Titre : Ondes progressives, ondes stationnaires (LP13)

Présentée par : Rémy BONNEMORT **Rapport écrit par** : Julie CORJON

Correcteur : Fabrice Debbasch **Date** :13/09/19

Bibliographie de la leçon :			
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**	**Année**
Physique Tout-en-un PSI/PSI* **Côte Bibliothèque : PhA1 DUN**	S. Cardini, E. Ehrard, A. Guerillot	Dunod	2014
Site : « Figures animées pour la physique-Ondes stationnaires » Lien :http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/ondes_stationnaires/stationnaires.php?fbclid=IwAR1iZjjSkJra-4gNnown4ptLN7zXbK0yMcOdBnMW2zETfqgY0t5bl-JWcjY	Geneviève Tulloue		2001-2019
Vidéos E-learning physique sur les ondes (playlist de 4 vidéos « PC-PSI Physique des ondes- corde vibrante ») **De niveau CPGE**	Benoît Hébert		
Compte rendu 2018-2019 LP24	Hugo Roussille		2018-2019
Wiki Montrouge : onglet « agrégats » LP24			

Plan détaillé

I/Equation de d'Alembert et ondes progressives

1)Ondes électromagnétiques dans le vide

2) Equation de d'Alembert : formulation et propriétés

3) Ondes progressives, solutions de l'équation de d'Alembert

4)Ondes progressives harmoniques

II/Les ondes stationnaires

1)Superposition de deux ondes progressives harmoniques de sens de propagation opposé

2)Ondes stationnaires : solutions de l'équation de d'Alembert ?

3) Corde fixée à ses deux extrémités

Niveau choisi pour la leçon : CPGE

Pré-requis :

- Equations de Maxwell
- Equations différentielles aux dérivées partielles
- Opérateurs mathématiques (grad, div, rot, laplacien)

Remarque du scribe : en noir, ce qui était écrit au tableau, en bleu, ce qui a été dit par Rémy à l'oral

Intro : Pourquoi est-il important de s'intéresser aux ondes ? Car elles sont reliées à des phénomènes dans de nombreux domaines : acoustique, mécanique, électromagnétique, mécanique quantique. Présentation du plan **1'10**

I/Equation de d'Alembert et ondes progressives

1)Ondes électromagnétiques dans le vide

On suppose le vide de Maxwell :
{roh =0 , j=0}

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \{\rho = 0 \,;\, \vec{j} = \vec{0}\}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Mise en place de l'équation de d'Alembert pour le champ E puis pour le champ B :

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = \vec{\nabla}(\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}) - \Delta\vec{E}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = -\Delta\vec{E} \qquad \mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\Delta\vec{E}$$

⚠ ne pas oublier le vecteur

EA tridimensionnelle $\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

définition de la célérité $[c] = L T^{-1}$

c vaut ici la vitesse de la lumière, ce n'est pas toujours le cas

$$-\Delta\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})$$

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Dans ce cas, c désigne la vitesse de la lumière, mais la célérité dépend du domaine des ondes concerné, ce que nous verrons dans la partie suivante. **5'**

I/Equation de d'Alembert et ondes progressives

2) Equation de d'Alembert : formulation et propriétés

Pour un champ scalaire s(r,t), l'équation de d'Alembert s'écrit

en 3D $$\Delta s(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

en 1D (coordonnées cartésiennes) $$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Propriétés de l'équation :

- c a la dimension d'une vitesse
- L'équation de d'Alembert est réversible : si on fait le changement de variable t -> -t, cela ne modifie pas l'équation.
- L'équation de d'Alembert est linéaire : si s1(r,t) et s2(r,t) sont solutions, alors pour tous α et β,α.s1(r,t)+β.s2(r,t) est solution de l'équation **8'20**

I/Equation de d'Alembert et ondes progressives

3)Ondes progressives, solutions de l'équation de d'Alembert

Toutes fonctions F(x-ct) et G(x+ct) sont solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle.

