

Préparation à l'agrégation de physique

Hydrodynamique - TD2

Tom BIENAIMÉ (tom.bienaimé@ens.fr)

1 Analyse dimensionnelle - Explosion nucléaire

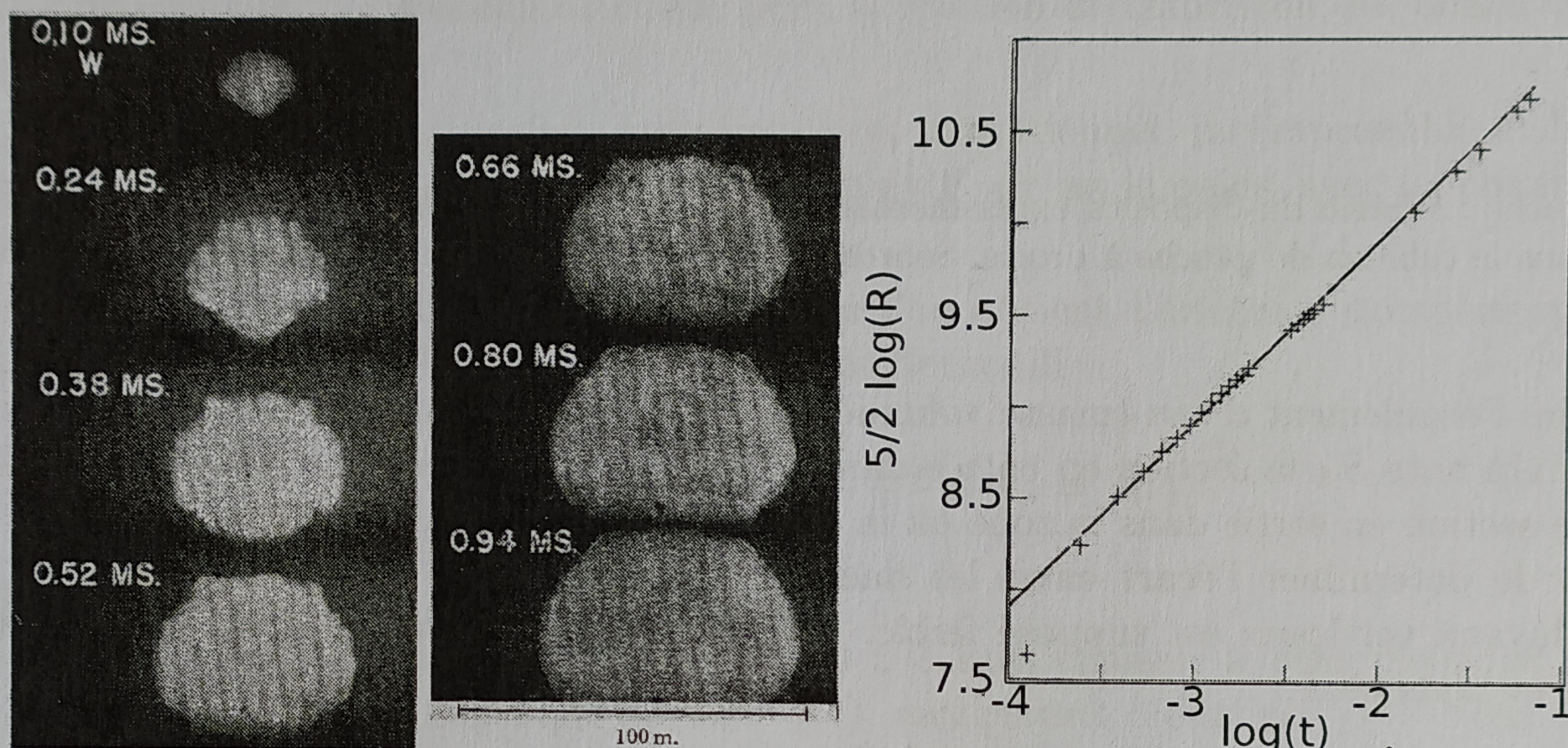


Figure 1 – Gauche : film d'une explosion atomique. La barre horizontale du bas indique 100 m, le temps est en ms. Droite : évolution du rayon R (en cm) de la boule de feu en fonction du temps t (en s) en échelle logarithmique (base 10). Source : *The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion. II. The Atomic Explosion of 1945*, G. Taylor, Proc. Roy. Soc. A, Vol. 201, No. 1065. (Mar. 22, 1950), pp. 175-186.

On cherche à reproduire de manière simplifiée le raisonnement effectué par G. Taylor en 1950 pour déterminer l'énergie dégagée par l'explosion d'une bombe atomique (confidentielle à l'époque) à partir d'un film rendu public (voir figure 1). Ce film nous apprend que le rayon R de l'onde de choc suit au cours du temps une loi d'échelle.

1. Au minimum, de quels paramètres doit dépendre le processus d'expansion de la sphère de gaz ?
2. Relier l'évolution du rayon de l'onde de choc à l'énergie de la bombe.
3. En exploitant la courbe originale de Taylor (voir figure 1), calculer numériquement l'énergie de la bombe (masse volumique de l'air $\rho = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$). On exprimera le résultat en kilotonnes de TNT (l'explosion de 1 kg de TNT produit $4.2 \cdot 10^6 \text{ J}$). Comparer votre résultat à la puissance de 15 à 20 kilotonnes de TNT annoncée par l'armée américaine.

2 Couche limite

La notion de couche limite intervient lorsqu'on étudie les écoulements laminaires, à nombres de Reynolds néanmoins importants, autour d'un solide. Cette couche assure le raccordement entre la solution d'écoulement parfait qui prévaut loin du corps et la condition de vitesse nulle sur les parois.

Il s'agit d'une notion très importante en hydrodynamique. Cette année, nous l'aborderons dans le sujet du DM.

