

# Préparation à l'agrégation de physique

## Hydrodynamique - TD3

Tom BIENAIMÉ ([tom.bienaimé@ens.fr](mailto:tom.bienaimé@ens.fr))

### 1 Force de traînée sur une sphère en mouvement

1. Dans la limite des faibles vitesses, on suppose que la résistance au mouvement de la sphère dans le fluide est essentiellement d'origine visqueuse. Une sphère de rayon  $a$ , en mouvement de translation à la vitesse  $\mathbf{u}$ , subit de la part du fluide une force de trainée  $\mathbf{F} = -6\pi\eta a \mathbf{u}$  (loi de Stokes).

- (a) Que vaut la poussée d'Archimède subie par la sphère dans le fluide ? Dépend-elle de la vitesse relative entre la sphère et le fluide ?
- (b) La sphère, de masse volumique constante  $\rho_b$ , est lachée sans vitesse initiale dans le fluide. On supposera  $\rho_b > \rho_{\text{eau}}$ . Établir l'équation du mouvement de la bille :

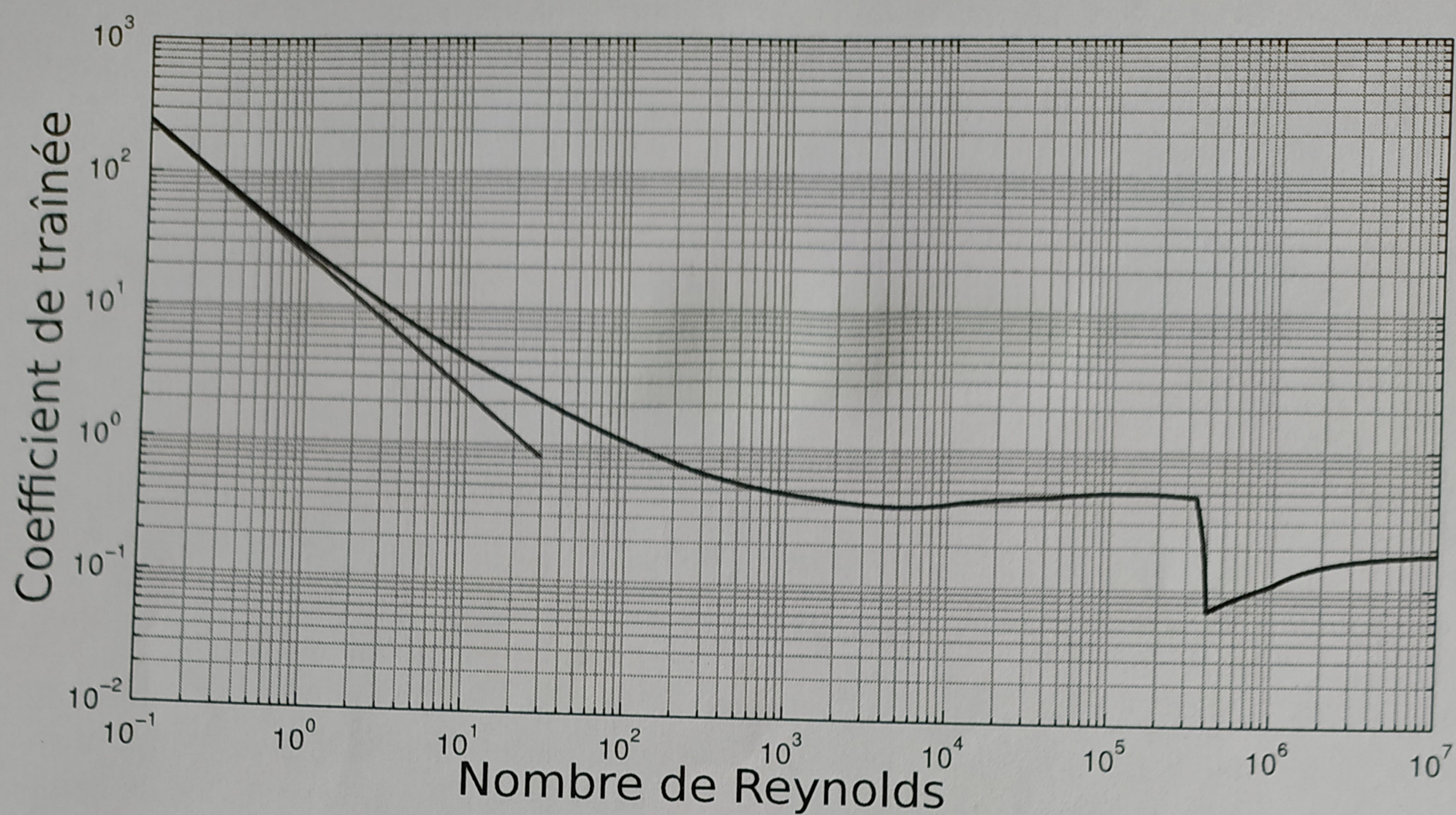
$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau}$$

où l'on précisera les expressions de  $\tau$  et  $u_\infty$  en fonction des données du problème.

- (c) Calculer l'évolution de la vitesse  $u(t)$  au cours du temps. Que devient-elle lorsque  $t \rightarrow \infty$  ? Commenter. Tracer cette fonction  $u(t)$ .
- (d) Calculer  $u_\infty$  associée respectivement à une gouttelette de brouillard (rayon  $1 \mu\text{m}$ ), puis à une goutte de pluie (rayon  $1 \text{ mm}$ ) dans l'air. Ce dernier résultat vous paraît-il réaliste ?
- (e) Quelle condition doit vérifier le nombre de Reynolds pour que la loi de Stokes puisse rendre compte du mouvement ? Donner le nombre de Reynolds dans le cas de la goutte de brouillard et de la goutte d'eau. Que peut-on en conclure ?

2. À grande vitesse, on suppose que la contribution de la force de Stokes est négligeable dans la résistance au mouvement de la sphère dans le fluide.

- (a) Quelle est l'origine physique de la force de traînée dans ce cas ?
- (b) Proposer un dispositif expérimental permettant de mesurer la force de traînée exercée par le fluide sur la sphère.
- (c) On suppose que les grandeurs caractéristiques du problème sont la densité  $\rho$  et la viscosité dynamique  $\eta$  du fluide, la vitesse relative  $u$  entre la sphère et le fluide, le diamètre  $a$  de la sphère et la force de traînée  $F$ . Montrer que l'on peut former deux nombres sans dimension à partir de ces paramètres. Donner leurs expressions.
- (d) En plus du nombre de Reynolds  $Re$ , quelle est l'autre grandeur sans dimension  $C_x$  caractéristique du problème que l'on peut construire ?
- (e) D'après la figure ci-contre, déterminer la dépendance de  $C_x$  en fonction de  $Re$  sur la plage  $Re \in [10^3, 10^5]$ .
- (f) Déduire des deux questions précédentes la manière dont  $F$  dépend de  $u$  sur cette plage de nombre de Reynolds.

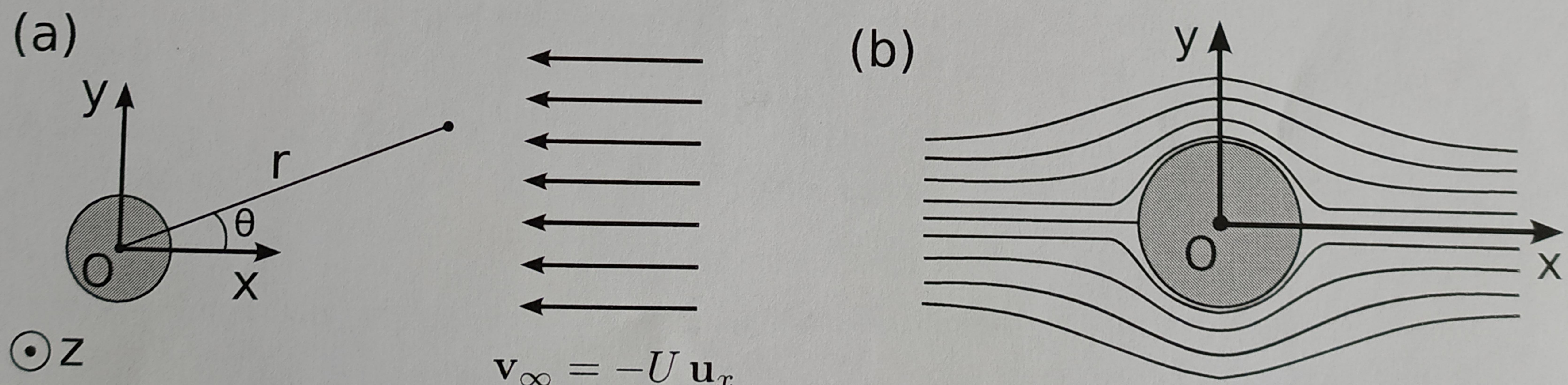


**Figure 1 – Évolution de  $C_x$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$ .**

## 2 Écoulement parfait autour d'un cylindre – Portance des avions

On considère une aile cylindrique d'axe horizontal  $z$  et de rayon  $R$ , en mouvement rectiligne uniforme à vitesse  $U \mathbf{u}_x$  dans le référentiel terrestre ( $R_0$ ) (voir figure 2). Loin de l'aile, l'air est au repos et la pression est constante, notée  $p_\infty$ . Il est commode, pour exprimer les conditions aux limites périodiques sur l'aile, de traiter le problème dans le référentiel ( $R$ ) lié à l'aile, où nous noterons  $\mathbf{v}$  le champ eulérien des vitesses. Loin de l'aile, la loi de composition des vitesses donne immédiatement  $\mathbf{v}_\infty = -U \mathbf{u}_x$ .

Nous supposons que i) l'écoulement est *parfait* et *stationnaire* ii) l'écoulement est *incompressible* (valable pour un écoulement subsonique) iii) l'écoulement est *irrotationnel*<sup>1</sup> iv) l'écoulement est plan et invariant par translation le long de l'axe de l'aile. On se place donc en coordonnées cylindriques et on cherche le vecteur vitesse sous la forme  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_r(r, \theta)\mathbf{u}_r + v_\theta(r, \theta)\mathbf{u}_\theta$ .



**Figure 2 – (a)** Écoulement autour d'une aile cylindrique. **(b)** Lignes de courant de l'écoulement.

1. L'écoulement étant irrotationnel, il existe un potentiel des vitesses  $\phi$  tel que  $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$ . Montrer que le potentiel des vitesses est solution de l'équation de Laplace  $\Delta \phi = 0$ .
2. On cherche un potentiel des vitesses  $\phi(r, \theta)$ , et on admet que la solution de l'équation de Laplace

1. Ce choix est guidé par des arguments de dynamique des fluides avancée : Kelvin a montré que partant du repos, l'écoulement autour de l'aile ne peut pas devenir tourbillonnaire si on néglige la viscosité de l'air. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

est de la forme :

$$\phi(r, \theta) = \alpha_0 \ln r + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n r^n + \delta_n r^{-n}) \sin(n\theta),$$

où les  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$  sont des paramètres quelconques. Déterminer ces constantes en exploitant i) la symétrie du problème par rapport au plan  $y = 0$ , ii) la condition aux limites à l'infini, iii) la condition aux limites sur le bord du cylindre. Montrer que l'on obtient :

$$\phi(r, \theta) = \beta_0 - U \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta,$$

où on remarquera que la constante  $\beta_0$  peut-être omise car celle-ci n'influence pas le champ des vitesses.

