

Titre : LP ON 1 Propagation avec dispersion

Présentée par : Xavier Dumoulin

Rapport écrit par : Edouard Touzé

Correcteur : Arnaud Raoux

Date : 15/10/2019

Bibliographie de la leçon :

Titre	Auteurs	Éditeur	Année
Tout en un PC/PC*		DUNOD	2014
Tout en un PSI/PSI*		DUNOD	2014

Plan détaillé

I. Dispersion et absorption dans les milieux régis par une équation de propagation linéaire.

1. Equation de propagation et forme générale des solutions.
2. Relation de dispersion.

II. Modèle du paquet d'onde : vitesse de groupe et vitesse de phase.

1. Modèle du paquet d'onde
2. Evolution du paquet d'onde lors de la propagation

III. Propagation d'une onde dans un plasma peu dense : ionosphère.

Niveau choisi pour la leçon : CPGE

Pré-requis : - Propagation selon les équations de d'Alembert

- Modèle du câble coaxial
- Analyse de Fourier
- Propagation dans un plasma peu dense

Intro :

(Manip) on observe le phénomène de dispersion dans un câble coaxial de 80 mètre. Un burst est envoyé à l'aide d'un GBF, puis on compare le signal de sortie du GBF et celui obtenue en sortie du câble sur un oscilloscope (!\ attention le signal en sortie du GBF et le signal passant dans le câble doivent être isolé (cf TP Ampli)).

Phénomènes observé : atténuation et déformation du signal.

I. Loi des mailles + Loi des nœud sur le circuit correspondant au fil → onde de propagation

Équation des télégraphistes :
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (r \Gamma + \Lambda g) \frac{\partial u}{\partial t} + r g u \quad (1)$$

1. Forme générale des solutions :

Hypothèse : ondes 1D suivant les x croissant qui vérifie l'équation de propagation linéaire.

Forme d'ondes planes :

$\underline{g}(x,t) = g_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}x))$ avec g_0 : l'amplitude ; ω : la pulsation ; \underline{k} : vecteur d'onde

$g(x,t) = \text{Re}(\underline{g}(x,t))$

2. Relation de dispersion

On la déduit de l'équation (1) et de la forme de la solution :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - r g - (r \Gamma + \Lambda g) i \omega$$

$$\underline{k}(\omega) = k_r(\omega) + i k_i(\omega)$$

avec : k_r partie réel (> 0) qui traduit la propagation suivant les x croissant et k_i partie imaginaire (< 0) qui traduit le phénomène d'absorption (observable dans le câble).

II. 1. Modèle du paquet d'onde

définition d'un paquet d'onde → superposition d'ondes dans un intervalle de pulsations donné.

On écrit la forme du paquet d'onde :

$$\underline{g}(x,t) = \int_{\omega_0 - \frac{\delta \omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta \omega}{2}} \underline{\Lambda}(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega)x)) d\omega$$

$$\underline{\Lambda}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} g(0,t) \exp(i\omega t) dt$$

2. Evolution du paquet d'onde

on peut donner l'équation du paquet d'onde sous la forme suivante :

$$\underline{g}(x,t) = \exp(i(w_0 t - k_0 x)) \int_{w_0 - \frac{\delta w}{2}}^{w_0 + \frac{\delta w}{2}} \underline{A}(w) \exp(i(w - w_0)t - (k(w) - k_0)x) dw$$



Onde moyenne



Enveloppe $\underline{J}(x,t)$

DL au 1^{er} ordre en w_0 : $\rightarrow \underline{J}(x,t) = \underline{J}(0, t - (dk/dw)x)$

\rightarrow définition : vitesse de groupe $v_g = (dw/dk)$ et vitesse de phase $v_{ph} = w/k$

DL au 2^{ème} ordre en w_0 : $\rightarrow \underline{J}(x,t) = \underline{J}(0, t - \alpha(w)x)$

\rightarrow déformation du paquet d'onde car la vitesse dépend de w .

vitesse de phase : vitesse des oscillations dans l'enveloppe.

Vitesse de paquet d'onde : vitesse du transport de l'information

III. définition de la ionosphère : portion d'atmosphère entre 50 et 1000 km d'altitude où le gaz y est ionisé.

- Équation de propagation dans un plasma
- Relation de dispersion dans le plasma : $k^2 = w^2/c^2 (1 - w_p^2/w^2)$ avec w_p : pulsation plasma

Calcul de v_{ph} et v_g : cas $w > w_p$ pour que k soit réel.

