Préparation à l'Agrégation 2019-2020 Le 5 Novembre 2019.

Quelques questions de Mécanique du point

1. Le problème à deux corps et le mouvement dans un champ de force central

1. Soit $\mathfrak{R}$ un référentiel galiléen. On considère un système isolé constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 exerçant, l'un sur l'autre, des forces qu'on notera $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$. Etablir les équations du mouvement de ces deux points matériels dans le référentiel $\mathfrak{R}$. Montrer qu'elles se ramènent à l'équation du mouvement, dans le référentiel barycentrique $\mathfrak{R}^*$ du système, d'une unique particule, dite *particule réduite*, soumise à la force $\vec{F}_{1\to 2}$. On explicitera la masse m de la particule réduite, également appelée *masse réduite*, en fonction de m_1 et m_2 et on montrera comment les mouvements de M_1 et M_2 se déduisent de celui de M. Montrer que si la force $\vec{F}_{1\to 2}$ est portée par le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$, la particule réduite est soumise à une force centrale.

2. Dans ce dernier cas, ayant ramené le problème à deux corps à un problème à un corps soumis à une force centrale, on s'intéressera dans toute la suite au mouvement d'une unique particule M de masse m soumise à une force centrale $\vec{F}$ de centre O, l'origine du référentiel galiléen $\mathfrak{R}$. Montrer que les composantes du moment cinétique $\vec{L}$ de M en O sont des constantes du mouvement. Discuter les conséquences de cette conservation sur la nature du mouvement de M.

3. On introduit les coordonnées polaires (r, θ) dans le plan orthogonal à $\vec{L}$. Comment se traduit la conservation de $\vec{L}$ dans ces coordonnées ? Quelle loi retrouve-t-on ainsi ?

4. En supposant la force centrale $\vec{F}$ conservative, montrer que l'énergie mécanique de M est une constante du mouvement. Ecrire la conservation de l'énergie mécanique dans les coordonnées polaires (r, θ). Que peut-on en déduire quant au mouvement de M ? On distinguera notamment les états de diffusion des états liés. Dans le cas des états liés, à quelle condition a-t-on un mouvement périodique ? Que dire si cette condition n'est pas vérifiée ?

5. En définitive, combien existe-t-il de constantes du mouvement indépendantes ? A quelles symétries du problème peut-on les relier ? Quel théorème général illustre-t-on ainsi ?

2. Le problème de Kepler classique

Le problème de Kepler est un cas particulier de mouvement à force centrale conservative, où la force centrale dérive de l'énergie potentielle

$$U(r) = -\frac{K}{r}$$

avec K une constante réelle. Ce problème recouvrant à la fois les interactions newtonienne et coulombienne, il se retrouve naturellement dans bon nombre de problèmes de physique, de l'astronomie à la physique atomique.
1. A quelle condition peut-on avoir des états liés pour le problème de Kepler ? Que peut-on dire de l'énergie mécanique du point matériel M s'il est dans un tel état lié ? Dans la suite, on s'intéresse exclusivement à cette situation.

2. Soient $\vec{r}$ et $\vec{p}$ la position et l'impulsion de M. On définit le *vecteur de Laplace* – ou de *Runge-Lenz* – par la relation

$$\vec{A} = \frac{1}{mK}\vec{L}\wedge\vec{p} + \frac{\vec{r}}{r}.$$

Montrer que $\vec{A}$ est une constante du mouvement. *Indication : on établira au préalable que*

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{\vec{L}}{mr^2}\wedge\vec{u}_r \qquad \text{où} \qquad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

3. Evaluer $\vec{A}\cdot\vec{L}$ et indiquer l'orientation de $\vec{A}$ par rapport au plan de la trajectoire.

4. On choisit dorénavant l'axe Oz suivant la direction de $\vec{L}$ et l'axe Ox suivant celle de $\vec{A}$. En formant $\vec{r}\cdot\vec{A}$ et en utilisant les coordonnées polaires (r, θ) du plan xOy, établir l'équation de la trajectoire. Quelle est alors l'interprétation géométrique de $\vec{A}$?

5. Evaluer le carré scalaire $\vec{A}^2$. En déduire une relation entre $A = \|\vec{A}\|$, $L = \|\vec{L}\|$ et l'énergie mécanique E. Quelles sont alors les valeurs possibles de $\vec{A}^2$ pour un état lié ? Qu'en conclure quant aux trajectoires correspondantes ?

6. Que vaut $\vec{A}$ pour une orbite circulaire ? Que dire de la trajectoire si $\vec{L} = \vec{0}$?

7. Représenter graphiquement une trajectoire et placer les vecteurs $\vec{L}$ et $\vec{A}$ sur la figure.

8. Déterminer les demi-axes a et b de la trajectoire en fonction de L et de A. En déduire que l'énergie E d'une particule parcourant une trajectoire donnée est déterminée par la demi-longueur du grand axe a, indépendamment de b. *Indication : pour une ellipse, on a* $b^2 = a^2(1-e^2)$.

