Préparation à l'agrégation de physique

Hydrodynamique - TD1

Tom BIENAIMÉ (*tom.bienaime@ens.fr*)

Une liste de références bibliographiques est donnée à la fin de ce TD. Il est conseillé aux étudiants qui n'ont pas suivi de cours d'hydrodynamique, ou dont les souvenirs sont lointains, de lire les chapitres d'hydrodynamique d'un livre de niveau PC (voir référence 1 par exemple).
Merci à Benoît Semin d'avoir partagé les énoncés des années précédentes. Ils ont été repris partiellement dans cette série de TDs.

1 Cinématique des fluides

1.1 Définitions

1. Définir brièvement les notions suivantes : volume mésoscopique, particule de fluide, ligne de courant, trajectoire.
2. Définir brièvement la notion d'écoulement stationnaire. Un écoulement reste-t-il stationnaire lors d'un changement de référentiel ?

1.2 Caractérisation d'un écoulement

On considère le champ de vitesse $\mathbf{v} = \alpha x\, \mathbf{u}_x - \alpha y\, \mathbf{u}_y$, avec $\alpha > 0$.

1. L'écoulement est-il stationnaire, compressible, irrotationnel ?
2. Tracer les lignes de courant associées à cet écoulement.
3. Calculer à l'instant t la position d'une particule située en $(x_0, y_0, 0)$ à $t = 0$. Tracer la trajectoire des particules.
4. Calculer la vitesse en représentation lagrangienne. Calculer l'accélération en représentation lagrangienne et comparer à l'accélération en représentation eulérienne.

1.3 Ondes de gravité

Un vibreur impose une oscillation sinusoïdale de période T et de très faible amplitude à la surface d'un bassin de grandes dimensions, à fond plat et dont les bords sont transparents. On disperse des traceurs dans le bassin et on prend une photographie avec un temps de pose égal à la période T d'excitation. On constate ainsi que :

- les trajectoires des particules de fluide sont elliptiques ;
- les ellipses sont quasi-circulaires à la surface ($z = h$) et de plus en plus plates lorsqu'on s'enfonce vers le fond ($z = 0$).

Pour interpréter ces observations, on adopte le modèle de l'écoulement incompressible et irrotationnel, associé à un potentiel des vitesses de la forme :

$$\phi = f(z) \cos(\omega t - kx),$$

dont la dépendance en x et t à z fixé décrit une onde plane progressive de vitesse $c = \omega/k$ et de longueur d'onde $\lambda = cT$.

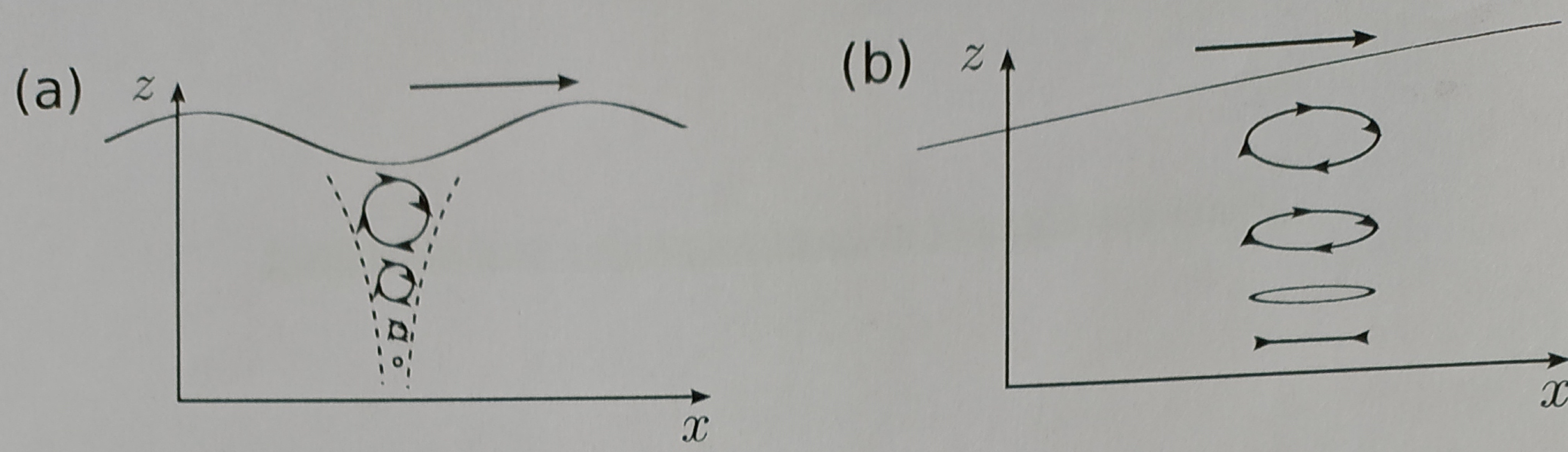


Figure 1 – Trajectoires des particules de fluide au passage d'une onde ; (a) en eau profonde et loin du fond ($kz \gg 1$) ; (b) en eau peu profonde ($kz \ll 1$). La flèche donne le sens de propagation de l'onde.

1. Établir l'équation différentielle dont est solution $f(z)$ en exploitant l'incompressibilité de l'écoulement.
2. Justifier la condition aux limites :
$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(z = 0) = 0,$$
et en déduire $f(z)$ à une constante multiplicative A près, puis les composantes v_x et v_z du champ eulérien des vitesses.
3. Trouver les équations des lignes de courant associées à cet écoulement.
4. En déduire que les coordonnées $(x^\star(t), z^\star(t))$ d'une particule de fluide donnée sont solutions du système différentiel :
$$\frac{\mathrm{d}x^\star}{\mathrm{d}t} = kA\cosh(kz^\star)\sin(\omega t - kx^\star) \qquad ; \qquad \frac{\mathrm{d}z^\star}{\mathrm{d}t} = kA\sinh(kz^\star)\cos(\omega t - kx^\star).$$
5. Ce système non-linéaire couplé n'a pas de solution analytique. Pour simplifier le système, on peut mettre à profit une observation supplémentaire : le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse sont petits par rapport à la longueur d'onde λ. On remplace alors $kx^\star$ et $kz^\star$ par leurs moyennes temporelles $k\bar{x}^\star$ et $k\bar{z}^\star$ dans le membre de droite du système différentiel.
   (a) Justifier la validité de cette approximation.
   (b) Montrer que les expressions de $x^\star(t)$ et $z^\star(t)$ en fonction de ω, t, k, $\bar{x}^\star$, $\bar{z}^\star$, A. On exploitera le fait que $\bar{x}^\star$ et $\bar{z}^\star$ sont les valeurs moyennes de $x^\star(t)$ et $z^\star(t)$ pour déterminer les constantes d'intégration.
   (c) Interpréter les résultats.
6. Que peut-on en conclure quant à l'identité entre trajectoire et ligne de courant ?

Bilan Dans un écoulement stationnaire, quel est le lien entre les lignes de courant et les trajectoires des particules (cf. exercice 1.2) ? Qu'en est-il pour un écoulement non-stationnaire (cf. exercice 1.3) ?

2 Équations du mouvement et régimes d'écoulement

On considère un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η. On note $\mathrm{d}\mathbf{F}/\mathrm{d}\tau$ la force extérieure par unité de volume subie par le fluide.

1. Écrire l'équation locale de conservation de la masse.
2. Écrire l'équation d'incompressibilité.
3. On considère à partir de maintenant que le fluide est incompressible. Écrire l'équation de Navier-Stokes. Nommer et discuter physiquement les différents termes. À la conservation de quelle quantité cette équation est-elle associée ?
4. Définir le nombre de Reynolds.
5. Classer les images de la figure 2 par nombre de Reynolds croissant.

