D3 : Bilans macroscopiques en mécanique des fluides

Niveau : CPGE

Pré-requis :

I) Position du problème.

II) Bilans de quantité de mouvement.

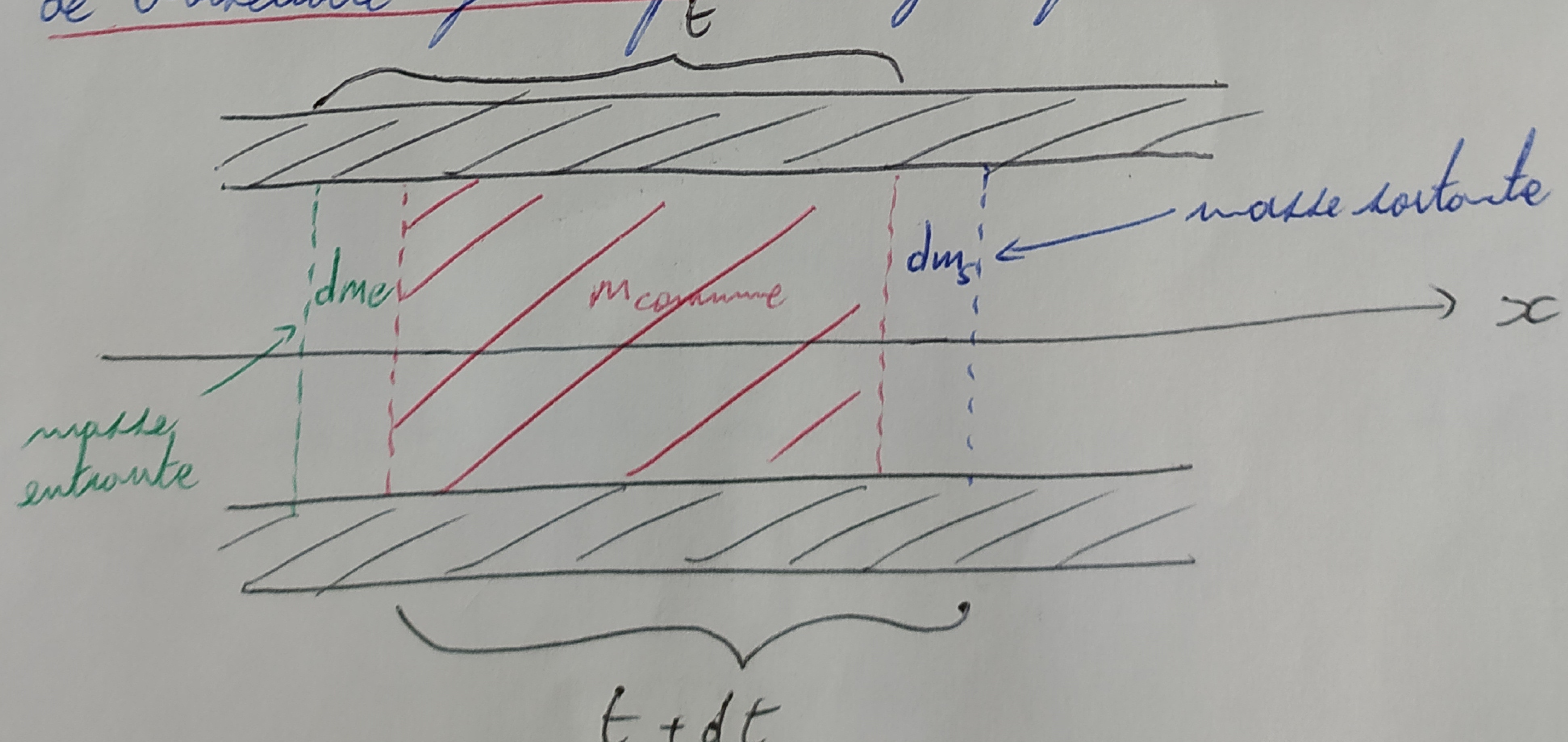
III) Bilans d'énergie ~~cinétique~~ mécanique.

