LP n° **Titre** : Gravitation

Présentée par : Quentin Berrahal **Rapport écrit par** : T. Le Bret et T. Poulain

Correcteur : Arnaud Raoux **Date** : 15/10/2019

Bibliographie de la leçon :			
Titre	**Auteurs**	**Éditeur**	**Année**
Tout-en-un Physique PCSI		**Dunod**	2012

Plan détaillé

<u>Niveau choisi pour la leçon :</u> PCU

<u>Pré-requis :</u> Systèmes de 2 points matériels ; Orbites circulaires ; Force gravitationnelle.

<u>Plan :</u>

[Introduction historique (~1'50'')]

I. Trajectoire dans le système solaire (~20')
- A. Mouvement plan (~2'40'')
- B. Notion de potentiel effectif (~)
- C. Équation de trajectoire

II. États liés et lois de Kepler (~7'50'')
- A. Lois de Kepler (~4'50'')
- B. Discussion (~3')

III. Cas de la Terre (~11'20'')
- A. Notion de champ gravitationnel et vitesse de libération (~5')
- B. Champ de pesanteur (~6'20'') <u>avec montage</u>.

Contenu de la leçon

Introduction historique
[Diapositive avec dates importantes (Ptolémée, Copernic, Galilée, Kepler, Newton) ;
Discussion Mécanique céleste et chute des corps sur Terre ; *« De tout temps les hommes… »* etc.]

I. Trajectoire dans le système solaire
On considère le système {Terre, Soleil} [Schéma au tableau]
<u>Hypothèses</u> : (i) Système isolé ; (ii) Centre de masse = Centre du Soleil, i.e. $M_T \ll M_S$; (iii) Référentiel héliocentrique = inertiel.

→ En particulier, en notant $\mu \coloneqq \frac{M_T M_S}{M_T + M_S}$ la masse réduite du système, on a $\mu \approx M_T$.

A. Mouvement plan

Pour un système de deux points isolés

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = M_T \vec{r} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{cte},$$

i.e. le moment cinétique du système est constant en norme et en direction. On note maintenant

$$\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v}$$

et on suppose $\vec{C} \neq \vec{0}$. Par définition d'un produit vectoriel, on en déduit $\vec{C} \perp \vec{r}$ et $\vec{C} \perp \vec{v}$, ce qui implique que le mouvement est plan.
Le raisonnement précédent est indépendant de l'application de toute force extérieure au système. Étudions maintenant comment le mouvement de la Terre autour du Soleil est contraint sous l'action de la force gravitationnelle.

B. Notion de potentiel effectif

On adopte un point de vue énergétique. Ici, l'énergie mécanique est conservée, i.e.

$$E_m = E_0 = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \frac{K}{r}, K \coloneqq -G M_T M_S,$$

où K/r définit l'énergie potentiel du système.
En coordonnées polaires, la position de la Terre (par rapport au Soleil) au cours du temps est caractérisée par

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Dans ces notations $E_0 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{K}{r}$ et $C \coloneqq |\vec{C}| = r^2\dot{\theta}$ d'où l'on déduit

$$E_0(r) = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + U_{eff}(r), U_{eff}(r) \coloneqq \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r},$$

qui ne dépend que de $r = |\vec{r}|$.
[NdC :expression de l'énergie vraie dans le référentiel du centre de masse]

[Tracé au tableau de la courbe du potentiel effectif en fonction de r et discussion des différentes trajectoires possibles selon l'énergie potentielle initiale du système : trajectoires ouvertes (hyperboles, paraboles) et fermées (cercles, ellipses).]

C. Équation de trajectoire

On cherche dans cette partie à caractériser les trajectoires discutées qualitativement en fin de section précédente.
Paramétrisation de la trajectoire $r \to r(\theta)$:

$$\dot{r} \coloneqq \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta}.$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \frac{C^2}{r^4} + \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r}.$$

Changement de variables : $r \to u \coloneqq 1/r \Rightarrow dr/d\theta = (-1/u^2)\, du/d\theta$.

$$\Rightarrow E_0 = \frac{mC^2}{2}\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) + Ku$$