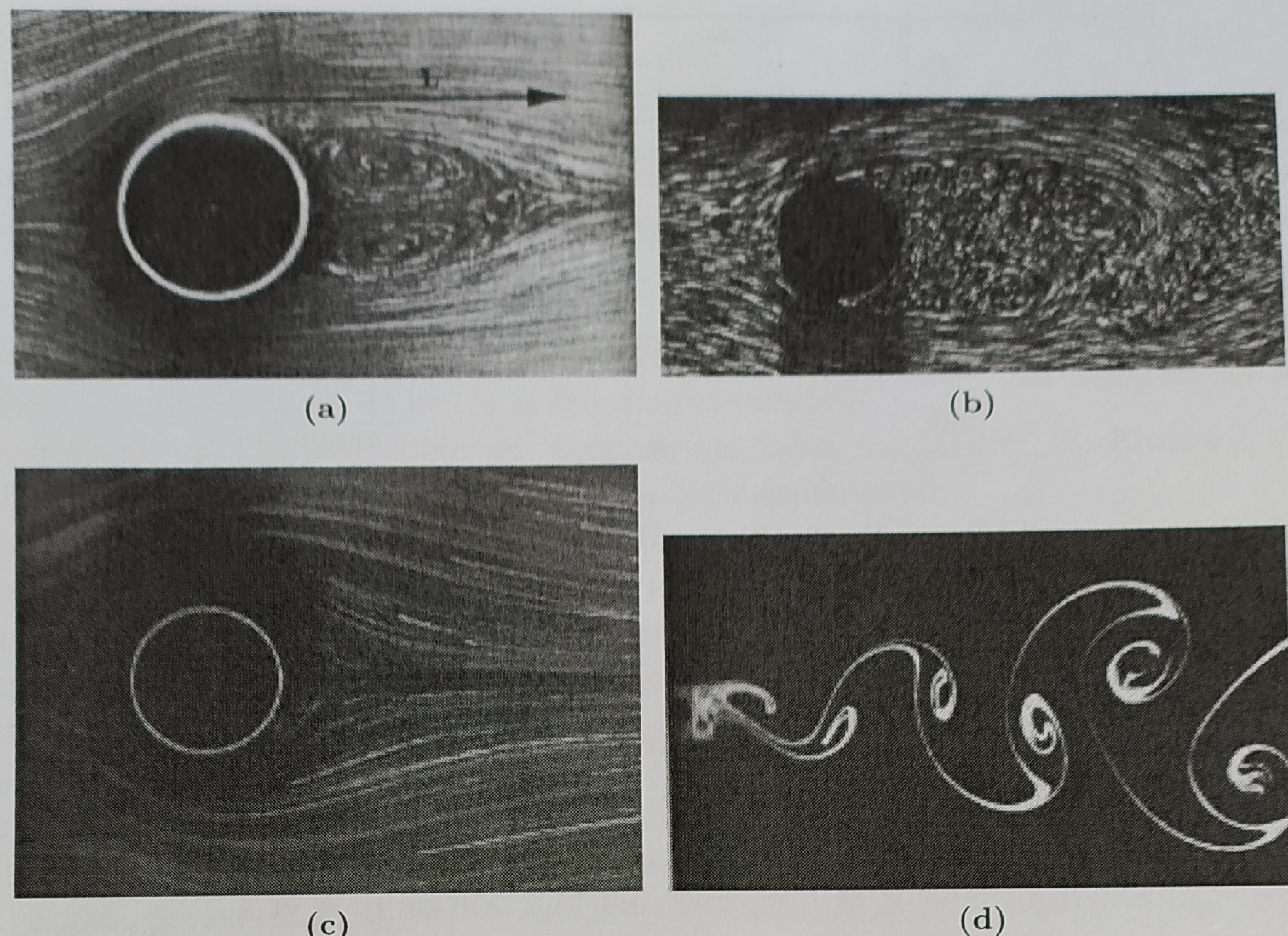


Figure 2 – Visualisation d'un écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds. La vitesse est uniforme en amont du cylindre. Source : Guyon, Hulin, Petit, hydrodynamique physique, éditions CNRS.

6. Décrire les écoulements de la figure 2 et donner les termes qui les caractérisent (laminaire, turbulent, stationnaire, etc).
7. Comment varie l'écoulement dans un tuyau cylindre en fonction du nombre de Reynolds ? (l'écoulement dans un tuyau est celui pour lequel Reynolds a défini pour la première fois le nombre qui porte maintenant son nom).

3 Dynamique des fluides visqueux – Écoulements parallèles

3.1 Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique

On étudie l'écoulement d'un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ induit par une différence de pression Δp sur une longueur L d'un tube cylindrique horizontal de rayon R d'axe z. Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses et un champ de pression de la forme :

$$\mathbf{v} = v_z(r,z)\,\mathbf{u}_z \qquad ; \qquad p = p(r,z).$$

Pour un tel champ, on donne :

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad ; \qquad \Delta\,\mathbf{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\mathbf{u}_z.$$

1. On suppose que l'écoulement est incompressible. Montrer que $v_z(r,z)$ ne dépend pas de z.
2. On néglige la pesanteur. Dans ce cas, on rappelle que l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho\,\mathbf{a} = -\mathbf{grad}\,p + \eta\,\Delta\mathbf{v}.$$

   (a) Montrer que le champ des accélérations $\mathbf{a}$ est nul.
   (b) Montrer que la pression ne dépend pas de r.