3. En déduire le champ des vitesses  $\mathbf{v}(r, \theta)$  et tracer les lignes de courant de l'écoulement (voir figure 2). Calculer la norme du vecteur vitesse  $v = \|\mathbf{v}\|$  sur l'aile *i.e.* en  $r = R$ .
4. Utiliser le théorème de Bernoulli pour montrer que la pression autour de l'aile s'écrit :

$$p(r = R, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta).$$

Démontrer que la résultante des forces de pression sur l'aile est nulle, et donc que l'avion ne subit aucune portance et aucune force de traînée. Commenter.

**Remarques sur l'écoulement autour d'une aile réelle** L'absence de portance est dû au fait que l'écoulement adopté dans le modèle précédent est symétrique par rapport au plan horizontal  $\theta = 0$ . Pour une aile réelle, l'écoulement est dissymétrique (voir figure 3) : les lignes de champ s'écartent au voisinage de  $B$  et se resserrent au voisinage de  $A$ , de telle sorte que :

$$v_B < v_\infty = U \quad ; \quad v_A > v_\infty = U,$$

et le théorème de Bernoulli assure que  $p_B > p_A$ . C'est donc la dissymétrie de l'écoulement autour de l'aile qui donne naissance à la portance. On peut noter que cette dissymétrie est équivalente au fait que la circulation de  $\mathbf{v}$  sur le contour limitant la section de l'aile orienté dans le sens trigonométrique autour de  $\mathbf{u}_z$ , est positive :

$$\oint_{(C)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} > 0,$$

car la contribution positive du voisinage de  $A$  (où  $\mathbf{v} \parallel d\mathbf{l}$ ) l'emporte sur la contribution négative du voisinage de  $B$  (où  $\mathbf{v} \parallel -d\mathbf{l}$ ).

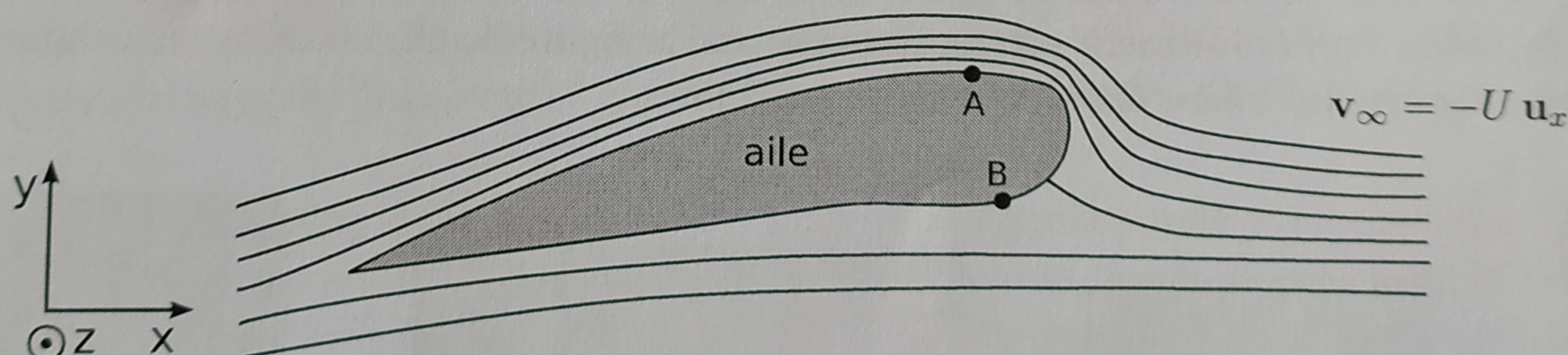


Figure 3 – Illustration des lignes de courant autour d'une aile réelle.

Ceci nous donne l'idée de superposer à l'écoulement précédent un *vortex* d'intensité  $\Gamma$  pour obtenir :

$$v_r = -U \cos \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad ; \quad v_\theta = U \sin \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

5. Calculer la valeur de la vitesse sur le cylindre, puis la pression sur le cylindre via le théorème de Bernoulli.
6. Calculer la résultante des forces de pression sur le cylindre et montrer que l'on obtient une force de portance des que  $\Gamma > 0$ .

**Remarque** L'intensité de la vorticité  $\Gamma$  apparaît comme une indéterminée du problème due au caractère excessif du modèle de l'écoulement parfait. En pratique, c'est la viscosité dans la couche limite qui fixe la valeur de  $\Gamma$ .

### 3 Bilans macroscopiques

#### 3.1 Amincissement d'un jet libre par la viscosité

On considère un fluide visqueux sortant d'un tube cylindrique de diamètre  $R_0$ . Le système est en apesanteur de sorte que les forces de gravité n'interviennent pas dans le problème. L'écoulement est supposé incompressible et stationnaire. Comme nous l'avons vu dans l'exercice sur l'écoulement de Poiseuille (voir TD1), le profile radial de l'écoulement en sortie du tube est donné par  $v(r) : 2U_0 [1 - (r/R_0)^2]$ . On suppose qu'à l'infini, le profil des vitesses est uniforme et a pour valeur  $U_\infty$  (les forces de viscosité ont uniformisé le profil des vitesses). Le rayon du jet est  $R_\infty$ . Le but de l'exercice est de calculer  $U_\infty$  et  $R_\infty$ .

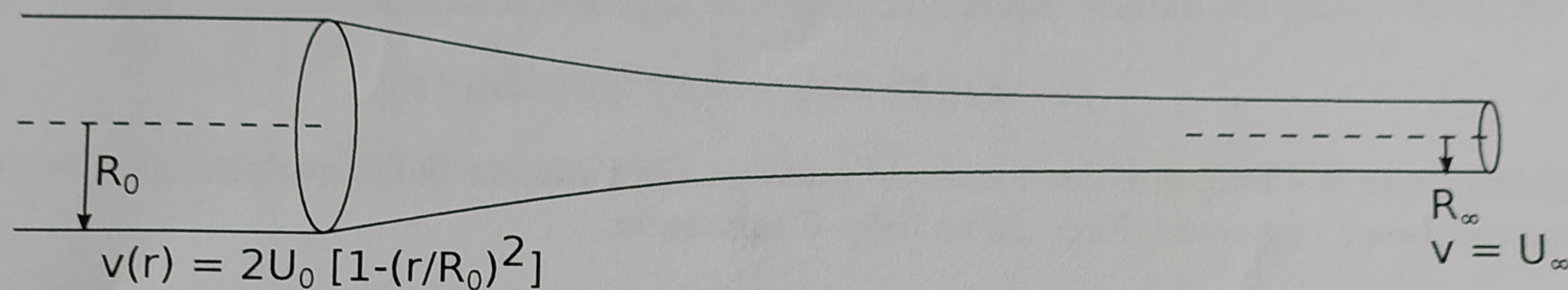


Figure 4 – Amincissement d'un jet libre par la viscosité.

1. Montrer que la conservation du débit volumique donne une relation entre  $U_0$ ,  $U_\infty$ ,  $R_0$  et  $R_\infty$ .
2. En faisant un bilan de quantité de mouvement, en déduire  $U_\infty$  et  $R_\infty$  en fonction de  $U_0$  et  $R_0$ .
3. Estimer l'ordre de grandeur de la distance nécessaire pour passer de  $R_0$  à  $R_\infty$ .

#### 3.2 Ressaut hydraulique dans un canal

On considère un écoulement stationnaire dans un canal ouvert rectangulaire et de pente négligeable. On s'intéresse à la formation d'un ressaut immobile (changement brutal de la profondeur de  $h_1$  en amont, à  $h_2$  en aval ; ce changement s'effectue sur une distance comparable à la profondeur, avec  $h_1 < h_2$ ). Pour simplifier l'analyse, on modélise cet écoulement en négligeant la viscosité et la compressibilité du fluide et en supposant les vitesses d'écoulement  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  uniformes et horizontales en amont comme en aval du ressaut. La géométrie de l'écoulement est représentée sur la figure 5. On choisira un volume de contrôle approprié pour effectuer les bilans des différentes grandeurs.

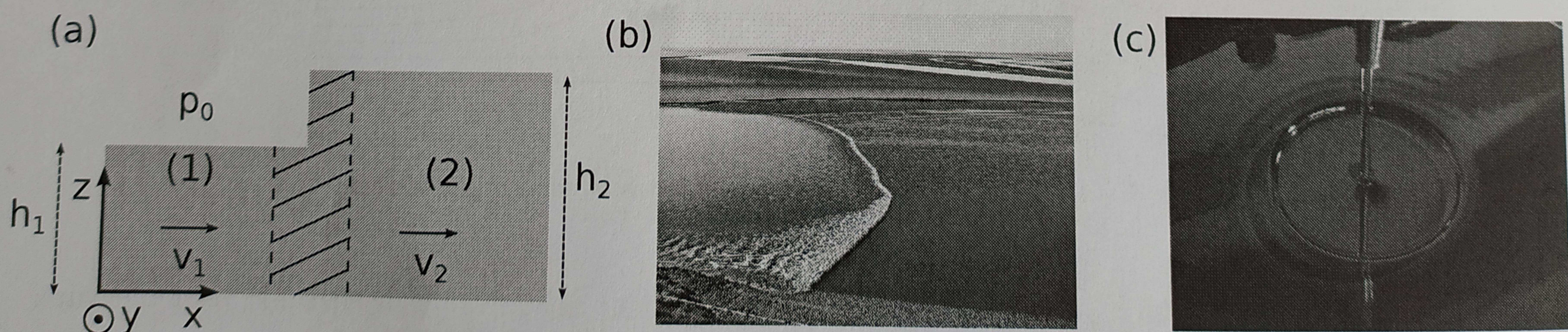


Figure 5 – (a) Schéma du ressaut hydraulique. (b) Le mascaret est un phénomène naturel très spectaculaire qui se produit sur une centaine de fleuves, rivières et baies. Ce phénomène de brusque surélévation de l'eau d'un fleuve ou d'un estuaire est provoqué par l'onde de la marée montante lors des grandes marées. (c) Autre exemple courant de ressaut hydraulique qui se manifeste par une onde circulaire stationnaire autour du jet d'eau au fond d'un évier.

