Quelques rappels élémentaires de Mécanique classique

1. L'espace-temps de la mécanique classique

1. Décrire brièvement la structure de l'espace-temps de la mécanique classique.

2. Comment définit-on la notion d'événements *simultanés*. Dépend-elle de l'observateur ?

3. Peut-on parler, dans l'absolu, d'événements se produisant au même lieu à des dates différentes ? Pourquoi ?

4. Qu'appelle-t-on *repère orthonormé* ? Comment relier les coordonnées respectives d'un point de l'espace dans deux repères orthonormés R et R'. Comment appelle-t-on de telles transformations ?

5. Comment définit-on un *référentiel* ?

6. Etant donné un référentiel $\mathcal{R}$, comment définit-on la dérivée temporelle $(d\vec{V}/dt)_{\mathcal{R}}$ d'un vecteur de l'espace $\vec{V}$ dépendant du temps, dans ce référentiel ?

7. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels et soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ des bases fixes dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement. Montrer qu'il existe un pseudo-vecteur $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, appelé *vitesse angulaire instantanée de rotation* de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, tel que

$$\left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e}'_i \,.$$

En déduire que pour tout vecteur d'espace $\vec{V}$ dépendant du temps, on a

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{V} \,.$$

8. Etant donnés deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, relier les vitesses $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ et $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ d'un même point matériel M par rapport aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement. Qu'appelle-t-on vitesse d'entraînement ? Comment l'interpréter ?

9. Relier de même les accélérations $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ et $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$ de M dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Qu'appelle-t-on : accélération d'entraînement ? accélération de Coriolis ?

2. Déterminisme newtonien et relativité galiléenne

Le déterminisme newtonien consiste à supposer qu'il est possible de déterminer l'évolution future (et éventuellement aussi l'évolution passée) d'un système mécanique à partir de la seule connaissance à une date t des positions et des vitesses de tous ses constituants dans un référentiel $\mathcal{R}$, en résolvant des équations différentielles d'ordre 2 de la forme

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{f}_{\mathcal{R}}(M, \vec{v}_{M/\mathcal{R}}, t) \,. \qquad (1)$$

Il appartient alors au physicien d'énumérer et de modéliser les forces (réelles ou fictives) intervenant dans l'expression de $\vec{f}_{\mathcal{R}}$.

1. En utilisant 1.9., réécrire l'équation du mouvement (1) dans un référentiel $\mathcal{R}'$. Montrer qu'elle s'écrit sous la forme

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{f}_{\mathcal{R}'} \,,$$

où l'on exprimera $\vec{f}_{\mathcal{R}'}$ en fonction de $\vec{f}_{\mathcal{R}}$, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis.

2. Qu'appelle-t-on forces d'inertie (ou forces fictives, ou encore forces de référentiel) ? En quoi leur présence dans l'équation du mouvement est-elle conceptuellement problématique ?

3. A quelle(s) condition(s) sur $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ le bilan des forces aboutissant à l'expression de $\vec{f}_{\mathcal{R}}$ est-il suffisant pour déterminer $\vec{f}_{\mathcal{R}'}$? Comment sont reliées les coordonnées d'un même point matériel M dans deux repères fixes dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement ? Comment appelle-t-on une telle transformation ?

4. Comment appelle-t-on l'exigence plus générale que toutes les lois de la Physique se transforment de manière covariante sous ces transformations ? Est-elle toujours vérifiée ? Donner un (contre-)exemple.

3. Principe d'inertie et référentiels galiléens

1. Enoncer le *principe d'inertie*. Au vu de l'exercice précédent (en particulier de la question 2.2.), quel est son rôle ?

2. Qu'appelle-t-on *référentiel galiléen* ? Est-ce une notion bien définie ? Comment la met-on en œuvre ?

3. En utilisant 2.3., déduire la relation existant entre les différents référentiels galiléens.

4. Etant donné un système matériel S dans un référentiel $\mathcal{R}$, comment définit-on le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*_S$ de S ? A quelle(s) condition(s) sur S et $\mathcal{R}$ le référentiel $\mathcal{R}^*_S$ est-il galiléen ?

5. Quels sont les référentiels galiléens couramment utilisés en mécanique ? A quelle(s) condition(s) peuvent-ils être considérés comme galiléens ? Citer des manifestations de leur caractère non-galiléen.

4. Référentiel de Copernic et marées galactiques

1. Définir le référentiel de Copernic.

2. Ecrire, dans le référentiel de Copernic supposé galiléen, l'équation du mouvement d'un point matériel P, de masse m soumis à une force réelle $\vec{F}$.

Le système solaire dans son ensemble est en réalité en chute libre dans le champ de gravitation galactique $\vec{g}$. Sous l'action de ce dernier, il décrit une trajectoire qu'on supposera circulaire, de rayon $R = 10^5$ A.L. avec une périodicité $T = 225$ Ma.

3. Ecrire, dans le référentiel de Copernic à présent supposé non-galiléen, l'équation du mouvement d'un point matériel P, de masse m soumis à une force réelle $\vec{F}$. Comment s'appelle le nouveau terme apparaissant dans le membre de droite de l'équation du mouvement ?

4. En supposant que la champ gravitationnel galactique $\vec{g}$ varie sur des distances caractéristiques de l'ordre du rayon galactique, lui même de l'ordre de $R = 10^5$ A.L., estimer l'influence du caractère non-galiléen du référentiel de Copernic : sur le mouvement de la Terre autour du Soleil qu'on supposera circulaire de rayon $r = 1,5.10^8$ km; sur le mouvement d'une comète du nuage d'Oort située sur une orbite qu'on supposera circulaire avec un rayon de l'ordre de 1 A.L.

5. Gyroscope MEMS et force de Coriolis

Un gyroscope MEMS (pour *MicroElectroMechanical Systems* en Anglais) est un dispositif permettant de mesurer la vitesse angulaire de rotation des équipements (téléphone portable, tablette etc) à bord desquels il est embarqué. Il repose sur la mesure de la force de Coriolis agissant sur un oscillateur entretenu. On en propose la modélisation suivante : un mobile de masse m, assimilable à un point matériel M, effectue des oscillations forcées suivant l'axe Ox lié au référentiel mobile $\mathcal{R}'$ et l'on détecte ses déplacements suivant l'axe Oy fixe dans $\mathcal{R}'$. On supposera qu'il est soumis à une force de rappel $-k_x x\vec{u}_x - k_y y\vec{u}_y$, à une force de frottement fluide $-\lambda_x \dot{x}\vec{u}_x - \lambda_y \dot{y}\vec{u}_y$, ainsi qu'à une force excitatrice $F_0 \cos(\omega t)\vec{u}_x$. Le référentiel mobile $\mathcal{R}'$ est en rotation à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ dans un référentiel d'étude $\mathcal{R}$ supposé galiléen.

