

Cours 2

Notion de cohérence

Préambule:
interférences entre sources de
fréquences différentes

Rappel : détecteur quadratique

Le signal U délivré par le détecteur est proportionnel au carré du champ (ou proportionnel au module du vecteur de Poynting) moyenné sur un temps T très long devant la période optique.

$$U \propto \frac{1}{T} \int_{-T}^0 \epsilon_0 c |E(M, t - t')|^2 dt'$$

$$U \propto \left\langle \epsilon_0 c |E(M, t - t')|^2 \right\rangle$$

$$U \propto I(M, t)$$

Rappel: $\langle \cos(\omega t + \phi) \rangle = 0$

$$\langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle = 1/2$$

$$\langle \text{const} \rangle = \text{const}$$

Interférence entre deux ondes de fréquences différentes

En notation réelle, les amplitudes des champs lumineux sont de la forme:

$$S_1(M, t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1(M))$$

$$S_2(M, t) = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2(M))$$

L'intensité au point M est alors:

$$I_M = \left\langle (S_1(M, t) + S_2(M, t))^2 \right\rangle$$

Calculons l'intensité mesurée par le détecteur

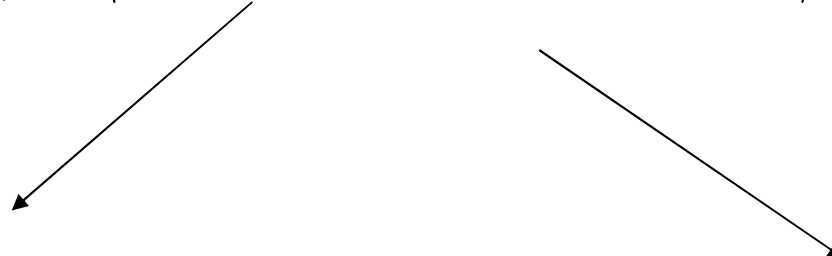
$$I_M = \langle (S_1(M, t) + S_2(M, t))^2 \rangle$$

$$I_M = \langle a_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \phi_1(M)) \rangle + \langle a_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_2(M)) \rangle$$

$$+ \langle 2a_1 a_2 \cos(\omega_1 t + \phi_1(M)) \cos(\omega_2 t + \phi_2(M)) \rangle$$

$$I_M = \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} + \langle a_1 a_2 (\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \phi_1(M) + \phi_2(M)) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1(M) - \phi_2(M))) \rangle$$

$$I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle (\cos((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1(M) - \phi_2(M))) \rangle$$


$$\omega_1 \neq \omega_2$$

$$I_M = I_1 + I_2$$

Simple addition des intensités

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_1(M) - \phi_2(M))$$

INTERFERENCES POSSIBLES!!!

Conséquence I

Deux ondes de fréquences différentes ne peuvent interférer !!!

Remarque

Si :

$\omega_1 - \omega_2 \ll 1/T$ Le détecteur peut percevoir des battements

C'est une situation possible mais difficile à réaliser expérimentalement (2 sources très fines spectralement et très proches en fréquence. Exemples: modes d'un laser)

Généralisation:
Deux ondes dont la différence de phase varie
rapidement ne peuvent interférer

$$I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1(M, t) - \varphi_2(M, t)) \rangle$$

$$\omega_1 = \omega_2 \quad I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_1(M, t) - \varphi_2(M, t)) \rangle$$

si $\varphi_2(M, t) - \varphi_1(M, t)$ varie rapidement sur un temps plus court que T,

Il n'y aura pas d'interférences

Les sources de lumière « réelles »:

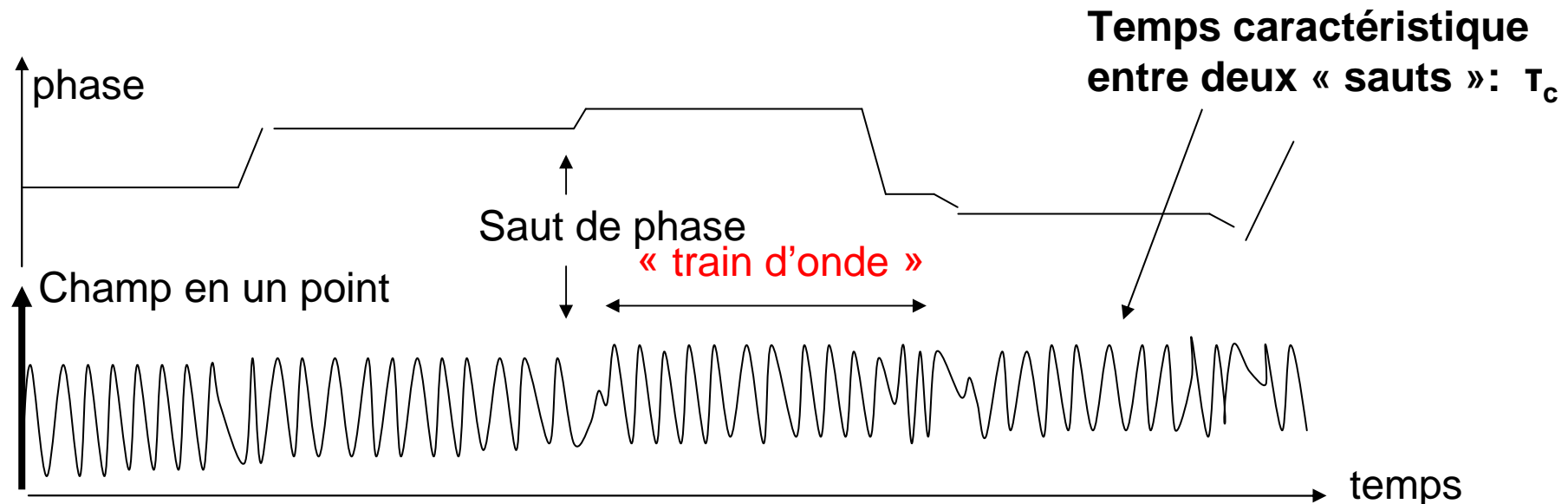
Modèle de la source quasi-
monochromatique

Source ponctuelle quasimonochromatique (modèle)

$$S(t, M) = a_0 \cos(\omega_0 t + \phi(t, M))$$

- La phase de la source ponctuelle varie au cours du temps **aléatoirement**
- Le champ n'est plus déterministe -> sa phase **ne peut être prévue**.

➡ Modèle mathématique : à des instants aléatoires, la phase de l'onde « saute » d'une quantité aléatoire mais reste constante entre ces instants.



Origine physique: effets des **collisions** des molécules environnantes avec l'atome émetteur, **émission spontanée**...

