

**Titre :** LP19 : Diffraction de Fraunhofer

**Présentée par :** Quentin Berrahal

**Rapport écrit par :** Berrahal/Le Bret

**Correcteur :** Jean Hare

**Date :** 15/04/20

Bibliographie de la leçon :			
Titre	Auteurs	Éditeur	Année
TD de Clément Sayrin			
Pérez Optique 5 <sup>e</sup> édition			1996
Cours de Nicolas Menguy <a href="#">Méthodes d'investigation des matériaux (MIM)</a> Pour les images de TEM			

#### Plan détaillé

##### I – Phénomène de Diffraction

1. Principe de Huygens-Fresnel
2. Calcul aux petits angles
3. Approximation de Fraunhofer

##### II – Un Phénomène limitant ?

1. La Fente rectangulaire
2. Critère de Rayleigh
3. Apodisation

## Niveau choisi pour la leçon : Licence

### Pré-requis : Optique géométrique transformée de Fourier, Interférences

Intro : Expérience : On éclaire une fente réglable avec un laser et on observe l'image à grande distance. On diminue la largeur... On lit la graduation.

Un des postulats de l'optique géométrique est que la lumière se déplace en ligne droite via des rayons lumineux. Il apparaît ici que ce n'est pas le cas ici quand on la taille des obstacles devient de l'ordre de celle la longueur d'onde de lumière.

## I – Phénomènes de diffraction

### 1. Le principe de Huygens-Fresnel

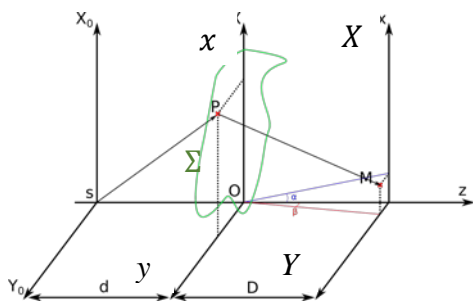
Contribution de Huygens (1678) : Chaque point P d'une surface  $\Sigma$  atteinte par la lumière se comporte comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'état vibratoire de cette source est proportionnel à celui de l'onde incidente et à l'élément  $d\Sigma$  de surface l'entourant.

Contribution de Fresnel (1818) : Les vibrations issues des sources secondaires interfèrent entre elles.

$$ds(M) = A(\theta)t(x,y)s_0(P)\frac{e^{ikPM}}{PM}d\Sigma$$

On intègre ensuite sur

Sigma.



$$s'(M) = A \iint_{\Sigma} s_0(P) t(P) \frac{e^{ikPM}}{PM} dx dy$$

On définit la transmittance  $t(P)$  par le rapport  $\frac{s(0^+)}{s(0^-)}$ , qui peut être réelle (amplitude) ou complexe (phase)

### 2. Calcul aux petits angles

Approximation de PM pour les petits angles. On suppose  $d$  et  $D$  gras devant  $x$  et  $y$ .

On écrit le vecteur  $\overrightarrow{PM}$  et  $PM^2 = D^2 \left( 1 + \left( \frac{x-X}{D} \right)^2 + \left( \frac{y-Y}{D} \right)^2 \right)$  que l'on développe.

On reconnaît les petits angles  $\alpha = \frac{x}{D}$  et  $\beta = \frac{y}{D}$  et on pose  $r^2 = x^2 + y^2$  (distance au centre de la pupille) et on obtient  $PM \approx D \left( 1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{r^2}{2D^2} + \frac{\alpha x + \beta y}{D} \right)$

On fait la même chose pour l'onde sphérique issue de S

- Ensuite, on fait l'approximation à l'ordre 0 au dénominateur car cela affecte peu  $s(M)$ .
- On omet les exponentielles complexes ne dépendant pas des coordonnées  $(x, y)$  de l'objet diffractant mais seulement de  $X$  et  $Y$  ou de  $\alpha$  et  $\beta$  (en fait on peut les factoriser et constater qu'elles n'affectent pas l'intensité mais il est abusif de les omettre purement et simplement))

$$D'où s(P) \approx \frac{As_0}{dD} e^{ikD(1+(\alpha^2+\beta^2)/2)} \iint_{\Sigma} t(x,y) e^{ik(\alpha x+\beta y)} e^{ikr^2(\frac{1}{d}+\frac{1}{D})} dx dy$$