On montre que v_{ph} dépend de $w \rightarrow$ milieu dispersif

Puis on établit la relation de Klein Gordon : $v_{ph} v_g = c^2$

Phénomène de dispersion sans absorption.

Conclusion : Transport à travers une fibre optique

Questions posées par l'enseignant

1-Transport à travers la fibre optique : comment cela fonctionne ? qu'est ce que l'on transporte ?

Propagation d'une onde de lumière, onde électromagnétique qui est guidée par la fibre (reflexion totale sur les parois).

2- Onde de tension n'est pas une onde électromagnétique ? la lumière est elle une onde de tension ? Quelle est la grandeur qui se propage dans une onde lumineuse ?

Onde de tension est une onde électrocinétique. La lumière est une onde électromagnétique. Champ électromagnétique (mais généralement B est négligeable donc on ne prend que le champ E).

3-Le champ magnétique se propage-t-il ? comment le retrouver à partir du champ électrique ?

Oui et on peut le retrouver à partir de la relation $B = (k \wedge E) / \omega$.

4- Pourquoi l'onde rebondit sur les parois de la gaine de la fibre ? Qu'impose la réflexion totale dans la fibre sur le rayon incident ? En général comment prend on l'indice dans la gaine n_2 et l'indice dans la fibre n_1 ?

L'onde se réfléchit sur les parois de la gaine de la fibre car elle est moins réfringente que le cœur de la fibre. Avoir une réflexion totale dans la fibre impose que $i_i > \arcsin(n_2/n_1)$. On prend en général $n_2 \ll n_1$.

5-L'équation des télégraphiste est-elle linéaire ? est elle dispersive ? est qu'il y a absorption dans cette équation ? peut on la rendre non dispersive ? connaissez vous des équations non dispersive ?

Oui il y a dispersion et absorption (k_i non nul). L'équation de d'Alembert pour laquelle on trouve $k = \omega/c$ et $V_g = V_{ph}$ est une équation non dispersive. On retrouve une équation non dispersive à partir de l'équation (1) en enlevant les résistances dans le schéma du câble coaxial (cf DUNOD tout en un).

6- Dans votre 3eme partie, vous avez considéré que $\omega > \omega_p$ que se passe-t-il quand $\omega < \omega_p$?

k est purement imaginaire et donc k^2 est négatif. On obtient des ondes purement évanescences qui ne se propagent pas dans le plasma. Attention, il n'y a pas de dissipation dans le milieu, toute l'énergie que l'onde transmet au milieu revient à l'onde, ainsi globalement, l'énergie est totalement réfléchi sur l'interface air/ionosphère.

7- Peut on faire un parallèle entre le métal et le plasma ? si oui quelles seraient les différences ?

Comme dans un métal, le plasma possède des électrons libres. Parce qu'on s'intéresse majoritairement à des plasmas dilués, les collisions sont souvent négligées, et donc on néglige la dissipation d'énergie. Dans un métal, on a un phénomène de dissipation, donc l'énergie sera en partie absorbée.

8- Quelles sont les hypothèses fondamentales pour trouver les équations du plasma ? pouvez vous remonter à la conductivité ?

La vitesse des électrons est faible devant c on peut donc négliger l'effet du champ magnétique sur ces particules. On redonne la conductivité en faisant le PFD avec la force de Lorentz on trouve $\gamma = i (n_e e^2) / (\omega m_e)$

9-Pouvez-vous donner la loi d'ohm dans le cas d'un métal ? est ce la même que dans le plasma ? Quelle est la conductivité du cuivre ?

$J = \sigma E$ avec $\sigma = n_e e^2 \tau / m$. Dans un métal la conductivité est réelle car elle dépend des collisions des électrons (cf modèle de Drude). Alors que dans un plasma la conductivité est imaginaire car il est peu dense et on limite les collisions. La conductivité du cuivre est d'environ 10^7 S.m^{-1} .

Pour les fréquences proches du visible ou des UV, il faut prendre en compte les deux effets (pulsation plasma et effet Joule), on a donc une conductivité complexe.

10- Pouvez-vous redéfinir ce qu'est un paquet d'onde ?

Le paquet d'onde est une superposition continue d'ondes planes harmoniques, dont la fréquence varie dans une petite plage de fréquences autour de la fréquence centrale du paquet.

11- Comment appelle-t-on un milieu où k est réel ?