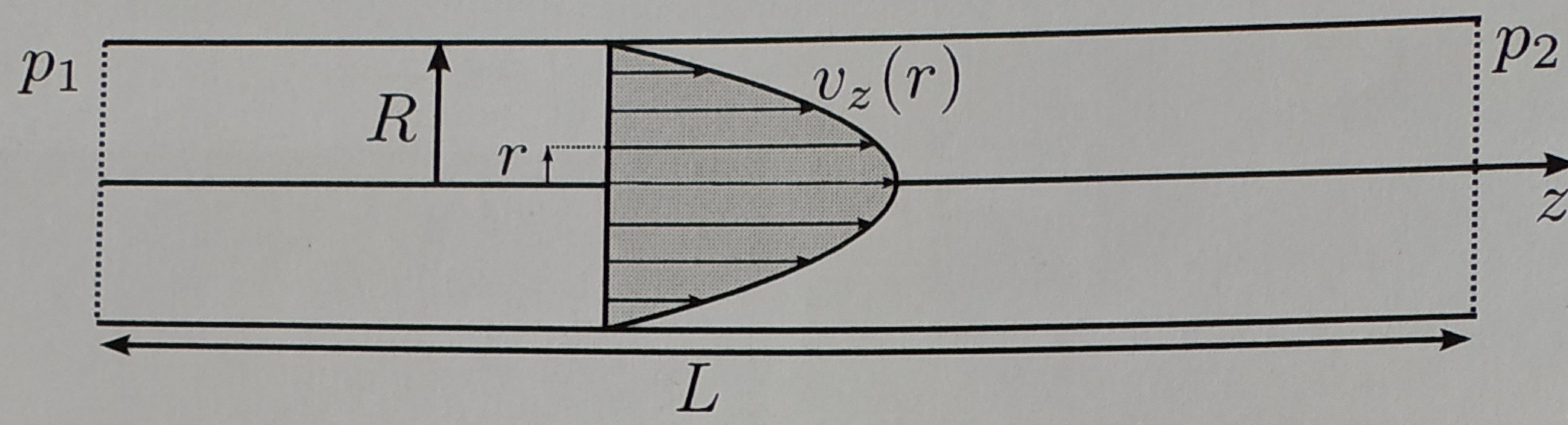


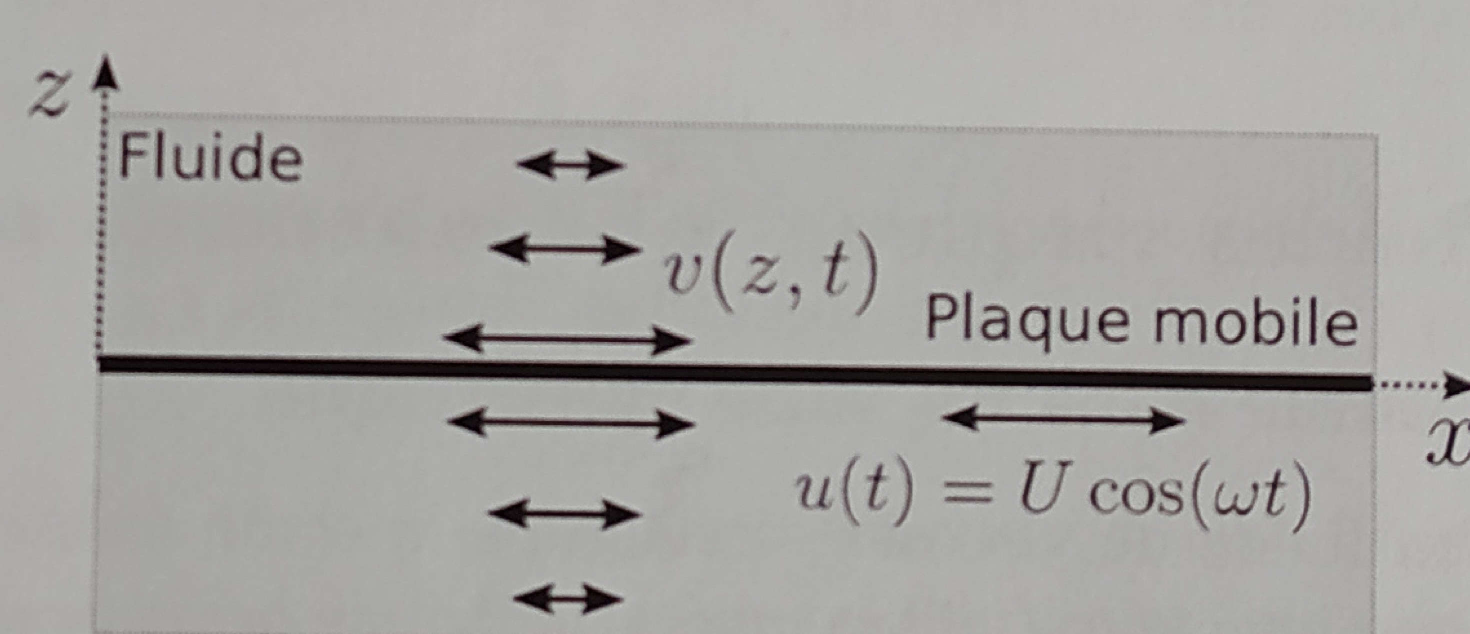
Figure 3 – Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique de rayon R, induit par une différence de pression $\Delta p = p_1 - p_2$ sur une longueur L.

(c) Établir l'équation différentielle dont est solution $v_z(r)$ et montrer que $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ est une constante C. En exploitant les conditions aux limites sur la paroi de la conduite, expliciter C et $v_z(r)$ (on admet que $\mathrm{d}v_z/\mathrm{d}r$ est bornée).

3. Débit volumique et loi d'Ohm.
   (a) En déduire l'expression du débit volumique D_v en fonction des pressions $p(z=0) = p_1$ à l'entrée et $p(z=L) = p_2$ à la sortie de la conduite.
   (b) Comparer le résultat à la loi d'Ohm pour un conducteur filiforme en électrocinétique, introduire une résistance hydraulique $\mathcal{R}$ et l'exprimer en fonction de η, R et L.
   (c) Comparer l'influence du rayon R sur la résistance électrique et sur la résistance hydraulique et commenter.

3.2 Force subie par une plaque en mouvement sinusoïdal forcé

Une plaque confondue avec le plan d'équation $z = 0$ est en translation avec une vitesse $u(t) = U\cos(\omega t)\,\mathbf{u}_x$ dans un fluide incompressible de masse volumique ρ, de viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho = 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$ (valeur de l'eau), remplissant tout l'espace. On note $p(z,t)$ le champ de pression et $\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = v(z,t)\,\mathbf{u}_x$ le champ des vitesses dans le fluide.



1. On rappelle l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\,\mathbf{a} = -\mathbf{grad}\,p + \rho\,\mathbf{g} + \eta\,\Delta\mathbf{v}.$$

   Montrer que le champ des vitesses obéit à une équation de diffusion. En déduire sans calcul l'ordre de grandeur de l'épaisseur δ de la couche limite, domaine hors duquel le fluide reste quasiment au repos. Réaliser l'application numérique pour une fréquence de $100\,\mathrm{Hz}$.

2. On cherche en régime sinusoïdal forcé un champ des vitesses de la forme :

$$v(z,t) = \Re\{U\exp(i\omega t - ikz)\}\,.$$

   Déterminer k et en déduire les expressions de $v(z>0,t)$ et $v(z<0,t)$.

3. On rappelle l'expression $\mathrm{d}\mathbf{F} = \eta\,(\partial v/\partial z)\,\mathrm{d}S\,\mathbf{u}_x$ de la force de viscosité exercée sur un élément de surface $\mathrm{d}S$, de cote z par le fluide situé à une cote supérieure à z. En déduire l'expression de la force subie par unité de surface par la plaque et la puissance de cette force. Commenter.

TD1 : Hydrodynamique

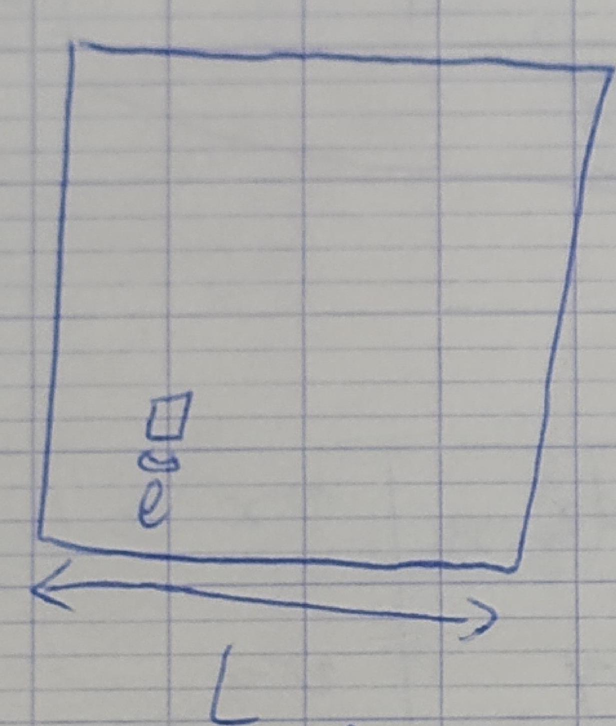
1) Cinématique des fluides.

1)1) Définitions.

1) * Volume mésoscopique : longueur mésoscopique

$$\underbrace{\sigma}_{\substack{\text{taille} \\ \text{microscopique}}} \ll \ell \ll \underbrace{L}_{\substack{\text{taille caractéristique} \\ \text{du système considéré}}}$$

(taille molécule, atomes, distance entre molécules, $\ell^* \equiv$ libre parcours moyen)



$$\sigma^3 \ll \underbrace{\ell^3}_{\substack{\text{volume} \\ \text{mésoscopique}}} \ll L^3$$

* Particule de fluide : Élément de volume mésoscopique du fluide

* Ligne de courant : lignes de champ du champ eulérien des vitesses $\vec{v}(\vec{r},t)$

* Trajectoire (d'une particule) : L'ensemble des positions occupées par la particule de fluide au cours du mouvement

2) * Écoulement stationnaire : C'est un écoulement où tous les champs eulériens ($\vec{v}(\vec{r},t)$, $\rho(\vec{r},t)$, $T(\vec{r},t)$, $\Delta(\vec{r},t)$, ...) ne dépendent pas du temps.