1. Ecrire l'équation du mouvement du point M dans $\mathcal{R}'$.

2. Justifier le fait que, typiquement, $\Omega \ll \omega$. En déduire qu'en régime sinusoïdal forcé à la pulsation $\omega \simeq \omega_x \simeq \omega_y$, on a $|\underline{y}/\underline{x}| \ll 1$. Déterminer finalement le rapport $|\underline{y}/\underline{x}|$. Comment améliorer la sensibilité du capteur ? Quelle(s) contrainte(s) cela entraîne-t-il sur la conception du capteur ?

4. Discuter l'avantage d'un dispositif à oscillateurs couplés (typiquement un quartz en forme de diapason) dont on exciterait le mode antisymétrique, de sorte que les deux masses aient, à chaque instant, des vitesses opposées.

6. Moment cinétique, moment dynamique

On considère un système matériel fermé S caractérisé par une distribution de masse $dm_M = \mu(M)dV_M$ et un champ de vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$.

1. Soit A un point de l'espace. Définir, dans ~~dans~~ $\mathcal{R}$, le moment cinétique $\vec{L}_A$ de S en A.

2. Montrer que pour tout couple de points de l'espace A et B, on a

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P},$$

où $\vec{P} = M\vec{v}_{G/\mathcal{R}}$ désigne la quantité de mouvement totale de S dans $\mathcal{R}$, avec $M = \int_S dm_M$ la masse totale de S et G le barycentre de masse de S. Comment s'appelle cette propriété ? Qu'appelle-t-on torseur cinétique ?

3. Définir de même dans $\mathcal{R}$, le moment dynamique $\vec{\delta}_A$ de S en un point A. Montrer qu'on a également pour tous A et B

$$\vec{\delta}_A = \vec{\delta}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R},$$

où $\vec{R}$ est un vecteur qu'on précisera. Qu'appelle-t-on torseur dynamique.

4. Introduire le torseur des actions mécaniques. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour le système S. Enoncer en particulier le théorème du moment dynamique.

5. Montrer que

$$\vec{\delta}_A = \left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + M\vec{v}_{A/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{G/\mathcal{R}},$$

où G désigne le barycentre de masse du système.

6. Enoncer le théorème du moment cinétique.

7. Dans quel(s) cas courant(s) le champ des vitesses d'un système matériel fermé S constitue-t-il le moment d'un torseur ? Quelle est, dans ce(s) cas, la résultante associée ? Comment appelle-t-on ce torseur ?

7. Théorèmes de König

On considère un système matériel fermé S caractérisé par une distribution de masse dm_M et un champ de vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$.

1. Définir le moment cinétique barycentrique $\vec{L}_S^*$ de S. Montrer qu'il est indépendant du point où on le calcule.

2. Enoncer et prouver le théorème de König relatif au moment cinétique.

3. Enoncer et prouver le théorème de König relatif à l'énergie cinétique.

8. Formation d'un pulsar

Un pulsar est une étoile à neutrons issue de l'effondrement gravitationnel d'une étoile suffisamment massive ayant épuisé son combustible nucléaire. En supposant qu'une étoile isolée, d'un rayon initial $R_i = 7.10^5$ km (environ un rayon solaire), effectuant initialement une rotation propre en $T_i = 20$ jours, se contracte sans perdre de matière jusqu'à atteindre un rayon final $R_f = 10$ km, déterminer sa période de rotation propre finale T_f.

Indication : on rappelle que pour une boule homogène de masse M et de rayon R, le moment d'inertie en son centre O vaut $I_O = 2MR^2/5$ - cf. TD de Mécanique des solides.

9. Système Terre-Lune

On considère le système Terre-Lune comme isolé dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

1. Les masses de la Terre et de la Lune sont $M_T \simeq 6.10^{24}$ kg et $M_L \simeq 7.10^{22}$ kg. Justifier qu'en première approximation on peut confondre le barycentre du système avec celui de la Terre.

2. On note ω_T la vitesse angulaire de rotation propre de la Terre. Elle décroît au cours du temps, aboutissant à un allongement de la durée du jour terrestre de l'ordre de 2 ms par siècle. A quoi est dû le ralentissement de la rotation propre de la Terre.

On considère pour simplifier que la Lune décrit autour de la Terre une orbite circulaire dans le plan orthogonal aux vecteurs vitesse angulaire de rotation $\vec{\omega}_T$ et $\vec{\omega}_L$ supposés colinéaires.

3. On note Ω la vitesse angulaire de rotation orbitale de la Lune et par ω_L sa vitesse angulaire de rotation propre. Quelle observation courante aboutit à conclure que $\Omega = \omega_L$? A quoi est due cette égalité ?

4. Ecrire le moment cinétique total $\vec{L}$ du système Terre-Lune.

5. On assimile la Terre et la Lune à des boules homogènes de masses respectives M_T et M_L et de rayons respectifs $R_T \simeq 6.10^3$ km et $R_L \simeq 2.10^3$ km. Comparer les moments cinétiques $\vec{L}_T$ et $\vec{L}_L$ respectivement associés aux rotation propres de la Terre et de la Lune. En déduire que $\|\vec{L}_T\| \gg \|\vec{L}_L\|$. On négligera donc dans la suite la contribution de $\vec{L}_L$ au moment cinétique total du système Terre-Lune.

6. Déterminer le moment cinétique orbital $\vec{L}_{TL}$ du système en fonction de la distance Terre-Lune d_{TL}.

7. En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que la distance Terre-Lune d_{TL} croît au cours du temps. Estimer l'importance de ce phénomène.

10. Freinage d'un satellite artificiel par la haute atmosphère

Un satellite artificiel évolue sur orbite circulaire autour de la Terre. Outre l'attraction gravitationnelle terrestre, on suppose qu'il subit un faible frottement fluide sur les couches résiduelles de l'atmosphère terrestre. Montrer que la dissipation d'énergie par frottement entraîne une augmentation de la vitesse du satellite.

MÉCANIQUE :

1) L'espace-temps de la mécanique classique.

1) Temps absolu : ⇒ durée entre deux évènements identique pour tous les observateurs (choix d'origine).

2) Évènements simultanés : A et B ⇒ $t_A = t_B$
↳ identique pour tous les observateurs
L'ensemble des évènements à t : espace homogène et isotrope à trois dimensions (espace affine à 3 dimensions).