Introduction : Contrairement aux chapitres précédents où l'on travaillait sur des particules fluides de taille mésoscopique, ici nous allons réaliser des bilans de quantité de mouvement et d'énergie sur des systèmes macroscopiques. Nous verrons que cette démarche est fructueuse et sa difficulté réside dans le fait de définir efficace proprement le système.

I) Position du problème.

1) Systèmes fermés.

* Tout au long de ce chapitre nous allons raisonner sur des systèmes fermés mais macroscopiques.
* Illustrons ce que l'on entend par là sur l'exemple de l'écoulement de Poiseuille cylindrique en régime permanent :



* Comme le système est fermé on a : $m(t) = m(t+dt)$

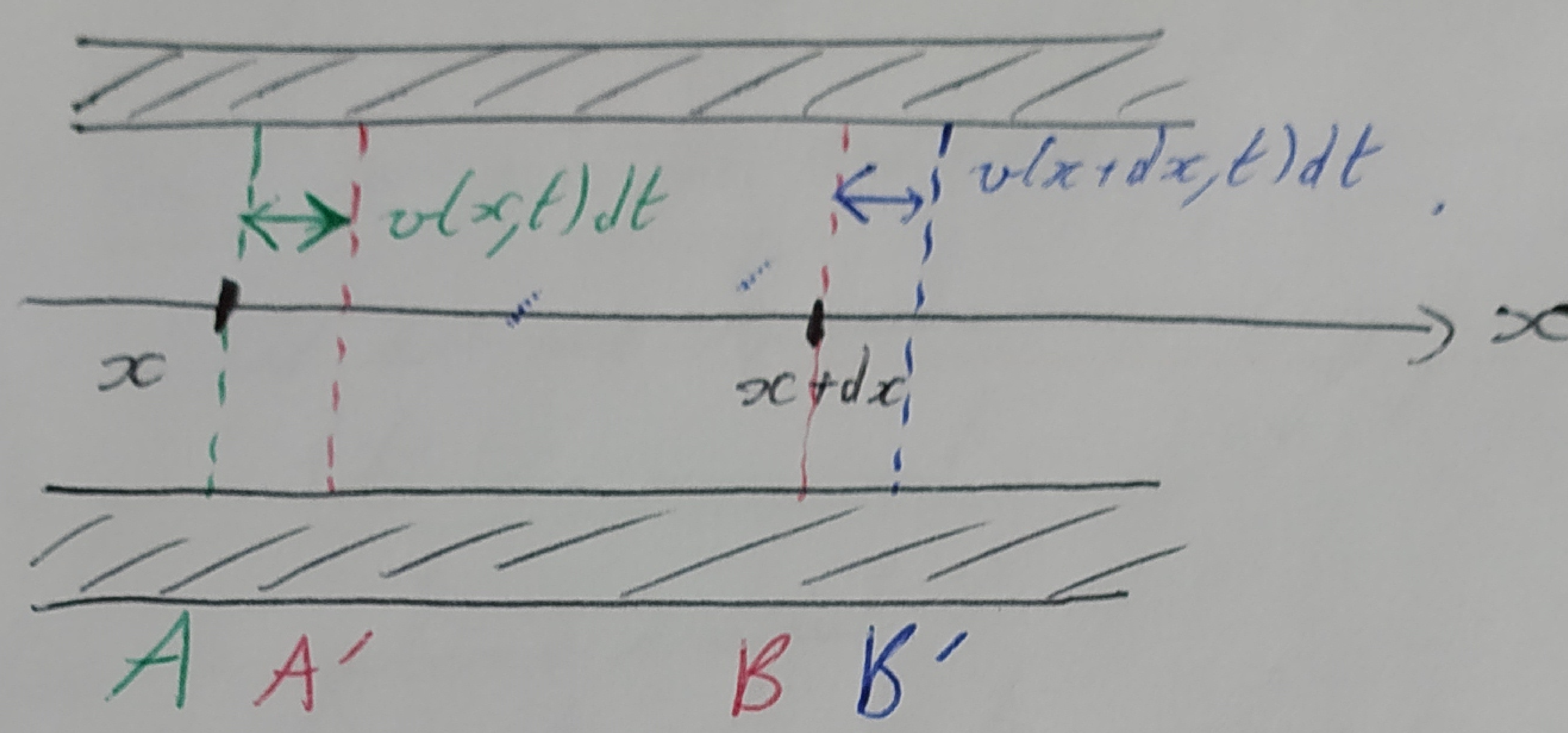
$$m_{commune}(t) + dm_e = m_{commune}(t+dt) + dm_s$$