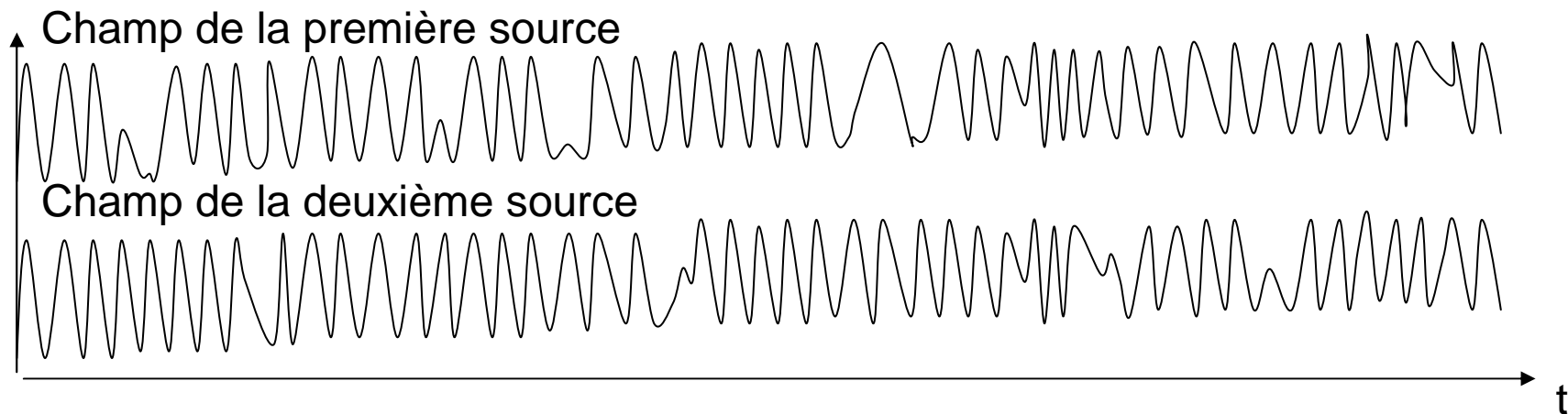
Champ émis par deux sources ponctuelles réelles quasimonochromatique et INDEPENDANTES

La phase ne varie pas de la même manière d'une source à une autre !

(Phase de la source 2) – (Phase de la source 1) = fonction aléatoire du temps



Absence de corrélations entre les sources.



Deux sources ponctuelles quasimonochromatiques indépendantes ne peuvent interférer



**Deux sources ponctuelles
quasimonochromatiques indépendantes ne
peuvent interférer**

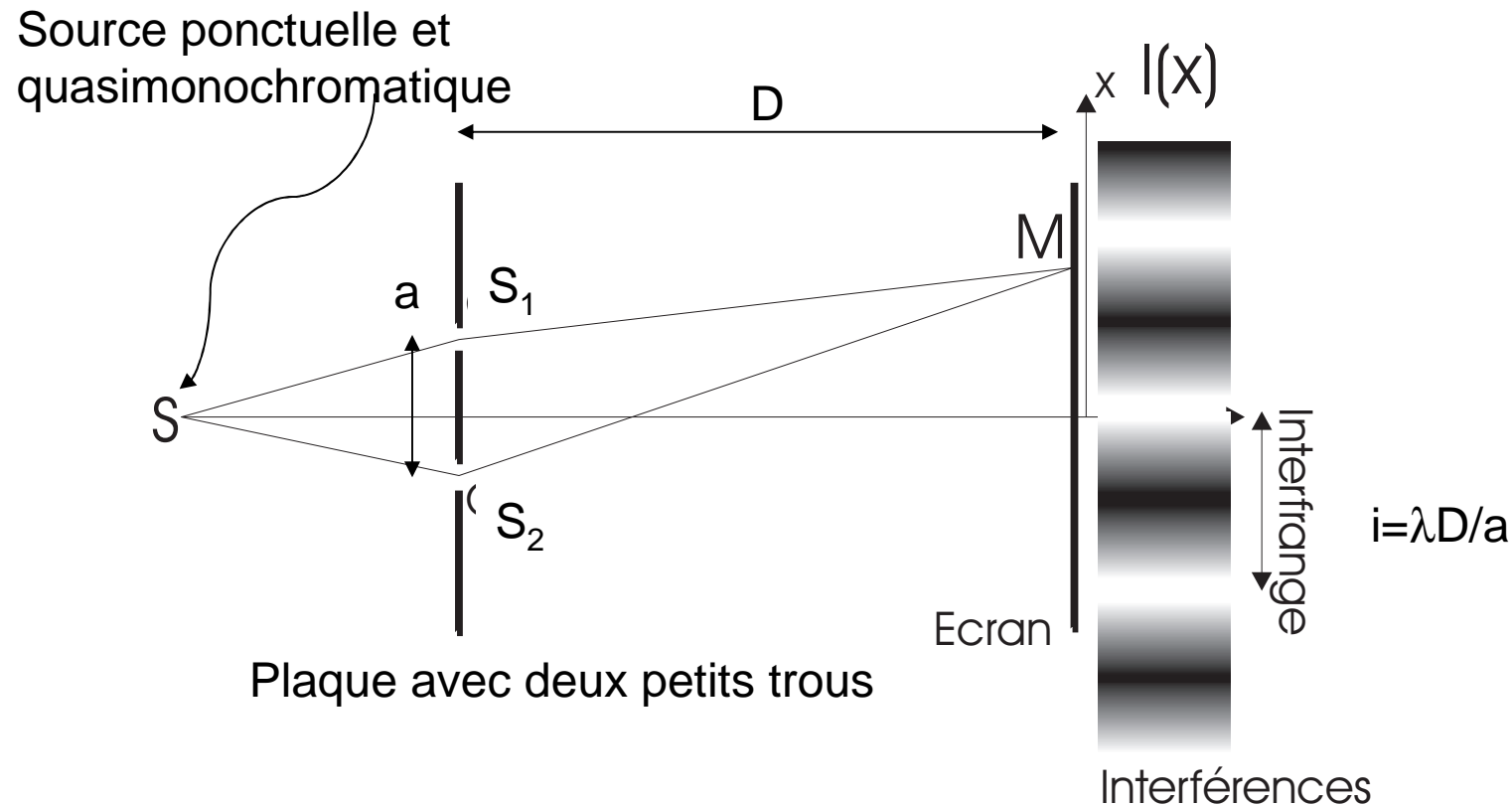


**On dit qu'elles sont MUTUELLEMENT
INCOHERENTES**

Montage des trous d'Young

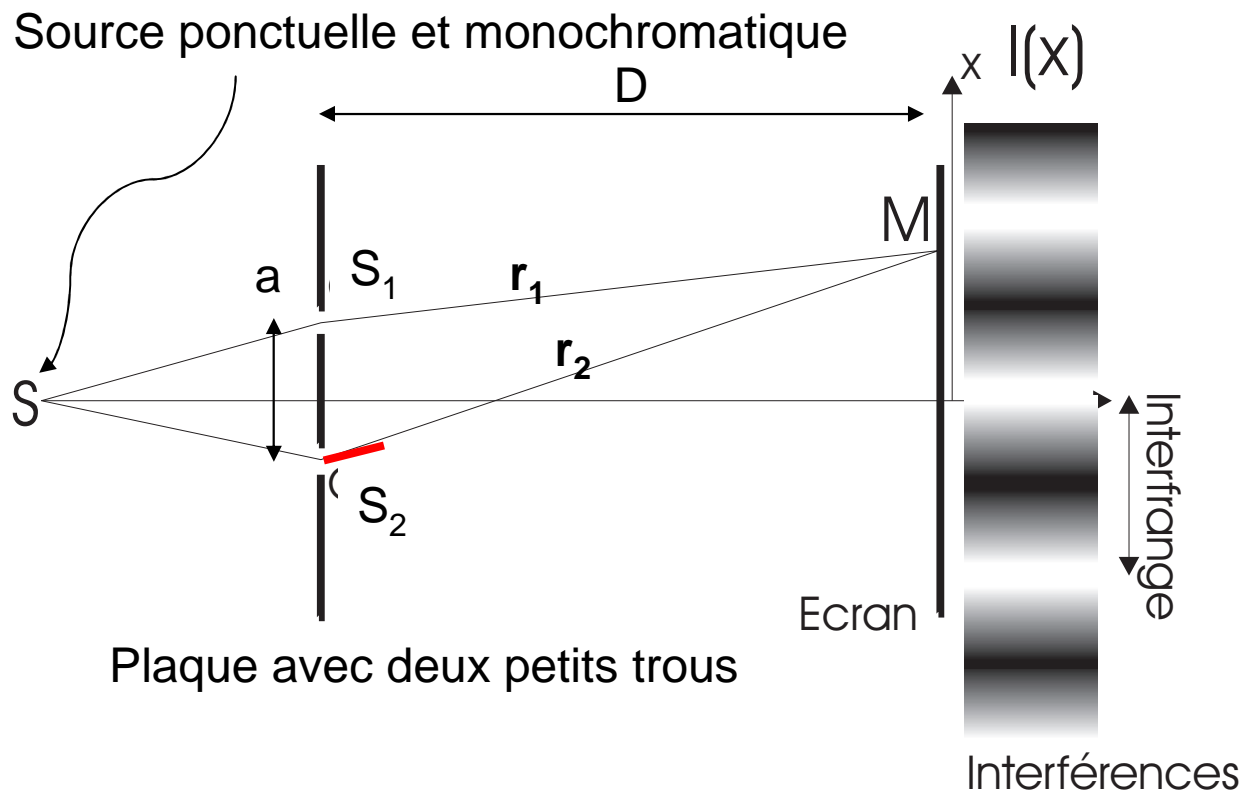
Pour faire des interférences il faut générer deux ondes à partir d'une même source primaire quasimonochromatique