3 Équations d'Euler et de Bernoulli

3.1 Phénomène de Venturi

1. Donner les conditions de validité du modèle du fluide parfait.

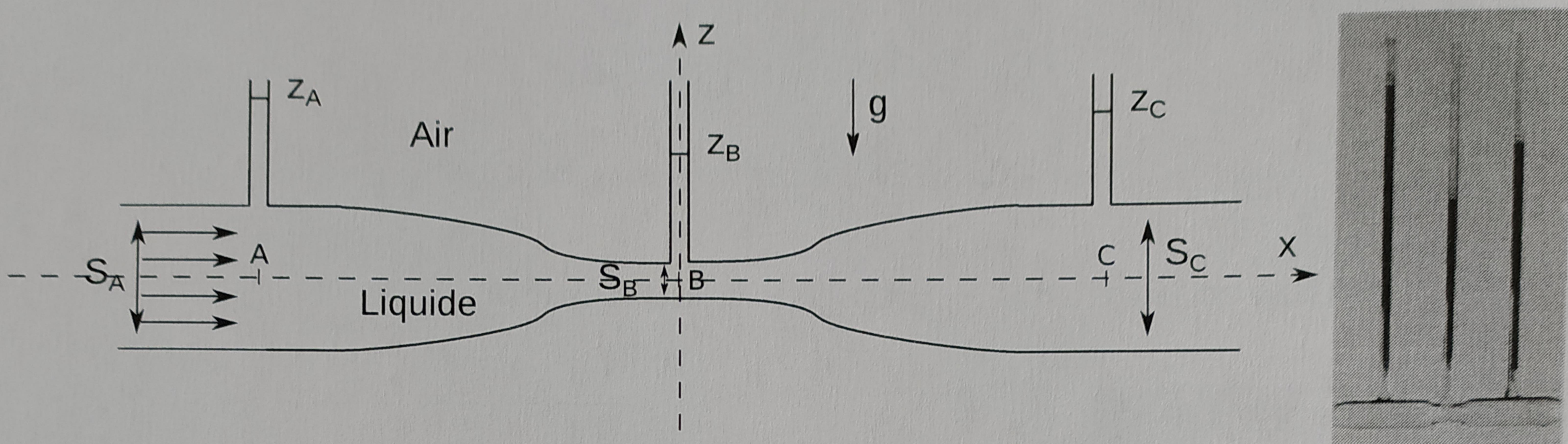


Figure 2 – Gauche : schéma du dispositif expérimental. Droite : mise en évidence expérimentale de l'effet Venturi. L'écoulement dans le tube va de gauche à droite. Source : D. J. Tritton. Physical fluid dynamics, Oxford University Press, 1988.

On considère l'écoulement d'eau (masse volumique ρ) dans une conduite où se trouve une constrictions (voir figure 2). On note S_A la section en entrée dans la zone où la conduite est parallèle, S_B la section au milieu et S_C la section en sortie dans la zone où la conduite est parallèle. On prend $S_A = S_C$.

Le but est de déterminer l'écart entre les hauteurs d'eau dans les tuyaux verticaux z_A , z_B et z_C . Le rayon des tuyaux verticaux est supposé faible. On suppose que l'écoulement est parfait, stationnaire, incompressible et homogène.

2. On considère l'écoulement unidimensionnel. En utilisant la conservation du débit volumique, exprimer v_B en fonction de v_A , S_A , S_B .
3. En notant que l'axe de la conduite constitue une ligne de champ particulière, appliquer le théorème de Bernoulli entre A et B et en déduire $p_B - p_A$. Donner l'expression du débit volumique D_V en fonction de p_A , p_B , S_A , S_B , ρ .
4. En déduire les hauteurs z_A , z_B et z_C . Expliquer qualitativement les différences de hauteurs observées expérimentalement (voir figure 2).
5. Que se passe t'il si la pression au point B devient trop faible ?
6. Donner des applications de l'effet Venturi.

3.2 Retour sur les ondes de gravité - Relation de dispersion

Lors de l'étude cinématique des ondes de gravité, nous avons déterminé complètement le champ des vitesses dans le fluide sans avoir écrit en apparence une seule ligne de dynamique : cet écoulement semble indépendant des forces appliquées. Cela semble paradoxal. En réalité il n'en est rien et l'hypothèse selon laquelle les seules forces sont les forces de pression et le poids est "dissimulée" dans l'hypothèse "irrotationnel" que nous avons utilisée. Nous poursuivons ici cette étude. Dans les ondes de gravité, c'est la *gravité* qui s'oppose à la déviation de la surface par rapport à l'horizontale. C'est la *gravité* qui sert de force de rappel lorsque l'onde se propage.

Rappel On considère une couche de liquide limitée inférieurement par le plan $z = 0$ et d'épaisseur moyenne h . L'écoulement est incompressible et irrotationnel, ce qui permet d'introduire le potentiel des composantes normales de la vitesse doit s'annuler, ce qui impose $\partial_z \phi(z = 0) = 0$. On rappelle que l'on avait

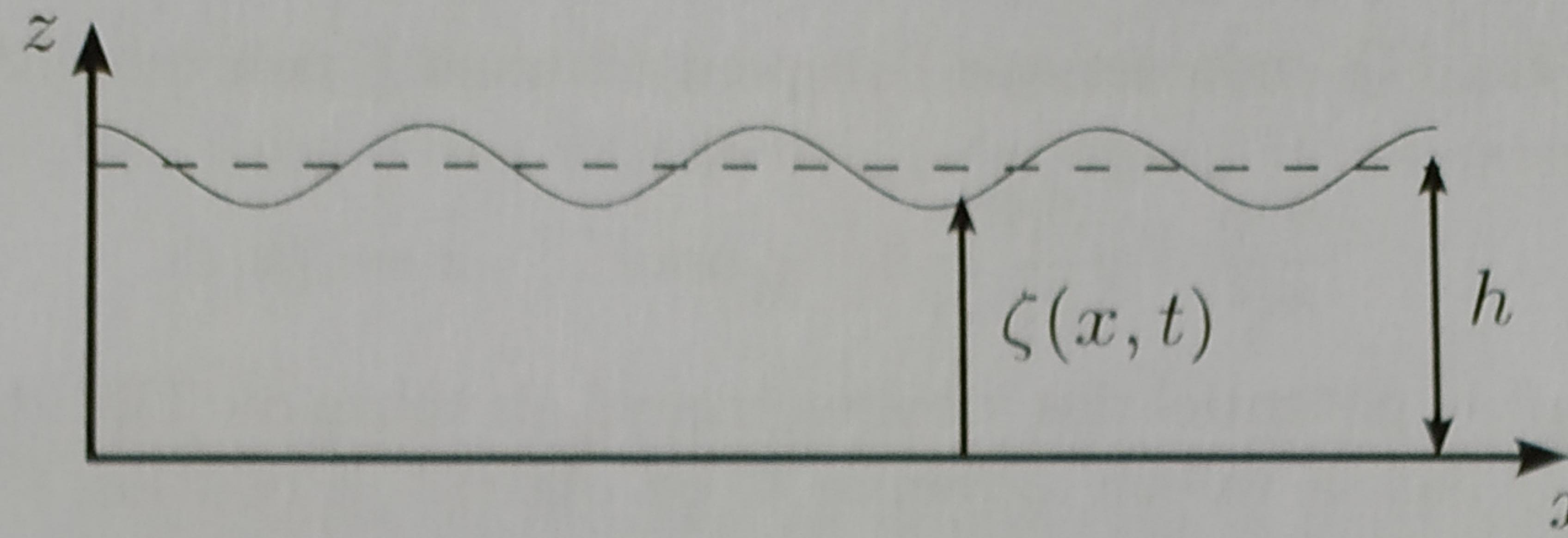


Figure 3 – Géométrie de la couche de fluide pour l'étude de la propagation des ondes de gravité.

trouvé le potentiel des vitesses $\phi = A \cosh(kz) \cos(\omega t - kx)$ au cours du TD1. On néglige les effets de tension superficielle.