La nature stationnaire d'un écoulement dépend du référentiel (exemple : sillage du canard)

exemple : $(\mathcal{R})$: $v(x,t) = v(x)$
$(\mathcal{R}')$: translation rectiligne uniforme à vitesse $v_0/(\mathcal{R})$ $\vec{v}'(x',t) = v(x - v_0 t)$ (dépend du temps)

1)2) Caractérisation d'un écoulement.

$$\vec{v} = \alpha x \, \vec{u_x} - \alpha y \, \vec{u_y}, \text{ avec } \alpha > 0$$

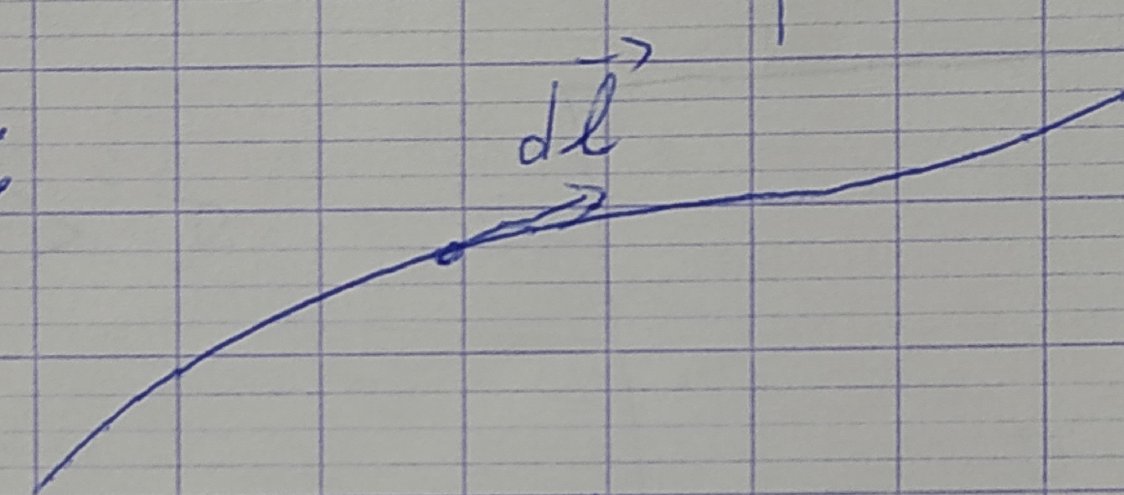
1) * Stationnaire? Oui car ne dépend pas du temps

* Compressible? $\operatorname{div} \vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = \alpha - \alpha = 0$

↳ écoulement incompressible

* Rotationnel? $\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = \begin{vmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \alpha x \\ -\alpha y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ ⇒ écoulement irrotationnel

2) Ligne de courant :

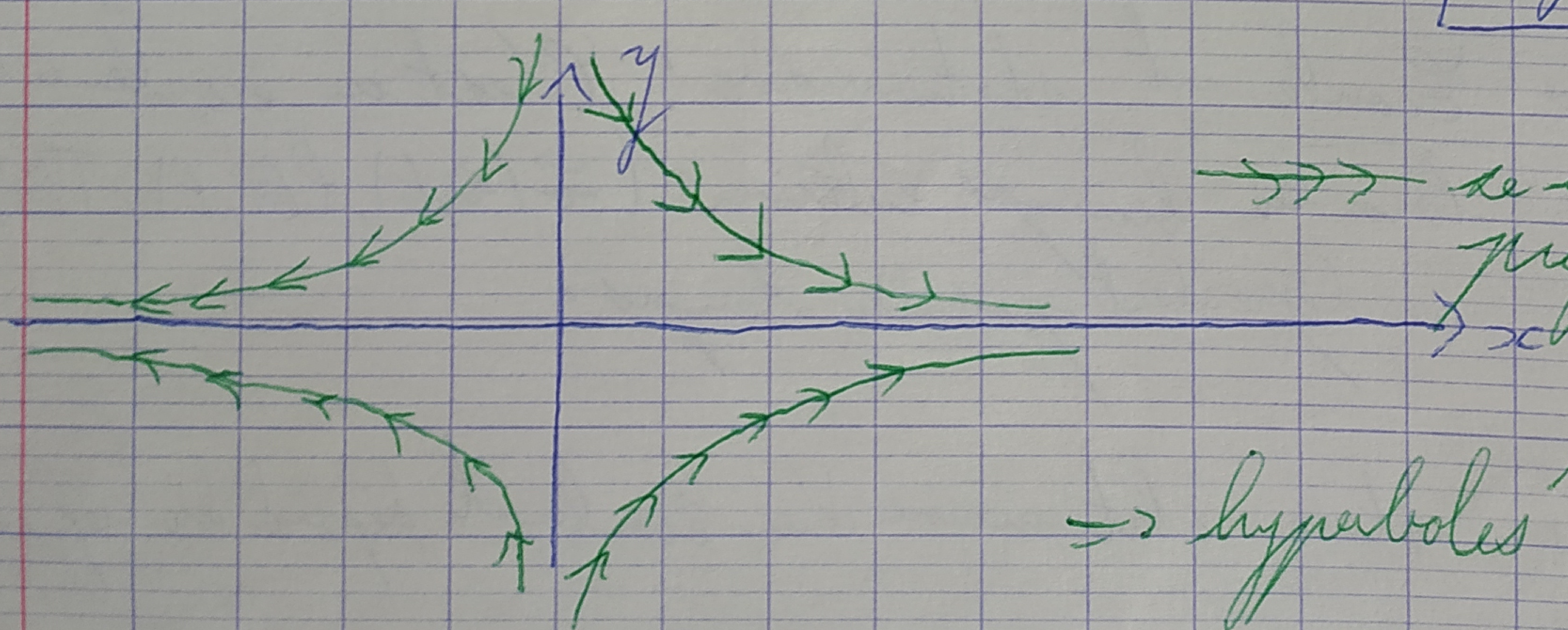


$\vec{dl} \wedge \vec{v}(\vec{r},t) = 0 = \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{dx}{v_x} = \dfrac{dy}{v_y} = \dfrac{dz}{v_z}}$

↳ équations pour trouver lignes de courant

$\Rightarrow \dfrac{dx}{\alpha x} = -\dfrac{dy}{\alpha y} \Rightarrow d(\ln x) = -d(\ln y) \Rightarrow d(\ln(x y)) = 0$

↳ lignes de courant sont données par $\boxed{xy = \text{constante}}$ → chaque constante donne une ligne de courant



→ se retrouve d'après le profil de vitesse

⇒ hyperboles ($y \propto \frac{1}{x}$)

3) *Trajectoire d'une particule : Position d'une particule de fluide $(x^*(t), y^*(t))$ $\begin{cases} x^*(0) = x_0 \\ y^*(0) = y_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx^*}{dt} = v_x(x^*(t), y^*(t), t) \\ \dfrac{dy^*}{dt} = v_y(x^*(t), y^*(t), t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ici ne dépend pas du temps

$$\left(\frac{d\vec{r}^*(t)}{dt} = \vec{v}(\vec{r}^*(t), t) \right)$$

Ici $\Rightarrow$ $\left.\begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} &= \alpha x^* \\ \frac{dy^*}{dt} &= -\alpha y^* \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^*(t) = x_0 e^{\alpha t} \\ y^*(t) = y_0 e^{-\alpha t} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\boxed{x^*(t)\, y^*(t) = x_0 y_0}$

Dans ce cas particulier, la trajectoire est confondue avec les lignes de champ (c'est vrai pour tout ~~champ~~ écoulement stationnaire)

4) *Représentation lagrangienne : $\vec{v}^*(t) = \begin{vmatrix} \alpha x^*(t) \\ -\alpha y^*(t) \end{vmatrix}$

$$\vec{a}^*(t) = \frac{d\vec{v}^*}{dt} \overset{ici}{=} \begin{vmatrix} \alpha^2 x^*(t) \\ \alpha^2 y^*(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha v_x^*(t) \\ -\alpha v_y^*(t) \end{vmatrix}$$