Exemple: Montage des trous d'Young



**Chaque petit trou DIFFRACTE l'onde incidente dans toutes les directions:
Équivalent à deux sources d'ondes sphériques « liées »**

Notion de temps de cohérence



Différence de marche en M: $\delta_{21}(M) = r_2 - r_1 = c \tau_{21}$

$$I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle (\cos(\psi_2(M, t) - \psi_1(M, t))) \rangle$$

$$I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle (\cos(\underbrace{k\delta_{21} + \varphi(M, t' - \tau_{21})}_{\text{Attention !}} - \varphi(M, t'))) \rangle$$

Attention !

Temps de cohérence et interférences

$$I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle (\cos(k\delta_{21} + \varphi(M, t' - \tau_{21}) - \varphi(M, t')) \rangle$$

$$\underline{\tau_{21} \ll \tau_C} \quad \varphi(M, t' - \tau_{21}) \approx \varphi(M, t')$$

$$I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle (\cos(k\delta_{21})) \rangle$$

On retrouve la formule des interférences à deux ondes (ouf !!!)

$$\underline{\tau_{21} > \tau_C} \quad \varphi(M, t' - \tau_{21}) \neq \varphi(M, t')$$

$$I_M = I_1 + I_2$$

La différence est une
fonction aléatoire du temps
variant rapidement

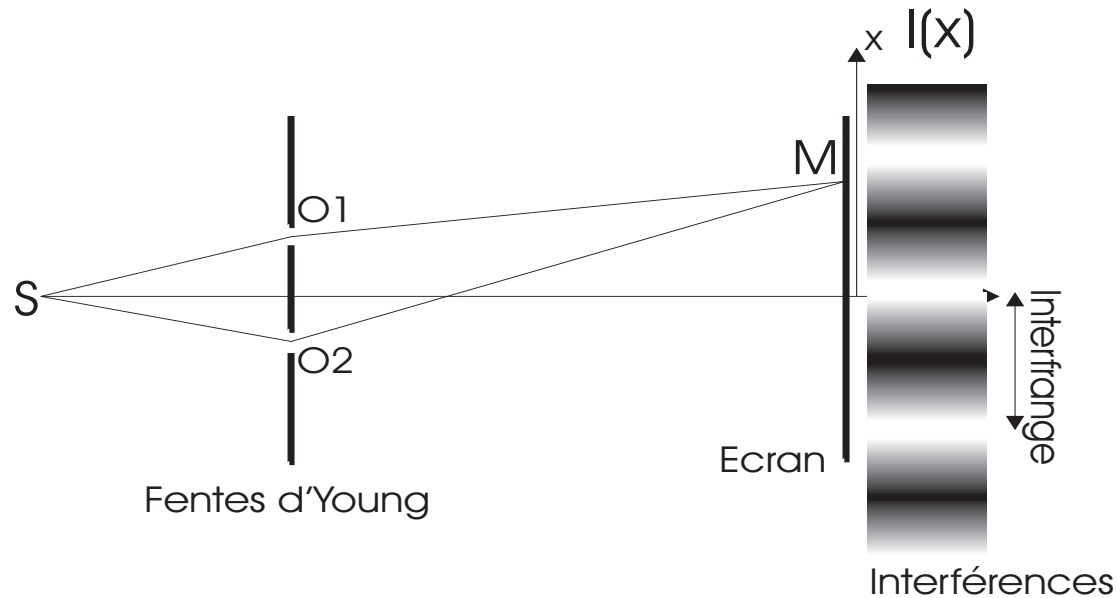
Pas d'interférences possibles

Pour faire des interférences...

- Les ondes qui interfèrent doivent provenir de la même source primaire
- La différence de marche δ_{21} ne doit pas être plus grande que $L_c = c \tau_c$,
la longueur de cohérence

Interférences en lumière polychromatique

Interférences en lumière polychromatique



Si la source émet deux longueurs d'ondes λ_A et λ_B

Il y a, a priori, 4 champs: S_{1A} , S_{1B} , S_{2A} , S_{2B}

Seuls ceux de même longueur d'onde (i.e de même fréquences) interfèrent

$$\begin{aligned} S_{1A} \text{ et } S_{1B} &\text{ interfèrent } \rightarrow I_A \\ S_{2A} \text{ et } S_{2B} &\text{ interfèrent } \rightarrow I_B \\ I &= I_A + I_B \end{aligned}$$

Interférences en lumière polychromatique (II)

$$I_A = I_{0A} + I_{0A} + 2\sqrt{I_{0A}I_{0A}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_A} \delta_{21}\right) = 2I_{0A} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu_A}{c} \delta_{21}\right)\right)$$

