Titre : LP 27 (Ondes 2) : Ondes électromagnétiques dans les diélectriques

Présentée par : Gabriel Gouraud **Rapport écrit par** : Pierre-Eloi Nielen

Correcteur : Richard Monier **Date** : 4 novembre 2019

Bibliographie de la leçon :

Titre	Auteurs	Éditeur	Année
Electromagnétisme 4	**BFR**		

Plan détaillé

I. DLHI

II. Origine microscopique de la susceptibilité

III. Milieux anisotropes

Niveau choisi pour la leçon : L3

Pré-requis : - électromagnétisme dans les milieux diélectriques
- notation complexe
- ondes électromagnétiques.

I.DLHI

1) Hypothèses des DLHIs

On se place dans un milieux diélectrique, i.e non conducteur, que l'on suppose :

- linéaire : $\vec{P}=\varepsilon_0[\chi_e(\vec{r},\omega)]\vec{E}$,
- homogène : $\vec{P}=\varepsilon_0[\chi_e(\omega)]\vec{E}$,
- isotrope : $\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e(\omega)\vec{E}$.

On a donc la relation suivante pour le vecteur déplacement électrique :

$$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} .$$

On va négliger l'effet de l'aimantation : $\mu_r\approx 1$, d'où :

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0} .$$

2) Relation de dispersion

On peut écrire les équations de Maxwell de la façon suivante dans le DLHI :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_{libres}=0 ,$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 ,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{-\partial\vec{B}}{\partial t} ,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} .$$

En écrivant les champs sous la forme d'une amplitude proportionnelle à un facteur $e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$, on peut réécrire :

$$\vec{k}\cdot\vec{E}=0 \quad \text{et} \quad \vec{k}\cdot\vec{B}=0 ,$$

ainsi que :

On a donc :

$$\vec{k} \times (\omega \vec{B}) = \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -k^2 \vec{E} = \frac{-\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

On en déduit la relation de dispersion :

$$k^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} = n^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 ,$$

où l'on a posé $n^2 = \varepsilon_r$ l'indice du milieu.

<u>3) Propriétés physiques</u>

ε_r peut être complexe :

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' + i \varepsilon_r'' .$$

Et donc, en choisissant le repère de sorte que l'axe de propagation doit l'axe des *x*, on a :

$$k = k' + i k'' .$$

Ainsi, les facteurs exponentiels vont s'écrire :

$$e^{i(\omega t - k x)} = e^{k'' x} e^{i(\omega t - k' x)} ,$$

où le second terme exponentiel décrit la propagation, tandis que le premier décrit, selon le signe de k'' , l'absorption ou l'amplification.

Dans la relation de dispersion, cela se traduit par :

$$k'^2 - k''^2 = \varepsilon_r' \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

et

$$2 k' k'' = \varepsilon_r'' \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 .$$

Pour éviter que l'amplitude de l'onde diverge, ce qui ne serait pas physique, on doit prendre $\varepsilon_r < 0$.
Calculons la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n'} .$$

Comme $n = n(\omega)$, il y a de la dispersion.

II. Origine microscopique de la susceptibilité

1)Polarisabilité

On trouve dans le milieu des charges liées. L'application d'un champ électrique extérieur va donc engendrer la formation de dipoles électriques.

*Polarisabilité électronique : correspond à la déformation du nuage électronique. On va modéliser l'atome par un oscillateur harmonique amorti : c'est le modèle de l'électron élastiquement lié.
Les fréquences typique sont de 10^{14} à 10^{16} Hz (UV-visible), et les longueurs d'ondes grande devant la taille des dipôles (taille atomique), ce qui permet de considerer le champs électrique comme uniforme.

La polarisabilité α s'exprime :

$$\alpha = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} .$$

*Polarisabilité atomique : mise en vibration des liaisons entre atomes dans les molécules, à des fréquences typiques de 10^{13} Hz (IR), également selon un modèle d'oscillateur harmonique amorti.

*Polarisabilité d'orientation : si le milieu contient des dipôles permanents (molécules polaires), ils s'alignent dans la direction du champ (en competition avec l'énergie thermique). Les dipôles sont régis par l'équation :

$$\tau \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E} .$$

En régime sinusoïdal forcé, on montre alors que :

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + i\omega\tau} .$$

2) Susceptibilité

La polarisabilité est reliée à la susceptibilité ainsi qu'à l'indice optique par :

*dans les milieux dilués, avec N la densité de porteurs de charge

$$\chi_e = N\alpha = n^2 - 1 ,$$

**dans les fluides apolaires, les solides anisotropes vitreux et les cristaux cubiques

$\frac{n^2-1}{n^2-2}=\frac{N\alpha}{3}$ (relation de Clausius-Mossotti).