En dérivant E_0 par rapport à θ on obtient finalement

$$0 = \frac{du}{d\theta}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{K}{mC^2}\right)$$

qui admet deux familles de solutions.
Soit $du/d\theta = 0$ et on trouve une trajectoire circulaire (i.e. $r = cte$), soit c'est le terme entre parenthèses qui s'annule. Dans ce dernier cas, la résolution de l'équation différentielle est

relativement immédiate et on obtient :

$$u(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0) - \frac{K}{mC^2},$$

où A et θ_0 sont des constantes d'intégration. On aboutit finalement à l'équation de la trajectoire cherchée :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}, p := \frac{mC^2}{|K|}, e := \frac{A}{mC^2|K|},$$

qui correspond à l'équation d'une conique dépendant de deux paramètres e (excentricité) et p. Ici e dépend de la constante d'intégration A. On peut montrer que

$$e = \sqrt{1 + \frac{2M_T C^2}{K \vee \quad {}^2 E_0}}.$$

Ainsi, si $E_0 > 0$ alors $e > 1$ et les trajectoires correspondent à des trajectoires ouvertes.
Si $E_{min} < E_0 < 0$, alors $0 < e < 1$ et les trajectoires sont des ellipses
(avec $E_{min} := -K/(2M_T C^2)$).
Cas limites : $E_0 = 0 \Rightarrow$ parabole ; $E_0 = E_{min} \Rightarrow$ cercle.
[Diapositive pour définir les demi-axes a et b d'une ellipse.]

II. États liés et lois de Kepler

On cherche maintenant à vérifier si les lois de Kepler (empiriques) peuvent être retrouvées à partir de l'expression de $r(\theta)$.

A. Lois de Kepler

[Diapositive avec l'énoncé des Lois de Kepler]
(a) Si $E_{min} < E_0 < 0$, la trajectoire est elliptique $\Rightarrow$ ok avec la première loi !
(b) Calcul de la vitesse aréolaire

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 d\theta}{2dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{C}{2} = cte$$

$\Rightarrow$ ok avec la deuxième loi !
(c) Période de rotation

$$T := \frac{A_{ellipse}}{dA/dt} = \frac{\pi ab}{C/2}, b := \sqrt{pa},$$
$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi a^3}{GM_S} = cte$$

$\Rightarrow$ ok avec la troisième loi !
(On remarque que $T^2/a^3 = cte$ est indépendant de e et vraie $\forall M_T \ll M_S$.

B. Discussion

Discussion sur les limites des lois de Kepler (ex. $M_T \sim M_S$)
[Diapositive hypnotique montrant différents cas de trajectoires pour des couples $(e, M_T/M_S)$ différents.]
Et sur Terre ?

III. Cas de la Terre

A. Notion de champ gravitationnel et vitesse de libération

Hyp. : $m \ll M_T$
[Diapositive analogie force de Coulomb / force gravitationnelle pour introduire la notion de champ gravitationnelle.]
Problématique : Comme sortir de l'attraction terrestre ? Formellement,

$$\begin{cases} \text{à} t = 0, r = R_T et |\vec{v}| = v_l \\ \text{à} t = +\infty, r = +\infty et |\vec{v}| = 0 \end{cases}$$

L'analyse énergétique permet de trouver l'expression de v_l:

$$E_0 = \frac{-GM_Tm}{R_T} + \frac{m}{2}v_l^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{2GM_Tm}{R_T}} \approx 11{,}3 \times 10^3 m.s^{-1}.$$

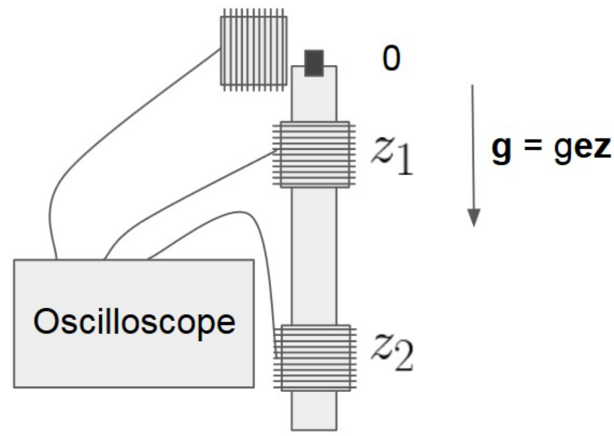
Énergie cinétique associée : $E_c \approx 638kJ.kg^{-1}$.

B. Champ de pesanteur

$\vec{F} = \frac{-GM_Tm}{r^2}\vec{e}_r \coloneqq -gm\vec{e}_r, g \approx 9{,}79m.s^{-2}$

Montage : mesure de g à partir de l'étude la chute (libre) d'un corps matériel.

[Diapositive dispositif expérimental + Tableur type Excel pour entrer la mesure de la vitesse de chute et en déduire une valeur de $g \approx 8{,}4 \pm 0{,}3 m.s^{-2}$.]