3) On ne peut pas parler, dans l'absolu, d'évènements se produisant à des dates différentes au même lieu, car ~~il~~ n'y a pas d'identification canonique de l'espace homogène et isotrope entre ces deux dates

4) * Un repère orthonormé $\mathcal{R}$ est la donnée d'un point O appelé origine du repère et d'une base $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ orthonormée directe

$$\vec{e_i}\cdot\vec{e_j} = \delta_{ij} \qquad \forall i,j = 1,\dots,3$$

* $\vec{OM} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e_i}$ $\qquad (t\,;x_1\,;\dots\,;x_3)$

$(O,\vec{e_1},\dots,\vec{e_3}) \leftarrow (O',\vec{e_1}',\dots,\vec{e_3}')$

* Soit dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\vec{OM} = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e_i} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = \sum_{i=1}^{3} B_i \vec{e_i} + \sum_{i=1}^{3} x_i' \vec{e_i}'$$

$$= \sum_{i=1}^{3} B_i\vec{e_i} + \sum_{i,j=1}^{3} x_j' \underbrace{(\vec{e_j}'\cdot\vec{e_i})}_{A_{ij}}\vec{e_i}$$

Alors, $\boxed{x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}x_j' + B_i}$ transformation affine

$\vec{e_i}' = \sum_{j=1}^{3} (\vec{e_i}'\cdot\vec{e_j})\vec{e_j} = A_{ji}\vec{e_j}$

A_{ij} est la matrice d'une rotation

$\sum_{j=1}^{3} A_{ij}A_{kj} = \delta_{ik} \leftarrow \vec{e_i}'\cdot\vec{e_j}' = \vec{e_i}\cdot\vec{e_j} = \delta_{ij}$

5) Référentiel : * Horloge
* Solide de référence ⇒ repère à chaque t
↳ à rotation constante près

6) Par définition :

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dV_i}{dt}\vec{e_i}$$

Donc une base fixe $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_3})$ dans $\mathcal{R}$

7) $$\boxed{\left(\frac{d\vec{e_i}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{e_i}'}$$

Preuve : $$\left(\frac{d\vec{e_i}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \sum_{j=1}^{3} \frac{dA_{ji}}{dt}\vec{e_j}$$

$$= \sum_{j,k=1}^{3} \frac{dA_{ji}}{dt} A^{-1}_{kj}\,\vec{e_k}'$$

$= \mathbb{1}$

$$A^{-1}\frac{dA}{dt} = A^T\frac{dA}{dt} \quad \left(\begin{array}{l}A \text{ est une} \\ \text{rotation } A^T = A^{-1}\end{array}\right)$$

Or, $A^TA = \mathbb{1} \Rightarrow \frac{dA^T}{dt}A + A^T\frac{dA}{dt} = 0$

$$\Rightarrow A^T\frac{dA}{dt} = -\frac{dA^T}{dt}A = -\left(A^T\frac{dA}{dt}\right)^T$$

$\hookrightarrow$ donc matrice antisymétrique

$$A^T\frac{dA}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$ $\Leftrightarrow$ à un vecteur de dimension 3 car 3 paramètres indépendants

Finalement, $$A^T\frac{dA}{dt}\begin{pmatrix}\vec{e_1}' \\ \vec{e_2}' \\ \vec{e_3}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e_1}' \\ \vec{e_2}' \\ \vec{e_3}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega_3\vec{e_2}' + \Omega_2\vec{e_3}' \\ \Omega_3\vec{e_1}' - \Omega_1\vec{e_3}' \\ -\Omega_2\vec{e_1}' + \Omega_1\vec{e_2}' \end{pmatrix}$$

où $\vec{\Omega} = (\Omega_1, \ldots, \Omega_3)$ $\qquad = \vec{\Omega} \wedge \vec{e_i}'$

En conséquence : $$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3} V_i\vec{e_i}'\right)_{\mathcal{R}}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\frac{dV_i}{dt}\vec{e_i}' + \sum_{i=1}^{3} V_i\left(\frac{d\vec{e_i}'}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$= \left(\frac{d\vec V}{dt}\right)_{/\mathcal R'} + \sum_{i=1}^{3} V_i \, \vec\Omega_{\mathcal R'/\mathcal R} \wedge \vec{e_i}'$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec V}{dt}\right)_{/\mathcal R} = \left(\frac{d\vec V}{dt}\right)_{/\mathcal R'} + \vec\Omega_{\mathcal R'/\mathcal R} \wedge \vec V$$

8) Par définition dans $\mathcal R(O, \vec{e_i})$ $\mathcal R'(O', \vec{e_i}')$

$$\vec v_{M/\mathcal R} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal R}$$

$$= \left(\frac{d(\vec{OO'} + \vec{O'M})}{dt}\right)_{/\mathcal R} = \vec v_{O'/\mathcal R} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{/\mathcal R}$$

$$= \vec v_{O'/\mathcal R} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{/\mathcal R'} + \vec\Omega_{\mathcal R'/\mathcal R} \wedge \vec{O'M}$$

$$\cancel{\Rightarrow \vec v_{M/\mathcal R} =}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec v_{M/\mathcal R} = \vec v_{M/\mathcal R'} + \underbrace{\vec v_{O'/\mathcal R} + \vec\Omega_{O'/\mathcal R} \wedge \vec{O'M}}_{\vec v_e \,\equiv\, \text{vitesse d'entraînement}}}$$

$\vec v_e$ est la vitesse du point <u>fixe</u> dans $\mathcal R'$ coïncidant avec M à chaque date.

<u>Remarque</u> : La vitesse d'entraînement est également le champ de vitesses d'un « solide » constitué des points fixes dans $\mathcal R'$ (et donc par rapport au solide de référence définissant $\mathcal R'$!)

9) Par définition dans $\mathcal{R}=(O,\vec{e_i})$ et $\mathcal{R}'=(O',\vec{e_i})$

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M}\right]_{\mathcal{R}}$$

$$= \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$= \left(\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \overbrace{\boxed{\left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M}\right)}}^{\vec{a}_e \text{ accélération d'entraînement}} + \underbrace{\boxed{2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}}_{\vec{a}_C \text{ accélération de Coriolis}}}$$

Remarque :

* L'accélération d'entraînement est l'accélération du point fixe dans $\mathcal{R}'$ coïncidant avec M.
* ⚠ $\vec{a}_e \neq \frac{d\vec{v}_e}{dt}$

2) Déterminisme newtonien et relativité galiléenne.

1) * On suppose que dans $\mathcal{R}$, on a $m\vec{a}_{/\mathcal{R}} = \vec{f}_{\mathcal{R}}$

* Alors, d'après I.9, on obtient dans $\mathcal{R}'$

$$m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{f}_{\mathcal{R}} \underbrace{- m\vec{a_e} - m\vec{a_C}}_{\text{forces d'inertie / fictives (référentiel)}} = \vec{f}_{\mathcal{R}'}$$

2) La présence de forces d'inertie dans les équations du mouvement entraîne leur dépendance dans un référentiel a priori inconnu dans lequel le référentiel d'étude présente un mouvement inconnu.

3) * Si les forces d'inertie entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont nulles, on aura : $\vec{f}_{\mathcal{R}} = \vec{f}_{\mathcal{R}'}$.