1. Monter que la répartition de la pression dans le fluide est hydrostatique. Exprimer la pression  $p(z)$  en amont et en aval du ressaut en fonction de la masse volumique  $\rho$  du fluide, de la hauteur  $z$  considérée et de la pression atmosphérique  $p_0$ .
2. *Équation de conservation de la masse.* Donner l'expression du débit volumique  $D_v$  en fonction de  $(v_1, h_1, L)$  et  $(v_2, h_2, L)$ ,  $L$  étant la largeur du canal. En déduire la relation liant  $v_1, h_1, v_2, h_2$ .
3. *Equation de transport de la quantité de mouvement.*
  - (a) Montrer que l'équation-bilan de la densité de quantité de mouvement conduit à la relation :

$$\frac{1}{2}gh_1^2 + v_1^2h_1 = \frac{1}{2}gh_2^2 + v_2^2h_2,$$

où  $g$  est l'accélération de la pensanteur.

- (b) Calculer  $v_1$  et  $v_2$  en fonction de  $h_1, h_2$  et  $g$ .
- (c) On définit les nombres de Froude en amont et en aval par :

$$Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}}, \quad Fr_2 = \frac{v_2}{\sqrt{gh_2}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{h_2}{h_1}.$$

Exprimer  $Fr_1$  et  $Fr_2$  en fonction de  $\alpha$ .

- (d) Montrer que pour  $\alpha > 1$ , on a  $Fr_1 > 1$  (régime super-critique ou torrentiel) et  $Fr_1 < 1$  (régime sous-critique ou fluvial).
- (e) Application numérique : avec un débit par unité de largeur de  $1.5 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$  et une profondeur avant ressaut de  $0.2 \text{ m}$ , calculer  $Fr_1$  puis  $h_2$ .

#### 4. Bilan énergétique.

- (a) On rappelle que pour une particule de fluide de vitesse  $\mathbf{v}$  dans un champ de pensanteur, la densité d'énergie est  $e = \rho(v^2/2 + gz)$  et que la puissance fournie par les forces de pression  $p$  à travers une surface  $d\mathbf{S}$  est  $-p\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ . En établissant l'équation-bilan de la densité d'énergie, montrer que l'on a la relation :

$$-\dot{Q} = \oint_{SC} \rho \left( \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

où  $\dot{Q}$  est la puissance dissipée sous forme de chaleur dans le volume de contrôle par la turbulence et  $SC$  est la surface de contrôle.

- (b) En déduire l'expression de la puissance dissipée dans le ressaut en fonction du débit volumique  $D_v$ , des grandeurs  $v$  et  $h$  en amont et en aval, ainsi que de  $\rho$  et  $g$ . Calculer la puissance dissipée pour un canal d'un mètre de largeur contenant de l'eau ( $h_1 = 0.2 \text{ m}$ ,  $D_v = 1.5 \text{ m}^3 \text{s}^{-1}$ ). En déduire l'échauffement de l'eau entre l'entrée et la sortie du ressaut. On donne  $C_p = 4.18 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  pour l'eau.

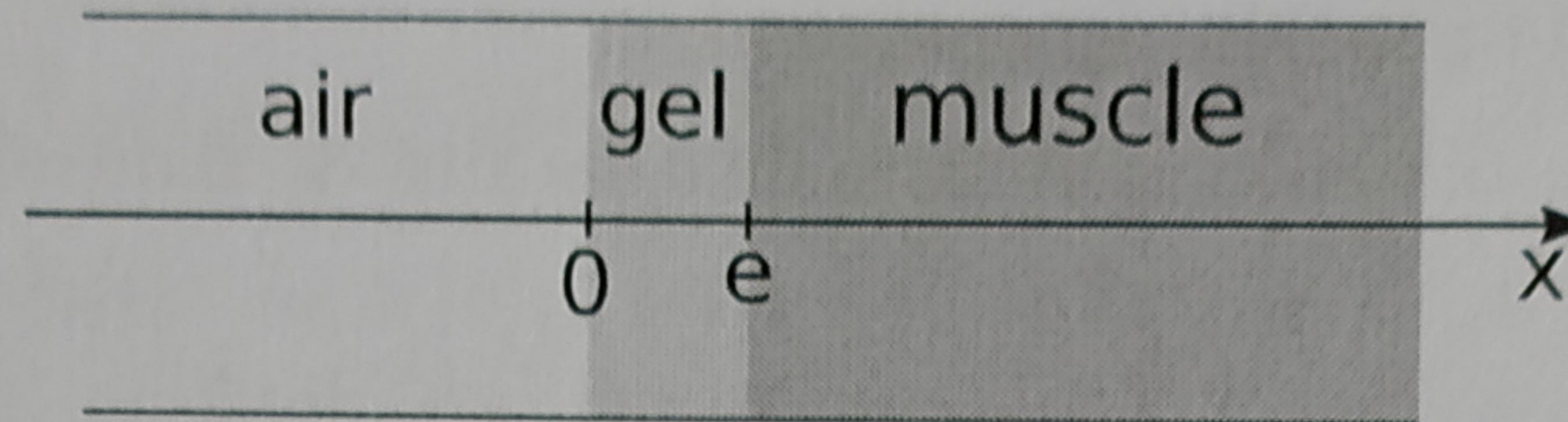
5. *Vitesse de propagation d'un mascaret.* Un mascaret est une surélévation brusque des eaux, qui se produit dans certains estuaires au moment du flux de marée, et qui progresse rapidement à la célérité  $-c \mathbf{u}_x$  vers l'amont sous la forme d'une vague déferlante (voir figure 5). En amont du front d'onde, la hauteur d'eau est  $h_1$  et le liquide a une vitesse d'écoulement  $\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{u}_x$ . En aval, la hauteur d'eau est  $h_2$  ( $h_1 < h_2$ ) et le liquide est immobile  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ .

- (a) Représenter sur une figure le volume de contrôle dans le référentiel se déplaçant à la vitesse  $-c$  par rapport au sol ainsi que les vitesses d'écoulement  $v'_1$  et  $v'_2$  en amont et en aval de la discontinuité.
- (b) En utilisant un changement de référentiel adéquat ainsi que les résultats obtenus pour le ressaut, calculer la vitesse de propagation  $c$  en fonction de  $h_1, h_2$  et  $g$ .
- (c) Dans le cas limite où  $h_2 \rightarrow h_1$ , que devient la vitesse de propagation ?

## 4 Ondes acoustiques

### 4.1 Couche anti-reflet en échographie

Les impédances caractéristiques de l'air et des tissus musculaires pour les ultrasons valent  $Z_a = 4.0 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  et  $Z_m = 1.7 \cdot 10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ .



1. Calculer le coefficient de transmission des puissances sonores à une interface air-muscle et commenter.

Pour supprimer l'onde réfléchie dans l'air, on réalise une couche anti-reflet d'épaisseur  $e$  en gel, d'impédance  $Z_g$ . On note  $c_a$ ,  $c_g$  et  $c_m$  les célérités du son dans chacun des trois milieux, et on pose  $k_a = \omega/c_a$ ,  $k_g = \omega/c_g$  et  $k_m = \omega/c_m$ . On cherche alors en notation complexe des champs de vitesses dans les trois milieux de la forme :

$$\begin{aligned}\underline{v}_1(x < 0, t) &= A_a \exp(i\omega t - ik_a x), \\ \underline{v}_1(0 < x < e, t) &= \underline{A}_g \exp(i\omega t - ik_g x) + \underline{B}_g \exp(i\omega t + ik_g x), \\ \underline{v}_1(x > e, t) &= \underline{A}_m \exp(i\omega t - ik_m x).\end{aligned}$$

2. Donner les expressions des surpressions dans les trois milieux en fonction des impédances  $Z_a$ ,  $Z_g$  et  $Z_m$  et des expressions des champs des vitesses.
3. Écrire les conditions aux limites aux interfaces.
4. En déduire la relation suivante entre les impédances et  $e$  :

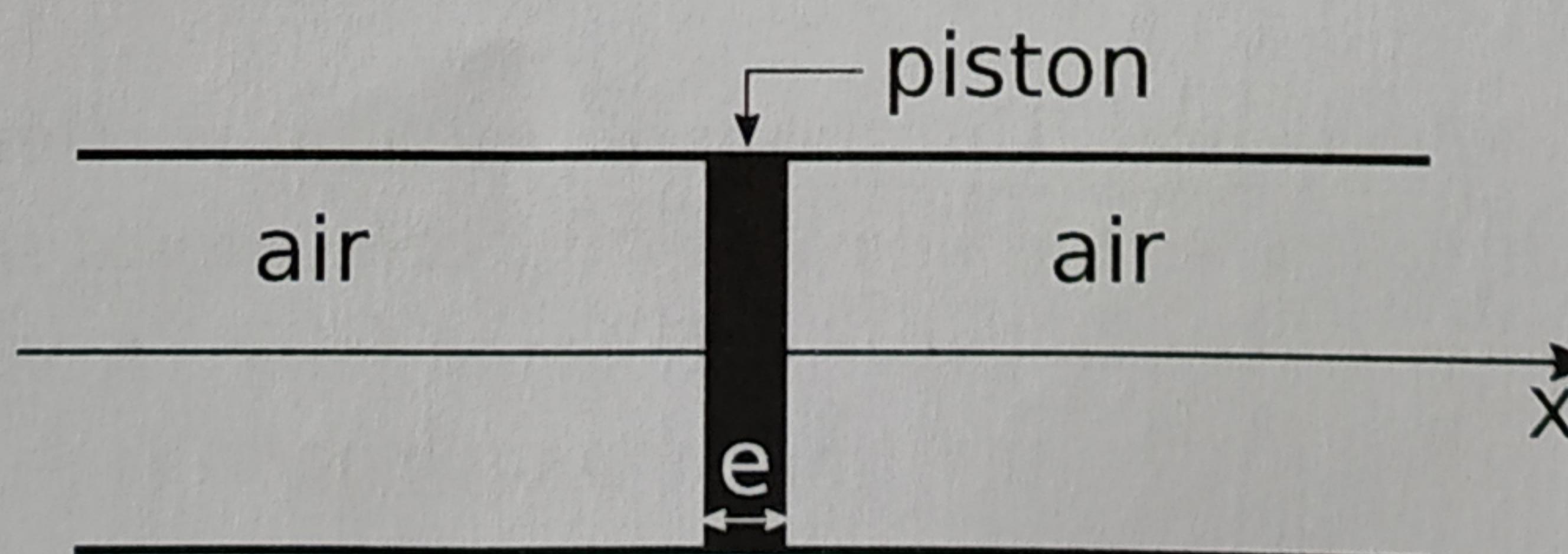
$$\frac{Z_g - Z_a}{Z_g + Z_a} = \frac{Z_g - Z_m}{Z_g + Z_m} \exp(-2ik_g e).$$

5. Vérifier la pertinence de l'expression ci-dessus sur un cas particulier. Déterminer les valeurs de  $e$  et  $Z_g$  pour avoir la meilleure transmission possible (condition d'adaptation d'impédance).

