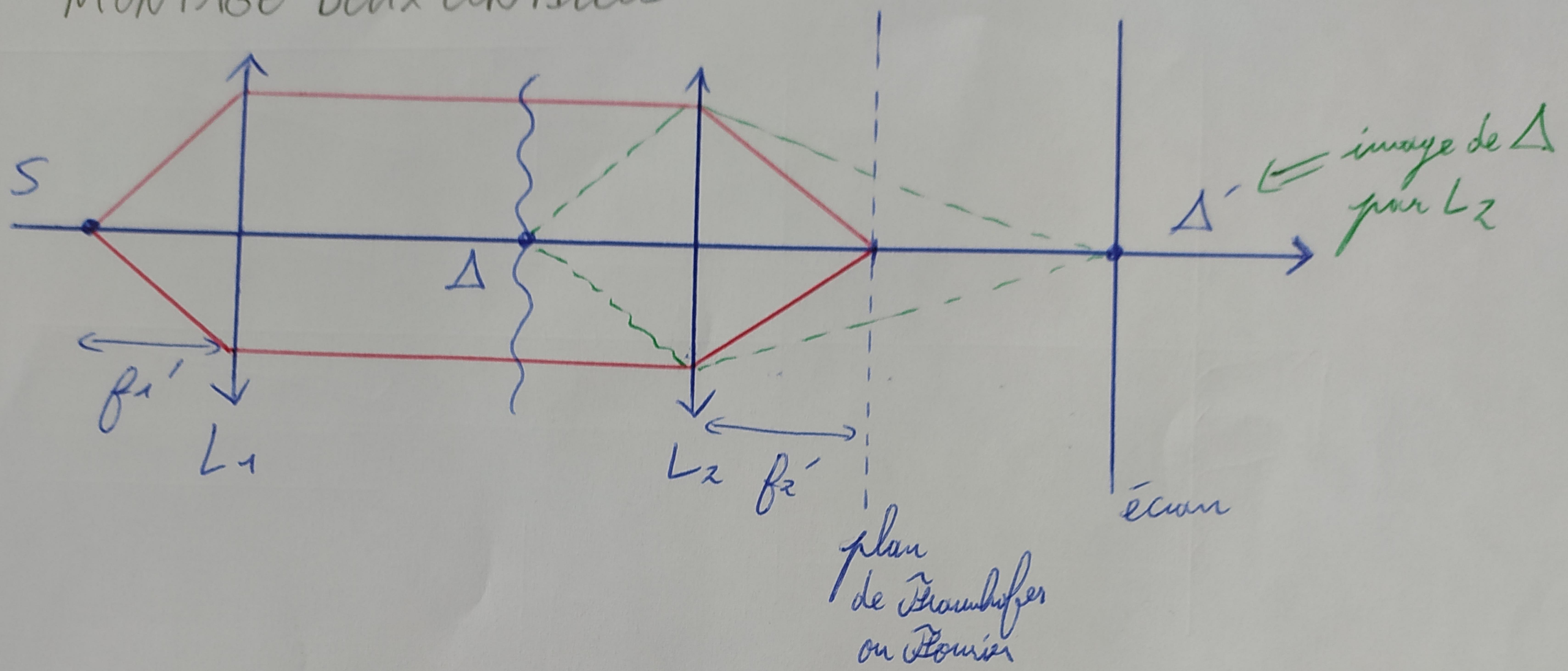


$$\text{Onde limite } f' = \frac{\lambda}{a}$$

$$\Rightarrow \text{Onde limite} = \frac{\lambda}{a}$$

2) Filtrage spatial, expérience d'Abbe.

MONTAGE DEUX LENTILLES



\Rightarrow On place une fente dans le plan de Foucair (expliquer le reste à l'oral en montant la manip)

Conclusion: \rightarrow diffraction par structures périodiques
 (rayons X)
 (LEED)