* Les forces d'inertie entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ s'annulent pour tout mouvement de M ssi $\boxed{\begin{array}{l}\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}\\ \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0}\end{array}}$ $\Rightarrow \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{v}(O') = \text{cste}$

Alors $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathcal{R}$.

Transformation de Galilée

$$\begin{cases} x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} A_{ij}\, x'_j + \underbrace{B_i(t)}_{v_i^{(0)}(t) + B_i^{(0)}} \\ t = t' - t_0 \end{cases}$$

4) En exigeant que toutes les lois de la physique se transforment de manière covariante sous les transformations de Galilée, on fonde le principe de relativité galiléenne.

↳ Electrodynamique non galiléenne covariante $\Rightarrow$ relativité restreinte

3) Principe d'inertie et référentiels galiléens.

1) Principe d'inertie : Il existe des référentiels dits galiléens dans lesquels un point matériel isolé est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.

↳ Garantit l'existence de référentiels dans lesquels les équations du mouvement peuvent être établies en énumérant les systèmes agissant sur le système étudié. (pas de forces d'inertie !!!)

2) * La définition proposée par le principe d'inertie est une définition circulaire.

Liste : ① Définir un référentiel
② Bilan des forces connues
③ Résolution des équations du mouvement
④ Expérience

→ accord satisfaisant
→ désaccord

En cas de désaccord :
- Force oubliée
- Force mal modélisée
- Caractère insuffisamment galiléen du référentiel
↳ forces d'inertie à prendre en compte.

⇝ Hiérarchie de référentiels plus ou moins galiléens

3) Deux référentiels galiléens sont en translation rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre.

4) Soit R un référentiel et soit S un système matériel.
On définit $R_S^* = (G; \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_3})$
où G est le barycentre de S et $(\vec{e_1}; \ldots; \vec{e_3})$ sont fixes dans R.
R_S^* est galiléen si R est galiléen et si G est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme dans R, par exemple si S est (pseudo-) isolé.

5) * Référentiel terrestre :

↳ Origine = point fixe par rapport à la Terre.
↳ Axes fixes par rapport à la Terre
↳ échelles de temps $T \ll 24h$ (gyroscope, pendule de Foucault)

* Référentiel géocentrique :
↳ Origine = barycentre de la Terre
↳ Axes : fixés par trois étoiles lointaines.
↳ échelles de temps $T \ll 1$ année

* Héliocentrique :
↳ Origine = barycentre du Soleil
↳ Axes : fixés par trois étoiles lointaines
↳ échelles de temps $T \ll$ ~~25~~ 250 Ma

(Similaire Copernic ⟹ barycentre du Système Solaire)

IV) Référentiel de Copernic et marées galactiques.

1) Cf III) 5)

2) En supposant $\mathcal{R}_C$ galiléen :

$$m\,\vec{a}_{P/\mathcal{R}_C} = \vec{F}$$

3) * Le barycentre G du système solaire est soumis à une accélération :

$$\vec{a}_{G/\mathcal{R}} = \vec{g}(G)$$

* On a donc, dans $\mathcal{R}_C$ (non galiléen)

$$m\,\vec{a}_{P/\mathcal{R}_C} = \underbrace{\boxed{m\left[\vec{g}(P) - \vec{g}(G)\right]}}_{\text{Terme de marée galactique}} + \vec{F}$$

(uniquement accélération entraînement) ou plutôt pas en rotation $\vec{\Omega} = \vec{0}$

4) Au premier ordre en a :

$$\vec{a}_{P/R_c} = (\vec{GP} \cdot \vec{\nabla})\vec{g}(G) + \frac{\vec{F}}{m} + O(\|\vec{GP}\|^2)$$

On a donc en ordres de grandeurs :

$$\frac{\|\vec{GP}\|}{R} g(G) = \frac{\|\vec{GP}\|}{R} \times R\Omega^2 = \|\vec{GP}\| = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

Il suffit de comparer : $\frac{4\pi^2 r_*}{T^2}$ ($r_* \leftarrow \|\vec{GP}\|$) et $\frac{G_N M_S}{r_*^2}$ (pour un astre qui circule à une distance r_* du Soleil de notre M_S)

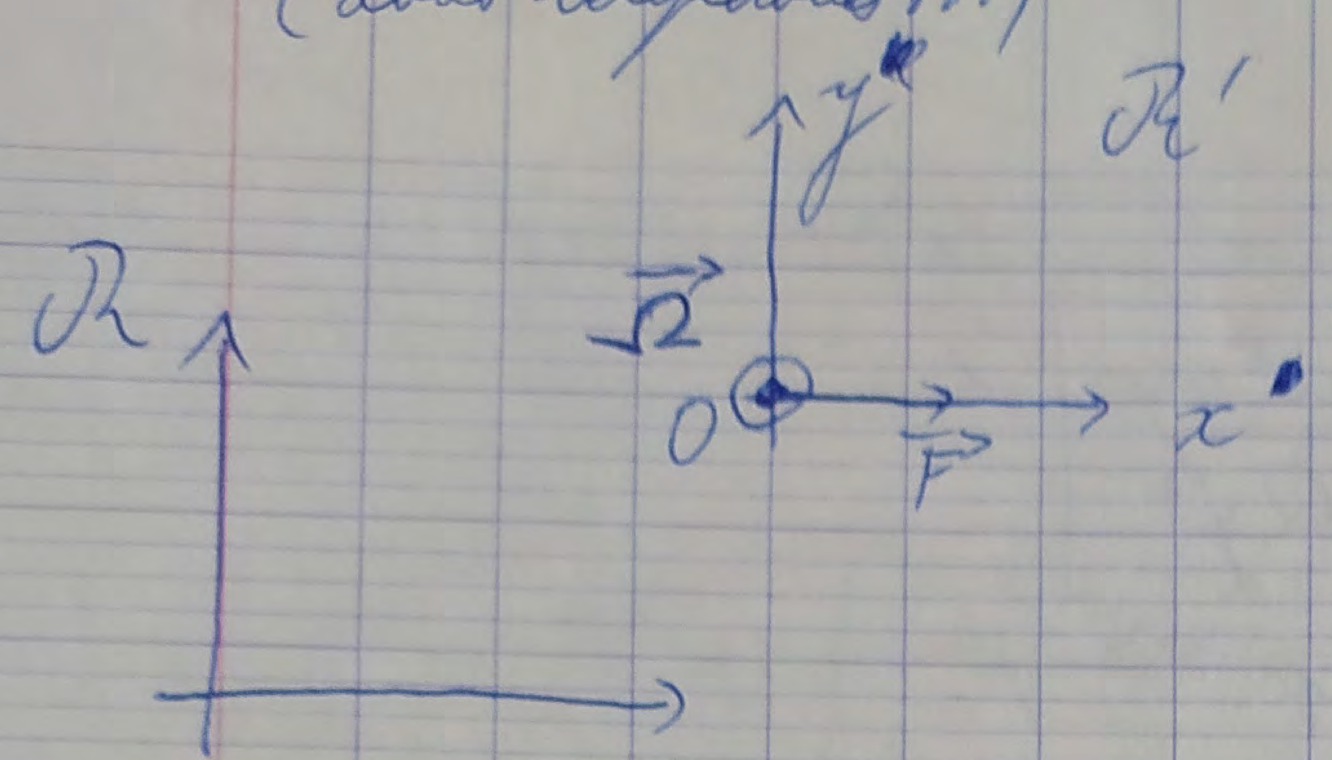
$\Rightarrow$ Référentiel de Copernic suffisamment Galiléen.