### 4.2 Isolation phonique

Pour étudier l'atténuation sonore introduite par un mur, on adopte le modèle sommaire suivant : dans un tuyau de section  $S$ , un onde sonore incidente plane progressive harmonique de pulsation  $\omega$  arrive sur un piston de surface  $S$ , d'épaisseur  $e$  et de masse volumique  $\rho$ , libre de se déplacer au voisinage de  $x = 0$ . On cherche un champ des vitesses de la forme :

$$\underline{v}_1(x < 0, t) = A_1 \exp(i\omega t - ikx) + \underline{B}_1 \exp(i\omega t + ikx) \quad ; \quad \underline{v}_1(x > e, t) = \underline{A}_2 \exp(i\omega t - ikx + ike).$$



1. Justifier cette forme et écrire les surpressions  $p_1(x, t)$  correspondantes.
2. Écrire les conditions aux limites sur le piston indéformable et en déduire que :

$$\frac{\underline{A}_2}{A_1} = \left(1 + i \frac{\rho e \omega}{2\rho_0 c}\right)^{-1}.$$

3. En déduire le facteur de transmission en puissance  $\mathcal{T}$  du mur. On donne  $\rho_0 = 1.3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  et  $c = 340 \text{ m s}^{-1}$ . Quelle doit être l'épaisseur minimale du mur si on veut une atténuation d'au moins -40 décibels pour  $f = 1 \text{ kHz}$ ? Et pour  $f = 100 \text{ Hz}$ ?

# TD3 : HYDRODYNAMIQUE

(1)

Exercice 1: Ecoulement parfait autour d'un cylindre - Portance des avions.

(Voir schéma)

On cherche le vecteur vitesse sous la forme  $\vec{v}(r) = v_r(r, \theta) \vec{u}_r + v_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta$

On suppose l'écoulement:  $\rightarrow$  parfait (viscosité nulle)

$\rightarrow$  stationnaire (~~pas de forces extérieures~~)  $\vec{v} = \vec{\text{grad}} \phi$

$\rightarrow$  incompressible ( $\text{div } \vec{v} = 0$ )

$\rightarrow$  irrotationnel ( $\text{rot } \vec{v} = 0$ )

$$1) \text{ div}(\vec{\text{grad}} \phi) = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \phi = 0}$$

$$2) (i) \phi(r, \theta) = \phi(r, -\theta) \quad \text{symétrie par rapport au plan } y=0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_n \text{ et } \delta_n = 0$$

$$(ii) \vec{v}(r \rightarrow \infty, \theta) = -U \vec{u}_x = -\vec{\text{grad}}(Ux) = \vec{\text{grad}}(-Ur \cos \theta)$$

$$\phi(r \rightarrow \infty, \theta) = -Ur \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -U \\ \alpha_n = 0 \text{ pour } n \geq 2 \end{array} \right.$$

$$\alpha_n = 0 \text{ pour } n \geq 2$$

~~(iii)~~ Condition aux limites en  $r=R$

$$v_r(r=R, \theta) = 0 \quad (\text{composante radiale de la vitesse est nulle sur le bord du cylindre})$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial r}(r=R, \theta)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n (-n) r^{-n-1} \cos(n\theta)$$

$$= -\frac{\alpha_1}{R^2} \cos \theta + \alpha_1 \cos \theta + \sum_{n=2}^{+\infty} \beta_n (-n) r^{-n-1} \cos(n\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 = +\alpha_1 R^2 = -UR^2$$

$$\left\{ \beta_n = 0 \text{ pour } n \geq 2 \right.$$

car  $n \neq 1$

On a finalement

$$\phi(r, \theta) = \cancel{U_0} - U \left( r + \frac{K^2}{r} \right) \cos \theta$$

$\rightarrow$   $\cos \theta$  n'influe pas le long des vitesse

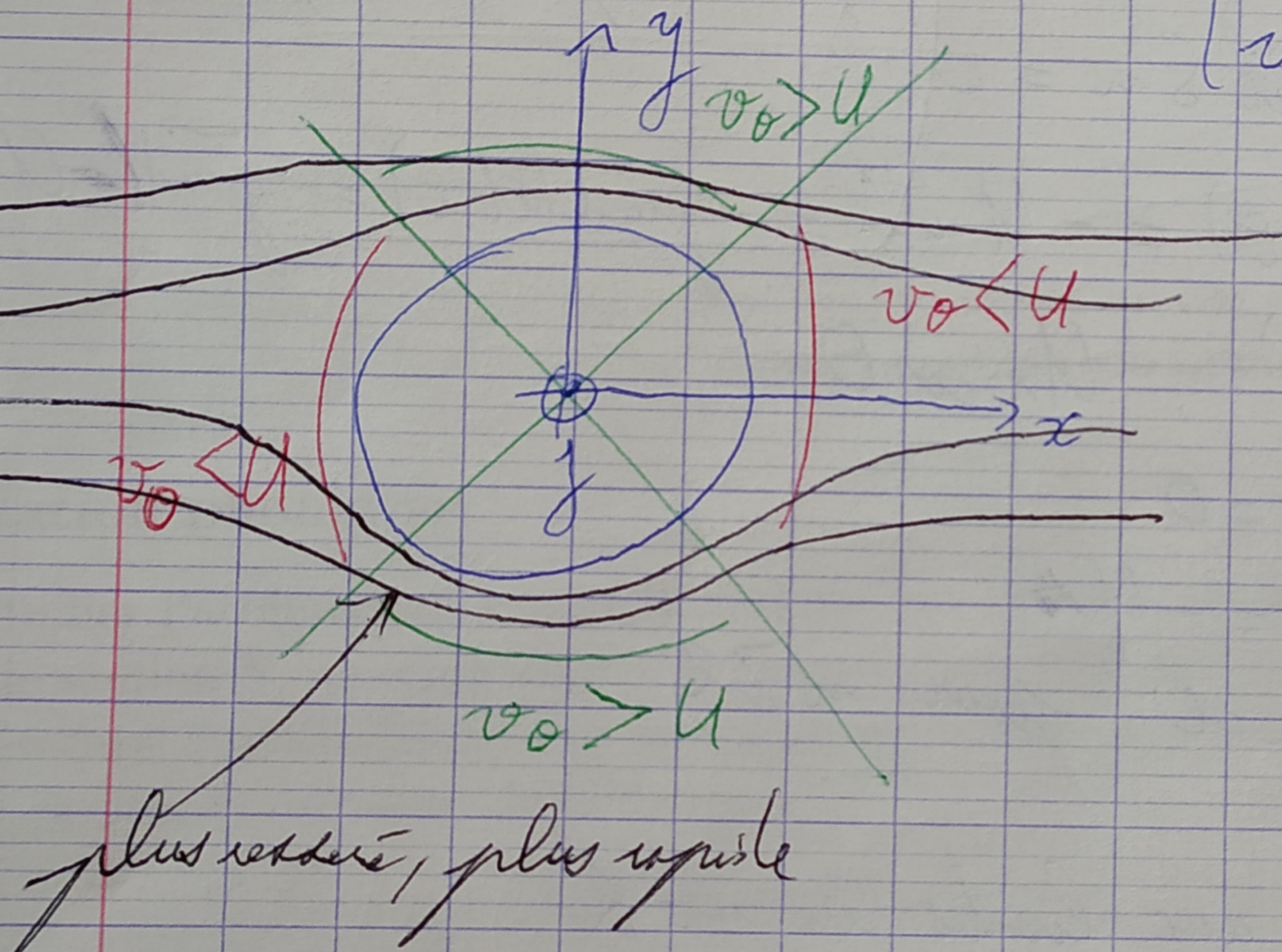
3)  $v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -U \left( 1 - \frac{K^2}{r^2} \right) \cos \theta \cancel{}$

$$v_{r0}(r=R, \theta) = 0$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = U \left( 1 + \frac{K^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

Sur le bord de l'aile :  $v_{r0}(r=R, \theta) = 0$

$$(v_{\theta0}(r=R, \theta) = 2U \sin \theta)$$



plus ronde, plus rapide

4)  $\frac{v^2}{2} + g z + \frac{p}{\rho}$  est une quantité conservée (mouvement purulent et pas augmenté de ligne de courant ou fluide isotherme)

$$\frac{v_{\theta0}^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{v^2(R, \theta)}{2} + \frac{p(R, \theta)}{\rho}$$

$$\Rightarrow p(r=R, \theta) = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

$\hookrightarrow \theta \rightarrow -\theta$

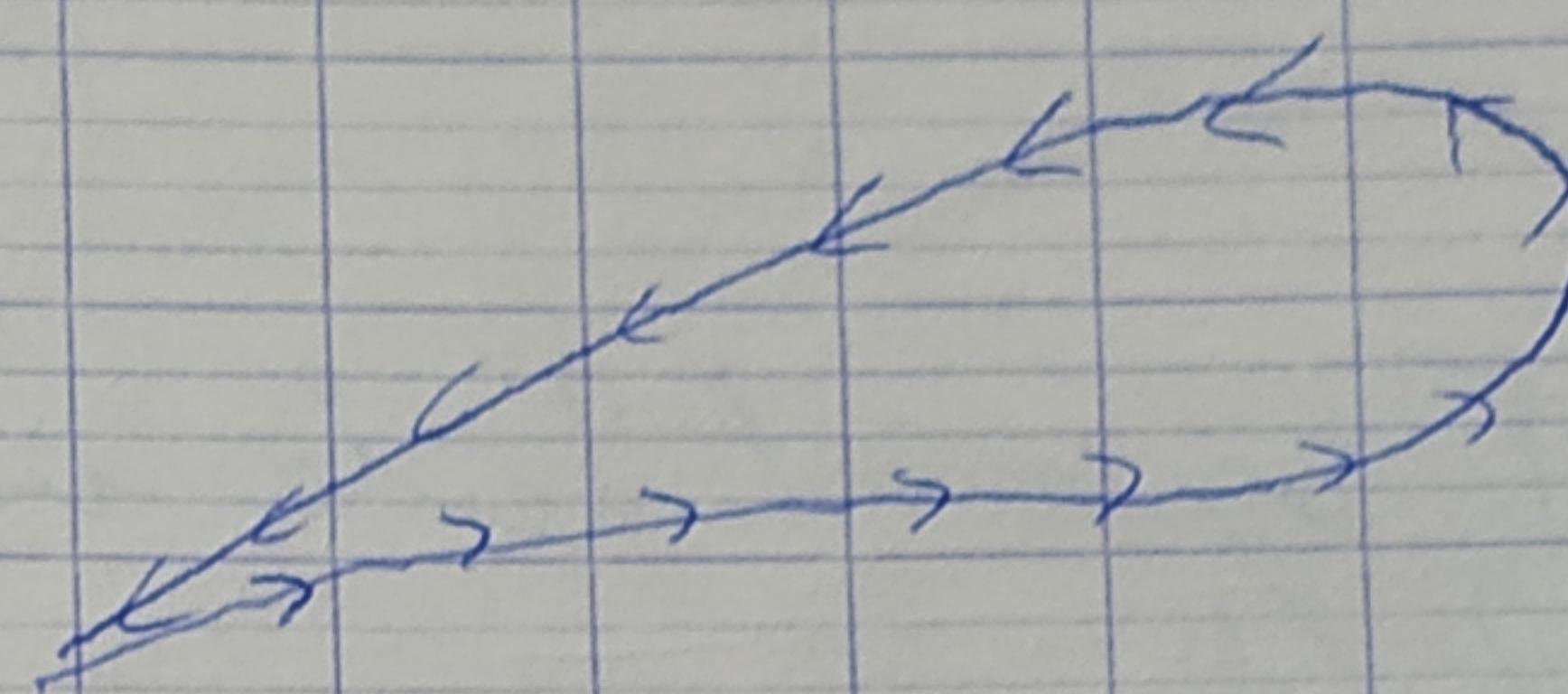
$\hookrightarrow$  résultante nulle, l'avion se déplace avec portance

$$\vec{F} = - \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} p(r, R, \theta) R d\theta \left[ \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \right]$$