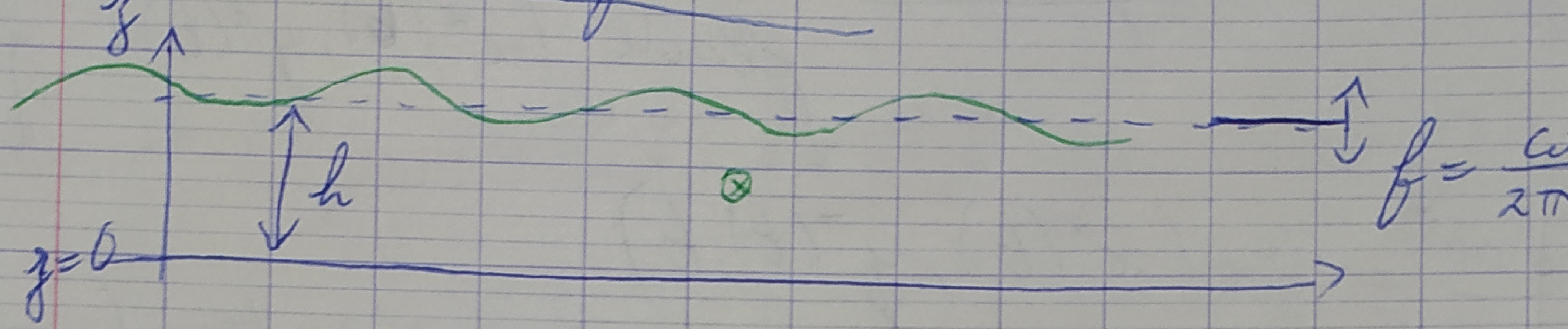
* Représentation eulérienne : ~~accélération~~

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{0 \text{ (ici)}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\, \vec{v}}_{\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{vmatrix} \alpha x \\ -\alpha y \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} \alpha v_x \\ -\alpha v_y \end{vmatrix}$$

On a $\boxed{\vec{a}^*(t) = \vec{a}(\vec{r}^*(t), t)}$

REDMI NOTE 8T
AI QUAD CAMERA

1)3) Ondes de gravité.



Hypothèses : * Incompressible ($\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$)
* Irrotationnel ($\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$)

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = 0 \implies \vec{v} = \vec{\mathrm{grad}}\,\phi$$

$$\boxed{\phi(x,z,t) = f(z)\cos(\omega t - kx)}$$

1) $\mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}}\,\phi) = 0 \implies \boxed{\Delta\phi = 0}$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = 0$$

$$-k^2\phi + f''(z)\cos(\omega t - kx) = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{f''(z) - k^2 f(z) = 0} \quad (*)$$

2) Au fond du récipient ($z=0$), la composante normale de la vitesse doit s'annuler

$$v_z(x, z=0, t) = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, z=0, t) = 0 \implies \boxed{f'(z=0) = 0}$$

(*) $f(z) = A\cosh(kz) + B\sinh(kz)$

$\hookrightarrow$ CL en $z=0$: $f'(0) = 0 \longrightarrow B = 0$

$$\boxed{f(z) = A\cosh(kz)}$$

$$\phi(x,z,t) = A\cosh(kz)\cos(\omega t - kx)$$

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = kA\cosh(kz)\sin(\omega t - kx) \\ v_z = \dfrac{\partial \phi}{\partial z} = kA\sinh(kz)\cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

<u>Lignes de courant</u> : $\dfrac{dx}{v_x} = \dfrac{dz}{v_z} \Rightarrow \dfrac{dx}{\cosh(kz)\sin(\omega t - kx)} = \dfrac{dz}{\sinh(kz)\cos(\omega t - kx)}$

$$\rightarrow \frac{dx}{\tan(\omega t - kx)} = \frac{dz}{\tanh(kz)}$$

$$-d\ln(\sin(\omega t - kx)) = d(\ln\sinh(kz))$$

$$d\left[\ln(\sinh(kz)\sin(\omega t - kx))\right] = 0$$

<u>Equation des lignes de courant</u> :

$$\boxed{\sinh(kz)\sin(\omega t - kx) = \text{constante}}$$

4) <u>Trajectoires des particules</u>.

$$\begin{cases} (1)\ \dfrac{dx^*}{dt}(t) = v_x(x^*(t), z^*(t), t) = kA\cosh(kz^*)\sin(\omega t - kx^*) \\ (2)\ \dfrac{dz^*}{dt} = v_z(x^*(t), z^*(t), t) = kA\sinh(kz^*)\cos(\omega t - kx^*) \end{cases}$$

5) $x^*(t) = \bar{x}^* + \delta x^*(t)$

$z^*(t) = \bar{z}^* + \delta z^*(t)$

On suppose que $\left|\dfrac{\delta x^*}{\lambda}\right| \ll 1$

$\left|\dfrac{\delta z^*}{\lambda}\right| \ll 1$

(taille caractéristique des oscillations très petite devant la longueur d'onde)

$$\cosh(k z^*(t)) = \cosh(k \bar{z}^* + k\,\delta z^*(t)) \simeq \cosh(k \bar{z}^*)$$

$$|k\,\delta z^*(t)| \ll 1$$

$$\sinh(\qquad) = \dots$$

$$\cos(\omega t - k x^*(t)) = \dots$$

$$\sin(\omega t - k x^*(t)) = \dots$$

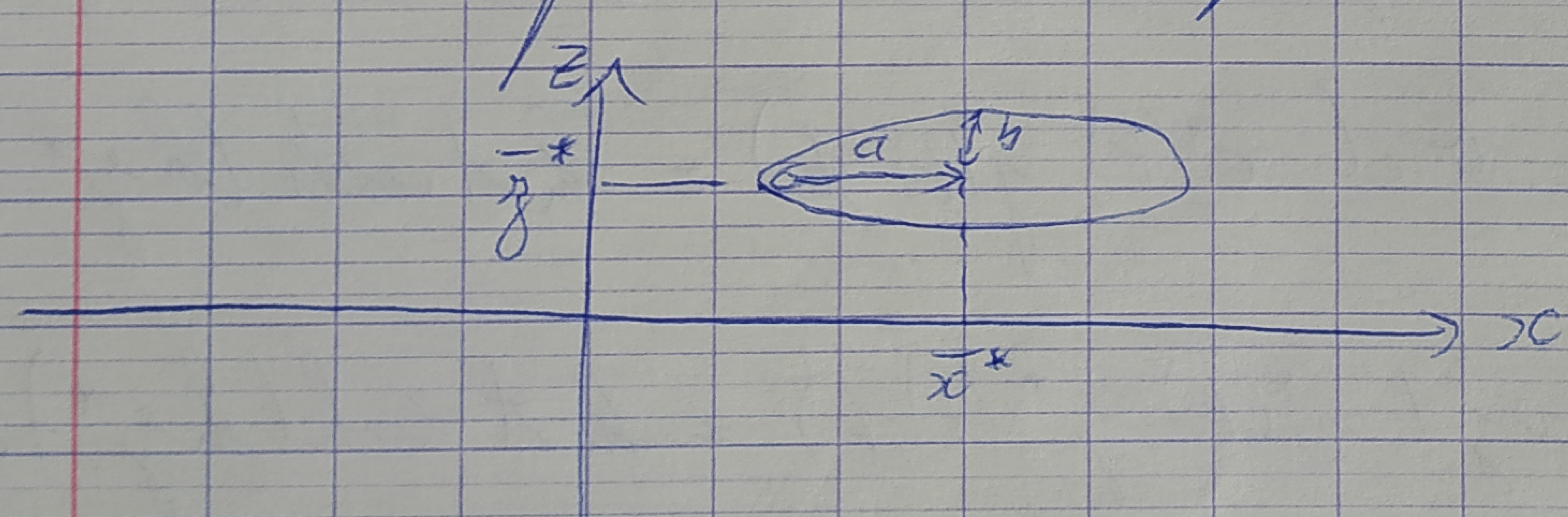
$$\begin{cases} (1) : \dfrac{d x^*(t)}{dt} = kA \cosh(k \bar{z}^*) \sin(\omega t - k \bar{x}^*) \\ (2) : \dfrac{d z^*(t)}{dt} = kA \sinh(k \bar{z}^*) \cos(\omega t - k \bar{x}^*) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^*(t) = \bar{x}^* - \dfrac{kA}{\omega} \cosh(k \bar{z}^*) \cos(\omega t - k \bar{x}^*) \\ z^*(t) = \bar{z}^* + \dfrac{kA}{\omega} \sinh(k \bar{z}^*) \sin(\omega t - k \bar{x}^*) \end{cases}$$

c) $\sin^2(\omega t - k \bar{x}^*) + \cos^2(\omega t - k \bar{x}^*) = 1$

$$\boxed{\left[\frac{\omega\,(z^*(t) - \bar{z}^*)}{kA \sinh(k \bar{z}^*)}\right]^2 + \left[\frac{\omega\,(x^*(t) - \bar{x}^*)}{kA \cosh(k \bar{z}^*)}\right]^2 = 1}$$