Def : Une onde progressive désigne une propagation d'énergie, sans transport de matière.
F(x-ct) correspond à une propagation dans le sens des x croissants, c'est une onde progressive.
F(x-ct) correspond à une propagation dans le sens des x croissants, c'est une onde régressive (ou contre-progressive).

Animation 1 : superposition de deux ondes se propageant en sens contraire
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/ondes_stationnaires/stationnaires.php?fbclid=IwAR1iZjjSkJra-4gNnown4ptLN7zXbK0yMcOdBnMW2zETfqgY0t5bl-JWcjY

Sur cette animation, on peut observer deux ondes sinusoïdales (une progressive et une régressive) se propageant. On peut s'intéresser à leur vitesse de propagation. **10'40**

I/Equation de d'Alembert et ondes progressives

4)Ondes progressives harmoniques

Une onde progressive harmonique est de la forme

s(x,t) = s0 cos(wt - kx + φ). Ici, cette onde se propage dans le sens des x croissants.

On a w =2πf , qui décrit la période temporelle de l'onde

Et k=2π/λ , qui décrit la période spatiale de l'onde

Notation $\mathbb{C}$:

$$\underline{s}(x,t) = s_0 e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$$
$$= s_0 e^{j\varphi} e^{j(\omega t - kx)}$$
$$= \underline{s_0} e^{j(\omega t - kx)}$$

Déterminons maintenant la relation de dispersion pour cette onde progressive sinusoïdale :

Relation de dispersion :

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

$$(-jk)^2 \underline{s}(x,t) - \frac{1}{c^2}(j\omega)^2 \underline{s}(x,t) = 0$$

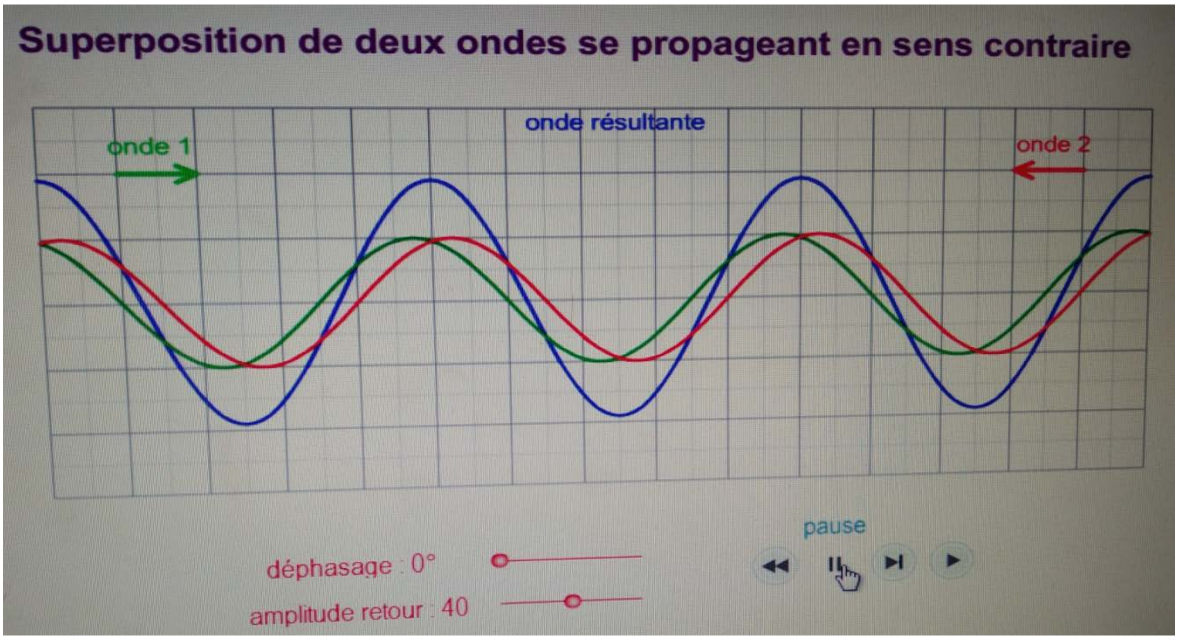
$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$ relation de dispersion

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$$

Transition : on peut maintenant se demander ce qu'il se passe quand on superpose les ondes d'expression F(x-ct) et G(x+ct).