Questions posées par l'enseignant

Q1 : Niveau de la leçon ?
R1 : Niveau L2/L3

Q2 : Dynamique sys. isolé ?
R2 : abs force ext. ; moment cinétique total = cte
→ Équation ?
Théorème de la résultante cinétique :

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0}. (1)$$

→ Que peut-on en déduire ?
…
→ Qu'est-ce qu'une trajectoire ?
Trajectoire = {points que le mobile parcourt}
Attention ! Parler de mouvement plutôt que de trajectoire si on veut inclure une notion d'évolution temporelle.
→ Comment définir la quantité de mouvement totale d'un sys.

$$\vec{p}_{tot} = \sum \vec{p}_i$$

→ Peut-on réécrire l'équation (1) en fonction des notions liées au barycentre de masse ?
Flop…

Q3 :Comment définir un référentiel ?
→ 3 axes spatiales + horloge
Attention ! repère = 3 axes spatials ; référentiel = 3 axes spatiales + horloge
[Timothé n'est pas d'accord avec cette définition 😉 Référentiel = Système de référence (i.e. corps matériel de référence) par rapport auquel le mouvement (ou tout autre phénomène physique) est étudié. Cette définition est indépendante de l'introduction d'un système d'axes (avec horloge ou non).]
[Arnaud : les deux définitions ci-dessus sont similaires (si on n'oublie pas l'horloge. Si on a un solide, on a trois dimensions, donc trois axes. Comment est défini le référentiel héliocentrique ? 3 étoiles lointaines qui font du coup trois axes. Ce qui est surtout important c'est de ne pas confondre

référentiel (repère+horloge), repère (3 axes), et choix de coordonnées (base de travail)]

Q4 : Que se passe-t-il si l'on multiplie le paramètre p (qui apparaît dans l'expression de l'ellipse) par 2 ? Que devient la vitesse de révolution ?
R4 : Le demi-grand axe devient 2 fois plus grand et la vitesse $|\vec{v}|$ est deux fois plus importante.

Q5 : Pouvez-vous justifier le fait que vous avez assimilé la Terre et le Soleil à des points ?
R5 : Les objets massifs dont la densité est constante ou ne dépend que de la distance au centre (rayon) peuvent être assimilés à des masses ponctuelles.
→ Et est-ce le cas pour la Terre et le Soleil ?
C'est une bonne approximation.
→ Pourquoi la Terre est-elle aplatie ?
Cela est dû à la rotation de la Terre sur elle-même ⇒ forces non-inertielles. [Magnifique explication de Loïs au tableau → prévoir un géologue dans sa trousse le jour de l'oral.]
→ Qu'obtient-on si l'on supprime l'approximation des masses ponctuelles ?
Ne devrait pas avoir d'effet sur les trajectoires décrites au cours de la leçon.
→ Montrer, par le calcul, qu'un système à symétrie sphérique peut s'assimiler à un point.
Analogie avec l'électrostatique ⇒ Théorème de Gauss. En électromagnétisme :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_\int}{\varepsilon_0}$$

Ici

$$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\int} \quad {\scriptstyle \Rightarrow \vec{A}(r) = -G\frac{M_\int}{r^2}\vec{e}_r}$$

Attention au signe « - » devant G !

Q6 : Vous avez parlé de fusée… Vous avez également dit (en partie III) que l'énergie mécanique était conservée, mais pas vraiment… Que vouliez-vous dire ?
R6 : Dans notre cas, on a uniquement tenu compte des forces conservatives. Dans la pratique, il y a des frottements, etc.
→ Théorème de l'énergie cinétique ?

$$\Delta\left(E|c + E_p\right) = \sum W(forcesnonconservatives)$$

[Ne fallait-il pas simplement dire que dans le cas de la fusée, celle-ci largue du carburant lors du décollage ?] [Arnaud : Oui + réaction chimique quand même]

Q7 : Définition du champ de pesanteur ?
R7 : Force conservative $\vec{f} = -mg\vec{e}_r \Rightarrow E_p = mgr$ et accélération d'entrainement dans $\vec{g}$ (la valeur de g dépend de la latitude).

Q8 : A propos du montage : pour avoir utilisé une bobine ?
R8 : Pour définir le déclenchement (« trigger ») de l'oscilloscope.
→ Pourquoi l'aimant tombe-il lorsque l'on ouvre le circuit ?
Lorsque le circuit est fermé, la bobine est parcourue par un courant qui est à l'origine d'un champ magnétique $\vec{B}$. Le dipôle que constitue l'aimant dont l'on se sert tend à s'aligner sur les lignes de champ de $\vec{B}$. C'est ce qui le maintient sur les parois du tube.

→ De quelle force s'agit-il ?

$$E_p \propto -\vec{p} \cdot \vec{B} = -pBcos\theta \Rightarrow \vec{f} \coloneqq -\vec{\nabla}E_p \ldots$$

[Arnaud : gloups pour les notations et les explications à revoir...]