permet $\Rightarrow$ $\boxed{dm_e = dm_s}$

* C'est sur ce genre de systèmes que nous allons effectuer des bilans dans ce chapitre

2) Exemple : bilan de masse.

* Nous considérons ici l'écoulement d'un fluide parfait dans un tuyau de section constante :



$\begin{cases} \text{à } t : AB \\ \text{à } t+dt : A'B' \end{cases}$

* La masse à l'instant t a pour expression :

$$\boxed{m(t) = m_{AB}(t) = \rho(x,t)\, S\, dx}$$

* La masse à l'instant $(t+dt)$ a pour expression :

$$m(t+dt) = m_{A'B'}(t+dt) = m_{A'B}(t+dt) + m_{BB'}(t+dt)$$

$$= \rho(x,t+dt)\, S\,(\cancel{x}+dx - (\cancel{x}+v(x,t)dt))$$

$$+ \rho(x+dx,t+dt)\, S\, v(x+dx,t)\, dt$$

$$\boxed{m(t+dt) = [\rho(x,t+dt)\,dx - \rho(x,t+dt)\,v(x,t)\,dt + \rho(x+dx,t+dt)\,v(x+dx,t)\,dt]\, S}$$

* Comme on considère un système fermé on a $m(t) = m(t+dt)$:

$$\Rightarrow \rho(x,t)\,dx = \rho(x,t+dt)\,dx - \rho(x,t+dt)\,v(x,t)\,dt + \rho(x+dx,t+dt)\,v(x+dx,t)\,dt$$

$$\Rightarrow [\rho(x,t+dt) - \rho(x,t)]\,dx + [\rho(x+dx,t+dt)\,v(x+dx,t) - \rho(x,t+dt)\,v(x,t)]\,dt = 0$$

on simplifie par dx et dt $\Rightarrow \dfrac{\partial \rho}{\partial t}\cancel{dx\,dt} + \dfrac{\partial \rho v}{\partial x}\cancel{dx\,dt} = 0$