Retour sur l'animation : Quand les deux ondes se superposent, on observe en certains points des maxima et des annulations d'amplitude. **17'30**



II/Les ondes stationnaires

1)Superposition de deux ondes progressives harmoniques de sens de propagation opposé

Travaillons en notations réelles :

$s_+(x,t) = s_o \cos(wt-kx)$

$s_-(x,t) = s_o \cos(wt+kx)$

Ces deux ondes ont ici la même amplitude et la même fréquence.

On a : $s(x,t)= s_+(x,t) + s_-(x,t)$

$= s_0(\cos(wt-kx)+\cos(wt+kx))$

$= 2s_0 \cos(wt) \cos(kx)$

Def : une onde stationnaire est une onde pour laquelle les variables de temps et d'espace sont découplées. Son expression est de la forme $s(x,t)=f(x)g(t)$.

On appelle nœuds les points pour lesquels l'amplitude de l'onde est nulle.

On appelle ventres les points pour lesquels l'amplitude de l'onde est maximale.

Pour l'instant, rien ne garantit que $s(x,t)$ soit solution de l'équation de d'Alembert, c'est ce que nous allons maintenant vérifier. **23'40**

II/Les ondes stationnaires

2)Ondes stationnaires : solutions de l'équation de d'Alembert ?

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Avec s décrivant une onde stationnaire de la forme s(x,t)=f(x)g(t). De plus, on suppose que f(x)≠ 0 et g(t)≠0. On considère qu'une onde stationnaire possède au moins deux points fixes de l'espace et du temps où l'amplitude s'annule.

$$g(t)f''(x) - \frac{1}{c^2} f(x)\ddot{g}(t) = 0$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = K$$

Résolution de $\frac{f''(x)}{f(x)} = K$

3 cas possibles :

$K=0$ $f(x) = \alpha x + \beta$ → ne peut s'annuler 2 fois ⇒ IMPOSSIBLE

$K>0$ $f(x) = A e^{\sqrt{K}x} + B e^{-\sqrt{K}x}$ → diverge en $\pm\infty$, à moins que $A=0$ et $B=0$

$K<0$ $K = -k^2 < 0$

$$f(x) = A e^{jkx} + B e^{-jx}$$
$$= A\cos(kx) + B\sin(kx)$$
$$= A\cos(kx+\varphi)$$