$\vec{F} = \vec{0}$  (après un petit calcul d'intégrale)

$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0$

(c)  $\Rightarrow$

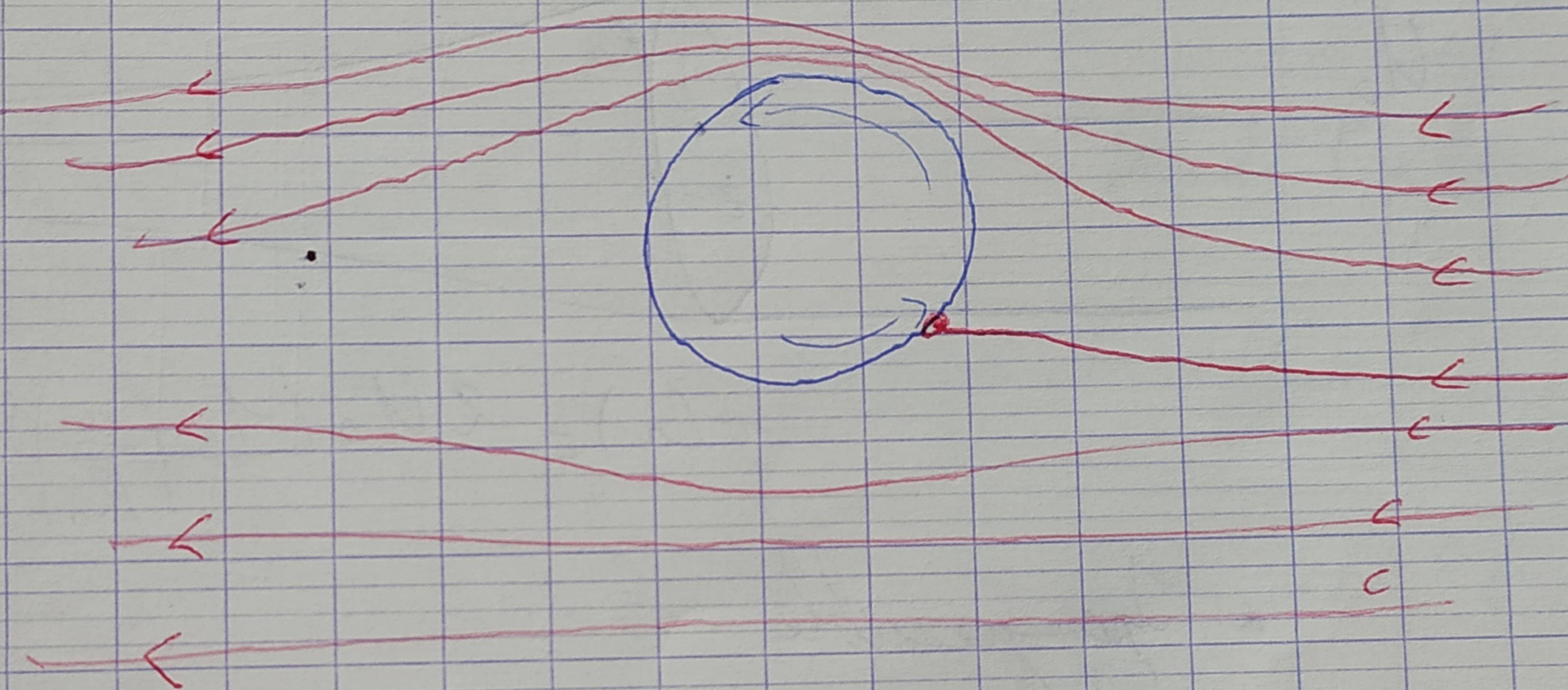


orientations  $d\vec{l}$

Δ + et pas - des  $v_0$  de l'énoncé

$$\Rightarrow \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \Gamma > 0$$

(en équivalent géométrique polyvalent)



(voir effet d'oxygénation)

$$5) * v_n (n=R, \theta) = 0$$

$$* \boxed{v_n = 2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}}$$

Principe de Bernoulli:  $-p(n=R, \theta) + \frac{1}{2} \rho (2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R})^2 = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2}$

$$\boxed{p(n=R, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho \left[ U^2 - 4U^2 \sin^2 \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} \right] - \frac{\rho \Gamma U \sin \theta}{\pi R}}$$

$$\vec{F} = - \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} p(n=R, \theta) LR d\theta \left( \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \right)$$

$\underbrace{LR \rho \Gamma U}_{\pi R} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \vec{u}_y =$

$$\boxed{L \rho \Gamma U \vec{u}_y = \vec{F}}$$

On peut montrer que  $F \propto U$

$$\Rightarrow F = C_x \rho S U^2$$

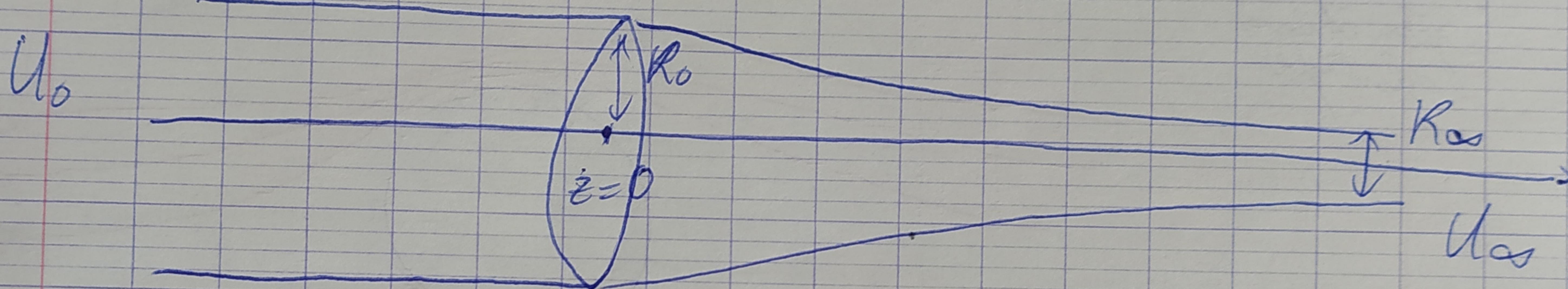
coefficient de profondeur

$F$  provient de la viscosité dans la couche limite

$$C_x(\rho, \alpha)$$

### 3) Bilans macroscopiques.

#### 3.1) Amortissement d'un jet libre par la viscosité.



$$v(r) = 2U_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

\* Incompressible

\* Stationnaire

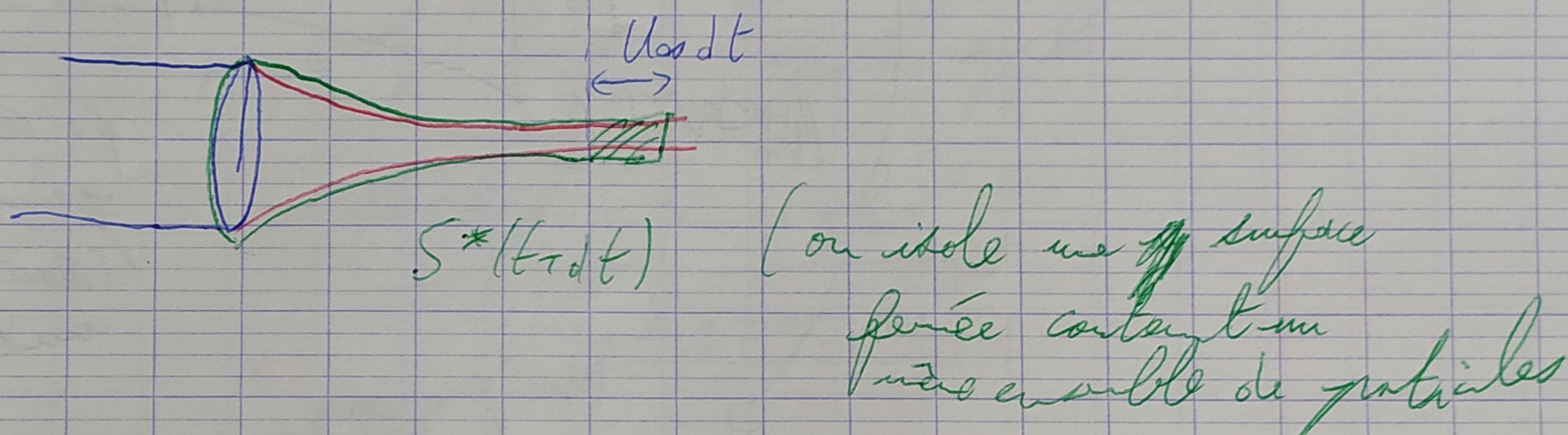
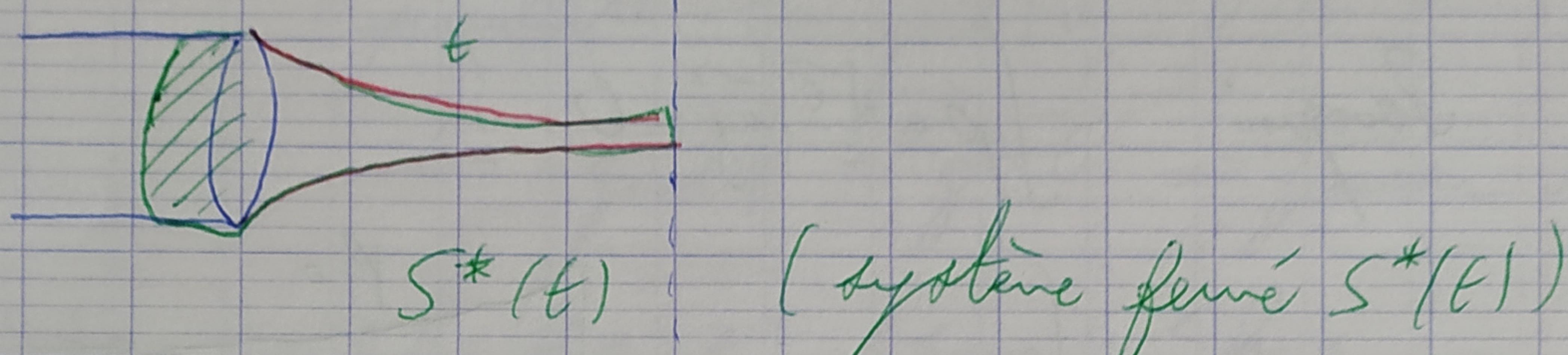
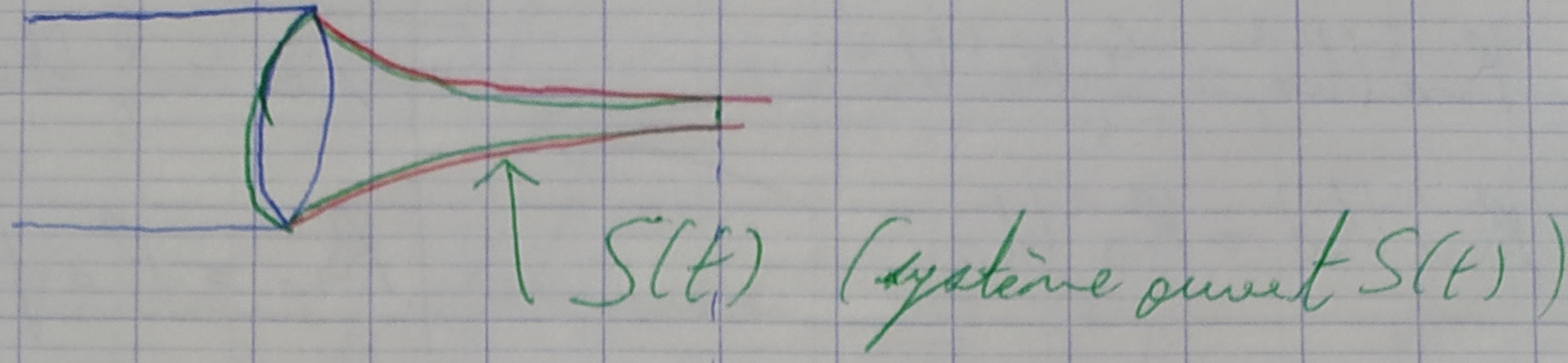
$$\begin{aligned} 1) D_o(y=0) &= \int_{r=0}^{r=R_0} 2\pi r dr \times 2U_0 / \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) \\ &= 4U_0 \pi \left[ \frac{R_0^2}{2} - \frac{R_0^2}{4} \right] = \pi U_0 R_0^2 \end{aligned}$$

