Titre : Oscillateurs ; portraits de phase et non linéarités

Présentée par : Camille Meridja **Rapport écrit par** : Richard Wild

Correcteur : Stéphan Fauve **Date** :18/02/2020

Bibliographie de la leçon :			
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**	**Année**
Le portrait de phase des oscillateurs BUP n°744	H.Gié, Sarmant		
Electronique	Pérez		
Vibrations, propagation, diffusion	Soutif		
Electronique expérimentale	Krob		
L'ordre et le chaos	Bergé, Pomeau, Vidal		

Plan détaillé

Niveau choisi pour la leçon : Licence

Prérequis : - Mécanique : oscillateur harmonique, pendule
-Electronique : - caractéristiques dipôles, ARQS, AO, RLC série

I) Analyse des oscillations, portraits de phase
II)Dissipations et non linéarités

Intro : Oscillateurs présents partout en physique et ailleurs (ex : battements du cœur en médecine, réaction de Belousov-Zhabotinsky en chimie...). On s'intéressera uniquement à des systèmes périodiques car signaux non périodiques décomposables en somme de signaux périodiques (Fourier).

1 minute

I) Analyse des oscillations, portraits de phase

Def oscillateur : un système présentant alternativement une évolution croissante et décroissante de l'une de ses caractéristiques.

A)Oscillateur harmonique

Oscillateur parfait (pas d'amortissement, linéaire, oscillations sinusoïdales) =>modèle du ressort parfait

Equation de l'OH : $x''+w^2x=0$ (linéaire, réversible, soluble analytiquement)

Solution : $x(t)=x0\cos(wt) + (x0'/w)\sin(wt)$

On peut s'intéresser à $x'(x)$

Portrait de phase : représentation des trajectoires $x'(x)$ dans l'espace des phases.

Pour l'OH par conservation de l'énergie on a $x'^2+wx^2=$ constante : ellipse dans l'espace des phases

Slide : portrait de phase de l'OH et commentaire (orientation des ellipses, trajectoires fermées, symétrie par rapport à l'axe des x ⇔réversibilité car pas de dissipation)

Et si on a de la dissipation

Slide OH amorti : spirale de centre (o,o)

Def point fixe : point de l'espace des phases tel que $x'=0$ et $x''=0$

Analogie avec les positions d'équilibre en méca , on peut regarder la stabilité de ces points

Ici point fixe (0,0) stable et même est un attracteur.

Mais modèle très simple, sans effet de non-linéarité

12 minutes.

2)Equation du pendule

x'' + w²sin(x)=0

Equation non linéaire et réversible

Point fixe : - x'=0
-x''=0=sin(x)

➔infinité de points fixes (0,0 [pi])

Calcul stabilité des points fixes :
-Autour de (0,0 [2pi]) on retrouve les ellipses de l'OH
-Autour de (0,pi [2pi]) : une branche stable et une branche instable

Slide : portrait de phase du pendule
Portrait réversible, présence d'un mouvement révolutif pour x' élevé, on retrouve l'OH pour x' faible. On observe des ellipses déformées => régime pseudo-périodique

Slide formule de Borda

On vient d'étudier deux modèles idéalisés sans dissipation. Modèles réels avec dissipation : Il faut compenser les pertes pour conserver les oscillations

22 minutes

II)Dissipation et non linéarité

Slide : Trois types d'oscillateurs entretenus : forcés, excitation paramétrique, auto-entretenus

➔on va s'intéresser aux oscillateurs auto-entretenus qui produisent des solutions quasi-sinusoïdales → oscillateurs quasi-sinusoïdaux

A)Circuit RLC

Schéma électrique du circuit + équation du circuit

On voit un terme dissipatif à cause des pertes résistives de la résistance r, qu'il faut compenser.