$\frac{4\pi^2 r_*^3}{G_N M_S T^2}$ $\nearrow$ avec r_*

$\frac{4\pi^2 (r_*^{\text{critique}})^3}{G_N M_S T^2} = 1$ pour $r_*^{\text{critique}} > r_*$ $\Rightarrow$ on ne peut plus négliger le caractère non Galiléen du référentiel de Copernic

V) Gyroscope MEMS et force de Coriolis.

(dans téléphones...)



Dans $\mathcal{R}'$:

$$
\begin{aligned}
m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = &-\lambda_x \dot{x}\,\vec{u_x} - \lambda_y \dot{y}\,\vec{u_y} \\
&- k_x x\,\vec{u_x} - k_y y\,\vec{u_y} \\
&+ F_0 \cos(\omega t)\,\vec{u_x} \\
&- m\,\vec{\Omega}\wedge[\vec{\Omega}\wedge(x\vec{u_x} + y\,\vec{u_y})] \\
&- 2m\,\vec{\Omega}\wedge[\dot{x}\,\vec{u_x} + \dot{y}\,\vec{u_y}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
m\ddot{x} + \lambda_x \dot{x} + k_x x = F_0 \cos(\omega t) + m\Omega^2 x + 2m\Omega\dot{y} \\
m\ddot{y} + \lambda_y \dot{y} + k_y y = m\Omega^2 y - 2m\Omega\dot{x}
\end{cases}
$$

2) Également $\Omega \ll \omega$

ω fréquence propre d'un quartz

En régime sinusoïdal forcé :

$$
\begin{cases}
\ddot{x} + \dfrac{\lambda_x}{m}\dot{x} + \omega_x^2 x = \dfrac{F_0 \cos(\omega t)}{m} + \Omega^2 x + 2\Omega\dot{y} \\
\ddot{y} + \dfrac{\lambda_y}{m}\dot{y} + \omega_y^2 y = \Omega^2 y - 2\Omega\dot{x}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-\omega^2 x + i\omega\dfrac{\lambda_x}{m}x + \omega_x^2 x = \dfrac{F_0}{m} + \cancel{\Omega^2 x} + 2i\omega\Omega y \\
-\omega^2 y + i\omega\dfrac{\lambda_y}{m}y + \omega_y^2 y = \cancel{\Omega^2 y} - 2i\omega\Omega x
\end{cases}
$$

négligeables si $\Omega \ll \omega$

$$
\frac{y}{x} = \frac{-2i\omega\Omega}{(\omega_y^2 - \omega^2) + i\omega\dfrac{\lambda_y}{m}} \propto \frac{\Omega}{\omega} \ll 1
$$

$$\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{2\omega\Omega}{\left[(\omega_y^2-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2\omega_y^2}{Q_y^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2\Omega}{\omega_y}\,\frac{1}{\left[\left(\frac{\omega_y}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_y}\right)^2 + \frac{1}{Q_y^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

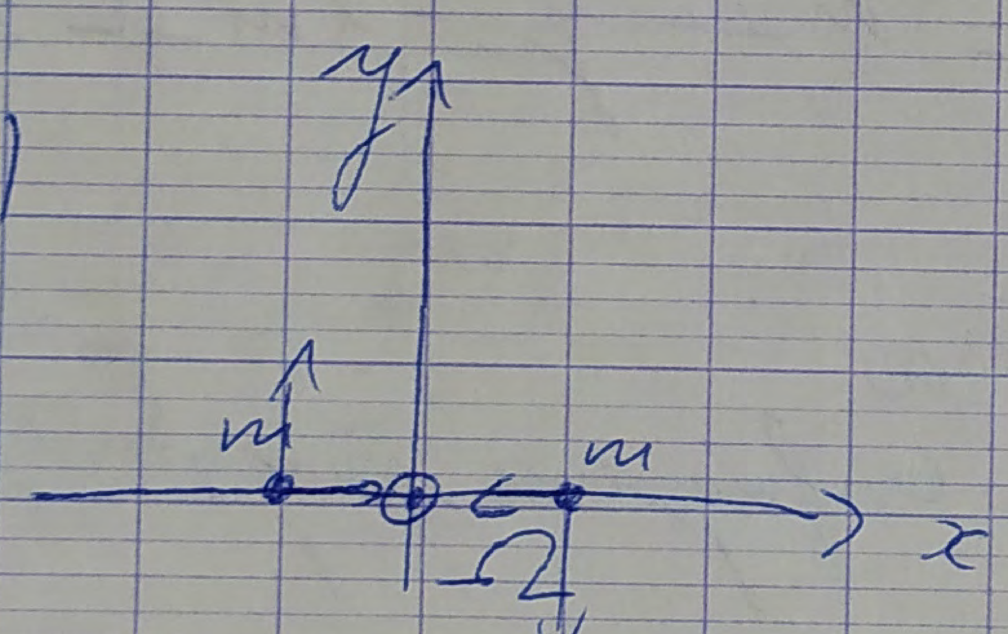
$$\boxed{\left|\frac{y}{x}\right|_{\omega=\omega_y} = 2\,\frac{\Omega Q_y}{\omega_y}}$$

↳ sensibilité ↗ si * Q_y ↗

* m ↗ (ω_y ↘)

↳ peu sensibles mais petits !!!
(si petit pour entrer dans téléphone)

4)



=> permet de différencier accélération linéaire de l'accélération circulaire.

6) Moment cinétique, moment dynamique.