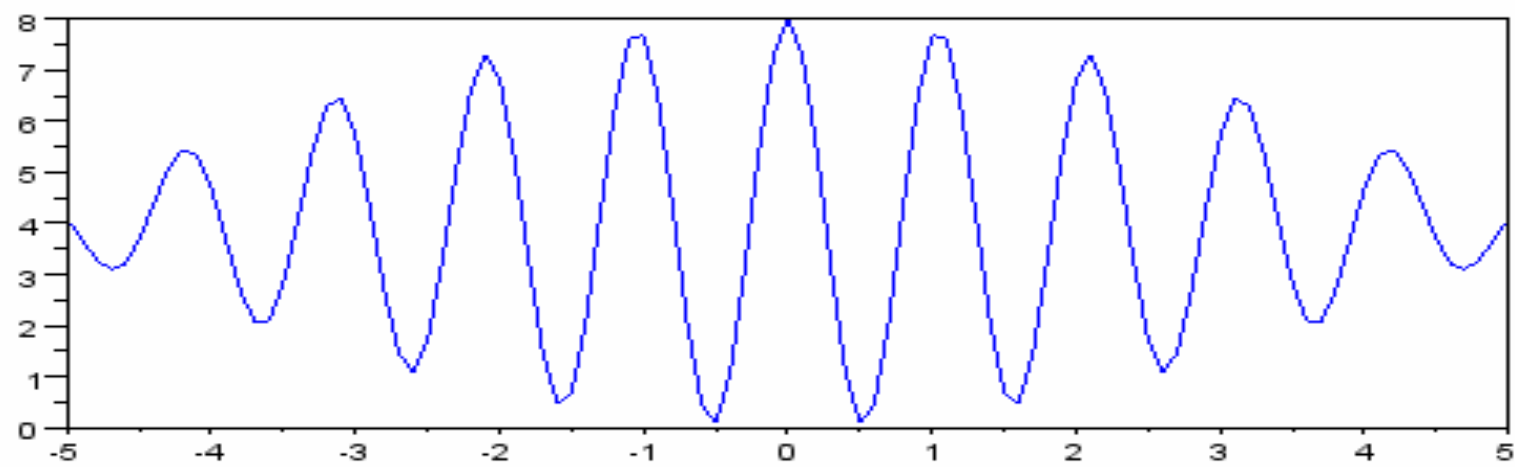
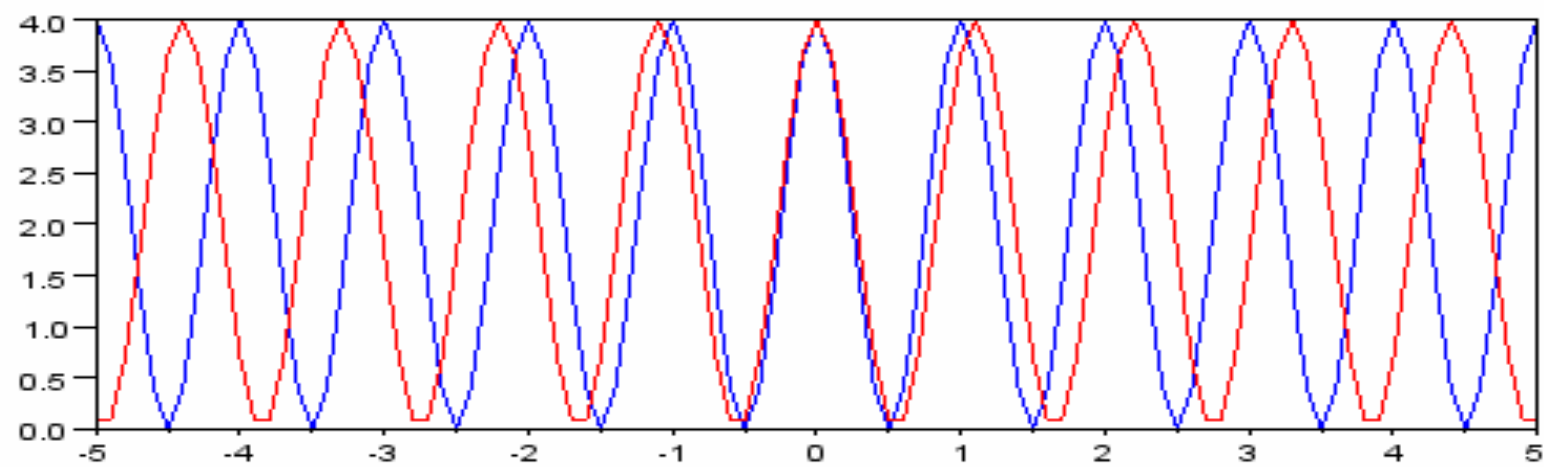
$$I_B = 2I_{0B} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu_B}{c} \delta_{21}\right)\right)$$

$$I = I_A + I_B$$

Deux systèmes de franges vont se superposer en intensité.

Lorsque les franges sombres de l'un et les franges brillantes de l'autre se confondent

→ brouillage



δ21

Interférences en lumière polychromatique (III)

$$I_{0A} = I_{0B} = I_0$$

$$I = 2I_0 \left(2 + \cos\left(\frac{2\pi\nu_A}{c} \delta_{21}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\nu_B}{c} \delta_{21}\right) \right)$$

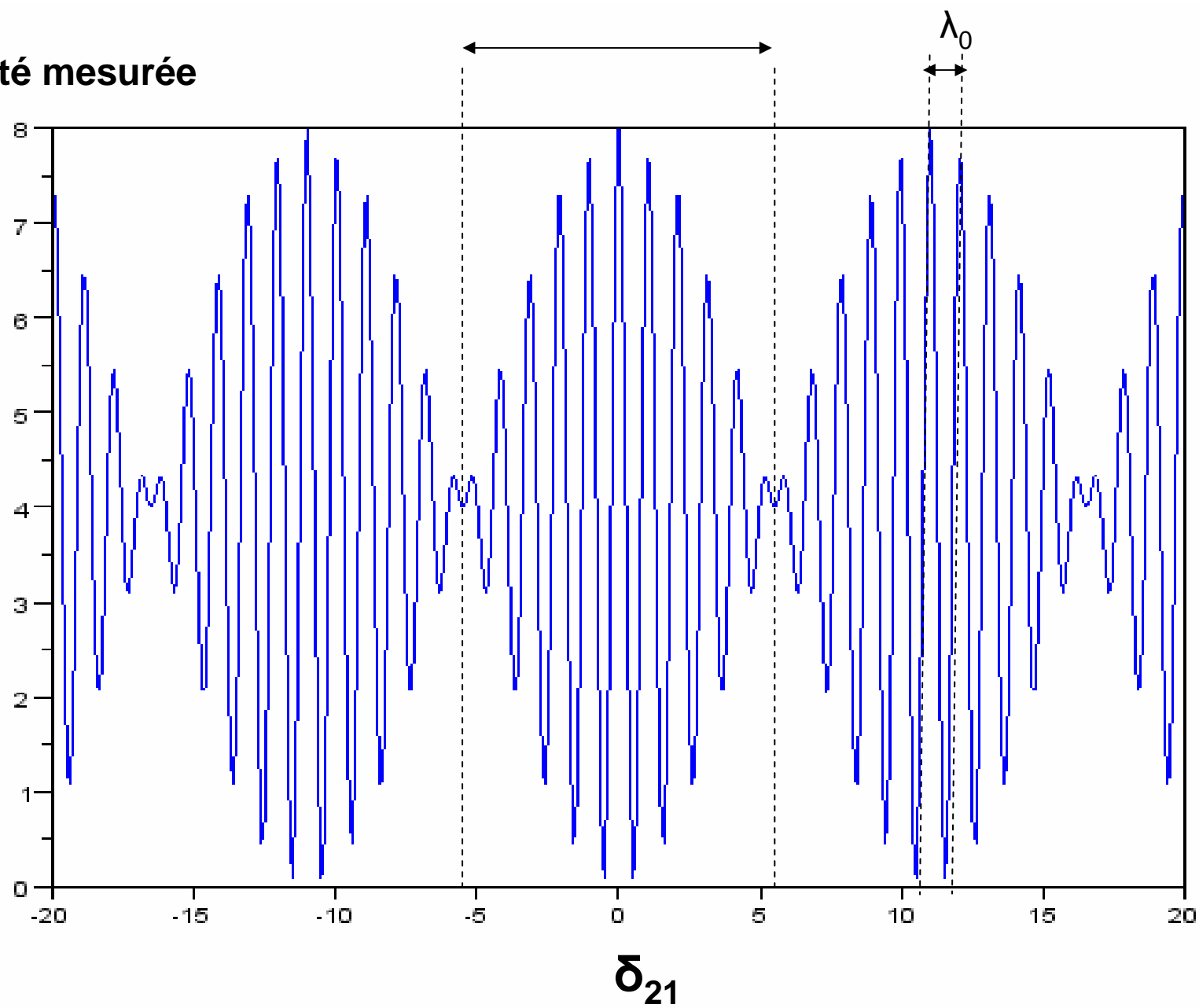
$$I = 2I_0 \left(2 + 2 \cos\left(\frac{2\pi(\nu_A - \nu_B)}{2c} \delta_{21}\right) \cos\left(\frac{2\pi(\nu_B + \nu_A)}{2c} \delta_{21}\right) \right)$$