$$D_o(y=\infty) = \pi R_\infty^2 U_\infty$$

$$\Rightarrow U_\infty R_\infty^2 = U_0 R_0^2$$

stationnaire  
incompressible

(suite) 2)



(on isolé une surface fermée contenant un état initial de particules)

$$P^*(t+dt) = P(t+dt) + \pi R_0^2 U_{as} dt P \times U_{as}$$

$$\begin{aligned} P^*(t) &= P(t) + \rho \int_0^{R_0} (2\pi r dr) u(r) \times dt \times u(t) \\ &= P(t) + P dt (2\pi) \int_0^{R_0} dr \approx 4U_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right)^2 \\ &= P(t) + P dt 8\pi U_0^2 \int_0^{R_0} dr \left(r - \frac{3r^5}{R_0^2} + \frac{r^5}{R_0^4}\right) \\ &= \frac{R_0^2}{2} - \frac{2}{4} R_0^2 + \frac{1}{6} R_0^2 = \frac{1}{6} R_0^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P^*(t) = P(t) + P dt \frac{4\pi U_0^2 R_0^2}{3}$$

$$\frac{dP^*}{dt} = \frac{P^*(t+dt) - P^*(t)}{dt} = \frac{P(t+dt) - P(t)}{dt}$$

avec air écoulement statique

$$\begin{aligned} &+ P \pi R_0^2 U_{as}^2 \\ &- P \frac{4\pi U_0^2 R_0^2}{3} = 0 \\ &= - \int \frac{P_0 dS_{\text{ext}}}{S(t)} = 0 \end{aligned}$$

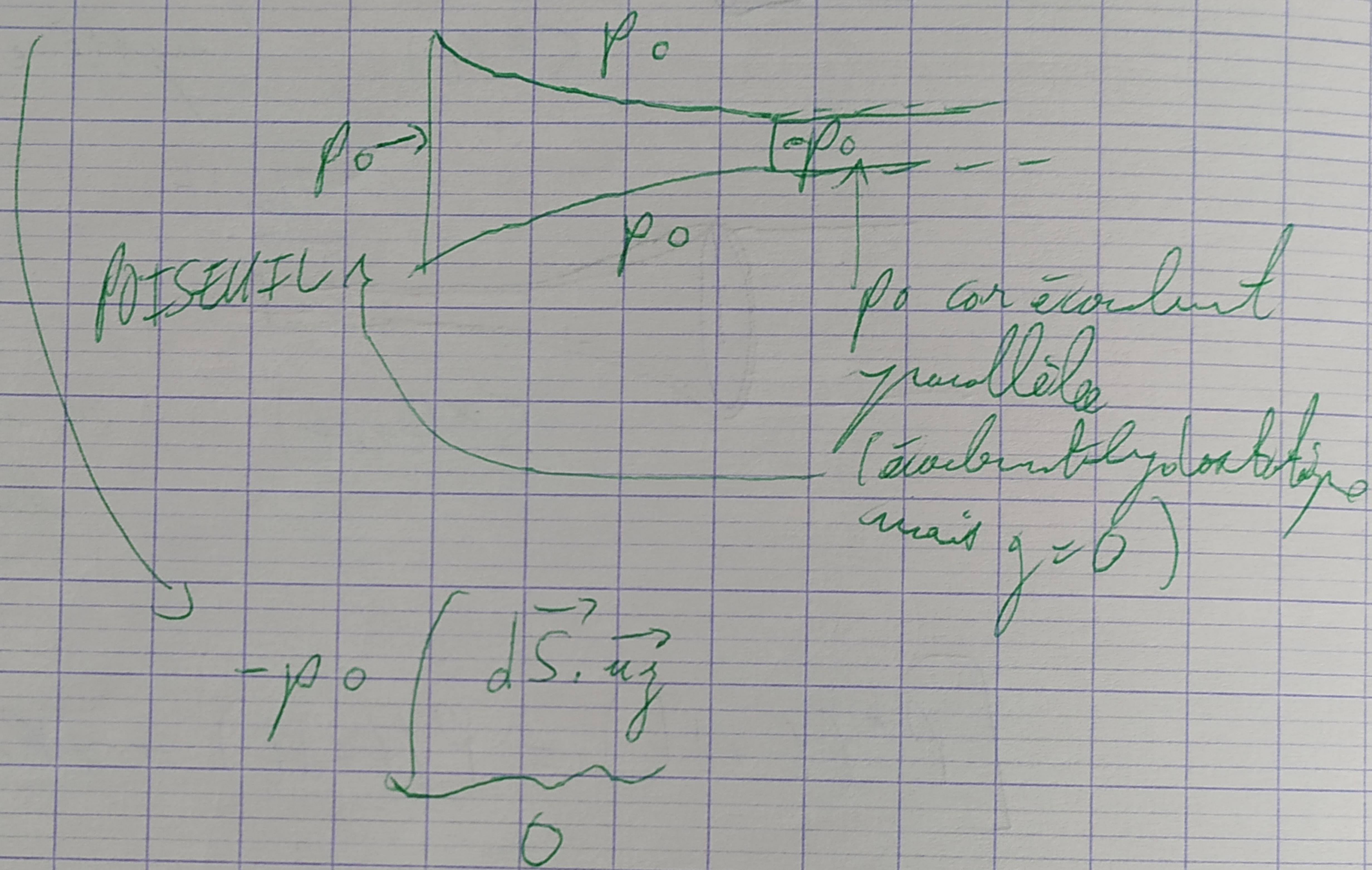
$$R_o^2 U_{\infty}^2 = \frac{4}{3} R_o^2 U_0^2$$

$$R_o^2 U_{\infty} = R_o^2 U_0$$

$$U_{\infty} = \frac{4}{3} U_0$$

$$R_o = R_0 \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Pourquoi  $\int p_0 dS \cdot \vec{u}_g \approx 0$  ?



$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{g}_{ad}) \vec{v} \right) = -\vec{g}_{ad} \rho + \mu \Delta \vec{v}$$

$$\rho \| \vec{v} \cdot \vec{g}_{ad} \vec{v} \| = \rho \frac{U_0^2}{L}$$

$$\| \gamma \Delta \vec{v} \| = \gamma \frac{U}{R_o^2}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{U_0 K}{L} = \gamma \frac{U_0}{R_o^2} \Rightarrow \frac{L}{R_o} \approx \frac{R_o U_0 \rho}{\gamma} = \frac{R_o U_0 L}{V} = Re$$

$$\left[ \frac{L}{R_o} = Re \right]$$

monde de Reynolds

### 3) 2) Pression hydraulique dans un canal.

1) Courant stationnaire ( $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ )

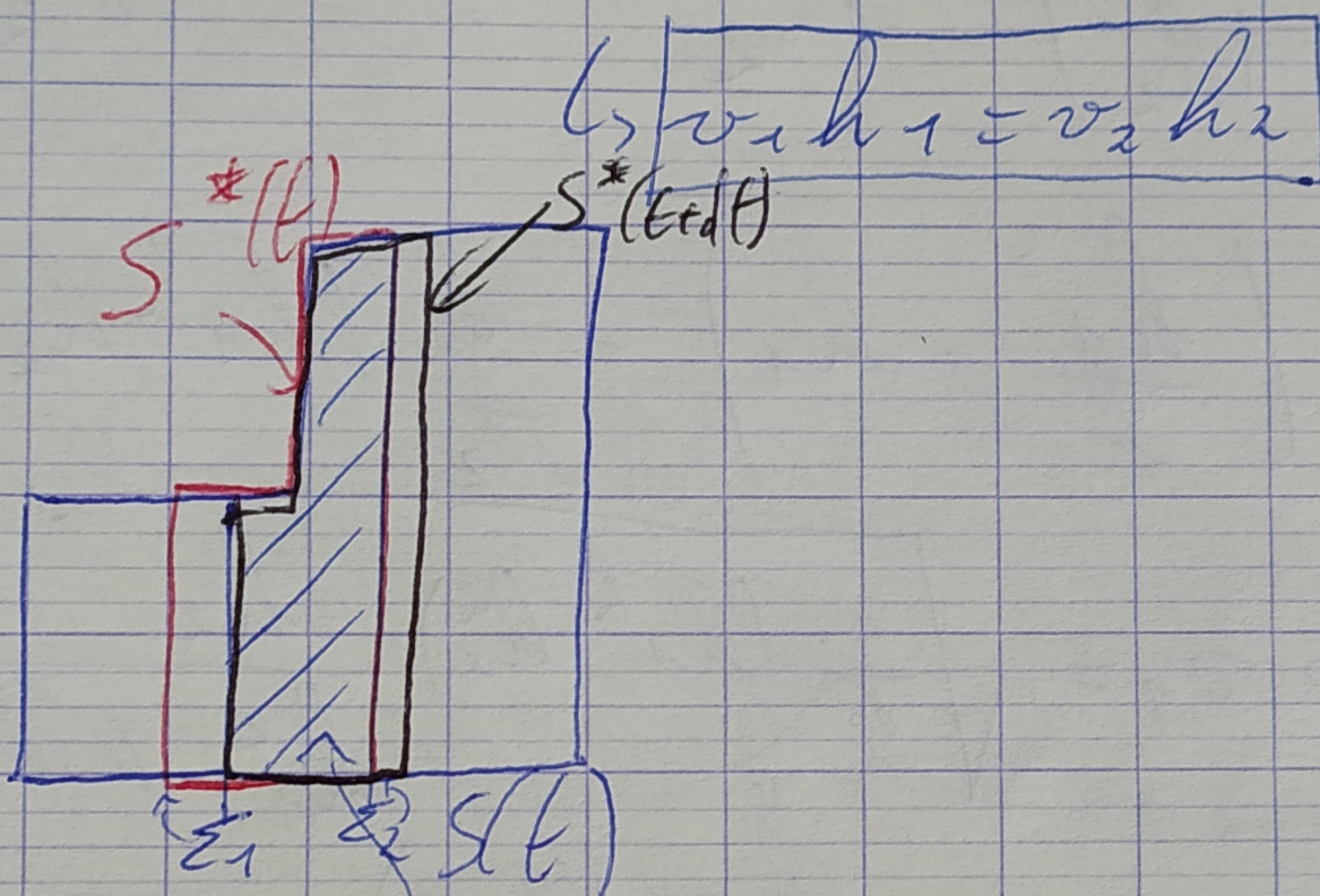
parallèle ( $\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} \vec{v} = \vec{0}$ )

$$\Leftrightarrow -\vec{\text{grad}} p + \vec{\rho g} = \vec{0} \Rightarrow \text{pression hydrostatique}$$

$$p_1(z) = p_0 + \rho g (h_1 - z) \quad \text{pour } z < h_1$$

$$p_2(z) = p_0 + \rho g (h_2 - z) \quad \text{pour } z > h_2$$

$$2) Dv = v_1 \times L \times h_1 = v_2 \times L \times h_2$$



$$3) a) P_x^*(t) = P_x(t) + \rho(v_1 dt) h_1 L v_1$$

$$P_x^*(t+dt) = P_x(t+dt) + \rho(v_2 dt) h_2 L v_2$$

$$\frac{dP_x^*}{dt} = \frac{dP_x}{dt} + \rho L (h_2 v_2^2 - h_1 v_1^2)$$

mais  
car  
réglage  
stationnaire

$$\Rightarrow \frac{dP^*}{dt} = \rho L (h_2 v_2^2 - h_1 v_1^2)$$

$$F_x = + \int_{z=0}^{z=h_1} p_1(z) L dz + \int_{h_1}^{h_2} p_0 x L dz - \int_0^{h_2} p_2(z) L dz$$

$$F_x = \int_0^{h_1} \rho g (h_1 - z) L dz - \int_0^{h_2} \rho g (h_2 - z) L dz$$

$$= \rho g L \left( \frac{h_1^2 - h_1^2}{2} - h_2^2 + \frac{h_2^2}{2} \right) = \rho g L \left( \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} \right)$$

$$\frac{dP_a^*}{dt} = F_x \Rightarrow \boxed{h_2 v_2^2 + \frac{gh_2^2}{2} = h_1 v_1^2 + \frac{gh_1^2}{2}}$$

~~b)~~  $v_1 h_1 = v_2 h_2$

$$h_2 v_2^2 \left( \frac{h_1^2}{h_2^2} \right) + \frac{gh_2^2}{2} = h_1 v_1^2 + \frac{gh_1^2}{2}$$

$$v_1^2 \left( \frac{h_1^2}{h_2^2} - h_1 \right) = \frac{g}{2} (h_1^2 - h_2^2)$$

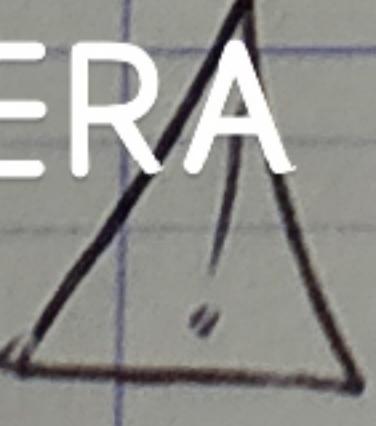
$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{g}{2} \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{h_1^2 - h_1 h_2} \frac{h_2}{h_2}}$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{g}{2} \frac{(h_1 + h_2) h_2}{h_1}} \frac{h_1 (h_1 - h_2)}{h_2}$$

Idem:  $v_2 = \sqrt{\frac{g}{h_2} \frac{h_1}{h_2 + h_1} \frac{h_2}{2}}$

~~c)~~  $F_{x1} = \sqrt{\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}}$

$$F_{x2} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2\alpha^2}}$$

d)  Dans ce cas  $F_{x2} < 1$  (en-dessous)

(suite)  $\alpha > 1 \Rightarrow h_2 > h_1, Fr_1 > 1 \Rightarrow$  régime tourbillon (exercice)  
 $Fr_1 < 1 \Rightarrow$  régime planétaire (sous critique)

c)  $v_1 h_1 = 1,5 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$  }  $\Rightarrow v_1 = 7,5 \text{ m.s}^{-1} \Rightarrow Fr_1 = 5,4$   
 $h_1 = 0,4 \text{ m}$

$$\text{trs } \alpha^2 + \alpha - 2 Fr_1^2 = 0$$

$$\text{trs } \alpha = \frac{h_2}{h_1} = 7,1$$

$$\Rightarrow h_2 = 1,4 \text{ m}$$

#### 4) Bilan énergétique.

$$\frac{dE^*}{dt} = P_{int} + P_{ext}$$

$$E^*(t+dt) = E(t) + \int_0^{h_2} (v_2 dt dz L) e(v_2, z)$$

$$E^*(t) = E(t) + \int_0^{h_1} v_1 dt dz L e(v_1, z)$$

$$\frac{dE^*}{dt} = \frac{dE}{dt} + \int_0^{h_2} v_2 dz L e(v_2, z) - \int_0^{h_1} v_1 dz L e(v_1, z)$$

$\leq 0$

corrigé  
stationnaire

$$P_{ext} = + \int_0^{h_1} p_1(y) L dy v_1 - \int_0^{h_2} p_2(y) L dy v_2$$

(pression extérieure à l'horizontal)

$$P_{int} = \frac{dE^*}{dt} - P_{ext} = \int_0^{h_2} (v_2 dy L) [e(v_2, y) + p_2(y)] - \int_0^{h_1} (v_1 dy L) [e(v_1, y) + p_1(y)]$$

$$P_{int} = \rho D_0 \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + g h_2 - g h_1 \right)$$

$$Dv = v_2 h_1 L - v_1 h_2 L$$

En utilisant 3b :

$$\boxed{P_{int} = - \rho g D_0 \frac{(h_2 - h_1)^3}{4 h_2 h_1}}$$

→ signe produit caractère dissipatif des forces de viscosité

$$\begin{aligned} P_{int} &= \cancel{\rho v_2 L h_2^2} + \rho \int_0^{h_2} (v_2 L dz) \frac{p_0}{\rho} - \rho \int_0^{h_1} (v_1 L dz) \frac{p_0}{\rho} \\ &\quad (v_2 L h_2 p_0 - v_1 L h_1 p_0) \\ &= \rho_0 L \left( \frac{Dv}{L} - \frac{Dv}{L} \right) = 0 \end{aligned}$$

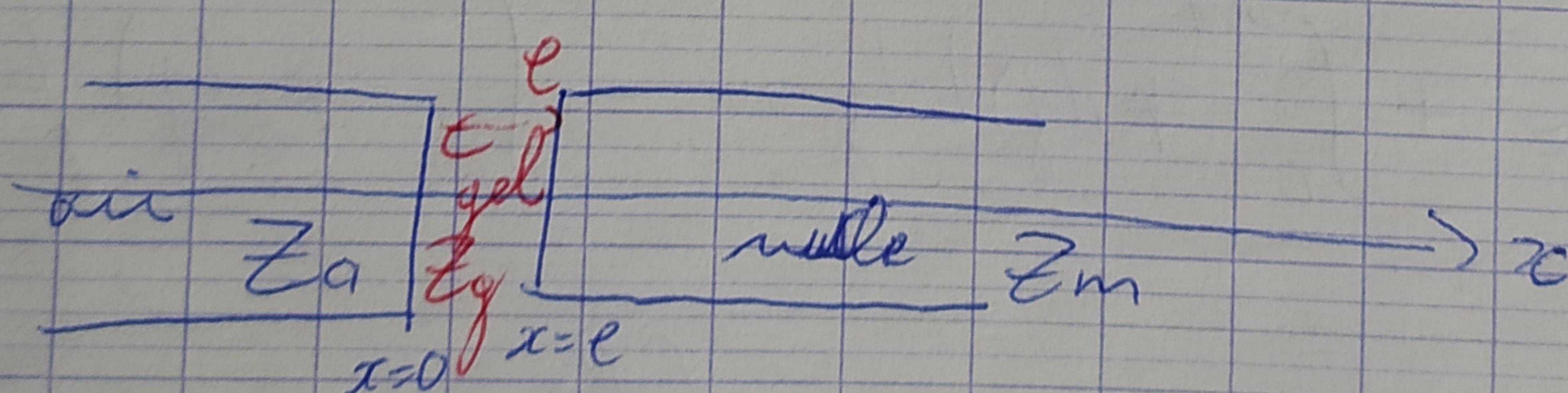
- Puissance dissipée:  $P_{int} = -22,7 \text{ kW}$

$$\rho D_v C_p \Delta T = \dot{Q} = -P_{int}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\Delta T = 3,6 \text{ mK}}$$