* Au final on trouve :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0}$$

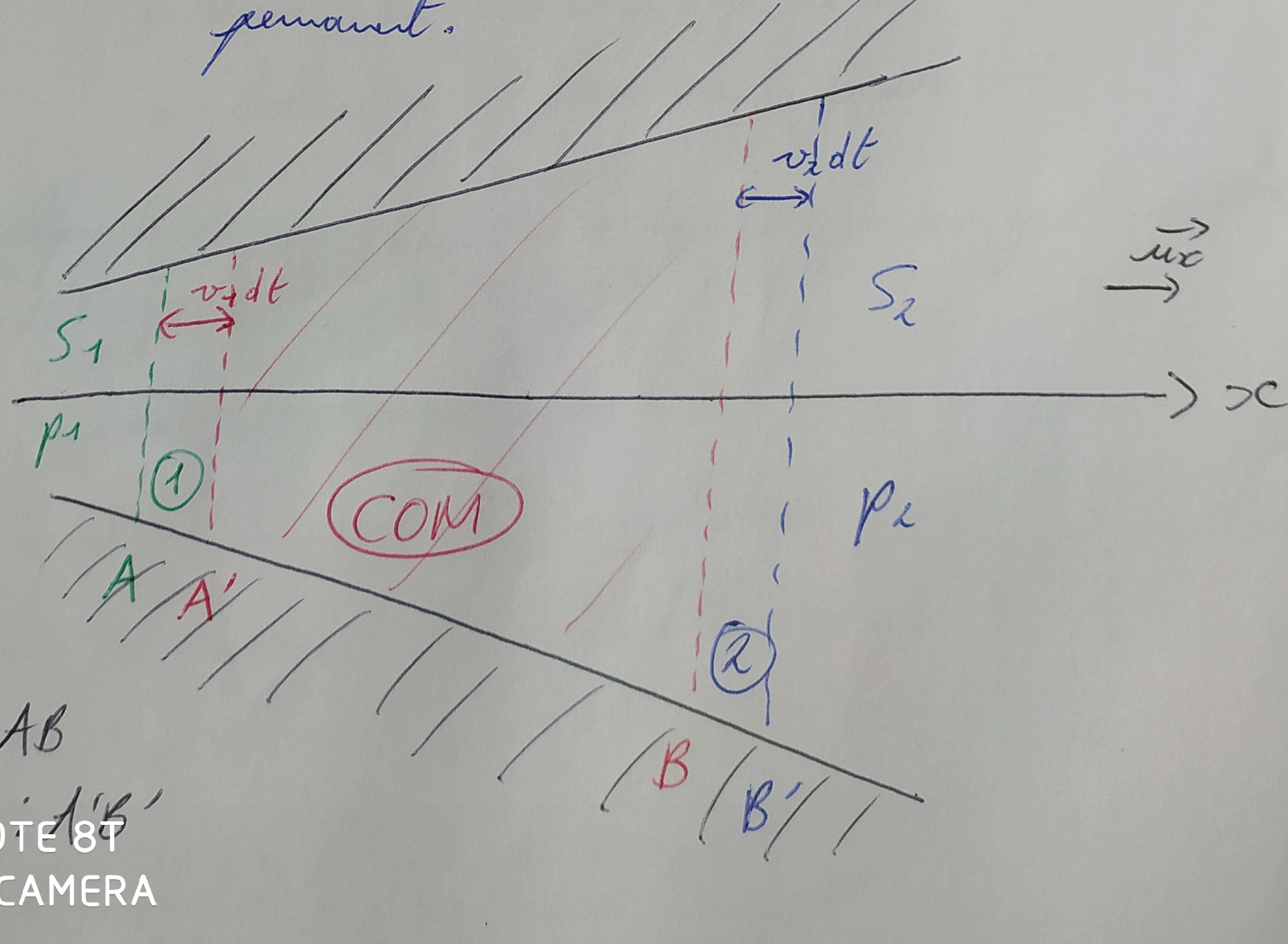
équation de conservation de la masse

=> Remarque : Cette équation est équivalente à l'équation locale de conservation de la masse.
Or, nous n'avons pas raisonné sur une particule fluide mais sur une tranche macroscopique.

II) Bilans de quantité de mouvement.

* On considère le système suivant :
  - Conduit présentant un élargissement entre deux tronçons de sections respectives S_1 et S_2 ($S_1 < S_2$).
  - On considère un écoulement parfait incompressible si bien que ~~la~~ la vitesse est considérée uniforme sur toute section : $\boxed{\vec{v}(x,t) = v(x,t)\vec{u_x}}$.
    Le débit volumique est $\boxed{D_v}$ (conservé) (débit massique $\boxed{D_m = \rho D_v}$
  - On suppose aussi que l'on est en régime permanent.

Définition du système :



$\begin{cases} \text{à } t : AB \\ \text{à } t+dt : A'B' \end{cases}$

⇒ * On veut calculer la force horizontale (~~$\vec{u_x}$~~) qu'on doit exercer sur le tuyau pour le ~~rendre~~ maintenir immobile. $-F\vec{u_x}$

* On réalise un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé préalablement défini (on note $\vec{p}$ l'impulsion)

• À t : $\vec{p}(t) = \underbrace{D_m dt\, \vec{v_1}(t)}_{\vec{p_1}(t)} + \vec{p}_{com}(t)$

• À $t+dt$: $\vec{p}(t+dt) = \underbrace{D_m dt\, \vec{v_2}(t+dt)}_{\vec{p_2}(t+dt)} + \vec{p}_{com}(t+dt)$

* Comme on est en régime permanent $\vec{p}_{com}(t) = \vec{p}_{com}(t+dt)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = D_m(v_2 - v_1)\vec{u_x}\, dt}$$