Terme lentement variable
avec δ_{21}

Terme rapide avec δ_{21} →
franges correspondant à la
fréquence moyenne

Contraste des franges

Intensité mesurée



Interférences en lumière polychromatique: généralisation

$$dI_0 = J_0(\nu) d\nu \longrightarrow \mathbf{J_0 = Spectre de la source}$$

$$dI = 2 J_0(\nu) d\nu (1 + \cos(\frac{2\pi\nu}{c} \delta_{21}))$$

$$dI = 2 J_0(\nu) d\nu (1 + \cos(2\pi\nu\tau_{21}))$$

$$I = \int_0^{\infty} 2 J_0(\nu) d\nu (1 + \cos(2\pi\nu\tau_{21}))$$

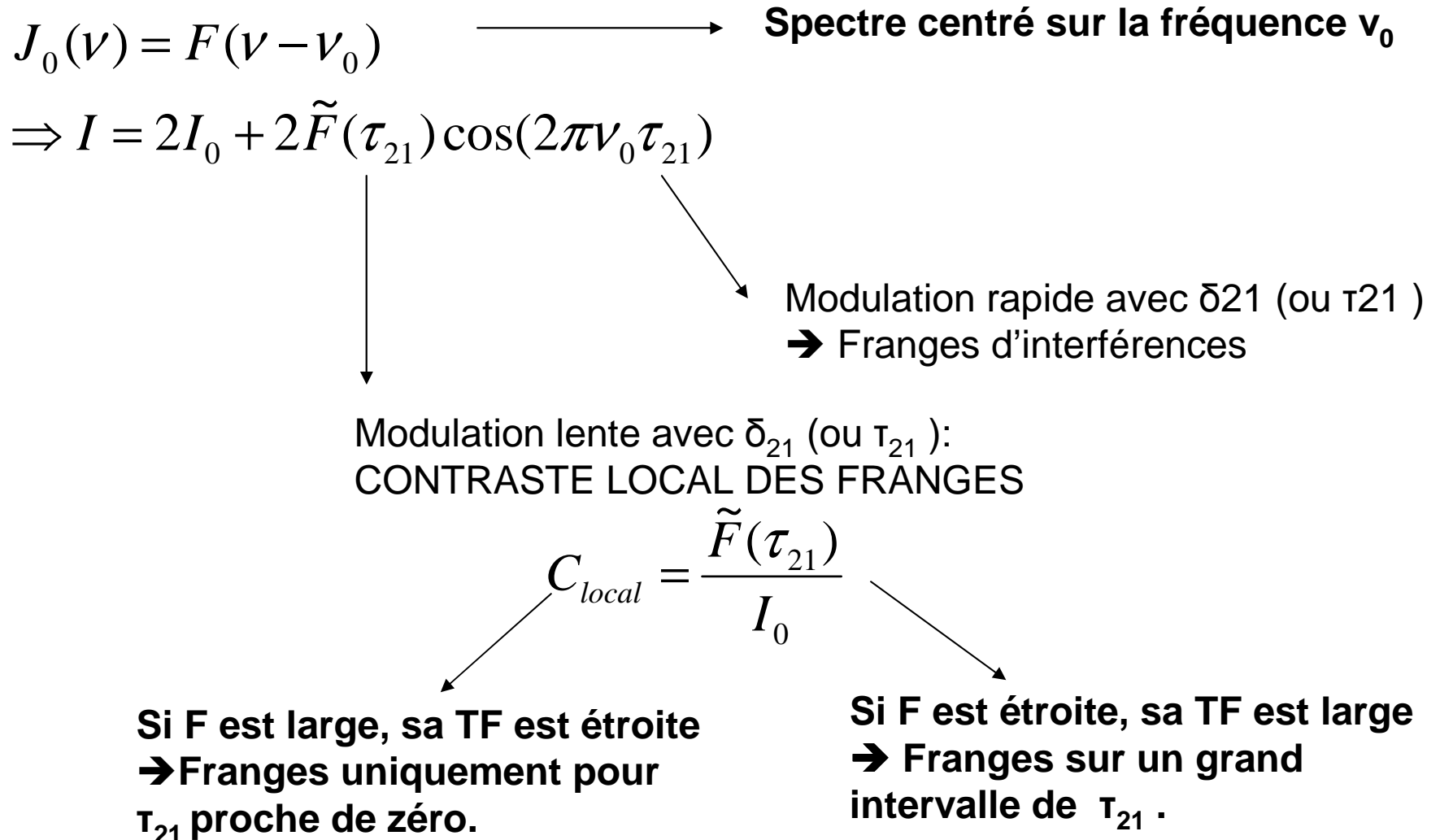
$$I = 2 I_0 + 2 \int_0^{\infty} J_0(\nu) \cos(2\pi\nu\tau_{21}) d\nu$$

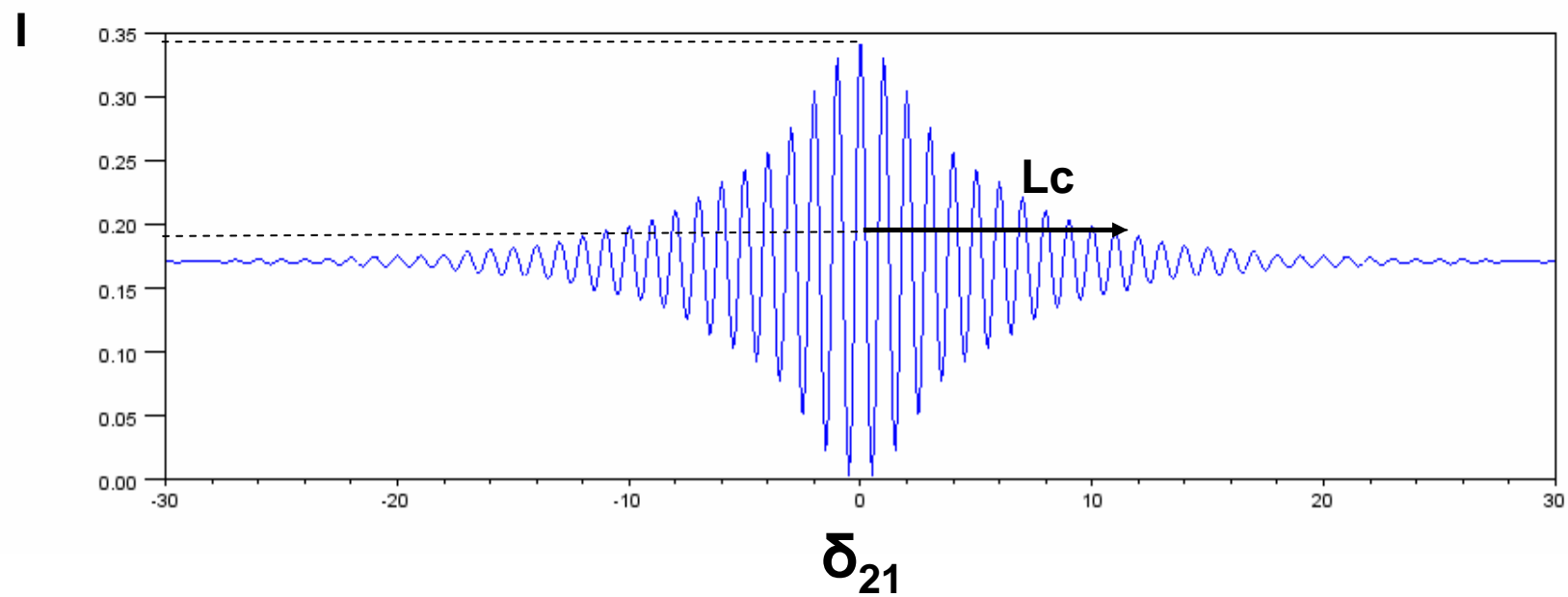
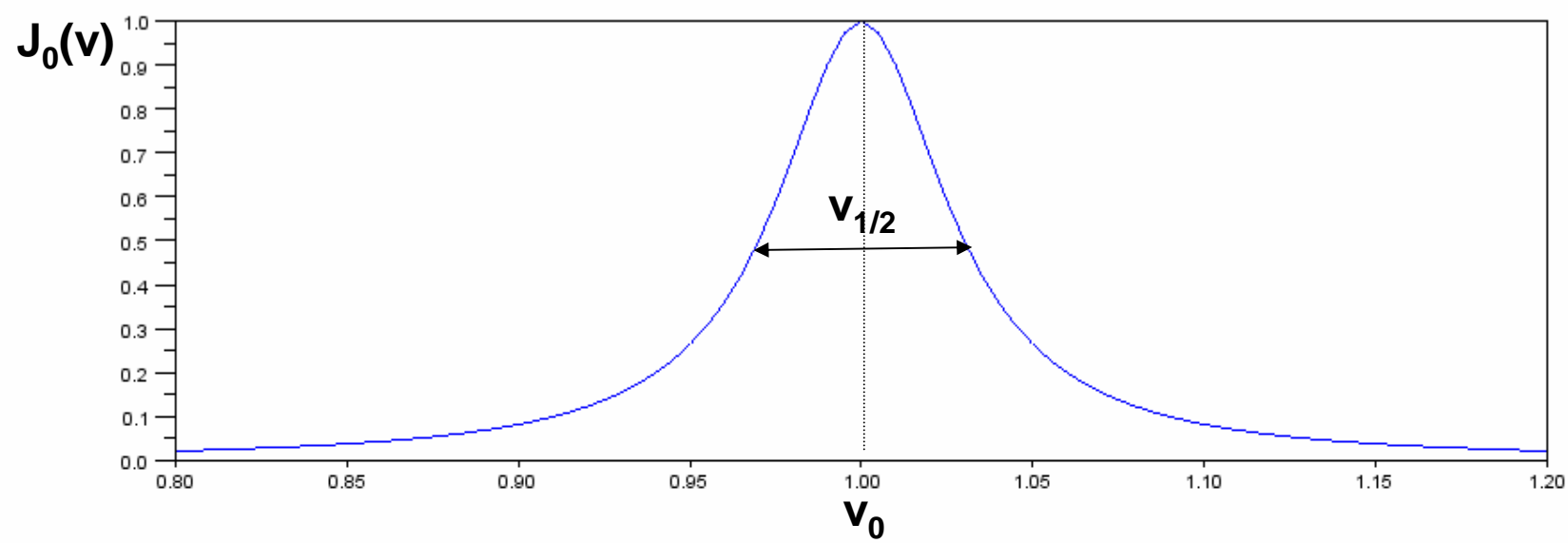
$$I = 2 I_0 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\nu) \cos(2\pi\nu\tau_{21}) d\nu$$