Un milieu transparent. Il n'y a pas d'absorption dans un tel milieu.

12- Qu'est ce qui permet de dire que l'onde moyenne est le terme « $\exp(i(\omega_0 t - k_0 x))$ » ou dit d'une autre manière, que la fréquence qui est la plus grande est l'onde moyenne ?

L'enveloppe est composée de fréquences beaucoup plus petites que ω_0 , c'est donc forcément l'enveloppe du signal.

13- Pourquoi avoir choisi de partir de l'équation des télégraphistes ?

Car elle est liée à l'expérience introductive du câble coaxial et cela permet d'avoir une expérience sur laquelle s'appuyer tout au long de la leçon.

14- Connaissez-vous des ondes mécaniques qui se dispersent ?

Corde avec des frottements fluides.

15- La propagation du son dans l'air est-elle dispersive ?

Non, pas à notre échelle.

16- L'air est-il dispersif pour les ondes électromagnétiques ?

En toute rigueur l'air est un milieu matériel comme un autre et doit donc être considéré comme dispersif mais la dispersion due à l'air est généralement négligée. Il est donc souvent considéré comme un milieu non dispersif.

17- Peut on faire un lien avec la dispersion des couleurs en optique géométrique ?

Dans l'expérience de Newton, il s'agit d'une dispersion spatiale de l'onde, alors qu'ici on parle plutôt d'une dispersion temporelle d'un paquet d'onde. Les deux sont reliés par les caractéristiques ondulatoires.

18- Pouvez vous définir ce qu'est l'indice optique ?

$n = c / V_{ph}$ et caractérise un milieu.

19- Si je prend un tuyau dans l'air pour guider le son qu'est ce que j'observe ?

On observe des phénomènes de dispersion due à l'existence de modes de propagation dans le tuyau.

Commentaires donnés par l'enseignant

Il faut faire attention à bien définir ce que l'on envoie dans le câble coaxial : un créneau est différent d'un paquet d'onde.

Il faut aussi faire attention à bien différencier l'absorption de l'atténuation. On peut avoir atténuation de l'onde sans absorption de l'énergie (cf. le plasma), comme on peut avoir les deux (cf. métal)

Savoir différencier le cas du métal et du plasma et montrer que dans le cas du métal la densité de courant j est réelle et il y a un phénomène d'absorption et que dans le cas du plasma j est un imaginaire pur, il n'y a donc pas d'absorption.

C'est bien de montrer d'où vient la vitesse de groupe et pourquoi il y a un étalement du paquet d'onde mais pas la peine de faire le développement jusqu'à l'ordre 2.

C'est une leçon où l'on doit parler de fibre optique ! Expliquer que la dispersion totale dépend de l'ouverture numérique qui dépend de n_1 l'indice à l'intérieur de la fibre et n_2 l'indice de la gaine.

On peut aussi parler des ondes mécaniques : ondes capillaire/gravitaire, instrument de musique ou des ondes de matière en quantique !

Il est possible d'utiliser l'équation de Kramers-König pour montrer que dispersion et absorption d'un matériau sont reliés. Il est donc indispensable de parler d'absorption dans cette leçon, même si le titre ne le mentionne pas.

On peut aussi introduire le modèle des solitons qui sont solution d'une équation d'onde non linéaire, ce qui permet d'éviter l'étalement du paquet d'onde.

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.)

La forme est ok, mais l'exemple choisi en première partie est très (trop) compliqué, surtout si on n'en fait rien après. Si les choix un à un sont raisonnables, l'ensemble de la leçon apparaît trop « taupinale » (des calculs mais pas beaucoup d'applications)

S'assurer de traiter au moins deux domaines de la physique, c'est une leçon très transverse !

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates

Fondamentales :

Dispersion, absorption, paquet d'ondes, relation de dispersion, vitesse de phase, de groupe

Secondaires :

Optique : Fibre optique

Élec : câble coaxial

Mécanique : cuve à ondes, instrument de musique

Quantique : dispersion d'un paquet d'onde dans le vide (cf. TD de mécanique quantique)

Compensation des effets non-linéaires : Solitons ! Autofocalisation en optique, les ondes en magnétisme (cf. sujet C de 2019)

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)

Cuve à ondes

Câble coaxial

Bibliographie conseillée

Perez d'électromagnétisme

Solitons

Taillet, optique (pour la fibre optique en particulier)

Dettwiller, qu'est-ce que l'optique géométrique (pour la culture générale sur les OEM)