- Après avoir identifié les paramètres pertinents du problème, donner, à l'aide d'une analyse dimensionnelle, la forme de l'expression attendue pour la relation de dispersion des ondes de gravité $\omega(k)$. Discuter le résultat.
- On considère un écoulement parfait, instationnaire, irrotationnel, incompressible et homogène dans un référentiel galiléen. On suppose que la seule force $d\mathbf{F}/d\tau$ est le poids, avec un champ de pesanteur \mathbf{g} uniforme. Écrire l'équation l'Euler.
- En partant de l'équation d'Euler, démontrer que l'on obtient l'intégrale première spatiale, valable dans tout le fluide et qui généralise le théorème de Bernoulli :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\mathbf{grad} \phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t),$$

où $f(t)$ est une fonction du temps uniquement.

Nous pouvons toujours ajouter une fonction $g(t)$ à ϕ sans changer le sens physique de $\Delta\phi = 0$. Si l'on ajoute $g(t)$ à ϕ de telle sorte que $dg/dt = f(t)$, ceci permet d'éliminer $f(t)$. Nous choisirons donc $f(t) = 0$ par la suite.

- Soit $z = \zeta(x, t)$ l'équation de la surface libre et h la moyenne temporelle ou temporelle de $\zeta(x, t)$. Interpréter sommairement la condition aux limites à la surface :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{pour} \quad z = \zeta(x, t).$$

En déduire $\zeta(x, t)$, en admettant que l'on peut évaluer l'équation ci-dessus en remplaçant $\zeta(x, t)$ par sa valeur moyenne h .

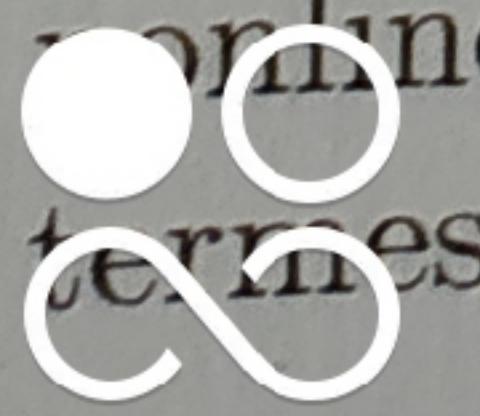
- En appliquant l'intégrale de Bernoulli en $z = \zeta(x, t)$, où $p = p_0$, montrer que l'on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\mathbf{grad} \phi)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g\zeta = 0 \quad \text{pour} \quad z = \zeta(x, t). \quad (1)$$

Le problème complet se réécrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 && \text{pour} \quad z = \zeta(x, t) \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\mathbf{grad} \phi)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g\zeta &= 0 && \text{pour} \quad z = \zeta(x, t) \\ \Delta\phi &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 && \text{pour} \quad z = 0 \end{aligned}$$

Pour avoir une idée des solutions, nous allons linéariser les équations. Nous négligeons tous les termes non linéaires. La linéarisation revient à supposer que l'amplitude de l'onde est assez faible pour que les termes $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v}$ soient négligeables.



6. Après avoir linéarisé l'Eq. (1), montrer que l'on peut éliminer ζ pour obtenir l'équation suivante, qui ne dépend que de ϕ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad z = \zeta(x, t).$$

7. Montrer qu'en reportant le potentiel des vitesses trouvé au cours du TD1 dans l'équation précédente et en remplaçant $\zeta(x, t)$ par sa valeur moyenne h , on obtient la relation de dispersion des ondes de gravité :

$$\omega^2 = gk \tanh(kh).$$

8. Discuter cette relation de dispersion dans les deux cas : i) eau peu profonde $h \ll \lambda$ et ii) eau profonde $h \gg \lambda$ (λ est la longueur d'onde). Les ondes de gravité sont-elles dispersives ?

3.3 Température du nez d'un avion

Un avion se déplace dans un référentiel galiléen à une vitesse constante $U = 300 \text{ m s}^{-1}$. Dans le référentiel de l'avion, l'air possède à l'infini une vitesse uniforme $V_\infty = -U$, une pression uniforme $p_\infty = 1 \text{ bar}$ et une température uniforme $T_\infty = 273 \text{ K}$; une ligne de champ part de l'infini et arrive sur le nez A de l'avion. On assimile l'air à un gaz parfait de masse moléculaire $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$, de constante $R = 8.32 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ et de coefficient $\gamma = c_p/c_V = 1.40$.

Déterminer la température T_A et la pression p_A sur le nez de l'avion, en supposant l'écoulement parfait et stationnaire.

4 Capillarité - Goutte pendante

Nous présentons une technique usuelle pour mesurer la tension de surface γ . Le principe est de laisser une goutte pendre au bout d'un fin tube capillaire de rayon R (voir figure 4) et d'en étudier la forme. Celle-ci est déterminée par un équilibre entre les effets de tension de surface qui favorisent une forme sphérique, et la gravité qui conduit à la déformation de la goutte.