$$I = 2 I_0 + 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\nu) \exp(-i 2\pi\nu\tau_{21}) d\nu$$

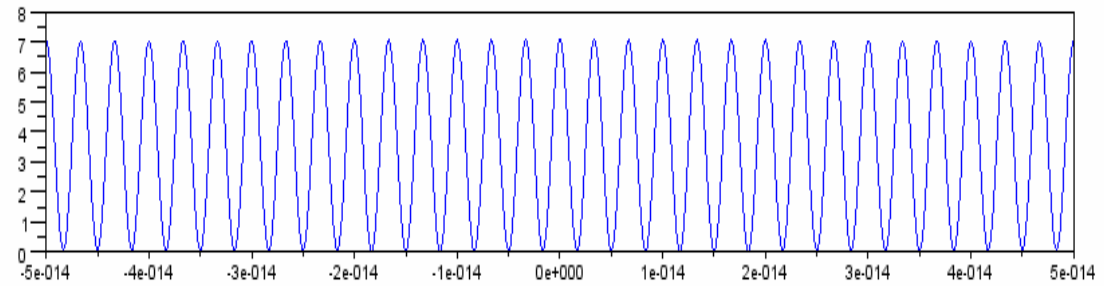
$$I = 2 I_0 + 2 \operatorname{Re}(TF(J_0))$$