équation d'une ellipse



$$\begin{cases} b = \dfrac{kA}{\omega} \sinh(k \bar{z}^*) \\ a = \dfrac{kA}{\omega} \cosh(k \bar{z}^*) \end{cases}$$

Proche de la surface : $k \bar{z}^* \gg 1 \Rightarrow a \simeq b \Rightarrow$ trajectoire sont des cercles

Proche du fond : $k \bar{z}^* \ll 1 \Rightarrow$ les ellipses sont des lignes

2) Équation du mouvement et régimes d'écoulement.

1) $\boxed{\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$ (*)

2) Incompressibilité : $\text{div}\,\vec{v} = 0$

$$(*) \Longrightarrow \rho\,\text{div}\,\vec{v} + \underbrace{\boxed{\vec{v}.(\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho) + \frac{\partial \rho}{\partial t}}}_{\frac{D\rho}{Dt}} = 0$$

$\rho\,\text{div}\,\vec{v} + \frac{D\rho}{Dt} = 0$ si l'écoulement est incompressible :

$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \text{div}\,\vec{v} = 0$

3) Équation de Navier-Stokes (fluide incompressible) :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\substack{\text{variation de quantité} \\ \text{de mouvement pour un} \\ \text{observateur Eulérien}}} + \underbrace{\rho(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}}_{\substack{\text{transport convectif} \\ \text{de quantité de mouvement}}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \underbrace{\eta\,\Delta\vec{v}}_{\substack{\text{transport diffusif de} \\ \text{quantité de mouvement}}} + \frac{d\vec{F}}{d\tau}$$

4) Nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\| \rho(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} \|}{\| \eta\,\Delta\vec{v} \|} = \frac{\rho\, v^2/L}{\eta\, v/L^2}$$

$$\boxed{Re = \frac{vL}{\nu}} \qquad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

$v \equiv$ vitesse caractéristique de l'écoulement

5) (c) (a) (d) (b)
$\xrightarrow{\hspace{3cm}}$
Re ↗

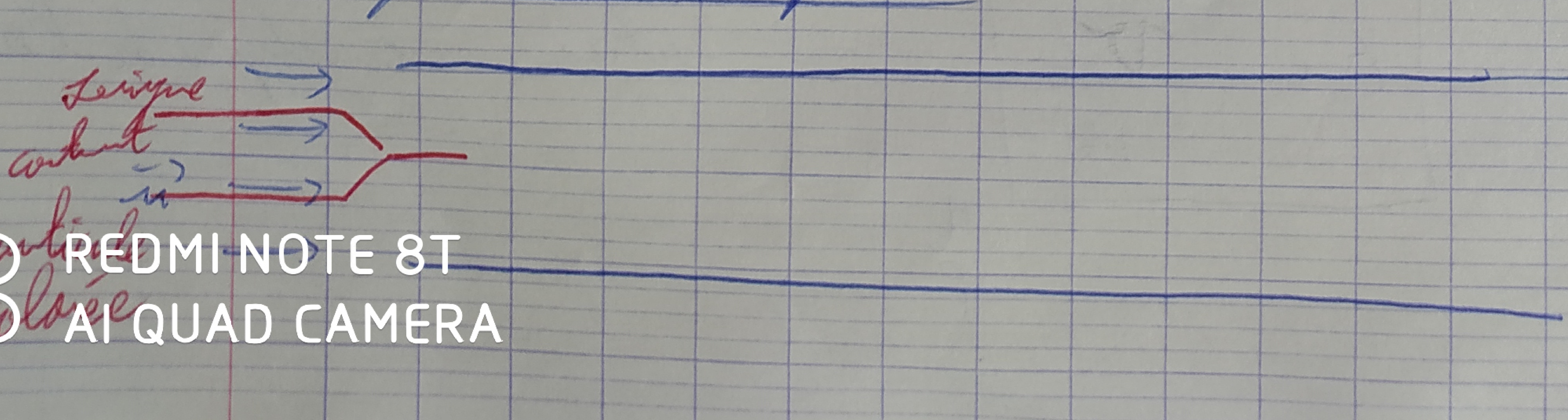
6) (c) : Image à faible nombre de Re ($\ll 1$)
Les lignes de courant sont bien identifiés, les couches de fluide glissent les unes sur les autres (écoulement laminaire). De plus, les lignes de courant sont symétriques par rapport au plan médian de la sphère (réversibilité de l'écoulement)

(a) : Nombre de Re de quelques unités. En aval de l'écoulement ⇒ tourbillons de recirculation (fixes par rapport à la sphère)
La taille de ces tourbillons augmente avec le nombre de Reynolds

(d) : Pour la sphère, pour $Re_{critique} = 47$, alors l'écoulement cesse d'être stationnaire ⇒ des tourbillons sont émis en aval de l'écoulement (double allée de Bénard-von Karman)

(b) : Pour des écoulements aux très grands nombre de Reynolds, il se superpose des mouvements turbulents incohérents à des échelles d'autant plus petites que le nombre de Reynolds est grand) $\propto \frac{1}{\sqrt{Re}}$

7) Expérience de Reynolds

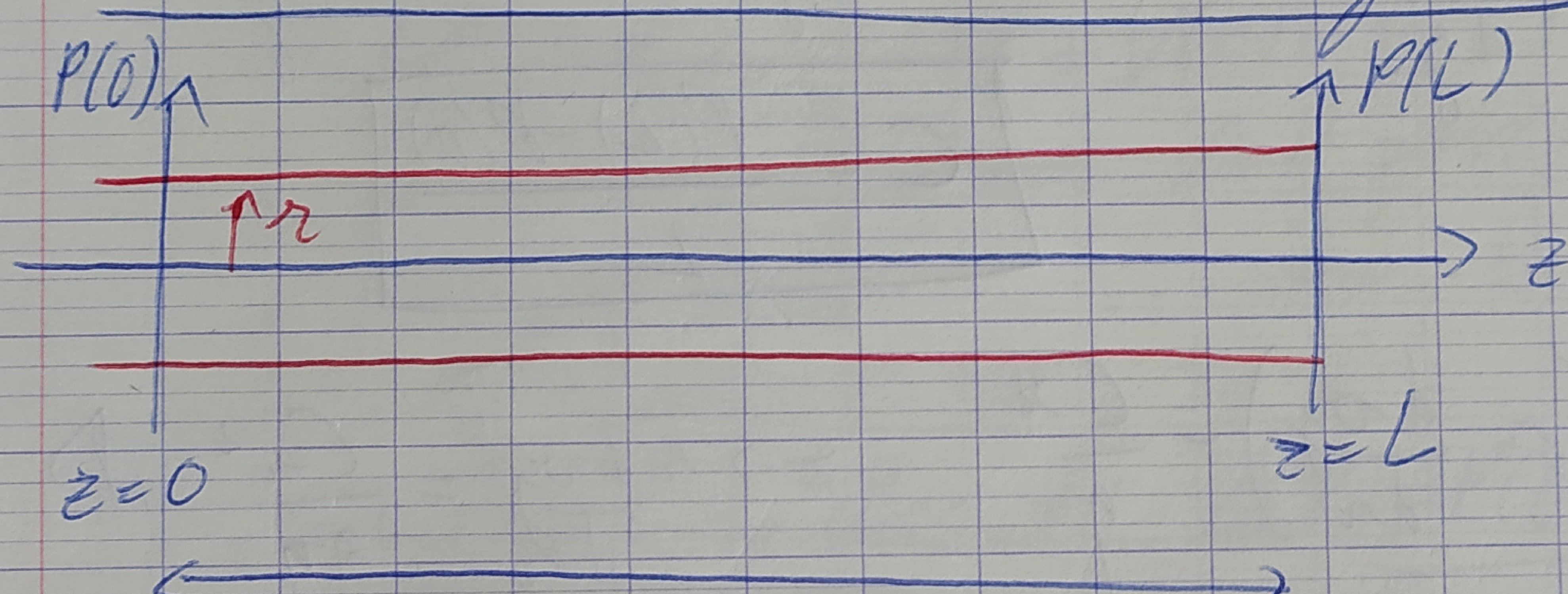


L'expérience de Reynolds révèle l'existence de deux régimes selon la valeur de Re (dans une expérience $Re < 2000$).