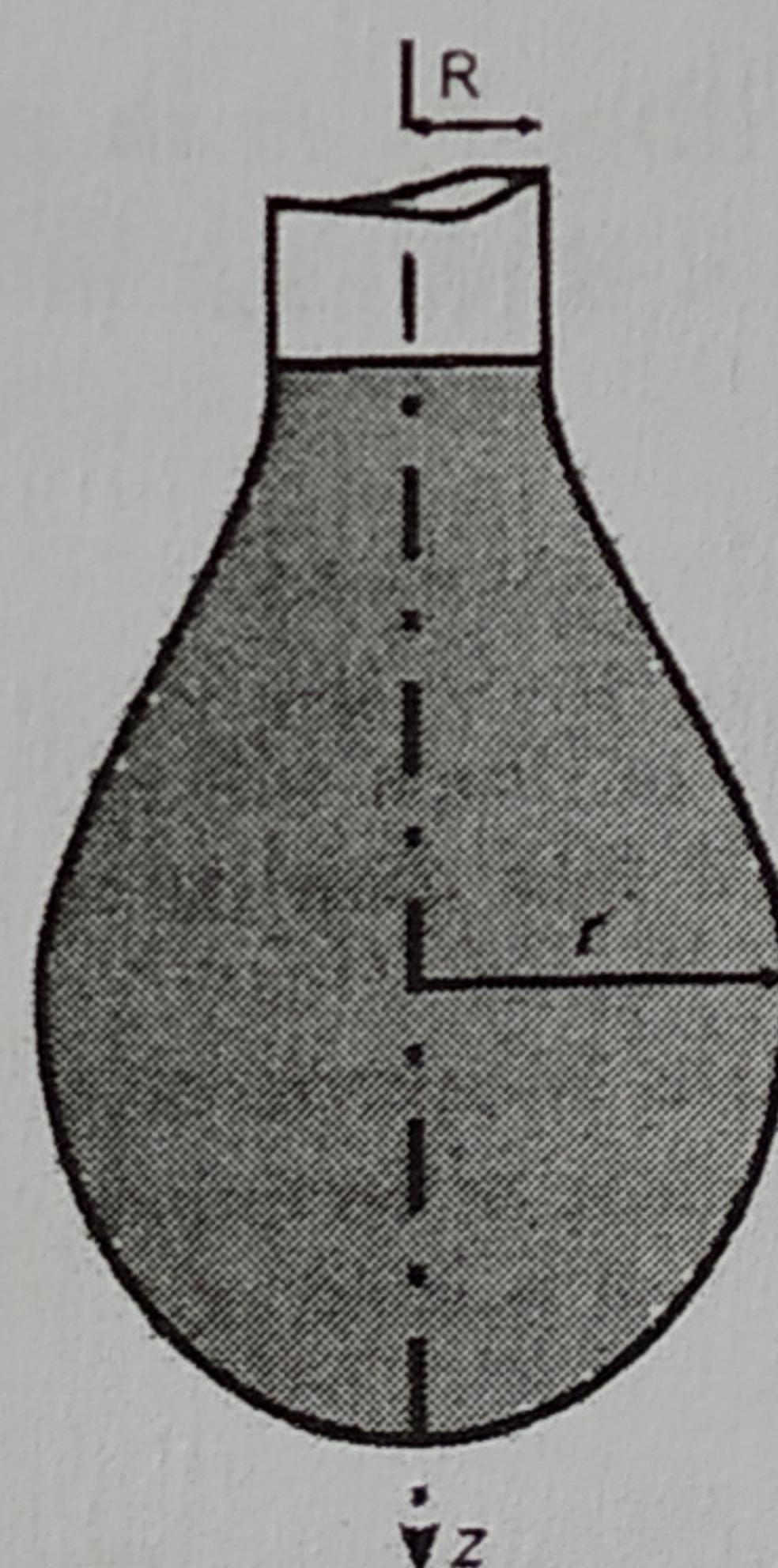


Figure 4 – Goutte pendante au bout d'un tube de diamètre intérieur R .

- Quel est l'ordre de grandeur de la taille d'une goutte pendante ? Introduire la longueur capillaire par analyse dimensionnelle.
- La goutte étant symétrique autour de l'axe z , on se place en coordonnées cylindriques. La surface de la goutte est décrite par une fonction $r(z)$. Montrer que la surface et l'énergie potentielle de la goutte s'écrivent respectivement :

3. On rappelle l'interprétation énergétique de la tension superficielle : le travail qu'un opérateur extérieur doit fournir pour accroître l'aire d'une interface liquide/vapeur d'une quantité dS est :

$$\delta W = \gamma dS.$$

En écrivant que la variation d'énergie potentielle est égale au travail des forces extérieures $dE_p = \delta W$, montrer que la forme de la goutte est obtenue en minimisant la fonctionnelle suivante :

$$F[r, r'] = \int dz \left[2\pi\gamma r \sqrt{1+r'^2} - \rho g z \pi r^2 \right] = \int dz f(r, r').$$

4. En utilisant l'équation d'Euler-Lagrange associée

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right) = \frac{\partial f}{\partial r},$$

montrer que l'on obtient l'équation non-linéaire suivante :

$$\gamma \left[-\frac{r''}{(1+r'^2)^{3/2}} + \frac{1}{r(1+r'^2)^{1/2}} \right] = \rho g z. \quad (2)$$

On rappelle que l'équation de Young-Laplace décrit la différence de pression capillaire à travers une interface entre deux fluides en raison du phénomène de tension de surface. Cette équation relie la différence de pression à la forme de la surface à travers la loi :

$$p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = 2\gamma C = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

où $p_{\text{int}} - p_{\text{ext}}$ est la différence de pression, γ est la tension de surface, C est la courbure moyenne de l'interface, et R_1, R_2 sont les rayons de courbures principaux.

5. Réinterpréter l'équation (2) en écrivant l'équilibre des forces de pression en tout point de la goutte. Identifier le terme de Laplace, le terme hydrostatique, ainsi que les rayons de courbure R_1 et R_2 .

L'équation nonlinéaire (2) peut être résolue numériquement. L'idée est de traiter la tension de surface comme un paramètre ajustable et de modifier sa valeur jusqu'à ce que le profil simulé ajuste le profil expérimental. La précision de cette méthode pour extraire γ est d'environ 1 %. La figure 5 montre les photos de deux gouttes possédant des tensions de surface différentes.

6. Décrire qualitativement l'effet de l'ajout d'un produit tensioactif et son influence sur la forme de la goutte pendante (voir figure 5).

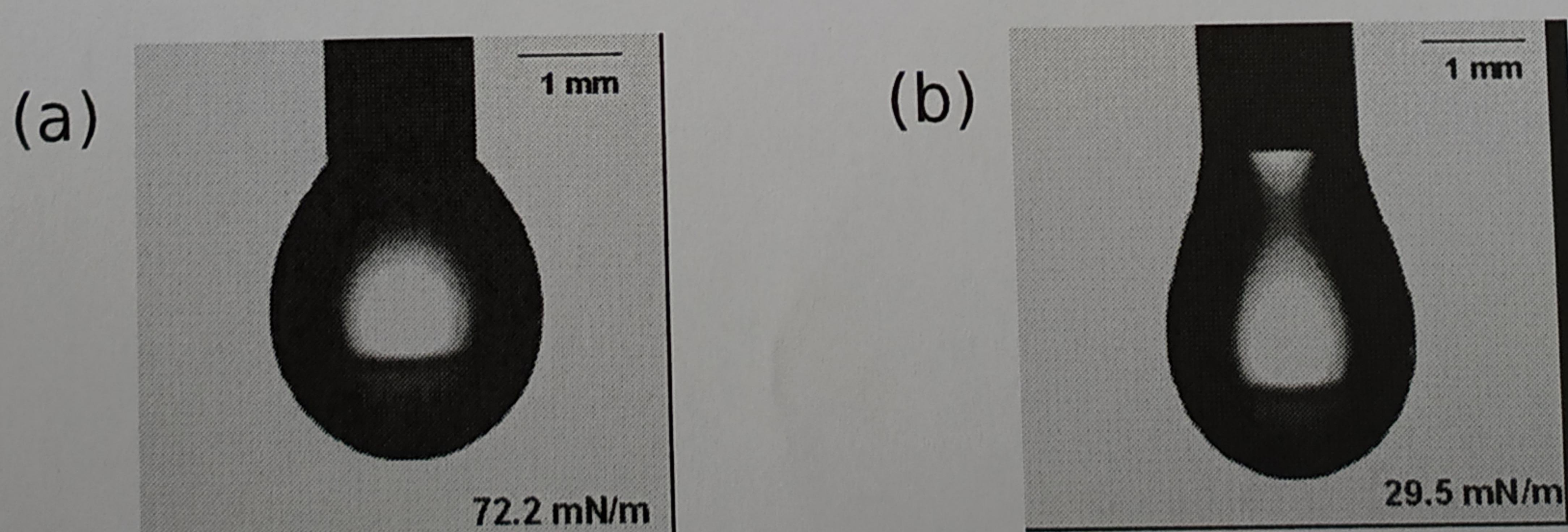


Figure 5 – (a) Goutte pendante d'eau pure dont on extrait $\gamma = 72.2 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$. (b) Goutte d'eau à laquelle on a ajouté un tensioactif. Dans ce cas on trouve $\gamma = 29.6 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$.