4) On voit à constances :

$$41) T = \frac{4 Z_m Z_a}{(Z_m + Z_a)^2} = 9,4 \cdot 10^{-4} \ll 1$$



$$p_1(x < 0) = Z_a A_a e^{i(\omega t - k_a x)}$$

$$p_1(0 < x < e) = Z_g A_g e^{i(\omega t - k_g x)} - Z_g B_g e^{i(\omega t + k_g x)}$$

$$p_1(x > e) = Z_m A_m e^{i(\omega t - k_m x)}$$

En  $x=0$ : Condition de  $\phi$ :  $A_a = A_g + B_g$  (1)

$$p: Z_a A_a = Z_g A_g - Z_g B_g \quad (2)$$

En  $x=e$ :  $v: A_g e^{-i k g e} + B_g e^{i k g e} = A_m e^{-i k m e} \quad (3)$

$$p: Z_g A_g e^{-i k g e} - Z_g B_g e^{i k g e} = Z_m A_m e^{-i k m e} \quad (4)$$

\* (1) et (2) pour éliminer  $A_a$ :

$$(2): Z_a (A_g + B_g) = Z_g A_g - Z_g B_g$$
$$\boxed{A_g / (Z_a - Z_g) = B_g / (-Z_g - Z_m)} \quad (\$)$$

\* (3) et (4) pour éliminer  $A_m e^{-i k m e}$

$$Z_g A_g e^{-i k g e} - Z_g B_g e^{i k g e} = Z_m (A_g e^{-i k g e} + B_g e^{i k g e})$$

$$\boxed{A_g e^{-i k g e} (Z_g - Z_m) = B_g e^{i k g e} (Z_m + Z_g)} \quad (\$\$)$$

$$\frac{(Z_a - Z_g)}{(Z_g - Z_m)} e^{i k g e} = - \frac{Z_g + Z_m}{Z_g + Z_m} e^{-i k g e}$$

$$\boxed{\frac{Z_g - Z_a}{Z_g + Z_m} = \frac{Z_g - Z_m}{Z_g + Z_m} e^{-2 i k g e}}$$

5)  $R_e$ :  $\frac{Z_g - Z_a}{Z_g + Z_m} = \frac{Z_g - Z_m}{Z_g + Z_m} \cos(2 k g e)$

$I_m$ :

$$\boxed{\sin(2 k g e) = 0}$$

$$2 k g e = n\pi \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}$$

$$2 k g e = 2(n+1)\pi$$

Solution

$$\Rightarrow Z_a = Z_g = Z_m \text{ (pas très importante)}$$

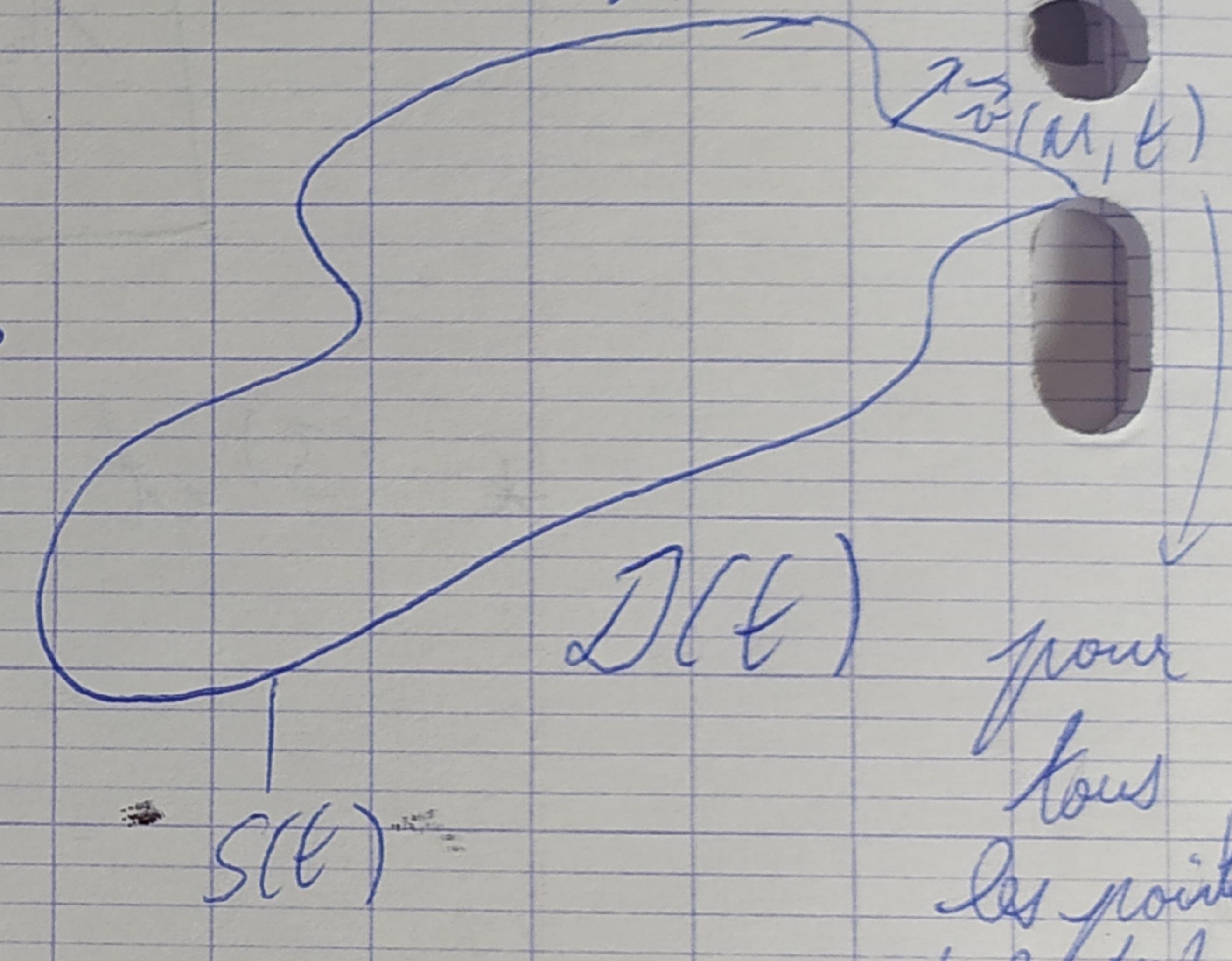
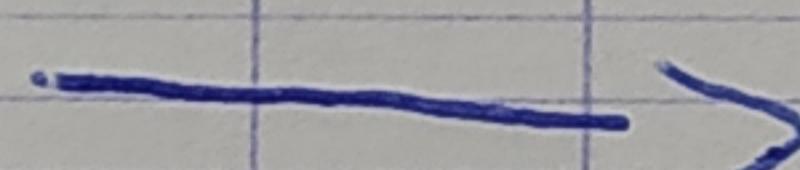
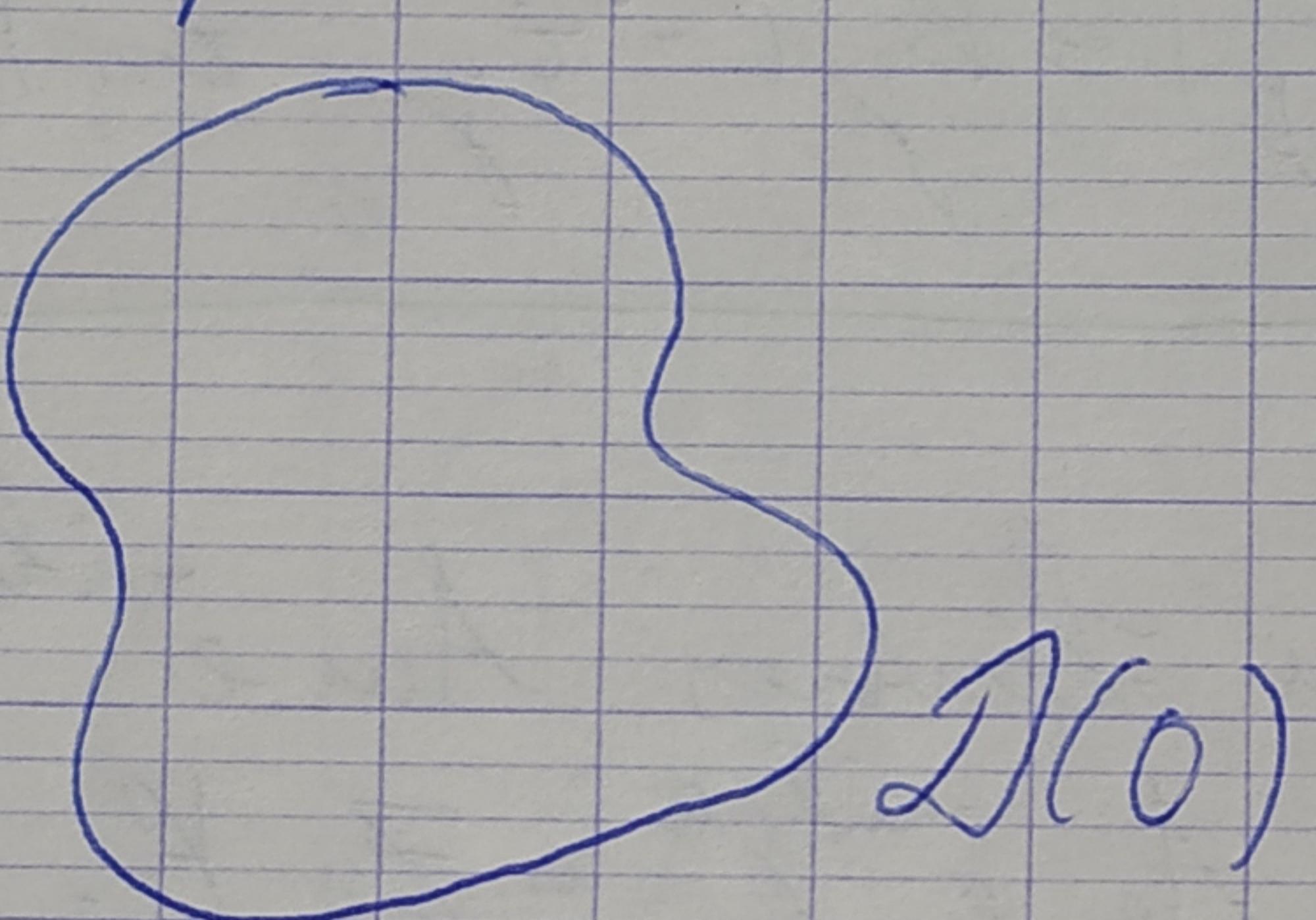
Solution

$$\Rightarrow e = (2n+1) \frac{Z_g}{4} \text{ et } Z_g^2 = Z_a Z_m$$

$$\hookrightarrow Z_g = 2,6 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Transport de quantité de mouvement (Mémoire de Reynolds):

$t=0:$



pour  
tous  
les points  
de la surface  
 $s(t)$

$\vec{F}(t)$  la résultante des forces ~~qui~~ s'exerçant sur  $D(t)$

PFD:  $\vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \left( \int_{D(t)} d^3 r (\rho \vec{v}) \right)$

Théorème du transport:  $\vec{F}(t) = \int_{D(t)} d^3 r \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \oint_{S(t)} (\vec{v} \cdot d\vec{s}) (\rho \vec{v})$