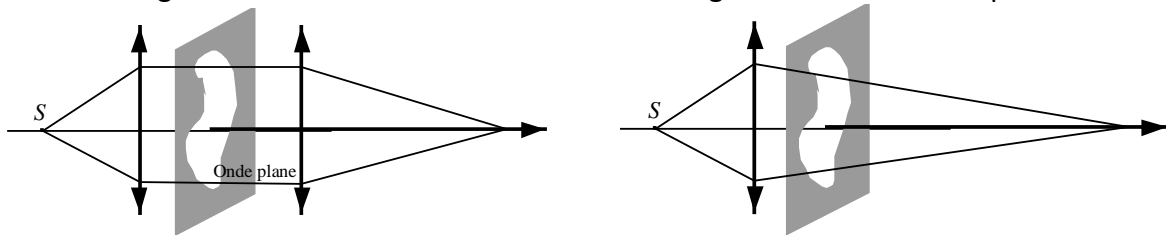
### 3. Approximation de Fraunhofer

On néglige les termes en  $r^2$  et on observe donc que  $s(M)$  est proportionnel à la TF de  $t(x,y)$  évaluée au point  $(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda})$ . (Note : cela correspond à une définition de la TF avec un  $2\pi$  dans l'exponentielle, ce qui est peu usité en physique, mais standard en théorie du signal).

Elle s'applique dans trois cas :

- Onde plane visualisée à l'infini ( $d \rightarrow \infty$  = onde plane,  $D \rightarrow \infty$  = obs. à l'infini)
- Onde plane visualisée assez loin (approximatif)
- Au voisinage de l'image géométrique de la source

Dans la pratique dans le montage où une unique lentille est placée entre la source et la pupille et forme une image sur l'écran. Notamment les deux montages ci-dessous sont équivalents



Mais qu'a-t-on observé avec la fente ?

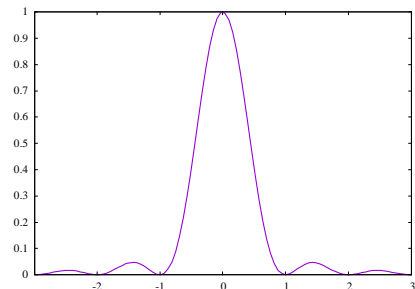
## II Un phénomène limitant

### 1. Fente rectangulaire, image observée dans le plan focal objet d'une lentille

Soit  $t(x,y) = \text{rect}(x/a)\text{rect}(y/b)$  où  $\text{rect}$  est une fonction porte de largeur 1

La TF de  $\text{rect}(x/a)$  est proportionnelle à  $\text{sinc}(\pi a \sigma)$  où  $\sigma$  est la fréquence spatiale (ou nombre d'onde) :

$$D'où I \propto \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a X}{\lambda D}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b Y}{\lambda D}\right)$$



Ici il faudrait introduire la distance focale de la lentille qui doit (plus ou moins) remplacer  $D$ .

On se place dans le cas où  $b$  tend vers  $+\infty$ . On a donc une figure d'interférence resserrée autour de  $Y = 0$  avec une tache centrale de largeur  $\frac{2\lambda D}{a}$

(Expliquer pourquoi, qu'est-ce qui fixe l'épaisseur de la ligne de diffraction)