1) $\vec{L_A} = \int_S dm_M\, \vec{AM} \wedge \vec{v}_{M/R}$

2) Soient A et B deux points de l'espace

$$\vec{L_A} = \int_S dm_M\, \vec{AM} \wedge \vec{v}_{M/R} = \int_S dm_M \left[\vec{AB} + \vec{BM}\right] \wedge \vec{v}_{M/R}$$

$$= \int_S dm_M \, \vec{AB} \wedge \vec{v}_{M/R} + \vec{L}_B$$

$$= \vec{AB} \wedge \int dm_M \, \vec{v}_{M/R} + \vec{L}_B$$

Or $\displaystyle\int_S dm_M \, \vec{v}_{M/R} = \int_S dm_M \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R$

$$= \frac{d}{dt}\left[\int_S dm_M \, \vec{OM}\right]_R = \frac{d}{dt}\left[M\vec{OG}\right]_R$$

$$= M\vec{v}_{G/R}$$

Finalement,

$$\boxed{\vec{L}_A = \vec{L}_B + \vec{AB} \wedge \vec{P} \text{ avec } \vec{P} = M\vec{v}_{G/R}}$$

* $\vec{L}_A$ est un champ antisymétrique
  * équiprojectif

$$(\vec{L}_A - \vec{L}_B) \cdot \vec{AB} = 0$$

VI) 2) **Torseur cinétique** : torseur dont les éléments de réduction sont $\vec{L_A}$ et $\vec{P}$.

$$\{\vec{L_A} ; \vec{P}\}$$

3) **Moment dynamique** :

$$\vec{\delta_A} = \int_S dm_M \, \vec{AM} \wedge \vec{a_{M/\mathcal{R}}}$$

S ^ système

On a : $\forall A, B$

$$\vec{\delta_A} = \int_S dm_M \, (\vec{AB} + \vec{BM}) \wedge \vec{a_{M/\mathcal{R}}}$$

$$= \int_S dm_M \, \vec{AB} \wedge \vec{a_{M/\mathcal{R}}} + \vec{\delta_B}$$

$$= \vec{\delta_B} + \vec{AB} \wedge \int_S dm_M \, \vec{a_{M/\mathcal{R}}}$$

$$= \vec{\delta_B} + \vec{AB} \wedge \int_S dm_M \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}$$

$$= \vec{\delta_B} + \vec{AB} \wedge M \, \vec{a_{G/\mathcal{R}}}$$

Finalement $\boxed{\begin{array}{l} \vec{\delta_A} = \vec{\delta_B} + \vec{AB} \wedge \vec{R} \\ \vec{R} = M \, \vec{a_{G/\mathcal{R}}} \end{array}}$ G barycentre de S

$$M = \int_S dm_M$$

Torseur dynamique : $\{\vec{\delta_A}, \vec{R}\}$

4) Champ de densité volumique des forces subies par le système $\vec{f_M}$ de sorte que la résultante

$$\vec{F} = \int_S dV_M \vec{f_M}$$

* <u>Moment des forces en A :</u>

$$\vec{\mathcal{M}_A} = \int_S dV_M \vec{AM} \wedge \vec{f_M}$$

De même, $\vec{\mathcal{M}_A} = \vec{\mathcal{M}_B} + \vec{AB} \wedge \vec{F}$

<u>Torseur des actions mécaniques</u> : $\{\vec{\mathcal{M}_A}, \vec{F}\}$

* Relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F} = \int_S dV_M \vec{f_M} = \int_S dm_M \vec{a_{M/\mathcal{R}}} = \vec{R}$$

$$\vec{\mathcal{M}_A} = \int_S dV_M \vec{AM} \wedge \vec{f_M} = \int_S dm_M \vec{AM} \wedge \vec{a_{M/\mathcal{R}}} = \vec{\delta_A}$$

Relation fondamentale de la dynamique pour un système fermé S :

$$\begin{cases} \vec{\delta_A} = \vec{\mathcal{M}_A} \\ \vec{R} = \vec{F} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : On peut distinguer les actions extérieures et intérieures :

$$\vec{F} = \int_S dV_M \vec{f_M} = \int_S dV_M \int_S dV_N \vec{f_{N \to M}} + \int_S dV_M \vec{f_M}^{ext}$$

$$= \vec{F}^{ext} \text{ (car principe actions réciproques : } \vec{f_{M \to N}} = -\vec{f_{N \to M}} \text{)}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \int_S dV_M \, \vec{AM} \wedge \vec{f_M} = \int_S dV_M \left(\int_S dV_N \, \vec{AM} \wedge \vec{f_{N\to M}} \right) + \int_S dV_M \, \vec{AM} \wedge \vec{f_M}^{ext}$$

$$= \frac{1}{2} \int_S dV_M \int_S dV_N \left[\vec{AM} \wedge \vec{f_{N\to M}} + \vec{AN} \wedge \vec{f_{M\to N}} \right] + \vec{\mathcal{M}}_A^{ext}$$

$$= \frac{1}{2} \int_S dV_M \int_S dV_N \, \vec{MN} \wedge \vec{f_{M\to N}} + \mathcal{M}_A^{ext}$$

moyennant $\vec{f_{M\to N}} = -\vec{f_{N\to M}}$

Si on suppose en outre que $\vec{f_{M\to N}} \,//\, \vec{MN}$ (force dirigée le long de la droite (MN)), alors

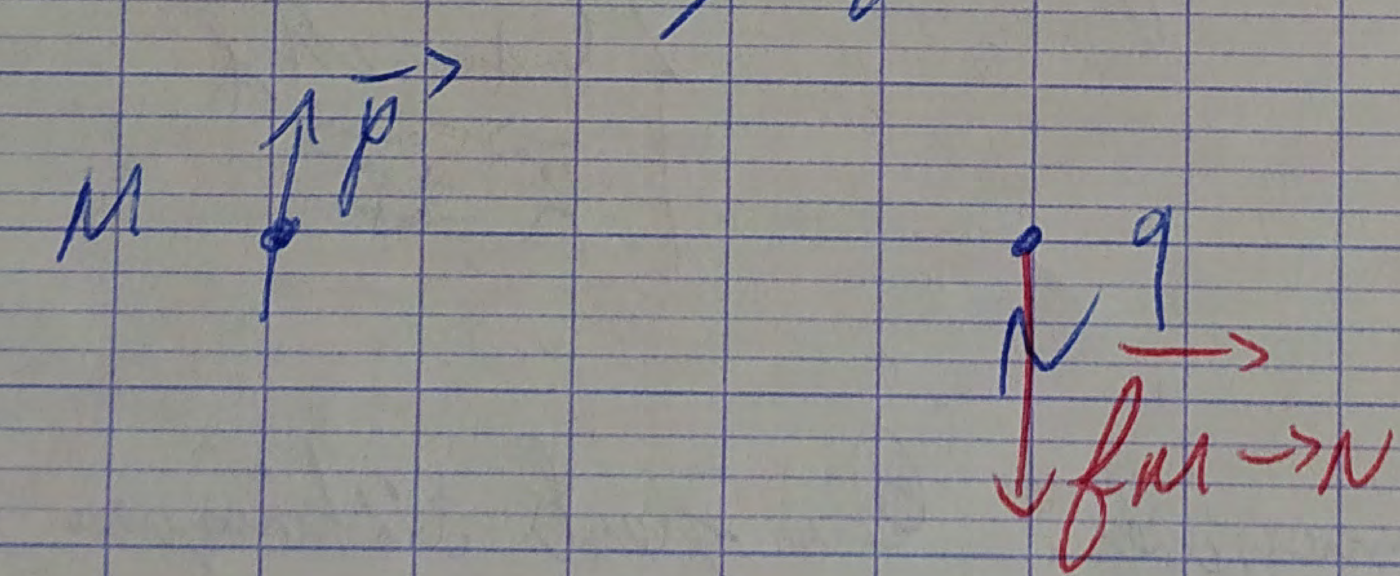
$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_A^{ext}$$