(7)

Hydrodynamique TD2

1) Analyse dimensionnelle - Explosion nucléaire.

Théorème II: Loit une relation homogène en dimension $u_1 = f(u_2, \dots, u_n)$

- * les paramètres physiques u_1, \dots, u_n
- * n grandeurs dimensionnellement indépendantes

↳ on peut écrire $\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \dots, \Pi_{n-r})$
où les Π_i sont sans dimension

1) Paramètre: $R, t, E, p_{air} = \rho \rightarrow n=4$

$$\left. \begin{array}{l} [R] = L \\ [t] = T \\ [E] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \\ [\rho] = M \cdot L^{-3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow R = f(E, t, \rho) \\ 3 \text{ dimensions} \Rightarrow r=3 \end{array}$$

Théorème II: Il y a un seul nombre sans dimension Π_1

$$R = \Pi_1 t^\alpha E^\beta \rho^\gamma$$

$$[R] = L = T^\alpha M^\beta L^{\beta} T^{-2\beta} M^\gamma L^{-3\gamma}$$

$$\begin{cases} 1 = 2\beta - 3\gamma \\ 0 = \beta + \gamma \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \beta = -\gamma \\ 1 = 2\beta + 3\beta = 5\beta \rightarrow \beta = \frac{1}{5} \\ \alpha = \frac{2}{5} \end{array} \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow R = \Pi_1 t^{\frac{2}{5}} E^{\frac{1}{5}} \rho^{-\frac{1}{5}}$$

$$\log R = \underbrace{\log \Pi_1}_{=0 \text{ car}} + \frac{2}{5} \log t + \frac{1}{5} \log \left(\frac{E}{\rho} \right)$$

on suppose $\Pi_1 \approx 1$

$$\tilde{R} (\text{en cm}) = R (\text{en m}) \times 100$$

$$\underbrace{\frac{5}{2} \log \left(\frac{\tilde{R}}{100} \right)}_{(\log \tilde{R} - 2)} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{E}{\rho} \right) + \log t$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} \log \tilde{R} = 5 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{E}{P} \right) + \log t$$

ordonnée à l'origine

$$11,9 = 5 + \frac{1}{2} \log \frac{E}{P}$$

ordonnée
à l'origine

$$E = P 10^{2(11,9 - 5)} = 7,6 \cdot 10^{13} \text{ J}$$

$$E = 18 \text{ kilotonnes de TNT}$$

bon accord avec données énoncées

2) Couche limite (voir correction DM / pas à faire)

3) Équations d'Euler et de Bernoulli.

3) 1) Phénomène de Venturi.

1) Fluide parfait: fluide où l'écoulement peut être décrit en négligeant : \rightarrow viscosité \rightarrow effets de conduction (thermique)

\hookrightarrow mouvement du fluide est adiabatique décrit par l'équation d'Euler :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = - \vec{\nabla} p + \frac{d \vec{F}}{d t}$$

pour fluide incompressible

$$2) v_A S_A = v_B S_B \Rightarrow v_B = v_A \left(\frac{S_A}{S_B} \right)$$

$S_B \ll S_A \Rightarrow v_B \gg v_A$

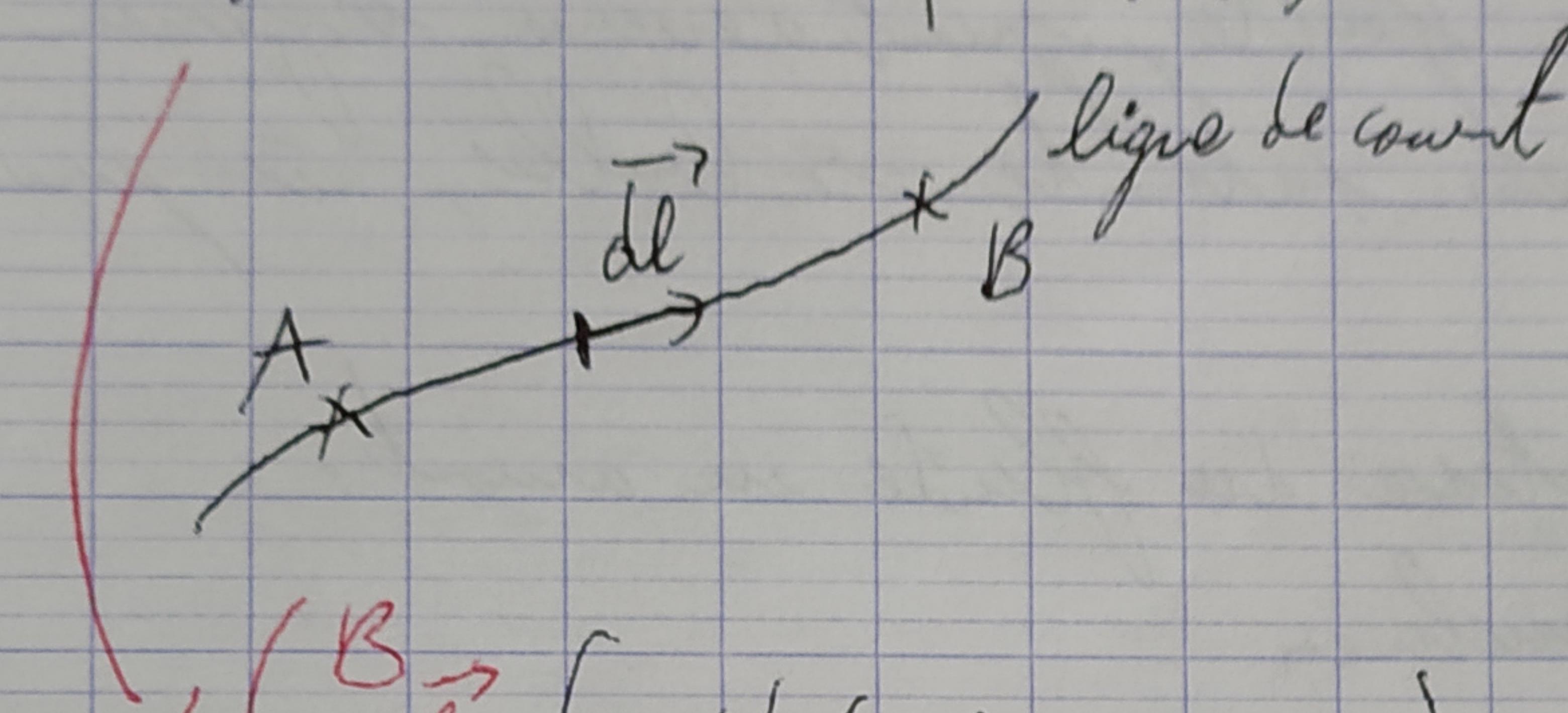
$$3) \cancel{\frac{d\vec{v}}{dt}} + \vec{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \vec{\text{rot}} \vec{v} \times \vec{v} = -\frac{\vec{\text{grad}} p}{\rho} + \vec{g}$$