9. En utilisant la loi des aires, obtenir l'expression de la période de révolution T. Montrer que, pour une énergie E donnée, elle est indépendante de L. *Indication : la surface plane délimitée par la trajectoire vaut* πab.

10. Montrer que T peut s'exprimer en fonction de a seulement. Comment s'appelle la relation obtenue?

11. En définitive, combien existe-t-il de constantes du mouvement *indépendantes* pour le problème de Kepler ? Comparer au nombre de degrés de liberté du problème. Pourquoi, selon vous, qualifie-t-on un tel système de *maximalement (super-)intégrable* ?

3. La précession anormale du périhélie de Mercure

Un théorème démontré par Bertrand en 1873 stipule que le problème de Kepler et le problème de l'oscillateur harmonique isotrope sont, en dimension 3, les deux seuls problèmes à force centrale conservative dont tous les états liés appartiennent à des trajectoires périodiques. Ce sont en fait les deux seuls mouvements à force centrale conservative maximalement super-intégrables. En conséquence, tout écart, même faible, du potentiel à l'une de ces deux lois se traduit par la perte des symétries cachées responsables de la périodicité de toutes les trajectoires bornées. Dans cette section, on se propose d'illustrer ce résultat en étudiant l'*avance anormale du périhélie de Mercure*. Il s'agit d'une précession résiduelle de $42{,}98 \pm 0{,}04$ secondes d'arc par siècle du périhélie de cette planète qui reste inexpliquée après la prise en compte des effets newtoniens dominants : l'influence des autres planètes du système solaire sur sa trajectoire et la légère non-sphéricité du Soleil. L'un des grands succès de la théorie de la Relativité Générale est d'avoir expliqué, dans un cadre naturel et avec une grande précision, cette précession résiduelle mise en évidence pour la première fois par Le Verrier en 1859.

Données : Pour Mercure, on donne, en unités de masse solaire $\mathrm{M}_\odot = 1{,}9891.10^{30}$ kg *et en unités astronomiques* 1 U.A. $= 1{,}4960.10^{10}$ m,

$$m = 1{,}6601.10^{-7}\ \mathrm{M}_\odot\,; \qquad a = 0{,}3871 \text{ U.A.}\,; \qquad T = 0.2408 \text{ ans}\,; \qquad e = 0.2052\,.$$

1. Dans le cadre de la Relativité Générale, on montre que les équations du mouvement d'un point matériel de masse m dans le champ de gravitation d'un corps de masse M à symétrie sphérique se ramènent aux équations newtoniennes du mouvement de ce même point matériel doté de l'énergie potentielle

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2r^3}.$$

Justifier que cette expression admet une limite classique correcte. Montrer que le second terme du membre de droite peut être traité comme une perturbation du potentiel newtonien.

2. Montrer que $\vec{A}$ n'est plus une constante du mouvement et qu'en moyennant sur une révolution, on a, en première approximation,

$$\left\langle \frac{d\vec{A}}{dt} \right\rangle = \vec{\Omega} \wedge \vec{A} \qquad \text{avec} \qquad \vec{\Omega} = \frac{6\pi G^2 M^2 m^2}{L^2 c^2 T} \vec{u}_z\,.$$

Indication : évaluer $\langle \cos\theta / r^4 \rangle$ pour la trajectoire non-perturbée obtenue à la question 4 de la section concernant le problème de Kepler classique après avoir remarqué que, pour toute fonction f du temps,

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, f(t) = \frac{m}{LT}\int_0^{2\pi} d\theta\, r^2(\theta) f(\theta).$$

3. En utilisant les résultats de la section concernant le problème de Kepler classique, montrer que

$$\|\vec{\Omega}\| = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)T}.$$

En déduire, dans cette approximation, la contribution des effets relativistes à l'avance anormale du périhélie de Mercure.

4. Etats de diffusion et section efficace

On s'intéresse dans cette section à la diffusion de particules par un centre de force supposé fixe dans le référentiel galiléen d'étude.

1. Définir, pour un état de diffusion, les notions de *paramètre d'impact* b et d'*angle de déviation* χ. Exprimer le moment cinétique $\vec{L}$ de la particule en fonction de b, de sa masse m et de sa vitesse initiale v_0.

2. En reprenant les résultats de la question 1.5, exprimer la déviation χ en fonction du paramètre d'impact b sous la forme d'une intégrale.

3. On suppose que le centre de force est soumis à un faisceau homogène de particules identiques de densité volumique n arrivant de l'infini avec une vitesse initiale uniforme $\vec{v}_0$. Il diffuse alors à l'infini δN particule pendant dt dans l'angle solide $d\Omega$. Définir la *section efficace (différentielle)* $d\sigma/d\Omega$ associée à ce processus de diffusion. Quelle est sa dimension ?