Interférences en lumière polychromatique: propriétés

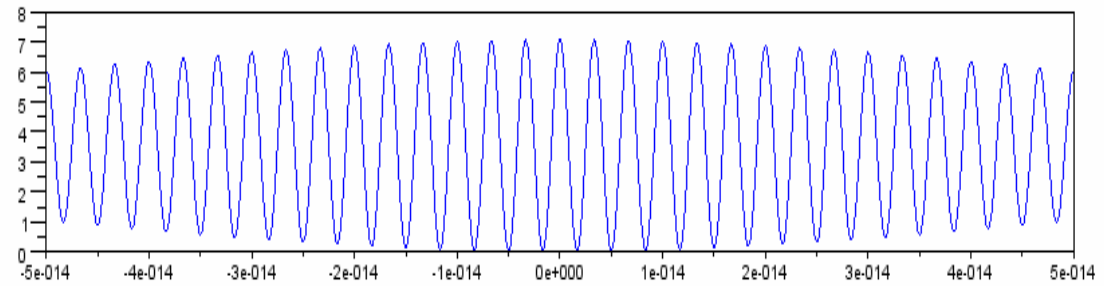




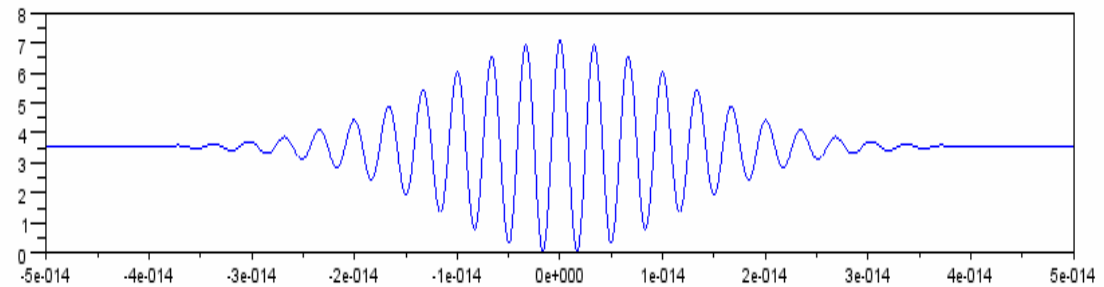
$v_{1/2}$



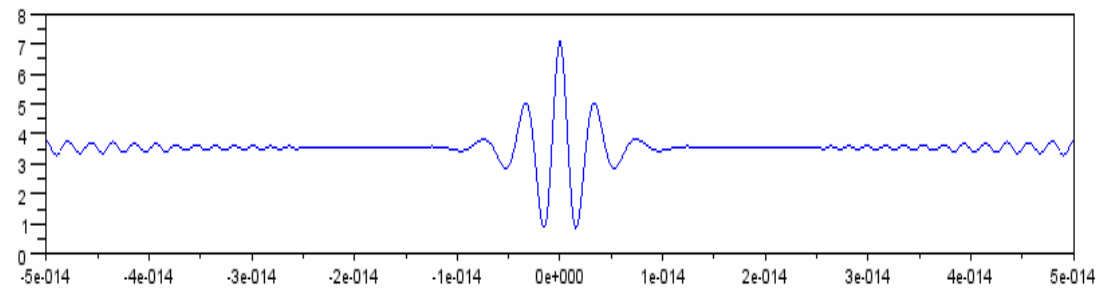
$5 v_{1/2}$



$25 v_{1/2}$



$125 v_{1/2}$



δ_{21}

Notion de cohérence temporelle;
temps de cohérence

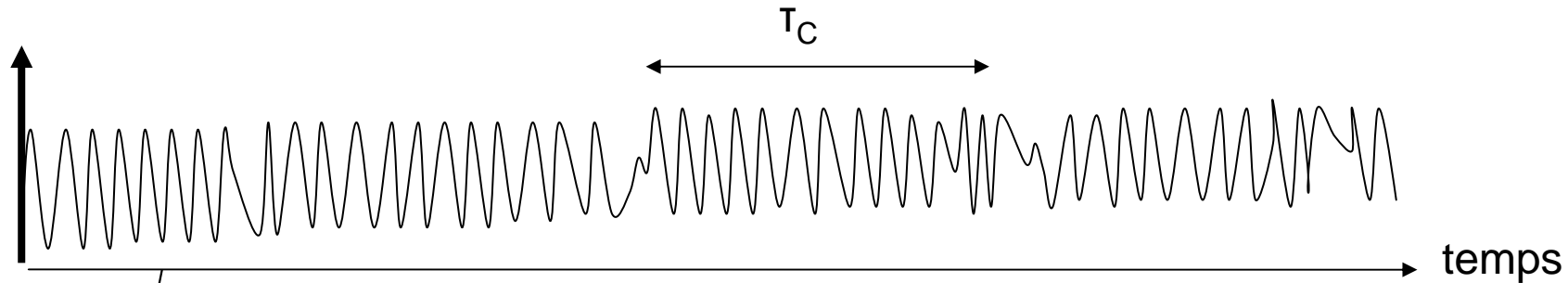
Interférences en lumière polychromatique: longueur de cohérence

La longueur de cohérence L_c est la différence de marche au-delà de laquelle le contraste des franges s'effondre.

- Demi largeur à $1/e$ de la transformée de Fourier du spectre
- Plus le spectre est large, plus L_c est petite.
- L_c est inversement proportionnelle à la largeur spectrale
- Temps de cohérence $\tau_c = L_c/c$

$$\tau_c \approx \frac{1}{\Delta\nu}$$

Lien avec le modèle de la source quasi-monochromatique



On peut définir un spectre d'intensité $J_0(\nu)$ (densité spectrale de puissance) pour un tel signal. Sa largeur spectrale est de l'ordre de:

$$\tau_c \approx \frac{1}{\Delta \nu}$$

On voit que le temps de cohérence d'une source polychromatique et le temps de cohérence du modèle quasimonochromatique coïncident.

Théorème de Wiener-Khintchine (appliqué à l'optique)

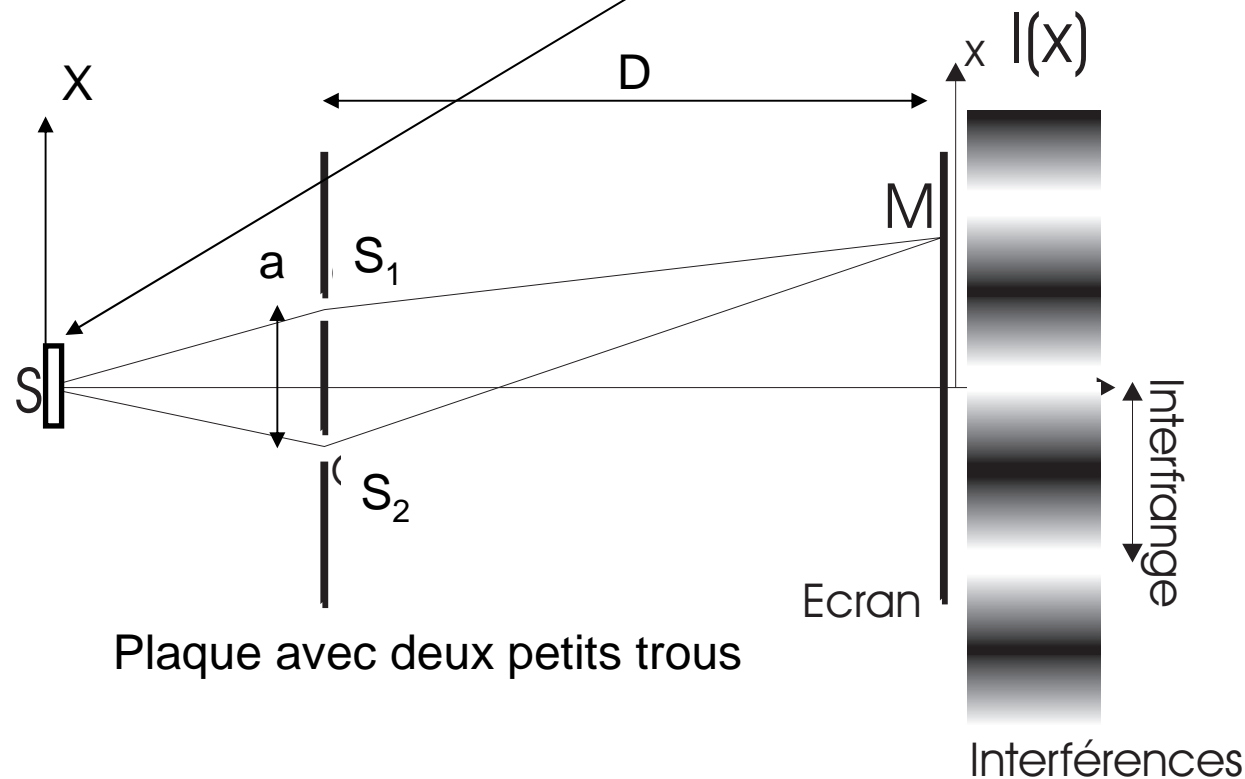
Le contraste des franges $C(\tau_{21})$ en fonction du retard τ_{21} est proportionnel à la transformée de Fourier du spectre en intensité $J_0(\nu)$ de la source.

Rq: Ceci est valable y compris si le champ est aléatoire, à condition que ses propriétés statistiques soient stationnaires, i.e ne dépendent pas du temps (C'est cela, le théorème de Wiener Khintchine)

Interférences avec une source
étendue;
cohérence spatiale

expérience d'Young...avec une source étendue

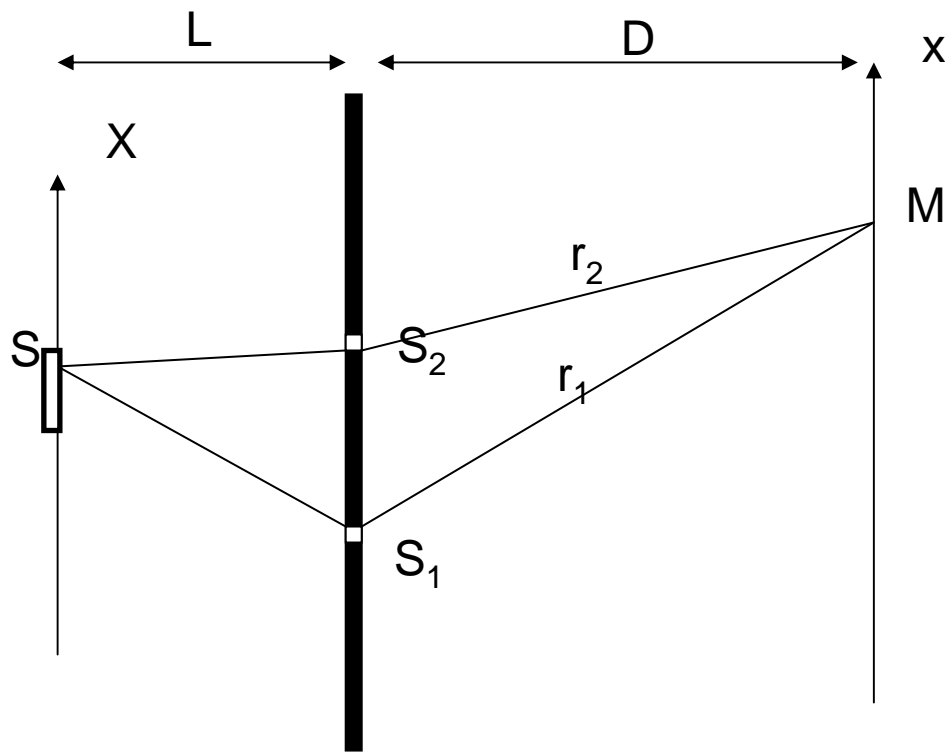
On remplace la source ponctuelle S par une source étendue dans la direction X (largeur d)