* Re faible : les particules de fluides s'écoulent sans se mélanger (des particules de fluides voisines le restent au cours du temps)

* Re très grand : Écoulement turbulent : mélange important des couches de fluides et apparition de tourbillons. L'écoulement présente des fluctuations aléatoires

1) Écoulement de Poiseuille dans un cylindre.



$$\Delta P = P(0) - P(L)$$

$$\begin{cases} \vec{v} = v_z(r,z)\,\vec{u_z} \\ p = p(r,z) \end{cases}$$

1) Incompressible donc $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_z(r,z) = v_z(r)$

2) a) $\vec{a} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{0\ (\text{stationnaire})} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\mathrm{grad}})\,\vec{v}}$

$\hookrightarrow \left(v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) v_z \vec{u_z} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{0}}$

b) On projette Navier-Stokes en $\vec{u_r}$:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \Rightarrow p(r,z) = p(z)$$

c) On projette l'équation de Navier-Stokes sur $\vec{u_z}$:

$$\vec{0} = -\frac{dP}{dz} + \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)$$

$$\underbrace{\frac{dP(z)}{dz}}_{\text{ne dépend que de } z} = \underbrace{\frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)}_{\text{ne dépend que de } r}$$

Conclusion $\Rightarrow$ $\frac{dP}{dz} = C \Rightarrow P(z) - P(0) = Cz$

$$\boxed{C = \frac{P(L) - P(0)}{L}}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = \frac{Cr}{\eta} \Rightarrow r\frac{dv_z}{dr} = \frac{Cr^2}{2\eta} + D$$

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{Cr}{2\eta} + \frac{D}{r}$$

$\hookrightarrow D = 0$ pour que $\frac{dv_z}{dr}$ ne diverge pas en $r = 0$

$$v_z(r) = \frac{Cr^2}{4\eta} + E$$

Condition aux limites : $v_z(r=R) = 0 \rightarrow E = -\frac{CR^2}{4\eta}$

$$\Rightarrow \boxed{v_z(r) = \frac{p(0) - p(L)}{4\eta L}(R^2 - r^2)}$$

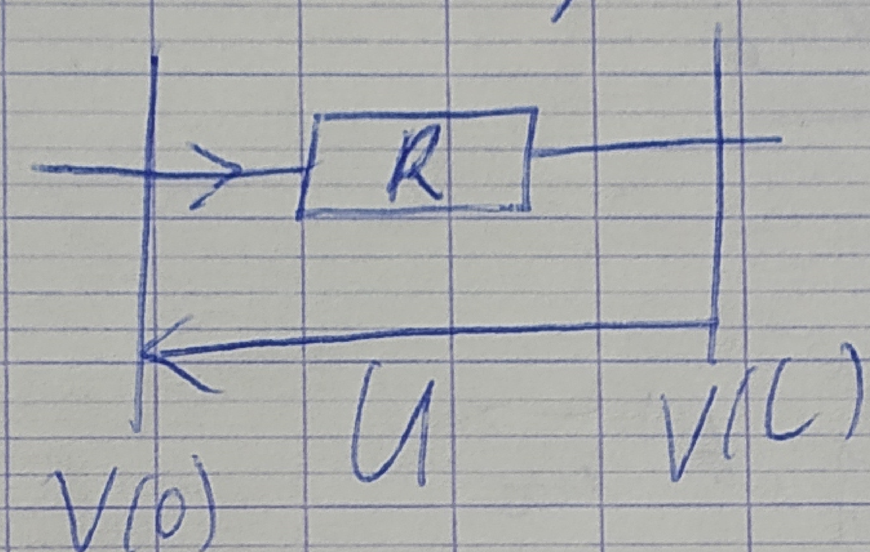
Pour $r < R$, $v_z(r) > 0$ si $P(L) < P(0)$

3) a) $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = 2\pi \int_0^R r\,dr \, \frac{P(0)-P(L)}{4\eta L}(R^2 - r^2)$

$= \pi \frac{P(0)-P(L)}{2\eta L}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{\pi}{8\eta L} R^4 (P(0)-P(L))$

$P(L) - P(0) < 0 \Rightarrow$ perte de charge

3) b)