4. En supposant connue la relation $b(\chi)$ – au moins sous la forme d'une intégrale comme celle obtenue à la question 2. – déterminer la section efficace différentielle $d\sigma/d\Omega$.

5. On pourrait explicitement calculer cette intégrale dans le cas particulier du problème de Kepler, mais on préfèrera obtenir le même résultat – à savoir la relation entre χ et b – en écrivant la conservation du vecteur de Laplace $\vec{A}$. Ecrire la conservation de $\vec{A}$ entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$ et la projeter suivant la direction d'incidence de la particule. En déduire $b(\chi)$ puis $d\sigma_{\text{Kepler}}/d\Omega$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

6. Déterminer de même $d\sigma_{\text{SD}}/d\Omega$ en supposant cette fois que

$$U(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > R; \\ +\infty & \text{si } r \le R. \end{cases}$$

En déduire la section efficace totale σ_{SD}. Commentaire ?

Mécanique

I) Le problème à deux corps et le mouvement dans un champ de force centrale.

1) Dans $\mathcal{R}$ supposé galiléen, on a :

$$\begin{cases} m_1 \left(\dfrac{d^2\overrightarrow{OM_1}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F_{2\to1}} & (1) \\ m_2 \left(\dfrac{d^2\overrightarrow{OM_2}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F_{1\to2}} & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) $\quad (m_1+m_2)\left(\dfrac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F_{1\to2}} + \overrightarrow{F_{2\to1}} = \vec{0}$ (actions réciproques)

avec G le barycentre défini par :

$$m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} = (m_1+m_2)\overrightarrow{OG}$$

Le barycentre est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.
$\mathcal{R}^*$ est donc galiléen.

De même, $-\dfrac{(1)}{m_1} + \dfrac{(2)}{m_2}$:

$$\left(\frac{d^2\overrightarrow{M_1M_2}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{\overrightarrow{F_{1\to2}}}{m_2} - \frac{\overrightarrow{F_{2\to1}}}{m_1} = \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\overrightarrow{F_{1\to2}} \quad (3)$$

On définit : * la masse réduite m par $\boxed{\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}}$

* la position M de la particule réduite par $\boxed{\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}}$

(3) s'écrit alors comme la relation fondamentale de la dynamique pour la particule réduite dans $\mathcal{R}^*$:

$$\boxed{m\left(\frac{d^2\overrightarrow{GM}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}^*} = \overrightarrow{F_{1\to2}}}$$

$\Rightarrow$ réduction du problème à deux corps

Remarques : * Si $\vec{F}_{1\to2} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, alors $\vec{F}_{1\to2} \parallel \overrightarrow{GM}$ et M a un mouvement à force centrale autour de G

* Par définition ~~...~~ : $\vec{0} = m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2}$

$$= m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{M_1M_2}$$
$$= (m_1+m_2)\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM}$$

D'où $\boxed{\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{GM}}$

De même $\boxed{\overrightarrow{GM_2} = +\frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{GM}}$

2) D'après le théorème du moment cinétique :

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \text{ si } \vec{F} \parallel \overrightarrow{OM}$$

Et donc $\boxed{\vec{L} = \overrightarrow{\text{constante}}}$

$\forall t \quad \overrightarrow{OM} \cdot \vec{L} = \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}) = 0$ (produit mixte)

$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \cdot \vec{L} = 0$

=> Le mouvement de M s'effectue donc dans le plan orthogonal à $\vec{L}$

3) Dans les coordonnées polaires (r, θ) du plan orthogonal à $\vec{L}$, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u_r}$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

On en déduit que :

$$\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = mr\vec{u_r} \wedge (\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})$$
$$= mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

Et donc $\boxed{mr^2\dot{\theta} = \text{constante}}$

On a également : $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{constante}$

Le mouvement s'effectue donc à vitesse aréolaire constante (loi des aires)

4) Si $\vec{F}$ est conservative, on a :
$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

et donc :
$$m\left(\frac{d\vec{v}_M}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} = -\vec{\nabla}U$$

$$\vec{v}_M \cdot \left(\quad m\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \cdot \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}\right) = -\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \cdot \vec{\nabla}U = -\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{\nabla}U\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}^{\,2}\right) = -\frac{dU}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0 \quad \text{où} \quad \boxed{E_M = \frac{1}{2}m v_{M/\mathcal{R}}^2 + U(\vec{r})}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_M = \text{constante}}$$

Dans les coordonnées polaires, on a :

$$E_M = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}\right]^2 + U(r)$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r) \qquad L = mr^2\dot{\theta} = \text{constante}$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{L^2}{m^2r^4} + U(r)$$