Résolution de $\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = K$

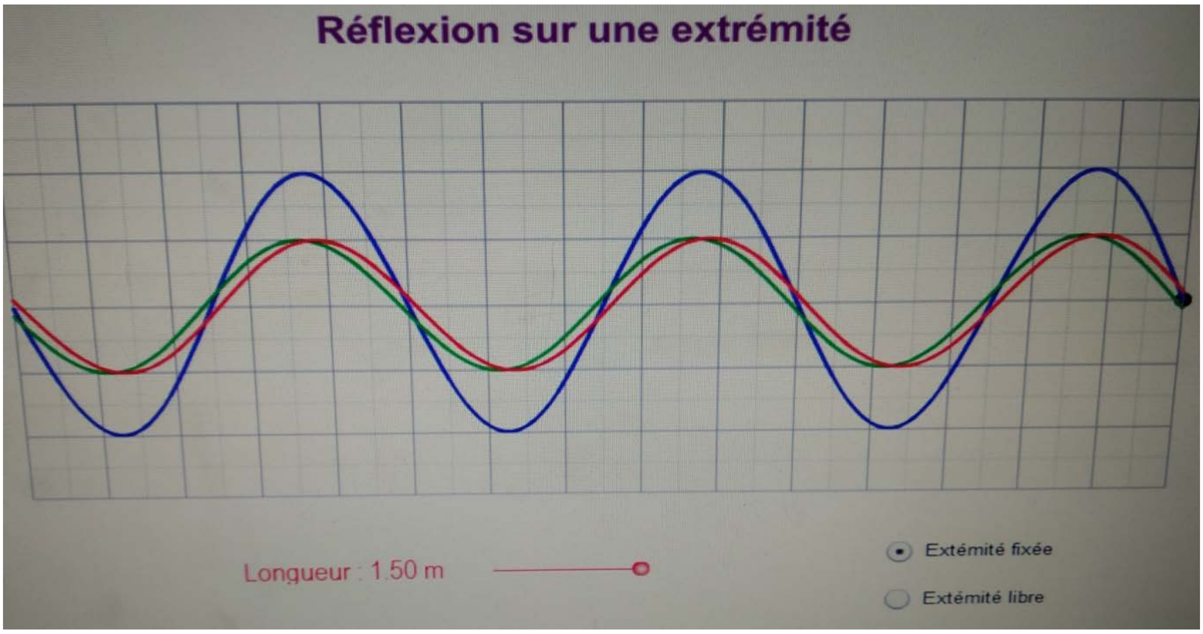
On a imposé K<0 et on pose $K=-k^2$

Donc $g''(t)=-k^2c^2g(t) = -w^2 g(t)$

D'où $g(t) = B \cos(wt+\psi)$

En conclusion, $s(x,t) = s0 \cos(kx + \varphi) \cos(wt +\psi)$

Animation 2 : réflexion sur une extrémité



La réflexion de l'onde provoque la formation d'une onde contre-progressive, d'où l'obtention d'une onde stationnaire par superposition entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. **30'50**

II/Les ondes stationnaires

3)Corde fixée à ses deux extrémités

On considère une corde de longueur L, inélastique. Cette condition permet, si l'amplitude des oscillations est suffisamment faible, de négliger les mouvements longitudinaux de l'onde par rapport aux mouvements transverses => on peut considérer l'onde transverse.

Pour tout t, les conditions aux limites sont $s(0,t) = s(L,t) = 0$.

s est de la forme $s(x,t) = s0 \cos(wt+ \varphi) \cos(wt +\psi)$

$s(0,t) =0 \Rightarrow \cos(kx+\varphi) =0$

- ⇨ $\varphi = \pi/2 +p\pi$ on choisit arbitrairement p=-1
- ⇨ $\varphi=-\pi/2$
- ⇨ $\cos(kx+\varphi) =\sin(kx)$

$s(L,t) =0 \Rightarrow \sin(kL)=0$

- ⇨ $kl= n\pi$ n entier naturel non nul
- ⇨ $k_n =n\pi/L$ Le vecteur d'onde k_n est quantifié.