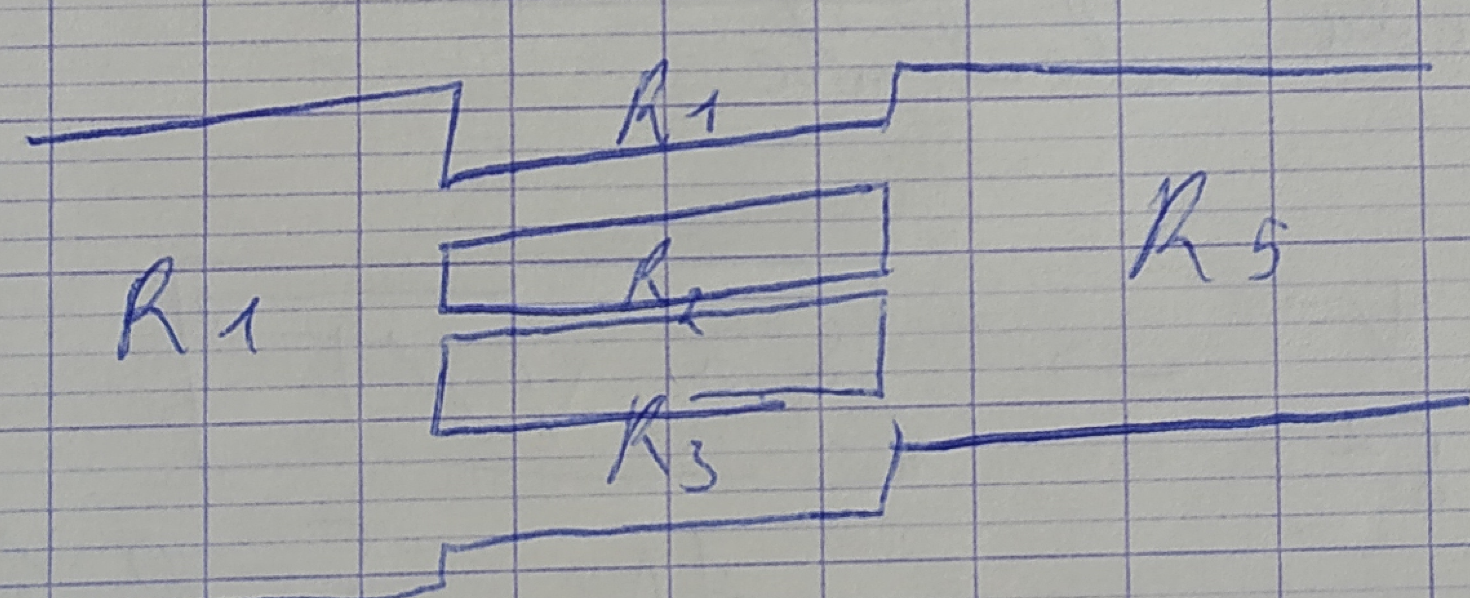


Electrocinétique $U = V(0) - V(L) = RI$

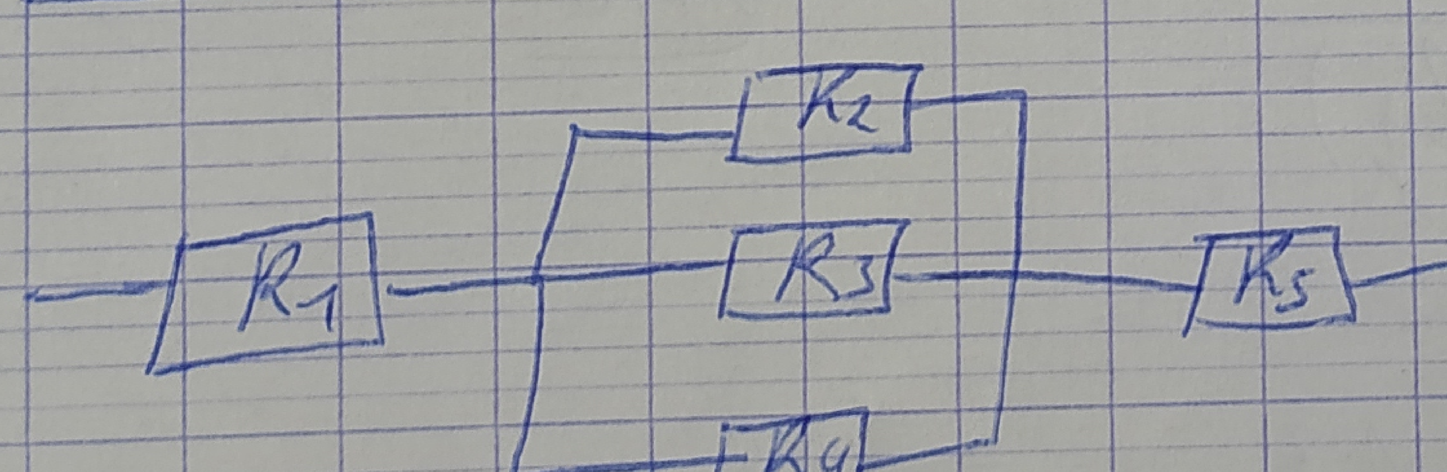
* $U = V(0) - V(L) \Leftrightarrow \Delta P = P(0) - P(L)$
* $I \Leftrightarrow D_v$

Ecoulement de Poiseuille : $\Delta P = P(0) - P(L) = R \times D_v$

$\boxed{R_{Hydraulique} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}}$



$\Leftrightarrow$

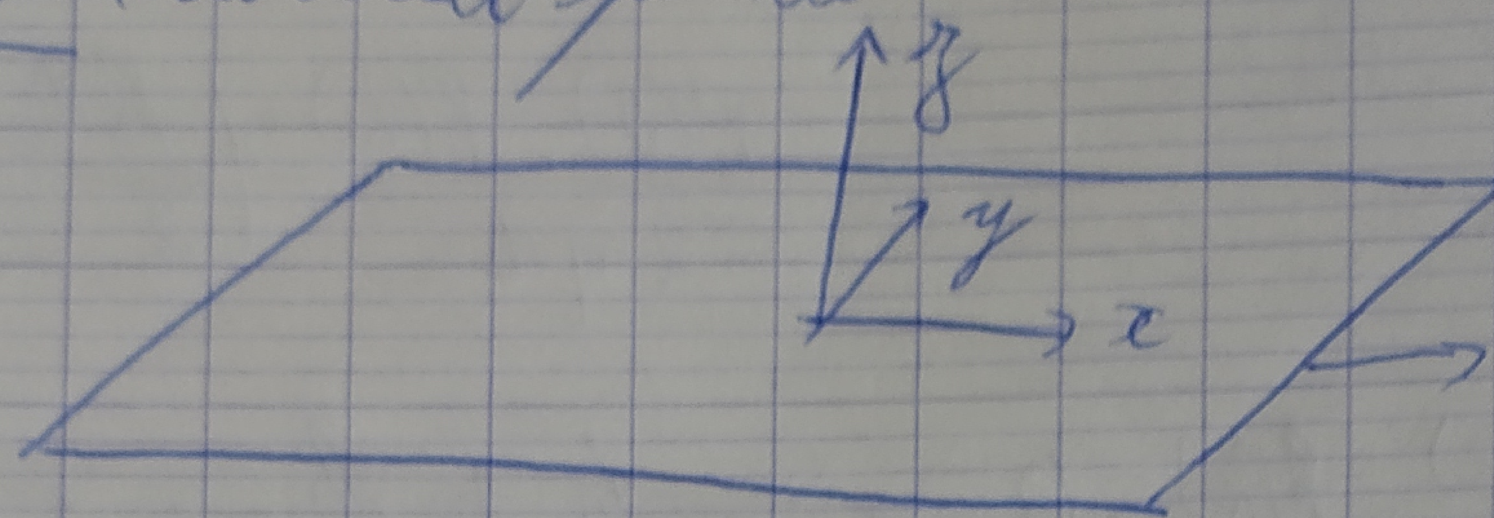


≠

3) c) Electromagnétisme : $R = \frac{\rho L}{S} \propto \frac{\rho L}{R^2}$

$\vec{j} = \rho \vec{v}$ uniforme dans la section du fil

3)2) Force subie par une plaque en mouvement sinusoïdal forcé. (écoulement parallèle non stationnaire)



$\vec{u}(t) = U\cos(\omega t)\,\vec{u_x}$

Fluide incompressible

* $p(z,t)$
* $\vec{v}(\vec{r},t) = v(z,t)\,\vec{u_x}$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v}}_{v\frac{\partial}{\partial x}v(z,t)\vec{u_x} = \vec{0}}\right) = -\vec{\text{grad}}\,p + \eta\,\Delta\vec{v} + \rho\vec{g}$$

↳ projetée selon $\vec{u_x}$: $\boxed{\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}$

$$\Rightarrow (*)\ \boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}$$ Equation de diffusion

$\delta \equiv$ épaisseur de la couche limite

$$(*)\quad \frac{V}{T} = \nu\frac{V}{\delta^2} \longrightarrow \boxed{\delta \simeq \sqrt{\nu T}}$$

AN : $\delta = 0{,}1\,\text{mm}$

$$\underline{v} = \underline{U}\,e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\Rightarrow i\omega = -\nu k^2$$

$$\hookrightarrow k^2 = \frac{\omega}{\nu}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

$$\begin{cases} v(z>0) = U e^{-\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \\ v(z<0) = U e^{\frac{z}{\delta}}\cos\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)\end{cases}$$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$

3) $d\vec{F} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) dS \vec{u_x}$

$$\frac{dF}{dS} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0^+} - \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0^-} \right) = 2\eta \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0^+}$$

(par symétrie du problème $z \leftrightarrow -z$)

$$= 2\eta U \left[\left(-\frac{1}{\delta}\right) \cos(\omega t) + \frac{1}{\delta} \sin(\omega t) \right]$$

$$= +\frac{2\eta U}{\delta} \left[-\cos(\omega t) + \sin(\omega t) \right]$$

$$= \frac{2\eta U}{\delta} \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$\hookrightarrow$ force déphasée de $\frac{\pi}{4}$

$$\left\langle \frac{dP}{dS} \right\rangle = \left\langle U\cos(\omega t) \times \frac{dF}{dS}(t) \right\rangle$$

$$\left\langle \frac{dP}{dS} \right\rangle = \frac{2\eta U^2}{\delta} \left(-\underbrace{\langle \cos^2 \omega t \rangle_T}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle_T}_{0} \right)$$

$$\left\langle \frac{dP}{dS} \right\rangle = - \frac{\eta U^2}{\delta}$$

la force est résistive en moyenne

La puissance prélevée sur la plaque est dissipée par le fluide.