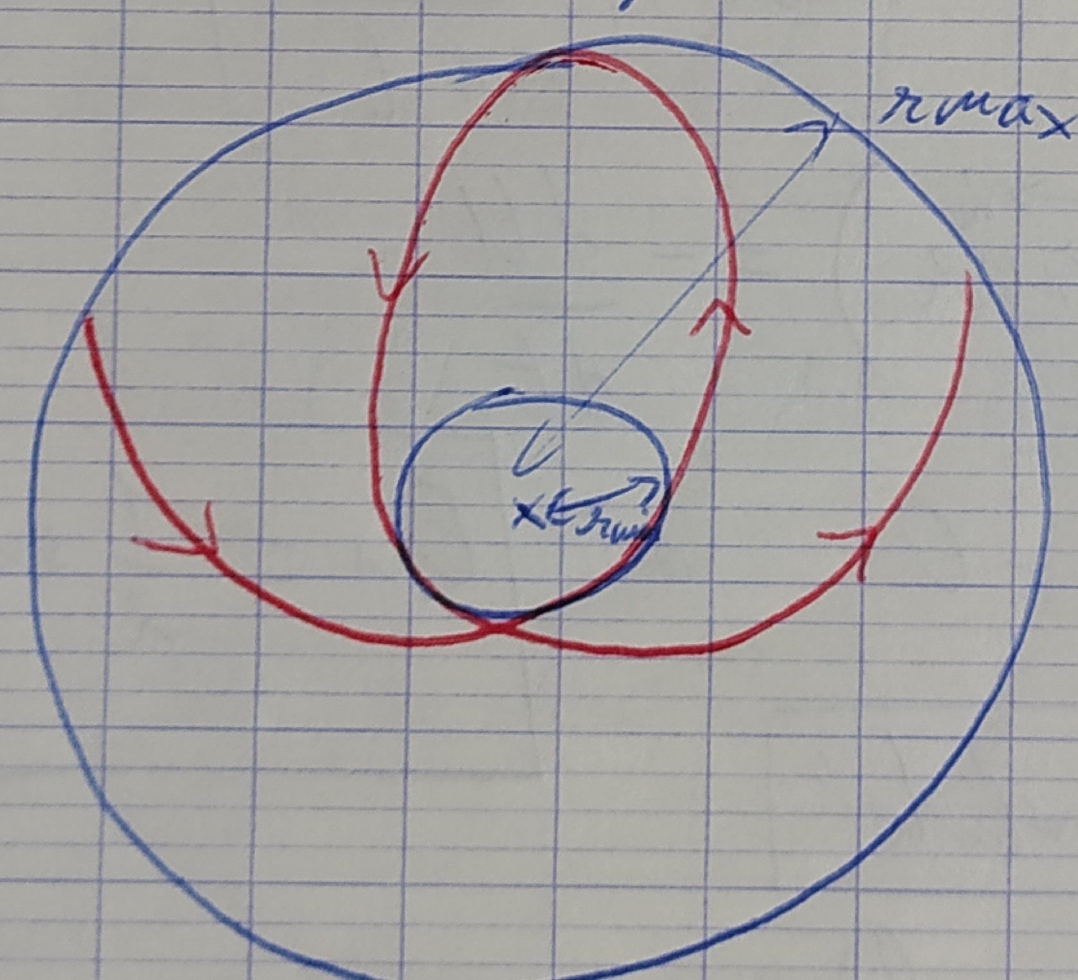
$$E_M = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + U(r)}_{U^{eff}(r)}$$

$$\boxed{E_M = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U^{eff}(r) \quad (*)}$$

↳ $E_M - U^{eff}(r) \geq 0$

On parle d'état lié si $E_M - U^{eff}(r) \geq 0$ entraîne $r < r_{max} < \infty$ pour toute condition initiale. On parle d'état de diffusion sinon.

Pour un état lié, on a $r_{min} \leq r \leq r_{max}$



$\dot{\theta}$ a un signe constant car $\underbrace{mr^2}_{>0}\dot{\theta} = \text{constante}$

↳ on tourne toujours dans le même sens

On change de variable $r(t) \rightsquigarrow r(\theta)$

Donc : $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta} r' = \frac{L}{mr^2} r'$

En substituant dans (*), on obtient :

$$E_M = \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 r'^2 + U^{eff}(r)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \pm\left\{\frac{2m}{L^2} r^4 \left[E_m - U^{eff}(r)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

On en déduit :

$$\Delta\theta = \int d\theta = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \frac{1}{\left\{\frac{2mr^4}{L^2}\left[E_m - U^{eff}(r)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Le mouvement est périodique ssi $\Delta\theta = \frac{2\pi p}{q}$ $\quad p,q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$

(q fois le mouvement on décrit $p \times 2\pi$)

Sinon, mouvement pseudo-périodique (mouvement ~~assez~~ prédictif)