$w_n =k_n c =2\pi f_n =n\pi c/L$

- ⇨ $f_n = nc/2L$: quantification des fréquences, différents modes

$w_n = n w_0$

avec $w_0 = \pi c/L$ pulsation du fondamental

Pour n=1 : mode fondamental, 1 fuseau

Pour n ≥ 2 : modes harmoniques

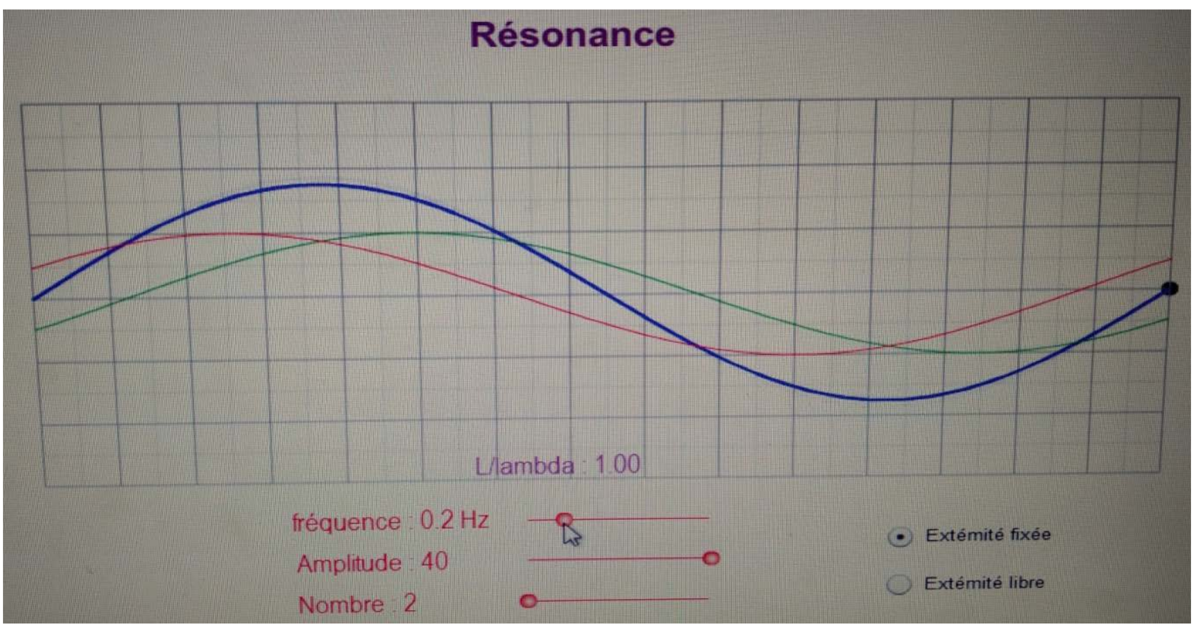
n=2 : 2 fuseaux

n=3 : 3 fuseaux

…

Animation 3 : Résonance

On peut observer sur l'animation la présence de nœuds et de ventres pour des fréquences précises, qui correspondent aux valeurs de f_n. **38'50**



Conclusion : Les élèves ici ont eu un aperçu des ondes progressives et stationnaires dans les domaines de l'électromagnétisme et de la mécanique. A la suite de ce cours, on pourrait approfondir les notions abordées, en s'intéressant par exemple à l'acoustique (étude des harmoniques, des timbres, des séries de Fourier). 39'30

Questions posées par l'enseignant

Remarque du scribe : Les questions sont en rouge, les réponses en noir, les corrections/précisions apportées par le jury en vert.
Autre remarque : les questions vont plutôt de la fin de la leçon, à son début.

Vous avez indiqué dans la conclusion avoir parlé d'ondes progressives et stationnaires en EM et en mécanique, mais vous n'avez pas écrit d'ondes progressives en EM. Ecrivez-en une.

Comment caractériser la polarisation ici ?
polarisation rectiligne selon u_y
Existe-t-il d'autres polarisations ? Circulaire, elliptique.

Peut-on créer des ondes stationnaires en EM ? Oui, mais pas dans le vide. Il peut y en avoir par réflexion d'une onde sur un conducteur.
Que voulez-vous dire par « pas dans le vide » ? Pas dans le vide car on impose des conditions aux limites. En fait, dans le vide caractérise le milieu, pas le fait qu'il n'y ait « rien autour ».

Que peut désigner l'onde s(x,t) ? une onde de pression, de vitesse en acoustique. Un champ électromagnétique.

Vous dites que vous négligez les mouvements de la corde selon x. Qu'est-ce que cela ferait si on ne négligeait pas les mouvements longitudinaux ?
on devrait considérer ds =$\sqrt{dx^2 + dy^2}$.
Quand doit-on le considérer ? Quand on applique le PFD.

Pouvez-vous relier la célérité de l'onde dans la corde à des grandeurs physiques ?
c= $\sqrt{T/\mu}$
A quoi est égale la tension de la corde ? Si on utilise une poulie, il faut savoir appliquer le théorème du moment cinétique pour relier la tension et la masse accrochée.