Q9 : Pouvez-vous décrire se que l'on observe à l'oscilloscope ?

R9 : L'oscilloscope relève une tension lorsque l'aimant, dans sa chute, passe à travers les bobines. Le signal observé correspond à la dérivée temporelle du flux magnétique (qui varie effectivement au passage de l'aimant, i.e. variation du champ magnétique à travers la section des bobines). Pour une bobine de section S et constitué de N boucles, le flux prend la forme $\Phi = BSN$.
→ **Pourquoi l'oscilloscope observe une tension ?**
Car $fem = -d\Phi/dt$.
→ **Vous parlez de force (électromotrice), est-ce la même chose qu'une tension ?**
Ici, oui.
[Arnaud : NON. e est comprise en convention générateur. La tension à ses bornes est u=-e en convention récepteur]

Q10 : Commentez votre mesure de g.
R10 : Il existe des erreurs systématiques, notamment la non prise en compte des frottements et le ralentissement dû au passage à travers les bobines.
→ **Puissance captée dans la bobine ?**
...

Commentaires donnés par l'enseignant

1) Remarques générales : Pour l'agrégation docteur, il faut s'attendre à ce que le jury demande de faire des calculs supplémentaires au tableau pendant la séance de questions ; Il faut connaître la valeur de G; Savoir faire le calcul des orbitales géostationnaires. Pour les non-docteurs, ne pas faire de montage.

2) Bonne forme générale de l'exposé ; Présentation fluide ; Plan « pas mal » mais un poil classique. Attention à ne pas être « trop à l'aise », vocabulaire, etc.

3) Il manque le côté formel, i.e. rigueur dans la présentation du problème (référentiel d'étude, bilan des forces…)

4) Placer cette leçon au niveau prépa plutôt que CPU (même si des choses ont disparu des programmes), ou alors parler de choses « plus exotiques » (trous noirs, exo planètes = prix Nobel 2019…)

5) Transition entre parties II et III bancales… Peut-être mettre la partie III en premier.

6) Beaucoup trop de temps consacré à la dérivation de $r(\theta)$ (i.e. th. de Binet). Peut-être se limiter aux trajectoires circulaires et à l'énoncé des lois de Kepler dans ce cas particulier. Puis parler d'autres aspects gravitationnels (effets de marée, différence masse grave / masse inertielle, synchronisme de la Lune, points de Lagrange…) Attention, éviter de parler de relativité générale !

7) Soit supprimer la diapositive sur l'analogie entre électromagnétisme et gravitation, soit l'approfondir et passer plus de temps dessus.

8) Diapositive GIF avec différentes orbites = très bien. Mais passer plus de temps dessus pour bien expliquer ce qui y est montré. Donner les sources.

9) Utiliser un logiciel basé sur python (ou autre) plutôt qu'un tableur pour faire des calculs et

analyser les mesures du montage.

10) Autour de la manip :
Je pense qu'elle ne convient pas. Elle illustre mal ce que l'on cherche à montrer (mauvaise valeur de g notamment).
On n'est pas dans l'approximation de la chute libre.
Le diamètre du tube n'est pas suffisamment grand par rapport à la taille de l'aimant pour pouvoir négliger les effets de bord et de l'écoulement de l'air autour de l'aimant.
Plutôt que de « mesurer » le passage de l'aimant à l'aide de bobine, on peut se servir de fourches optiques.
Autres manières de mesurer g : le gyroscope ; via l'étude des ondes de surface dans une cuve à ondes.

Partie réservée au correcteur

Avis général sur la leçon (plan, contenu, etc.)

Plan ok, même si la 3e partie paraît un peu parachutée.
Vu le contenu présenté, ne pas hésiter à la placer en CPGE.

Notions fondamentales à aborder, secondaires, délicates

Fondamentales
Lois de Kepler, mouvement d'une planète, champ de pesenteur

Secondaires
Forces de marées (sur Terre ou dans l'espace, par exemple sur les satellites de Jupiter : Io est un volcan géant, Europe est un énorme océan d'eau salée en mouvement)
Exoplanètes
Formation d'une étoile, vie d'une étoile (compromis gravité / nucléaire)
Trou noir ? (sans relat' G)
Précession des trajectoires
Forme de la Terre (effet de la rotation entre autres)
Points de Lagrange (satellites en orbite)

Expériences possibles (en particulier pour l'agrégation docteur)

Viscosimètre (loi de Stokes)
Ondes de surface
Pendule simple
Gyroscope
Balle de ping-pong

Bibliographie conseillée

Perez, Mécanique (toujours avec parcimonie, mais pleins d'exemples et tous les calculs sont faits)
Taillet, Dictionnaire de physique (outil précieux de travail pour toutes les leçons)