= 0 stationnaire

$$= -\vec{\text{grad}}(p)$$

~~stationnaire~~
étagée

$$\rightarrow \vec{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{p}{\rho} + g z + (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \times \vec{v} = \vec{0}$$



$$\int_A^B dl \cdot \left[\vec{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z\right) + (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \times \vec{v} \right] = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{v_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} + g z_A = \frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} + g z_B}$$

Équation de Bernoulli

on déduit (ligne de courant)
et $\vec{\text{rot}} \vec{v} \times \vec{v} \perp \vec{v}$

$$p_B - p_A = \frac{\rho v_A^2}{2} \left[1 - \frac{S_A^2}{S_B^2} \right]$$

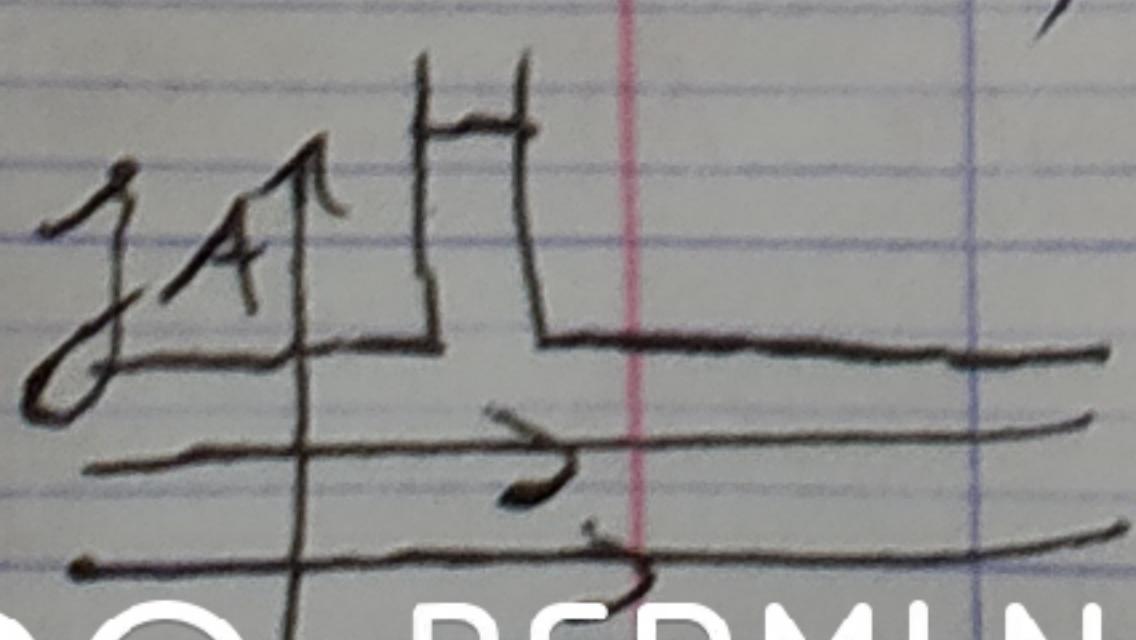
Pour $S_B \ll S_A$ on a bien $p_B \ll p_A \Rightarrow$ dépression au niveau de la construction

$$D_v = S_A v_A = S_A \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho} \frac{S_B^2}{(S_A^2 - S_B^2)}}$$

Lorsque on mesure $p_A - p_B$ et on connaît S_A et S_B

on en déduit D_v ou S_A

4) Lignes de courant // donc la pression est hydrostatique



$$\rho \left(\cancel{\frac{d\vec{v}}{dt}} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\vec{\text{grad}} p + \vec{g}$$

~~car écoulement~~
~~parallel~~ ($\vec{\text{grad}} \vec{v} = \vec{0}$)

$$p_A = p_0 + \rho g z_A \quad p_C = p_0 + \rho g z_C$$

$$p_B = p_0 + \rho g z_B$$

Comme $v_A = v_C \rightarrow p_A = p_C \rightarrow z_A = z_C$

$v_B > v_A \rightarrow p_B < p_A \rightarrow z_B < z_A$

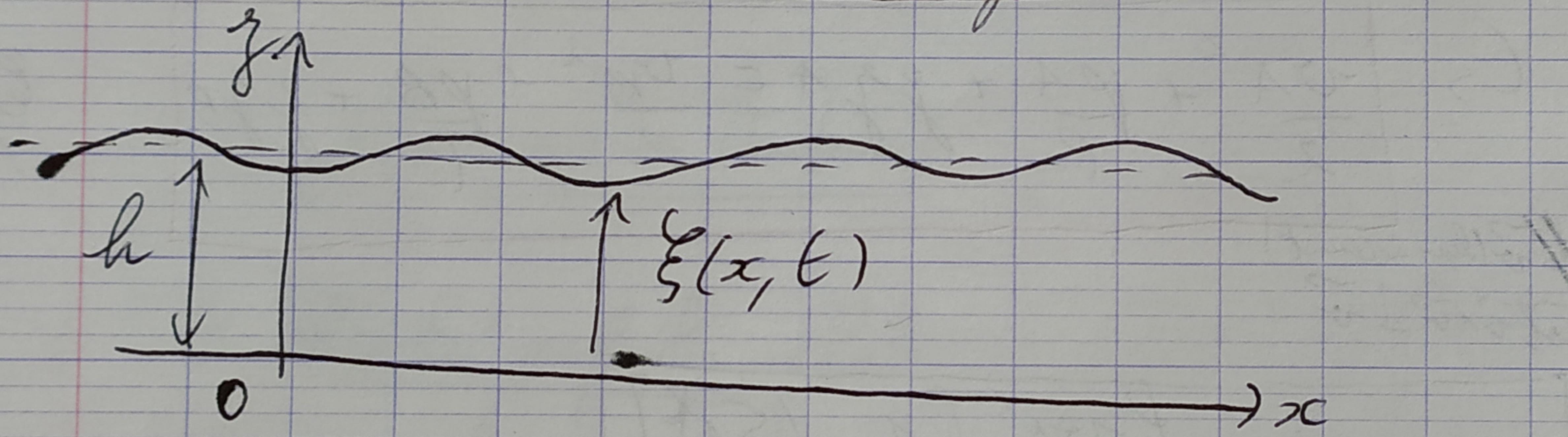
($\hookrightarrow z_C + z_A$ car l'hypothèse du fluide parfait a ses limites)

5) Si p_B trop faible, peut devenir inférieur à pression de nappe saturée \Rightarrow bulles, évaporation

6) * vitesse du fluide en amont.

* Röthe-Buchner

3.2) Retour sur les ondes de gravité - relation de dispersion.