Pourquoi traiter la corde fixée à ses deux extrémités si ce n'est pas réalisable en pratique ?
C'est un modèle, cela offre des facilités calculatoires. De plus, si la vibration du vibreur de la corde de Melde est faible, on peut considérer qu'il y a un nœud à la place du vibreur. L'étude de la corde de Melde se rapproche alors plus de l'étude de la corde vibrante fixée aux deux bouts.

Définition d'une onde stationnaire ? Onde dont l'expression est découplée du temps et de l'espace.
Définition d'une onde ? onde dont l'expression est solution d'une équation aux dérivées partielles. Toutes les ondes ne doivent pas vérifier l'équation de d'Alembert.

Donnez-nous une onde stationnaire qui n'est pas solution de l'équation de d'Alembert.
Pourquoi faut-il deux nœuds pour une onde stationnaire ? On a deux variables, il faut fixer les conditions aux limites. En fait, c'est parce qu'on a une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre.

Vous avez introduit la notation complexe pour obtenir la relation de dispersion. Est-ce obligatoire ?
Non, on peut également l'obtenir en notation réelle.

Quel est le lien entre s(x,t) et s(x,t) ? s(x,t) est le module de s(x,t). NON ! s(x,t) est la partie réelle de s(x,t). C'est la raison pour laquelle les équations sont correctes en termes d'amplitude, pas en termes d'énergie (1/2 Re(u x u*))

Pourquoi donne-t-on le nom « relation de dispersion » ? on peut déduire de cette relation la vitesse de groupe et celle de phase. Si $v_\varphi \neq v_g$, on peut dire que le milieu « disperse » l'onde. Quand le lien entre w et k n'est pas linéaire, il y a dispersion.

Y a-t-il un déplacement de matière dans la corde ? (relatif à la définition de l'onde progressive : déplacement d'énergie sans déplacement de matière) Il n'y a pas de déplacement de matière selon la direction de propagation, de même que pour une vague.

Pourquoi $v_\varphi=v_g$ ici ? On a une unique pulsation ici. Dès l'instant où l'on a affaire à un phénomène faisant intervenir plusieurs pulsations, il apparait un dw et la vitesse de groupe peut différer de la vitesse de phase.

Qu'est-ce que la matière pour vous ? atomes, molécules, particules, sans oublier les photons. Définition la plus large utilisée en relativité générale : Tout sauf le champ de gravitation.

La notion de propagation ne concerne-t-elle que les ondes harmoniques ? Non, les ondes sphériques aussi. Exemples ? goutte d'eau sur une flaque. Autre exemple ?

Pourquoi peut-on dire que F(x-ct) se propage dans le sens des x croissants ?

Quand on enseigne ce cours, c'est le point le plus difficile pour les élèves, c'est à démontrer au sein de la leçon. A faire proprement, avec les couleurs, la forme de l'onde…

Quel est l'intérêt de la linéarité de l'équation de d'Alembert ? Tout signal périodique peut se décomposer en somme de signaux sinusoïdaux d'après le théorème de Fourier.
Qu'est ce que le théorème de Fourier pour vous ? Et quand l'onde n'est pas périodique ?
Le théorème de Fourier, c'est trop général comme réponse. On peut avoir affaire à :

- **la transformée de Fourier, fonction L2 qui décroît en l'infini**
- **la transformée de Fourier discrète, beaucoup utilisée en traitement du signal, pour les fonctions non périodiques notamment**
- **les séries de Fourier.**
  Il est risqué de parler de Fourier si on a pas une idée sur la notion de Fourier concernée dans le cas abordé. Il est intéressant d'avoir des notions sur les bases, les espaces de Hilbert…
-

Pourriez-vous définir ΔE (vecteur sur Δ et vecteur sur E) ? Il s'agit du laplacien vectoriel, d'expression :

$$\vec{\Delta}\vec{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Comment passer du laplacien vectoriel au laplacien scalaire ? Il ne faut pas juste appliquer la définition à chaque composante du laplacien exprimé avant.