5)

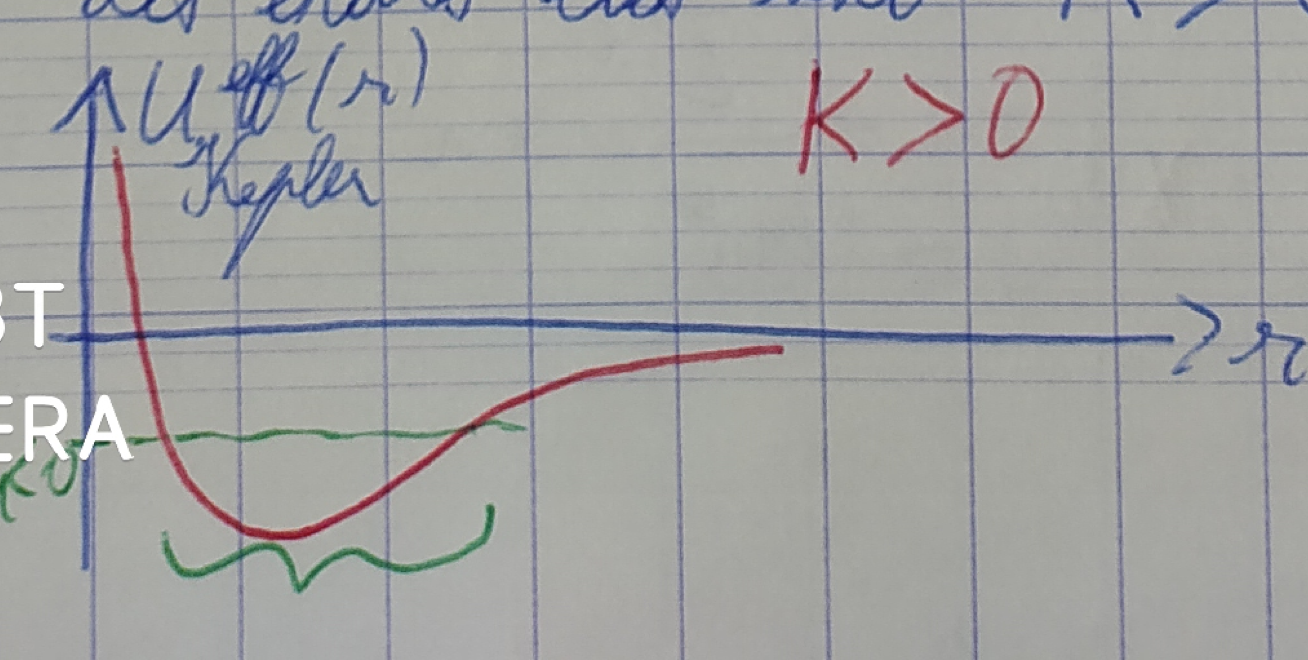
Constante du mouvement	Symétrie
$\vec{L}$	Invariance par rotation
E_M	Invariance par translation dans le temps

↳ $\boxed{\text{Théorème de Noether}}$

III) Problème de Kepler.

$U(r) = -\frac{K}{r}$ $\quad K \in \mathbb{R}$

On a des états liés ssi $K>0$ et pour $\boxed{E_m<0}$



2) On pose $\boxed{\vec{A} = \frac{1}{mK} \vec{L} \wedge \vec{p} + \frac{\vec{r}}{r}}$ Laplace

$\frac{\vec{r}}{r} = \vec{u_r}$

On a $\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \dot{\theta} \vec{u_\theta} = \frac{L}{mr^2} \vec{u_z} \wedge \vec{u_r}$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{u_r}}{dt} = \frac{\vec{L}}{mr^2} \wedge \vec{u_r}$$

On a donc $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{mK} \vec{L} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{\vec{L}}{mr^2} \wedge \vec{u_r}$

équations du mouvement $\left(\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla} U\right)$

$$= -\frac{1}{m\cancel{K}} \vec{L} \wedge \frac{\cancel{K}}{r^2} \vec{u_r} + \frac{\vec{L}}{mr^2} \wedge \vec{u_r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} = \overrightarrow{\text{constante}}}$$ constante du mouvement

3) $\vec{A} \cdot \vec{L} = \frac{1}{mK} \underbrace{(\vec{L} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{L}}_{0} + \underbrace{\vec{u_r} \cdot \vec{L}}_{0}$

Donc $\underline{\vec{A} \perp \vec{L}} \Rightarrow \vec{A}$ est dans le plan de la trajectoire

4) On a, dans les coordonnées polaires :