* Quelles sont les forces s'exerçant sur le système ?
    • Pression en amont : $\vec{F_{p1}} = p_1 S_1 \vec{u_x}$
    • Pression en aval : $\vec{F_{p2}} = -p_2 S_1 \vec{u_x}$
    • Action de la paroi sur le fluide : $-F\vec{u_x}$

* On applique le principe fondamental de la dynamique au système :

$$\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \vec{F_{p1}} + \vec{F_{p2}} - F\vec{u_x}$$

$$\Rightarrow D_m(v_2 - v_1) = p_1 S_1 - p_2 S_2 - F$$

* Car l'écoulement est parfait, permanent et incompressible, on peut appliquer le théorème de Bernoulli (ligne de courant centrale)

$$p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 = p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 \qquad v_1 S_1 = v_2 S_2$$

$$\Rightarrow p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) = p_1 + \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)v_1^2$$

* $\rho D_v(v_2 - v_1) = p_1 S_1 - p_2 S_2 - F$

$$\Rightarrow \boxed{F = p_1(S_1 - S_2) - \frac{1}{2}\rho \frac{D_v^2}{S_1}\left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}\right)^2}$$

AN : $p_1 = 1\,\text{bar}$
$D_v = 1\,L.s^{-1}$
$S_1 = 2S_2 = 10\,cm^2$ $\Rightarrow F = \underline{49{,}3\,N}$
$\rho = 1000\,kg.m^{-3}$

Remarque : * Élargissement → force ~~opp~~ fluide/paroi opposé à écoulement.

* Rétrécissement → force fluide/paroi dans le sens écoulement.

III) Bilans d'énergie ~~cinétique~~ mécanique.

* On veut ici calculer la puissance qu'il faut fournir à une ~~pomp~~ la pompe suivante (montrer slide) :

↳ présenter le système, les hypothèses et les valeurs numériques ↳ le faire avec le slide !!!

~~* Considérons le système~~

* Comme l'écoulement est incompressible : $dm_1 = dm_2 = \rho D_v dt$

$v_1 S_1 = v_2 S_2 = D_v$

* Bilan d'énergie ~~cinétique~~ mécanique :

$$\begin{cases} E_c(t) = E_{c1}(t) + E_{ccom}(t) = \frac{1}{2}dm_1 v_1^2 + E_{ccom} \\ E_p(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_c(t+dt) = E_{c2}(t+dt) + E_{ccom}(t+dt) = \frac{1}{2}dm_2 v_2^2 + E_{ccom} \\ E_p(t+dt) = g h\, dm_2 = \rho D_v g h\, dt \end{cases}$$

$E_{ccom} = $ cst

$$E_m(t+dt) - E_m(t) = \frac{1}{2}\rho D_v dt(v_2^2 - v_1^2) + \rho D_v dt\, g h$$

* Bilan des travaux des forces non conservatives :

* Efforts de pression : $\delta W_p = p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt$

$$\boxed{\delta W_p = D_v (p_1 - p_2) dt}$$

* Action de la pompe sur le fluide : $\boxed{\eta \mathcal{P}_m dt}$

* D'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m(t+dt) - E_m(t) = \sum_{\substack{\text{non} \\ \text{conservatives}}} W$$

$$\rho D_v \cancel{dt} \left(\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g h \right) = D_v (p_1 - p_2) \cancel{dt} + \eta \mathcal{P}_m \cancel{dt}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_m = \frac{D_v}{\eta} \left(\frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \rho g h + p_2 - p_1 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_m = \frac{D_v}{\eta} \left(\frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{D_v}{S_2}\right)^2 - \left(\frac{D_v}{S_1}\right)^2 \right] + \rho g h + p_2 - p_1 \right)}$$

AN : $\mathcal{P}_m = \underline{21 \text{ kW}}$

Conclusion : - Méthode puissante permettant de retrouver résultat
↳ profil vitesse Poiseuille par exemple
- Aussi utilisée en thermodynamique

Commentaires :

- Mentionner systèmes ouvert
- Préciser cadre système fermé