III. Anisotropie

1) Lames retard

*Dans les milieux uniaxes, on a deux valeurs pour ε_r :

$\varepsilon_1=\varepsilon_2\neq\varepsilon_3$.

*Dans les milieux uniaxes, on a deux valeurs pour ε_r :

$\varepsilon_1\neq\varepsilon_2\neq\varepsilon_3$.

On s'intéresse aux milieux uniaxes. On a alors deux permittivités $\varepsilon_{r,o}$ et $\varepsilon_{e,o}$ auxquelles on associe respectivement l'indice ordinaire n_o , qui est l'indice suivant les axes propres ainsi que l'indice extraordinaire n_e qui est l'indice suivant l'axe dit axe optique.

On considère une lame d'épaisseur e perpendiculaire à l'axe de propagation Oz. On choisit l'ax Ox comme axe optique. La lame introduit un déphasage

$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)e$.

*Pour une lame quart d'onde : $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$. Une polarisation rectiligne devient circulaire.

*Pour une lame demi-onde, $\Delta\varphi=\pi$. Une polarisation circulaire devient circulaire inversée.

2) Biréfringence

$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$,

$(\vec{k},\vec{D},\vec{B})$ forment un trièdre direct, de même que $(\vec{\Pi},\vec{E},\vec{B})$ (car $\vec{\Pi}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$).

Donc $\vec{E}$ et $\vec{D}$ ne sont pas colinéaires, et $\vec{\Pi}$ et $\vec{k}$ non plus.
Relation de continuité de $\vec{D}$:

- =

$$\vec{D}=\varepsilon_0[\varepsilon_r(\omega)]\vec{E}$$

$$\vec{D}=\begin{pmatrix} D_{x'} \\ 0 \\ D_{z'} \end{pmatrix}=\varepsilon_0\begin{pmatrix} n_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{x'} \\ 0 \\ E_{z'} \end{pmatrix}$$

$$\frac{D_{x'}}{D_{z'}}=\left(\frac{n_o}{n_e}\right)^2\frac{E_{x'}}{E_{z'}}$$

d’où :

$$\frac{1}{\tan\alpha}=\left(\frac{n_0}{n_e}\right)^2\frac{1}{\tan\alpha'}$$

Donc :

$$\tan\alpha=\left(\frac{n_0}{n_e}\right)^2\tan\alpha'$$

Questions posées par l'enseignant

Comment démontrer l'expression de $\alpha(\omega)$? (modèle de l'électron élastiquement lié).

Dans l'équation $\tau \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$, d'où vient τ et quel est son ODG ?

Le problème est-il mieux traité quantiquement ? Comment faire ?

Dans le modèle de l'électron élastiquement lié, quelle force représente la force de Coulomb ?

Toujours dans ce modèle, quelle force n'existe pas pour un conducteur ?

Comment expliquer la couleur du cuivre ?

Dans le graphe de l'absorption en fonction de la fréquence, qu'est-ce qui change avec l'état physique du milieu ?

Commentaires donnés par l'enseignant

C’est bien géré et bien mené dans l’ensemble, les choix sont bien justifiés. C’est très bien d’avoir pensé à préciser que l’on peut faire l’hypothèse d’uniformité du champ électrique si la taille du dipole est petite devant la longueur d’onde, et de na pas avoir eu besoin de ses notes.

On aurait pu parler plus des différents types de propagation (plusieurs régimes de pulsations), et passer plus de temps sur le modèle de l’électron élastiquement lié (en faisant un beau schéma). Il faut bien penser à proposer une ouverture en conclusion.

Partie réservée au correcteur

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.)

Bonne presentation. Le traitement des milieux anisotropes est original. Vous avez une bonne maitrise du sujet et regardez peu vos notes et gerez bien votre temps.
Attention a certaines notations : indiquer clairement les derivees partielles (et non droites), distinguer entre quantites reelles et complexes (placer un tilde en dessous des champs complexes par exemple).
Quelle ouverture proposer en conclusion ?

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates

Penser a enoncer toutes les forces intervenant dans le modele de l’electron elastiquement lie ainsi que leurs significations physiques et a souligner les limitations de ce modele.
Introduire et definir toute nouvelle grandeur : que signifie tau et quel est son ordre de grandeur ?

Expériences possibles (en particulier pour l’agrégation docteur)

L’experience choisie est bien presentee et exploitee.

Bibliographie conseillée

Brebec et al, Electromagnetisme PC*, Hachette Sup (livre vert)

Note indicative : 15-16 ou B+/A-