$\vec{r} \cdot \vec{A} = \frac{1}{mK} \vec{r} \cdot (\vec{L} \wedge \vec{p}) + r$

$$= -\frac{1}{mK} \vec{L} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{p}) + r$$

$$= -\frac{\vec{L}^2}{mK} + r$$

REDMI NOTE 8T
AI QUAD CAMERA

$\Leftrightarrow r\,\|\vec{A}\|\cos\theta = -\frac{\vec{L}^2}{mK} + r$

$\Leftrightarrow r(\theta) = \frac{\vec{L}^2/mK}{1 - \|\vec{A}\|\cos\theta} = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$ (équation d'une conique, paramètre p et excentricité e)

$$\begin{cases} p = \frac{\vec{L}^2}{mK} \\ e = \|\vec{A}\| \end{cases}$$

$\vec{A} \equiv$ vecteur excentricité ~~de la trajectoire~~

5) $\vec{A}^2 = \left[\frac{1}{mK}\vec{L}\wedge\vec{p} + \vec{u_r}\right]^2 = \frac{1}{m^2K^2}(\vec{L}\wedge\vec{p})^2 + \frac{2}{mK}(\vec{L}\wedge\vec{p})\cdot\underbrace{\vec{u_r}}_{\vec{r}/r} + 1$

$= \frac{1}{m^2K^2}\vec{L}^2\vec{p}^2 - \frac{2}{mKr}\vec{L}\cdot\underbrace{(\vec{r}\wedge\vec{p})}_{\vec{L}} + 1$

$\vec{p} \perp \vec{L}$

$= \frac{1}{m^2K^2}\vec{L}^2\vec{p}^2 - \frac{2}{mKr}\vec{L}^2 + 1$

$= \frac{2\vec{L}^2}{mK^2}\underbrace{\left[\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{K}{r}\right]}_{E_M} + 1$

$\Rightarrow \boxed{\vec{A}^2 = \frac{2\vec{L}^2}{mK^2}E_M + 1}$

Pour un état lié $E_M < 0 \Rightarrow \|\vec{A}\| \in [0,1[$

$\Rightarrow$ trajectoires elliptiques

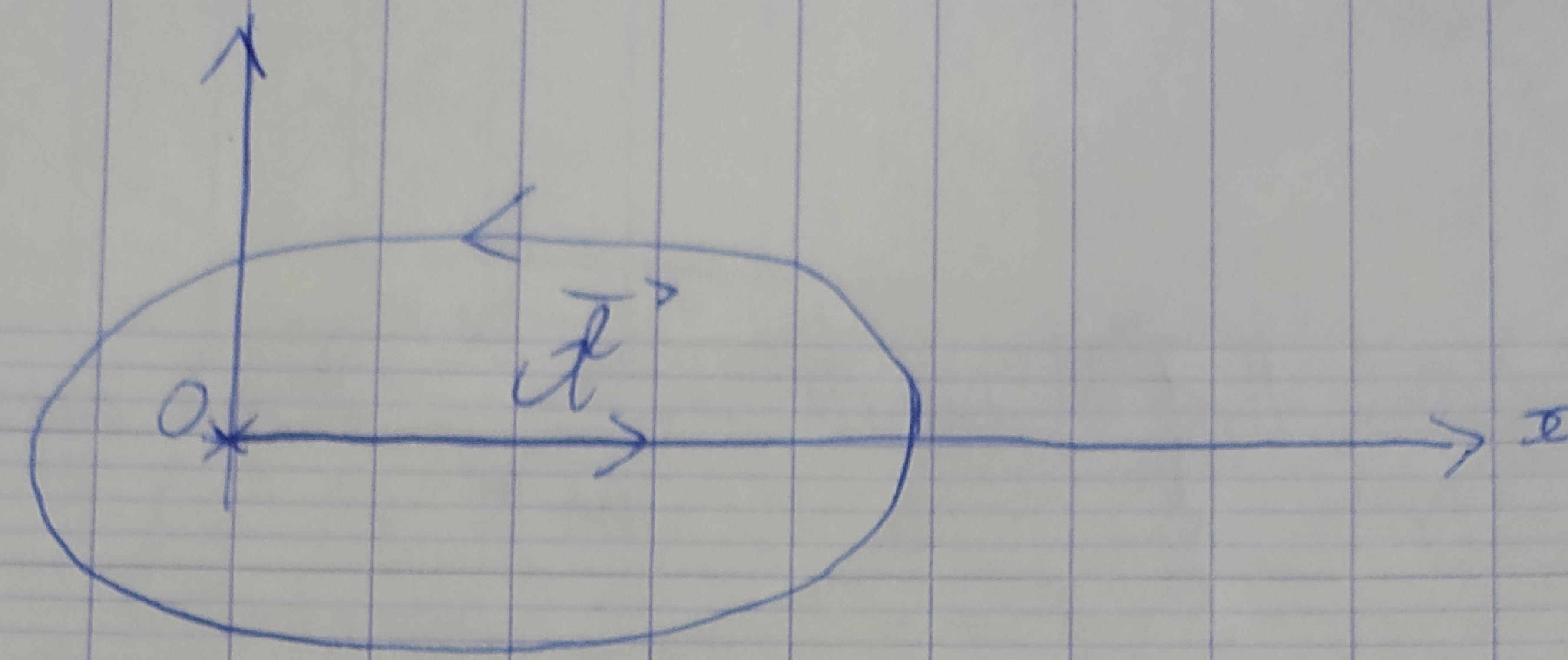
6) * Pour une orbite circulaire $r(\theta) =$ constante $\Rightarrow \|\vec{A}\| = 0$