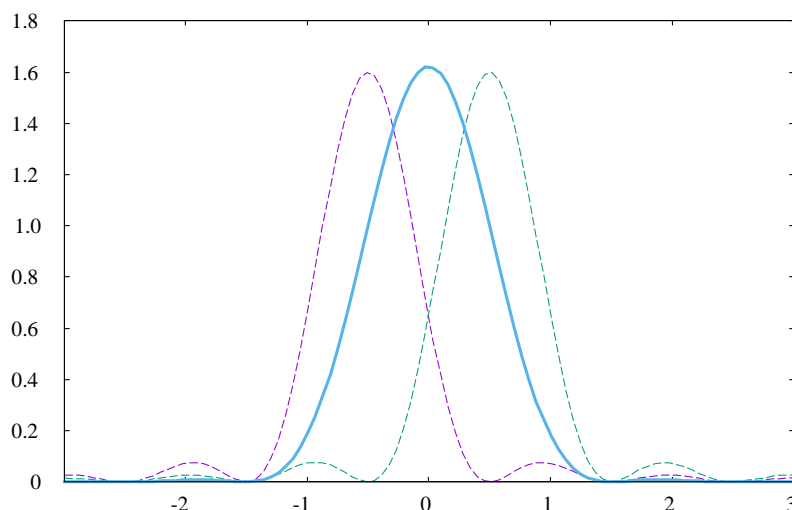
### 2. Critère de Raileigh

Deux étoiles à l'infini dont une fait un angle  $\theta$  avec l'axe optique. On a deux figures de diffraction identiques décalées de la distance  $D\theta$ . Si on veut que cette distance soit plus grande que la largeur des figures de diffraction, on doit avoir  $\theta > \frac{2\lambda}{a}$ .

### 3. Apodisation

Dans le cas de grande différence de luminosité entre les deux sources, le critère de Rayleigh est trop optimiste. On peut s'affranchir en partie de « rebonds » de  $\text{sinc}$  en utilisant une transparence  $t(x)$  variable (fenêtrage) : on parle alors l'apodisation (= suppression des pieds). Avec par exemple minimal,  $t(x) = \cos(\pi x/a)$ , la figure de diffraction est la convolution du  $\text{sinc}$  normal avec un double Dirac venant du cosinus. C'est donc la superposition de deux  $\text{sinc}$

légèrement décalés, qui est plus large mais dont les lobes secondaires se compensent presque totalement.



Attention, il faut insister sur l'addition *en amplitude* et pas en intensité.

### Conclusion

Nous avons vu que la diffraction était un phénomène à la limite de l'optique géométrique, qu'elle induisait des imprécisions dans les mesures mais que l'on pouvait y remédier grâce à l'apodisation qui est aussi utilisée en traitement du signal.

Mais la diffraction peut aussi être utile, notamment concernant les structures périodiques grâce au filtrage spatial.

### Questions posées par l'enseignant

Principe de Huygens Fresnel. Est-ce qu'on doit (peut) négliger la polarisation?

Par hypothèse les interférences sont entre ondes de même polarisation (?).

Le champ E est transverse, donc même polarise ça marche pour des petits angles, mais la contrainte est plus forte.

Dans quelles conditions le principe de H-F échoue si S est polarisée?

Coeff de proportionnalité A dans l'eq de diffraction: quelle dimension?

Inverse d'une longueur.

Une des longueurs géométriques du problème?

Épaisseur de l'élément diffractant? (Non) c'est la longueur d'onde!

(cf théorie de Kirchhoff qui donne  $A = -i/\lambda$ )

Comment peut-on vérifier la conservation de l'énergie connaissant ce coef?

On calcule l'intégrale (2d) du  $\text{sinc}^2$ , avec préfacteur.

Rq: ça marche pour le formalisme général et pour Fraunhofer

Approximation :  $d, D \gg x, y, X, Y$ . C'est quoi le nombre de Fresnel?

Quantifie la validité de l'approx.

Par définition  $F = a^2/\lambda D$  où a est la taille de la pupille (cf le r dans c qui précède. Et  $F \ll 1/2$  caractérise les conditions de Fraunhofer

Comment est défini  $r$ ?

$r^2 = x^2 + y^2$ , distance de la source secondaire au centre de l'objet diffractant (OdG est " $r$ ", cf question précédente)

Pourquoi  $d$  n'apparaît pas dans cette expression ?

Quelle est l'expression pour  $s_0$  (P)?