Commentaires donnés par l'enseignant

Remarque du scribe : pour des raisons de lisibilité, les propos de M. Debbasch sont ici en noir et plus en vert.

- **En quelle filière de prépa voit-on ce cours, avec quoi avant et quoi après ? Cela doit donner la stratégie du plan de la leçon. PC/PSI/MP . Ici ce plan ne tient pas vraiment la route : si les ondes vectorielles sont abordées, c'est qu'on a déjà vu les ondes scalaires. De plus, il y a une fausse diversité des domaines des ondes. D'après M. Debbasch, il serait mieux de faire une leçon sur les propriétés de l'équation de d'Alembert « on a vu dans un cours précédent l'équation d'onde en hydrodynamique, on l'a démontrée sur la corde, et dans le cas des ondes EM ; le but de cette leçon est l'étude des propriétés de l'équation de d'Alembert. »**
  En revanche, il faudra préparer ces démos sur transparent.

- **A la fin de la leçon, on peut se demander ce qu'il se passe quand on a affaire à des ondes vectorielles : il y a une polarisation.**

- **Il faut donner des exemples physiques dans cette leçon, sans aller trop loin car ce n'est pas le sujet. Il faut absolument faire une manip non totalement exploitée dans cette leçon, mais avec une mesure à la clé.**

Si on fait la corde de Melde, il faut préparer savoir obtenir l'équation der d'Alembert par un calcul de mécanique, que l'on pourra par exemple préparer sur transparents.

- **Très bonne animation.**

- **Onde scalaire à 1D : onde dans un tuyau**

Onde scalaire à 2D : goutte dans une flaque
Quand a-t-on affaire à des ondes 3D scalaires ? En optique, dans la diffraction.

- **Question qu'on pourrait poser : Est-ce que toutes les équations dont vous parlez sont linéaires ? Ici oui. Si les équations ne sont plus linéaires, on constate l'apparition de solutions particulières, non linéaires, appelées solitons. Et il n'y a plus de superposition, d'analyse de Fourier et de possibilité de raisonner avec les complexes!**

Définition adaptée de Wikipédia : Un soliton est une *onde solitaire* qui se propage sans se déformer dans un milieu non linéaire et dispersif. Ils sont la solution de nombreuses équations aux dérivées partielles non linéaires.
En hydrodynamique, les solitons peuvent décrire le comportement des ondes qui vont à contre-courant, et « remontent le fleuve ».En mer, ils expliquent la propagation des tsunamis.

Il y a plein de domaines de la physique où les ondes sont non linéaires. La linéarité est souvent une approximation. En revanche, la linéarité est strictement vraie pour l'électromagnétisme lié aux équations de Maxwell, ce n'est pas le cas pour les autres domaines.

- **Définition de l'onde : solution d'une équation différentielle qui admet des solutions propagatives.**

- **Il faut parler de guide d'onde et de ses applications quand on parle d'ondes stationnaires.**

- **N'oubliez jamais que le jeu de l'agrégation est de remplir le contrat, c'est-à-dire aborder et maîtriser le minimum syndical ; il vaut mieux voir moins de choses faites, que des choses mal faites.**

« Tout ce que vous dîtes sera retenu contre vous » : toute perche tendue volontairement ou involontairement sera attrapée par le jury.

Partie réservée au correcteur

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.)

Le plan de la leçon présentée était essentiellement correct, mais il manquait une expérience et le contenu n'était clairement pas assez maitrisé (même certains aspects élémentaires). Une désagréable impression de poudre aux yeux, accentuée par les tentatives d'humour déplacées du candidat.

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates

Equation de d'Alembert, solutions progressives et stationnaires, importance de la linéarité.
La leçon est facile sur le fond (attention toutefois au notions liées à l'analyse de Fourier). Ce qui est difficile est de la faire proprement, de manière lisse, en incluant une experience proprement modélisée et au moins un peu exploitée.

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)

Corde de Melde ou onde sonore dans un tuyau.

Bibliographie conseillée