Rappel : (TD précédent)

* incompressible $\Rightarrow \Delta \phi = 0$ ($\vec{v} = \vec{\text{grad}} \phi$)

* Conditions aux limites en $z=0$: $\frac{\partial \phi}{\partial z}(z=0, t) = 0$

$$(\Rightarrow \phi = A \cosh(hz) \cos(\omega t - kx))$$

1) Paramètres: $\omega, h, g, \cancel{R}, k$ 4 paramètres

\rightarrow car ondes de gravité (nouvel intervalle temp)

Dimensions: $[\omega] = T^{-1}$
 $[h] = L^{-1}$
 $[g] = L \cdot T^{-2}$
 $\cancel{[R]} = M \cdot L^{-3}$
 $[k] = L$

2 dimensions

Les ajouté M (il faut faire une autre chose)

$$\pi_1 = h \cdot h \Rightarrow \pi_2 = \Phi(\pi_1)$$

$$\pi_2 = \frac{\omega^2}{hg} \Rightarrow \omega^2 = hg \boxed{\Phi(hh)}$$

2) Équation d'Euler avec hypothèses de l'énoncé :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{u^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \vec{g}$$

$\vec{v} = \text{grad } \phi$

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0$$

\hookrightarrow On en déduit : (fonction dont le gradient est nul ne dépend que du temps)

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t)}$$

$$\hat{\phi}(t) = \phi(t) + g(t)$$

$$\Delta \phi = 0 \rightarrow \hat{\Delta} \phi = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) - g'(t) = 0$$

$$\text{Lien entre } g'(t) = f(t)$$

On les de gravité : grande longueurs d'onde, et surface peut inclinée

$$\text{Donc } \vec{n}_S \underset{\text{surface}}{\approx} \vec{u}_z$$

* Un point de la surface a une vitesse : $\vec{v}_S = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} (x, t) \vec{n}_S$

$$\text{Vitesse du fluide : } \vec{v} = \text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \text{CL en } z = \xi(x, t) : \vec{v}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} = \vec{v}_m$$

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \text{ en } z = \xi(x, t)}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = hA \sinh(hh) \times \cos(\omega t - hx)$$

$$(\xi(x, t) = \frac{hA}{\omega} \sinh(hh) \sin(\omega t - hx) + \beta(x))$$

$$\langle \xi(x, t) \rangle_t = h \rightarrow \beta(x) = h$$

Équation de la surface: $\boxed{\xi(x, t) = \frac{hA}{\omega} \sinh(hh) \sin(\omega t - hx) + h}$

5) ~~Équation de la question 3)~~ évoluée en $z = \xi(x, t)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \phi)^2}{2} - \frac{p_0}{\rho} + g \xi(x, t) = 0$$

Problème complet:

- * $\Delta \phi = 0$
- * CL en $z = 0$ $\rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z}|_{z=0, t=0} = 0$
- * CL en $z = \xi(x, t)$ $\rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$

6) On linéarise l'équation de la question 5)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho} + g \xi = 0 \quad (*)$$

$$\frac{\partial (\#)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = \xi(x, t)$$

Problème: $\Delta \phi = 0$

$$\Rightarrow \text{C1 en } z=0: \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \text{C2 en } z=\xi: \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

7) $-a^2 \cosh(hh) + g h \sin(hh) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = g h \tanh(hh)}$$

8) eau profonde: $h \gg \lambda, hh \gg 1 \Rightarrow \tanh(hh) \approx 1$

$$\omega = \sqrt{gh}$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial h} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} = \frac{v_\phi}{2}$$

↳ onde dispersée

eau peu profonde: $h \ll \lambda$; $hh \ll 1, \tanh(hh) \approx hh$

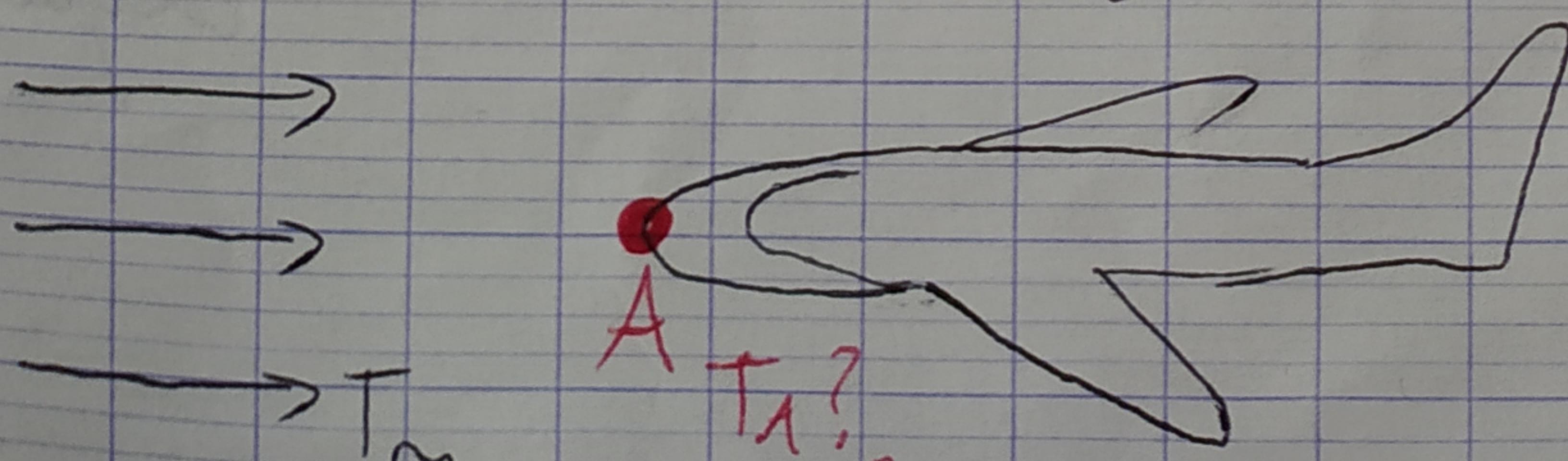
$$\omega^2 = g h h^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{gh} h$$

$$v_\phi = \sqrt{gh}$$

$$v_g = v_\phi = \sqrt{gh}$$

↳ onde non dispersée

3) Température du néz d'un avion:



on suppose écoulement
le parfait
↳ stationnaire

$$p \left(\vec{\text{grad}} \frac{\vec{v}^2}{2} + \vec{\text{rot}}(\vec{v}) \cdot \vec{v} \right) = -\vec{\text{grad}} p + \vec{p} \vec{g}$$

\int_A^∞

$$\int_A^\infty \left[\vec{\text{grad}} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + gz \right) + \vec{\text{rot}}(\vec{v}) \vec{v} + \vec{\text{grad}} p \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + \int_A^\infty \frac{dp}{p} = 0$$

$$\frac{U^2}{2} = \int_{\infty}^A \frac{dp}{p}$$

$$pV = nRT$$

$$p = \frac{nM}{V} = \frac{\cancel{n}M}{nRT} p = \frac{M}{R} \frac{p}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{U^2}{2} = \int_{\infty}^A \left(\frac{R}{M} \right) T \frac{dp}{p}$$

Évolution adiabatique $pV^\gamma = C$ Loi de Laplace

~~$$p \left(\frac{T}{p} \right)^\gamma = C' \Rightarrow p^{1-\gamma} T^\gamma = C'$$~~

$$(1-\gamma) \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dT}{T} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T}$$

$$\frac{U^2}{2} = \frac{R}{M} \int_{\infty}^A \frac{\gamma}{\gamma-1} dT \Rightarrow \frac{U^2}{2} = \frac{R}{M} \frac{\gamma}{\gamma-1} (T_\infty - T_A)$$

$$T_A = \frac{M}{R} \frac{U^2}{2} \frac{(\gamma-1)}{\gamma} + T_\infty = 318K$$

(élongation due à la compression du gaz)

4) Capillarité - Goutte pendante.