$r^2 / d$  donne les "angles de Fresnel", c'est ça aussi qu'on néglige

Comment se comportent les termes en  $X^2$  et  $Y^2$  lorsqu'on augmente  $D$

Pourquoi est-ce qu'on néglige les termes en  $X$ ,  $Y$ ,  $x$ ,  $y$  dans le dénominateur?

Petites perturbations, pas d'interférences (contrairement au numérateur)

Que se passe-t-il si l'on déplace  $S$ ?

Dans l'approx de Fraunhofer, la figure de diffraction est simplement déplacée (translatée de  $\theta D$ ).

Si on met une lentille, telle que  $S'$  est l'image de  $S$ , ça change quelque chose si  $S$  n'est pas sur l'axe?

Pour être dans les conditions de Fraunhofer, l'écran doit être au voisinage de l'image géométrique de la source. Cf Sextant

Pas compris le raisonnement pour ramener le problème à une dimension dans II?

Fente étroite mais infiniment longue ( $b$  tend vers l'infini)

Qu'est-ce qui fixe l'épaisseur de la tache de diffraction dans la manip de diffraction de laser sur une fente?

En fait on n'éclaire pas toute la longueur de la fente, donc même si la dimension  $b$  de la fente est très grande, on a une tache d'épaisseur finie, liée (par la diffraction) à la taille de la zone éclairée (diamètre du faisceau)

Application au filtrage spatial?

Filtrage de certaines fréquences spatiales d'un réseau en plaçant un diaphragme dans le plan de Fourier

Et que fait-on des termes quadratiques dans l'exponentielle?

On représente des rayons dans les schémas, pourquoi est-ce que ça ne pose pas problème?

Parce que ce sont des ondes sphériques, et la phase dépend alors uniquement de la distance à la source

## Partie réservée au correcteur

### Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.)

Bonne leçon globalement.

Bonne idée de parler d'apodisation, ça change des rengaines habituelles.

L'extrapolation à la microscopie TEM (même si elle pertinente) y pose plus de question qu'elle n'en résout, et peut être évitée, vu tout ce qu'il a déjà à dire en optique photo,ique ?

### Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates

Dans le car de cette leçon, il est normal de partir de HF scalaire, mais argumenter un peu

Il faudrait pour bien faire être plus précis dans la discussion systématique des approximations et simplifications successives conduisant à Fraunhofer (notamment dans les exponentielles et au dénominateur). Et ne pas confondre les termes que l'on néglige et ceux que l'on omet car ils n'affectent pas l'intensité (mais peuvent jouer un rôle important en optique de Fourier).

Il faut bien faire ressortir que regarder à l'infini, c'est abandonner des coordonnées spatiales pour les remplacer par des angles (on fait tendre  $X$  et  $D$  vers l'infini, à  $X/D$  constant. Cela rend les exponentielles en  $e^{ikX^2/D}$  extrêmement rapides, mais elles n'influencent pas sur l'intensité, et ne posent pas problème ultérieurs si on utilise une lentille, car celle-ci est un objet de phase qui par construction, élimine ces facteurs de phase.

On peut insister sur le fait que la diffraction de Fraunhofer se manifeste au voisinage des images géométriques, à condition de le montrer (cf par exemple l'analyse proposée dans Sextant) ou a minimum d'être capable de le justifier

En fin, on peut aussi utiliser une approche plus générale en passant en représentation de Fourier dans le plan transverse, ce qui remplace le produit de convolution par le produit avec le propagateur de Fresnel  $\exp(-iD(k_x^2 + k_y^2)/2k)$ . On peut alors traiter Fresnel, Fraunhofer, l'infini, les lentilles et l'optique de Fourier dans un cadre unifié

### Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)

On peut naturellement faire l'expérience minimale, en montrant la loi selon laquelle la largeur de la tache de diffraction par une fente et inversement proportionnelle à la largeur de fente, et variations autour de ça.

On peut aussi capter le sinc sur un CCD et l'ajuster (difficile d'avoir à la fois le lobe central et les lobes secondaires avec un bon signal sur bruit, et sans saturer la CCD).

Si on s'en sent, on peut aussi tenter du filtrage spatial, qui est ici simplement en ouverture dans la conclusion.

### Bibliographie conseillée