$\Rightarrow \vec{A} = \vec{0}$

* Si $\vec{L} = \vec{0} \Rightarrow r(\theta) = 0 \Rightarrow E_M = -\infty$!!!

(atome hydrogène → problème historique)

7) $\vec{L}$ ⊙



8) * $a = \frac{1}{2}\left[r(0) + r(\pi)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e}\right]$

$\Rightarrow \boxed{a = \frac{p}{1-e^2}}$ $\quad b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$

* On a donc $1-e^2 = -\frac{2L^2}{mK^2}E_M = -\frac{2}{K}pE_M$

$\Rightarrow \boxed{E_M = -\frac{K}{2a}}$

9) $T = \frac{2\pi ab}{r^2\dot{\theta}}$ (vitesse aréolaire $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ = constante)

$= \frac{2\pi ab}{L/m}$

$= \frac{2m\pi}{L}\frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2m\pi}{L}\frac{p^2}{\left(-\frac{2}{K}pE_M\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2m\pi p^{\frac{1}{2}}}{L\left(-\frac{2}{K}E_M\right)^{\frac{3}{2}}}$

II) 9) * $1-e^2 = -\frac{2pE_M}{K}$ $\quad p = \frac{\vec{L}^2}{mK}$

* $a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{p}{\frac{-2pE_M}{K}} = \frac{K}{-2E_M}$

$b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{K}{-2E_M}\sqrt{\frac{2pE_M}{K}} = \frac{K^{1/2}p^{1/2}}{(-2E_M)^{\frac{1}{2}}}$

$T = \frac{\pi ab}{|\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}|} = \frac{2\pi ab}{|L|/m} = \frac{2m\pi ab}{|L|}$

$T = \frac{2m\pi}{|L|}\frac{K}{-2E_M}\frac{K^{1/2}p^{1/2}}{(-2E_M)^{1/2}} = \frac{2\pi m K^{\frac{3}{2}}\cancel{|L|}}{\cancel{|L|}\, m^{1/2} K^{1/2}(-2E_M)^{\frac{3}{2}}}$

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi m^{1/2} K}{(-2E_M)^{3/2}}}$

10) $T = 2\pi m^{1/2} K \frac{a^{3/2}}{K^{3/2}} \iff \boxed{T = \frac{2\pi m^{1/2} a^{3/2}}{K^{1/2}}}$ troisième loi de Kepler

11) * <u>Constantes du mouvement :</u>

$\vec{L}, E_M, \vec{\mathcal{A}}$ ⇝ 7 nombres au total

* <u>Relations entre elles :</u>

$\vec{L}\cdot\vec{\mathcal{A}} = 0$ (cf question 3) $\quad \vec{\mathcal{A}}^2 = 1 + \frac{2\vec{L}^2}{mK^2}E_M$ (cf question 5) ⇝ 2 relations

$\Rightarrow$ 5 = (7 − 2) constantes du mouvement indépendantes

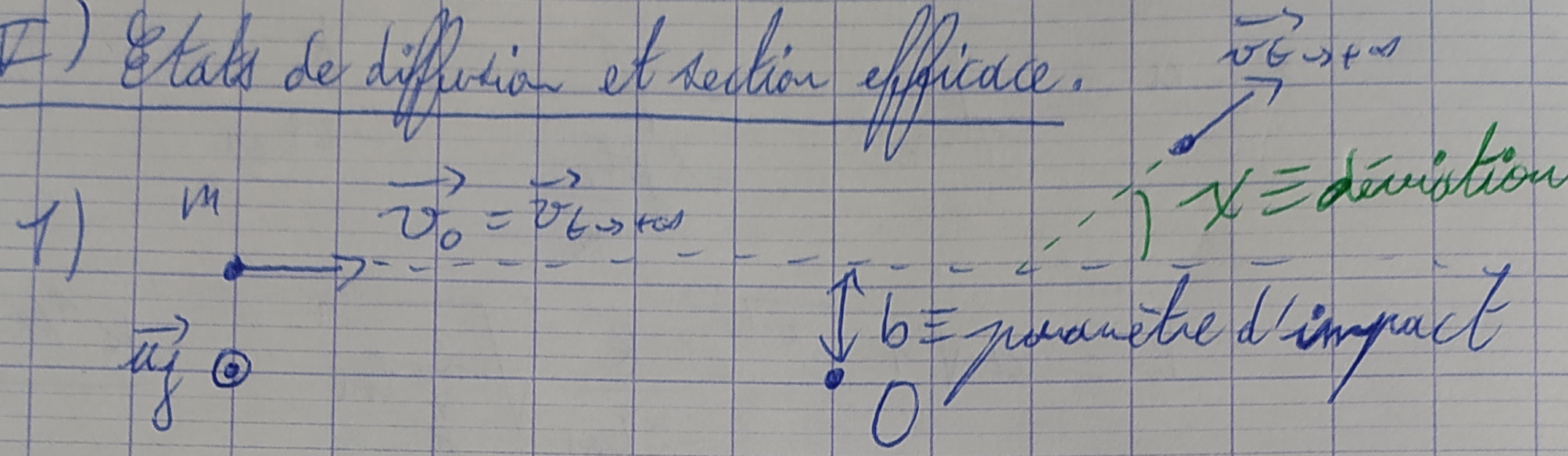
espace des phases à 6 dimensions $\leftarrow$ 3 q_i, 3 p_i