1) Paramètres: L , γ , g , P $\Rightarrow 4$ paramètres

(taille de la goutte) (tension de surface)

Dimensions:

$$[L] = L$$

$$[\gamma] = MT^{-2}$$

$$[g] = L \cdot T^{-2}$$

$$[P] = M \cdot L^{-3}$$

énergie par unité de surface

3 dimensions

Théorème Pi:

1^{re} valeur Π_1 sans dimension

$$\Pi_1 = \frac{\gamma}{\rho g L^2}$$

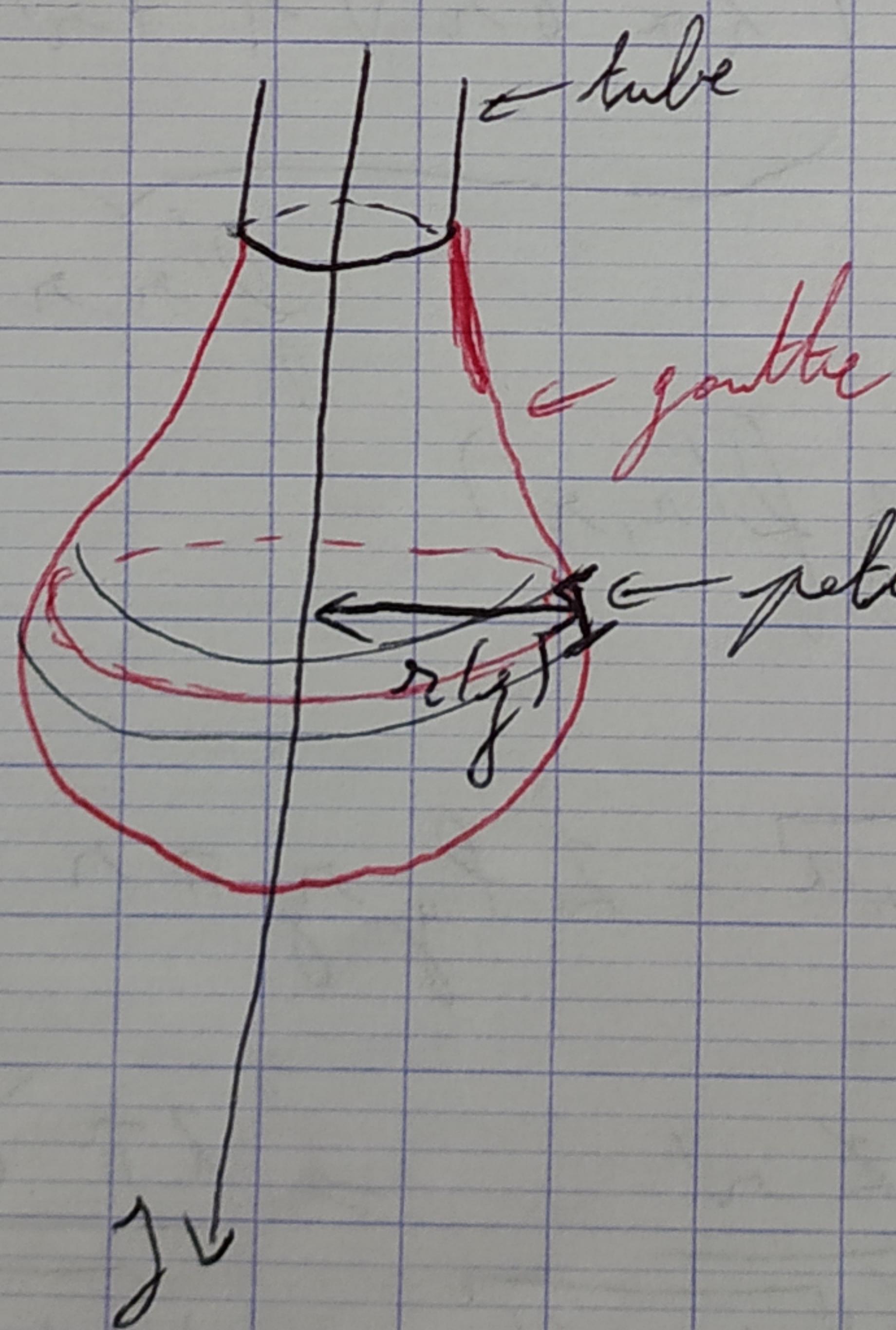
Si on suppose que $\Pi_1 = 1$

$$L = l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

longeur capillaire

Dans la nature, on observe des gouttes d'eau sphériques de tailles inférieures aux mm ($l_c \approx 1 \text{ mm}$)

2)



$$dS = 2\pi r(z) ds$$

~~absolue~~
~~absolue~~
courbure

$$\text{or } ds^2 = dr^2 + dg^2$$

$$ds = dz \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} = dz \sqrt{1 + r'^2(z)}$$

$$S = \int dz 2\pi r \sqrt{1 + r'^2(z)}$$

$$dC = \pi r^2(y) dy$$

$$dE_p = \rho dC g y$$

$$E_p = \int dE_p = \boxed{\int g \rho \pi r^2 y dy = E_p}$$

$$3) \delta W = \gamma dS$$

$$dE_p = \delta W = \gamma dS$$

$$d \left(\int dy \rho g y \pi r^2 \right) = \gamma d \left(\int dy 2\pi r \sqrt{1+r'^2} \right)$$

$$d \left[\int dy \left(2\pi \gamma r \sqrt{1+r'^2} - \rho g z \pi r^2 \right) \right] = 0$$

$$d(F(r, r')) = 0$$

$$F(r, r') = \int dy \left(2\pi \gamma r \sqrt{1+r'^2} - \rho g y \pi r^2 \right)$$

action

$f(r, r')$

$$= \int dy f(r, r')$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2\pi \gamma r \sqrt{1+r'^2} - 2 \rho g y \pi r$$

$$\frac{\partial f}{\partial r'} = \frac{2\pi \gamma r \times 2r'}{\sqrt{1+r'^2}} = \frac{2\pi \gamma r r'}{\sqrt{1+r'^2}}$$

$$* \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right) = \dots$$

$$* \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right) = \frac{\partial f}{\partial r} \Rightarrow \text{équation de l'énoncé}$$

$$\Rightarrow \gamma \left[-\frac{r''}{(1+r'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{r(1+r'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = \rho g z$$

$$p_{int-pext} = 2\gamma C = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Pour une sphère : $p_{int-pext} = \frac{2\gamma}{R}$

$$p_{int} = p_{ext} + \frac{2\gamma}{R}$$

5) $\frac{1}{R_1}$

$\frac{1}{R_2}$

6)