Sous ces hypothèses, on a finalement :

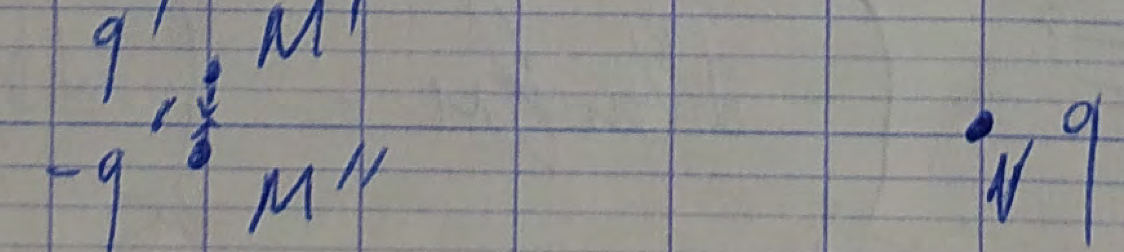
$$\begin{cases} \vec{\delta}_A = \vec{\mathcal{M}}_A^{ext} \\ \vec{R} = \vec{F}^{ext} \end{cases}$$

Remarque : $\vec{f_{M\to N}} \not\parallel \vec{MN}$ parfois

exemple :



⟺



dans la limite {M' → M'' / dipolaire} il ~~moyen~~ faut prendre en compte la distribution de moments des forces $\vec{p} \wedge \vec{E}$

5) Par définition,

$$\left(\frac{d\vec{L_A}}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}\left(\int_S dm_M \, \vec{AM} \wedge \vec{v_{M/\mathcal{R}}}\right)$$

$$= \int_S dm_M \left[\left(\frac{d\vec{AM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{v_{M/\mathcal{R}}} + \vec{AM} \wedge \left(\frac{d\vec{v_{M/\mathcal{R}}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}\right]$$

$$= \int_S dm_M \left[\left(\frac{d\vec{AO}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{v_{M/\mathcal{R}}} + \cancel{\underbrace{\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}}_{=\vec{v_{M/\mathcal{R}}}} \wedge \vec{v_{M/\mathcal{R}}}}\right] + \vec{\delta_A}$$

$$= -\vec{v_{A/\mathcal{R}}} \wedge \int_S dm_M \, \vec{v_{M/\mathcal{R}}} + \vec{\delta_A}$$

$$= -\vec{v_{A/\mathcal{R}}} \wedge M\vec{v_{G/\mathcal{R}}} + \vec{\delta_A}$$

Finalement,

$$\boxed{\vec{\delta_A} = \left(\frac{d\vec{L_A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \vec{v_{A/\mathcal{R}}} \wedge M\vec{v_{G/\mathcal{R}}}}$$

Remarque : Si $\vec{v_{A/\mathcal{R}}} = \vec{0}$ ou si $A = G$

Alors $\vec{\delta_A} = \left(\frac{d\vec{L_A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$

6) Si A est un point fixe ou le barycentre du système, alors :

$$\left(\frac{d\vec{L_A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}_A}^{ext}$$ Théorème du moment cinétique

7) Pour un solide, on a :

$$\vec{v_A} = \vec{v_B} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}$$

$\Leftrightarrow (\vec{v_A} - \vec{v_B}) \cdot \vec{AB} = 0$ équiprojectivité

$\Leftrightarrow \frac{d\vec{AB}}{dt} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\|\vec{AB}\|^2}{dt} = 0$ solide indéformable

$\Rightarrow$ Pour les solides indéformables, on définit le torseur cinématique : $\{\vec{v_A} ; \vec{\Omega}_{S/R}\}$

VII) Théorèmes de König :

1) Soit R un référentiel et R^* le référentiel barycentrique de S associé $\longrightarrow$ R^* n'est pas en rotation par rapport à R

On définit :

$$\boxed{\vec{L_A}^* = \int_S dm_M \vec{AM} \wedge \vec{v}_{M/R^*}}$$

$\forall B \neq A$

$$\vec{L_B}^* = \int_S dm_M \vec{BM} \wedge \vec{v}_{M/R^*}$$

$$= \int_S dm_M [\vec{BA} + \vec{AM}] \wedge \vec{v}_{M/R^*}$$

$$= \vec{BA} \wedge \int_S dm_M \vec{v}_{M/R^*} + \vec{L_A}^*$$

Or $\vec{v}_{M/R^*} = \left(\frac{d\vec{GM}}{dt}\right)_{R^*}$ et donc $\int_S dm_M \vec{v}_{M/R^*} = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\int_S dm_M \vec{GM}}_{=\vec{0}}\right)_{R^*}$ par définition de G, barycentre du système

Finalement : $\boxed{\vec{L_A}^* = \vec{L_B}^* = \vec{L}^* \quad \text{Moment cinétique barycentrique}}$

2) Théorème de König 1 :

$$\vec{L_A} = \int_S dm_M \vec{AM} \wedge \vec{v}_{M/R}$$

$$= \int_S dm_M \vec{AM} \wedge [\vec{v}_{G/R} + \vec{v}_{M/R^*}]$$

(composition des vitesses) $$= M\vec{AG} \wedge \vec{v}_{G/R} + \vec{L}^*$$

Finalement : $\boxed{\vec{L_A}^{(R)} = \vec{L}^* + M\vec{AG} \wedge \vec{v}_{G/R}}$

3) Théorème de König 2 :

$$E_C = \frac{1}{2}\int_S dm_M \vec{v}_{M/R}^{\,2} = \frac{1}{2}\int_S dm_M [\vec{v}_{G/R} + \vec{v}_{M/R^*}]^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_S dm_M [\vec{v}_{G/R}^{\,2} + \vec{v}_{M/R^*}^{\,2} + 2\vec{v}_{G/R} \cdot \vec{v}_{M/R^*}]$$

$$= \frac{1}{2} M \vec{v}_{G/R}^{\,2} + E_C{}^* + \vec{v}_{G/R} \cdot \underbrace{\int_S dm_M \vec{v}_{M/R^*}}_{= \vec{0} \text{ (déjà vu)}}$$