↳ mouvement contraint par 5 constantes => courbe = trajectoire

⇒ En dimension 3 seul autre exemple de système maximalement intégrable : oscillateur harmonique isotrope.

IV) États de diffusion et section efficace.

1)



$$\boxed{\vec{L}_0 = -m v_0 b \vec{u}_z}$$

2)
$$\Delta\theta = 2\int_{r_{min}}^{+\infty} \frac{dr}{\left[\frac{2mr^4}{L^2}\left[E_m - U^{eff}(r)\right]\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\chi = \pi - \Delta\theta = \pi - 2\int_{r_{min}}^{+\infty} \frac{dr}{\left[\frac{2mr^4}{L^2}\left(E_m - U^{eff}(r)\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

3) Section efficace différentielle de choc :

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\delta N}{n v_0 \, d\Omega \, dt}}$$

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}\right] = L^2 \quad \text{(« section » efficace)}$$

4) $\delta N = 2\pi n v_0 \, dt \, b \, db$ (conservation des particules entre $t\to-\infty$ et $t\to+\infty$)

$$d\Omega = 2\pi \sin\chi \, d\chi$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\delta N}{n v_0 \, dt \, d\Omega} = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right|}$$

5) Conservation du vecteur de Laplace

$$\vec{A}_{t=-\infty} \cdot \vec{u_r}_{t=-\infty} = \left[\frac{1}{mK} \vec{L} \wedge \vec{p}\Big|_{t=-\infty} + \vec{u_r}\Big|_{t=-\infty}\right] \cdot \vec{u_r}\Big|_{t=-\infty}$$

$$\vec{A}_{t=+\infty} \cdot \vec{u_r}\Big|_{t=-\infty} = 1$$

$$1 = \vec{A}\Big|_{t=+\infty} \cdot \vec{u_r}\Big|_{t=-\infty} = \left[\frac{1}{mK}(-m v_0 b \vec{u_z}) \wedge m v_0 \vec{u_r}\Big|_{t=+\infty} + \vec{u_r}\Big|_{t=+\infty}\right] \cdot \vec{u_r}\Big|_{t=-\infty}$$

$$1 = \left[-\frac{m v_0^2 b}{K} \vec{u_\theta}\Big|_{t=+\infty} + \vec{u_r}\Big|_{t=+\infty}\right] \cdot \vec{u_r}\Big|_{t=-\infty}$$

$$= -\frac{m v_0^2 b}{K} \vec{u_\theta}\Big|_{t=+\infty} \cdot \vec{u_r}\Big|_{t=-\infty} + \vec{u_r}\Big|_{t=+\infty} \cdot \vec{u_r}\Big|_{t=-\infty}$$

$$= -\frac{m v_0^2 b}{K} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) + \cos(\pi - \chi)$$

$$= -\frac{m v_0^2 b}{K} \sin \chi - \cos \chi$$

$$1 = -\frac{2 m v_0^2 b}{K} \sin\frac{\chi}{2} \cos\frac{\chi}{2} - \cos^2\frac{\chi}{2} + \sin^2\frac{\chi}{2}$$

$$2\cos^2\frac{\chi}{2} = -\frac{2 m v_0^2 b}{K} \sin\left(\frac{\chi}{2}\right)\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 1 = -\frac{m v_0^2 b}{K} \tan\left(\frac{\chi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{b(\chi) = -\frac{K}{m v_0^2 \tan\left(\frac{\chi}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_{Kepler}}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\chi}\left|\frac{db}{d\chi}\right|$$

$$= \ldots$$

$= $ section efficace de Rutherford

(de l'expérience des feuilles d'or)