On impose une résistance négative -R à l'aide d'un AO : slide montage à résistance négative

On peut avoir R=r : ça marcherait mais c'est non réalisable en pratique

En pratique on impose R>r : on a un régime d'amplification. Mais l'amplification est limitée par la saturation de L'AO
30 minutes

B) Montage à résistance négative

Sur slide : régime linéaire de l'AO + deux régimes non-linéaires (saturation haute et basse)

Equation en régime linéaire : terme d'amplification présent

Equation en régime non-linéaire : terme d'atténuation

Slide : portrait de phase de l'oscillateur à résistance négative
On voit des cercles déformés => effet des non-linéarités, on a un oscillateur quasi-sinusoïdal
Tracé du portrait de phase pour différents facteurs de qualité Q :
Pour des Q élevés on obtient des cercles presque parfaits avec toujours des effets de non-linéarités

Sur slide : généralisation à des systèmes d'équation :

$x'' + A(x)x' + w^2x = 0$ avec A(x) traduisant les non-linéarités

37 minutes

Questions posées par l'enseignant
Tu peux redonner ta définition d'oscillateur ? Ca ne suffirait pas de dire que c'est un système avec un fonctionnement périodique ? Tu peux redonner ta définition du portrait de phase ? Si l'équation avait été x'+wx=0 quel aurait été l'espace des phases ? Tu peux dessiner les trajectoires de phase ? ⇨ Espace des phases : juste x. Espace des phases= variables intervenant dans le système d'EDL1. La définition donnée avant ne marche que pour les systèmes d'ordre 2 Tu as dis que les trajectoires fermées dans l'espace des phases ne sont pas toujours périodiques, tu peux préciser ? ⇨ C'est ce qui est écrit dans un paragraphe du BUP, cependant l'argument y est flou et faux pour l'enseignant. Tant qu'on est sur une orbite fermée on a un mouvement périodique Pour le pendule, si on se place près d'une orbite hétérocline comment varie l'angle en fonction du temps ?

⇨ On a presque un signal carré, modèle de l'oscillateur à relaxation

Qu'est ce que le Q du circuit ? Il est constant dans le cas général ? On ne peut pas définir une autre grandeur caractéristique ?

⇨ On peut définir un temps tau d'amortissement

Commentaires donnés par l'enseignant

Manipulations possibles pour les docteurs : formule de Borda pour le pendule, bifurcation du pendule conique

Avis sur le plan : La partie I est nécessaire, il faut définir ce qu'est un portrait de phase et montrer leur utilité. Le titre n'impose cependant pas de parler d'oscillateurs entretenus, on peut enlever toute cette partie. De manière générale, il faut insister sur le fait qu'un portrait de phase est utile pour décrire le fonctionnement d'un système sans calculs lourds dans une première partie avec toutes les définitions, puis parler dans un second temps d'effets non-linéaires comme la période dépendant de l'amplitude et la génération d'harmoniques au minimum.
On peut discuter un peu plus sur le pendule, parler plus profondément de la réversibilité et des orbites hétéroclines. Le calcul de Borda peut aussi être fait si le temps le permet. On peut aussi parler de frottements solides.

Partie réservée au correcteur

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.)

Plan correct dans l'ensemble. Il n'est pas obligatoire de traiter le cas d'un oscillateur auto-entretenu dans cette leçon.

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates

Il est indispensable de définir correctement l'espace des phases et de montrer comment il peut être exploité pour décrire qualitativement le comportement de solutions d'une équation différentielle sans avoir à l'intégrer explicitement. Il faut par ailleurs discuter les principaux effets non linéaires dans le cas des oscillateurs, à savoir, variation de la fréquence en fonction de l'amplitude et création d'harmoniques.
On peut discuter l'effet de la dissipation sur un portrait de phase puis indiquer qu'il faut fournir de l'énergie pour obtenir un comportement oscillant d'un système dissipatif (différentes façons de le faire : forçage additif, forçage paramétrique, instabilités à résistance négative ou autre).

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)

Mesure de la période d'un pendule en fonction de son amplitude d'oscillation.
Pendule pesant en rotation autour de son axe : tracer le portrait de phase au dessous et au dessus de la vitesse angulaire critique.
Pendule paramétrique, étude de la résonance sous-harmonique.

Bibliographie conseillée

En plus de celle indiquée
Landau et Lifchitz, Mécanique, pour les oscillateurs en général et l'effet des non-linéarités sur l'oscillateur forcé en particulier.