Finalement : $\boxed{E_C^{(R)} = E_C^* + \frac{1}{2} M \vec{v}_G^{\,2}}$

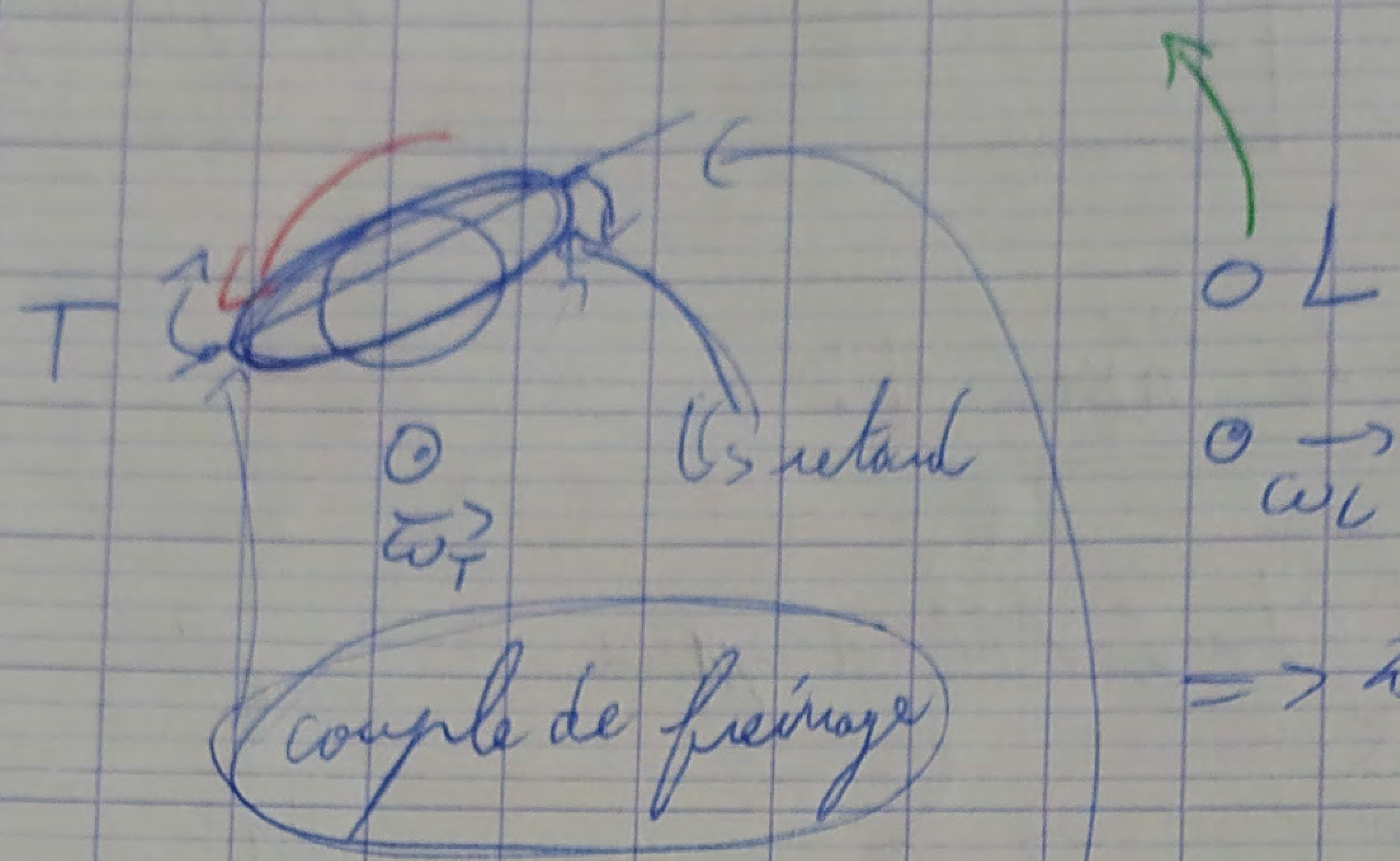
IX) Système Terre-Lune.

1) Le barycentre G du système Terre-Lune est défini par

$$M_T \vec{GT} + M_L \vec{GL} = \vec{0}$$

$$\vec{GT} + \frac{M_L}{M_T}\vec{GL} = \vec{0} \quad \text{avec } \frac{M_L}{M_T} < 10^{-2}$$

2) Effet de marée :



$\Longrightarrow$ 2 ms/siècle T_{jour}

3) $\Omega = \omega_L$, la Lune présente toujours la même face à la Terre

$\Rightarrow$ Verrouillage orbitage par effet de marée (tidal locking)
(effet inverse de T $\to$ L)

4) Moment cinétique total

$$\vec{L_T}^{total} = \vec{L_T}^{terre} + \vec{L_T}^{lune}$$

$$= \vec{L}^*_{terre} + \vec{L_T}^{orbital\ lune} + \vec{L}^*_{lune}$$

5) $\vec{L}^*_{terre} = \frac{2 M_T R_T^2}{5} \vec{\omega_T}$ pour des boules indéformables homogènes

$$\vec{L}^*_{lune} = \frac{2 M_L R_L^2}{5} \vec{\omega_L}$$

$$\rightarrow \frac{\| \vec{L}^*_{lune} \|}{\| \vec{L}^*_{terre} \|} = \frac{M_L}{M_T} \frac{R_L^2}{R_T^2} \frac{\|\vec{\omega_L}\|}{\|\vec{\omega_T}\|} \leq 10^{-3}$$

Sous cette hypothèse :

$$\vec{L_T}^{total} = \vec{L}^*_{terre} + \vec{L_T}^{orbital\ lune}$$

$$\vec{L_T}^{orbital\ lune} = \vec{TL} \wedge M_L \vec{v_L}$$

$$= M_L\, d_{TL}^2\, \Omega\, \vec{u_z}$$

Pour un mouvement orbital circulaire :
(se place dans le référentiel centré en T où la Lune est fixe) :

$$M_L \Omega^2 d_{TL} = G_N \frac{M_T M_L}{d_{TL}^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega = \left(\frac{G_N M_T}{d_{TL}^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Finalement, $$\vec{L}_T^{total} = \left[\frac{2 M_T R_T^2}{5} \omega_T + M_L \frac{d_{TL}^2 (G_N M_T)^{1/2}}{d_{TL}^{3/2}} \right] \vec{u_z}$$

$$= \left[\frac{2 M_T R_T^2}{5} \omega_T + G_N^{\frac{1}{2}} M_T^{\frac{1}{2}} M_L \, d_{TL}^{1/2} \right] \vec{u_z}$$

7) Théorème du moment cinétique (en T fixe)

$$\vec{L} \cdot \vec{u_z} = \left[\frac{2 M_T R_T^2}{5} \omega_T + G_N^{1/2} M_T^{1/2} M_L \, d_{TL}^{1/2} \right]$$

$$= \text{constante}$$

$$\Rightarrow \omega_T \searrow \Rightarrow d_{TL} \nearrow$$