Quel sera l'effet sur la figure d'interférence ???

expérience d'Young...avec une source étendue

- On décompose la source en une infinité de sources ponctuelles.
- On détermine ensuite la figure d'interférence produite par chacune d'elles.
- On somme enfin l'ensemble de ces figures d'interférence EN INTENSITE (les champs de deux sources différentes ne peuvent interférer)



$$dI(M) = i_0 dX + i_0 dX + 2i_0 dX \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} + \phi_1 - \phi_2\right)$$

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (SS_2 - SS_1)$$

$$\phi_2 - \phi_1 = -\frac{2\pi aX}{\lambda L}$$

On va supposer que les trous sont équivalents

$$I_1 = I_2$$

expérience d'Young...avec une source étendue

$$dI(M) = 2i_0 dX \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} + \frac{2\pi aX}{\lambda L}\right) \right)$$

$$I(M) = \int_{-d/2}^{d/2} dI_M = 2i_0 \int_{-d/2}^{d/2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} + \frac{2\pi aX}{\lambda L}\right) \right) dX$$

$$I(M) = 2i_0 d + 2i_0 \left[\frac{\lambda L}{2\pi a} \sin\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} + \frac{2\pi aX}{\lambda L}\right) \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$I(M) = 2i_0 d + 2i_0 d \frac{\lambda L}{2\pi a d} \left[\sin\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} + \frac{\pi a d}{\lambda L}\right) - \sin\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} - \frac{\pi a d}{\lambda L}\right) \right]$$

$$I(M) = 2i_0 d \left[1 + \frac{\lambda L}{2\pi a d} 2 \sin\left(\frac{\pi a d}{\lambda L}\right) \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \right]$$

Fonction qui module la visibilité GLOBALE des franges

On retrouve le cosinus des franges d'interférences

Visibilité des franges avec une source étendue

$$I(M) = 2i_0 d \left[1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a d}{\lambda L}\right) \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda D}\right) \right]$$

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a d}{\lambda L}\right)$$

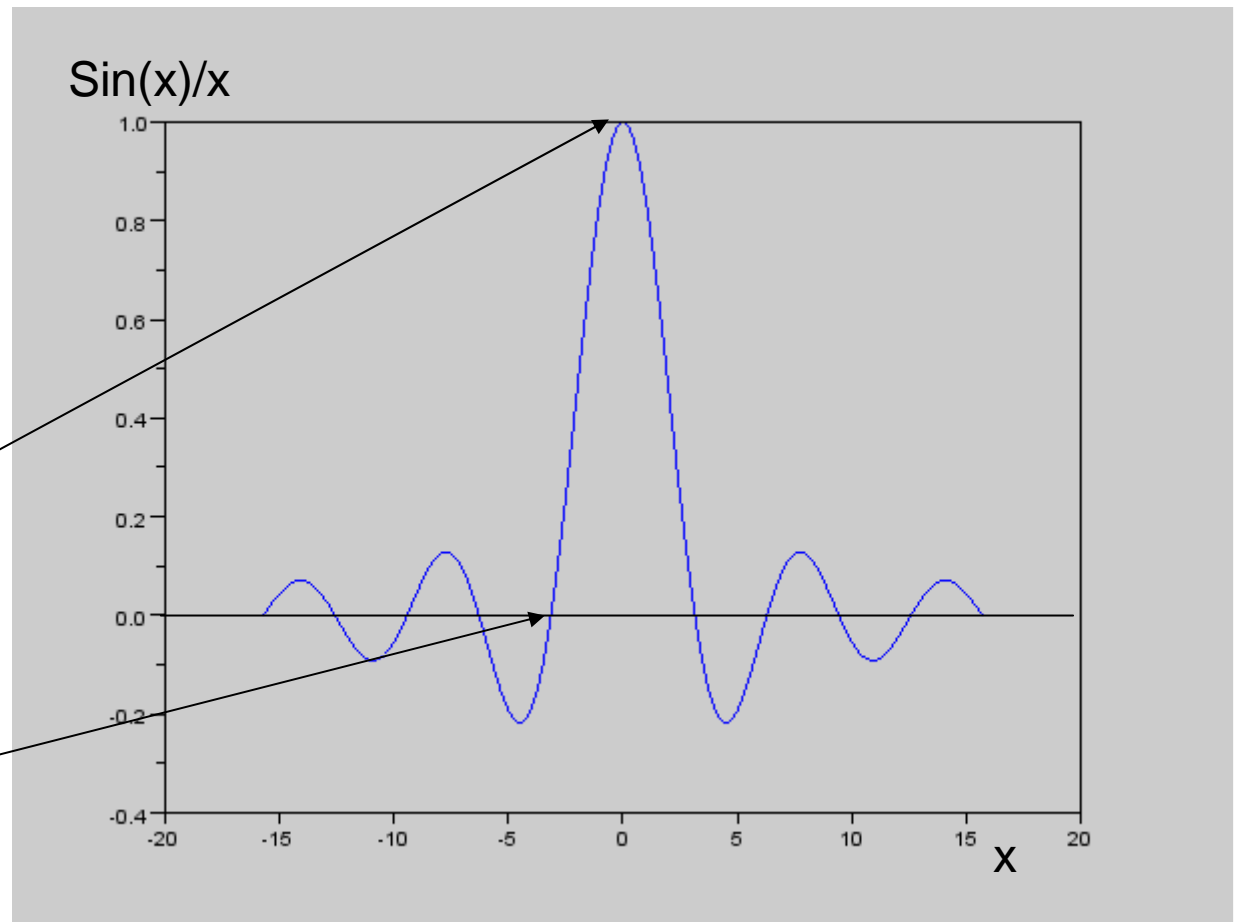
On rappelle les propriétés
du sinus cardinal

$$\operatorname{sinc}(x) = \sin(x) / x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sinc}(x) = 1$$

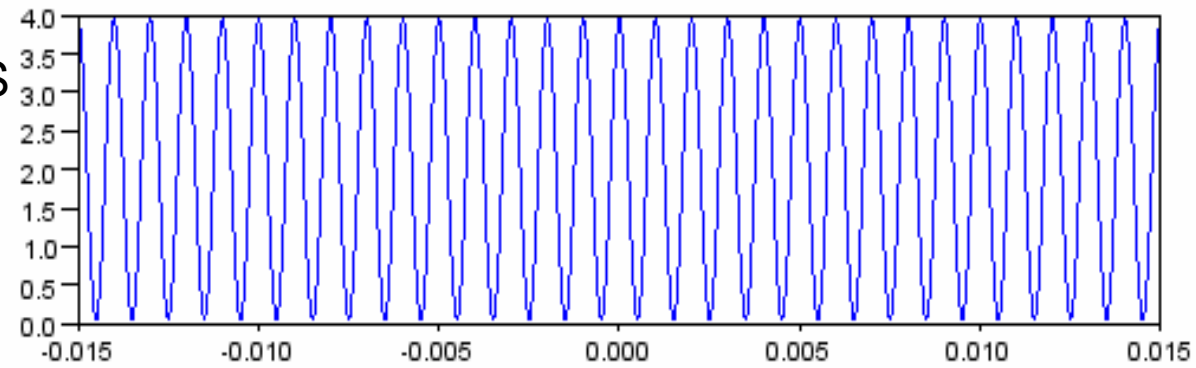
Premier point d'annulation:

$$x = \pi \text{ ou } x = -\pi$$

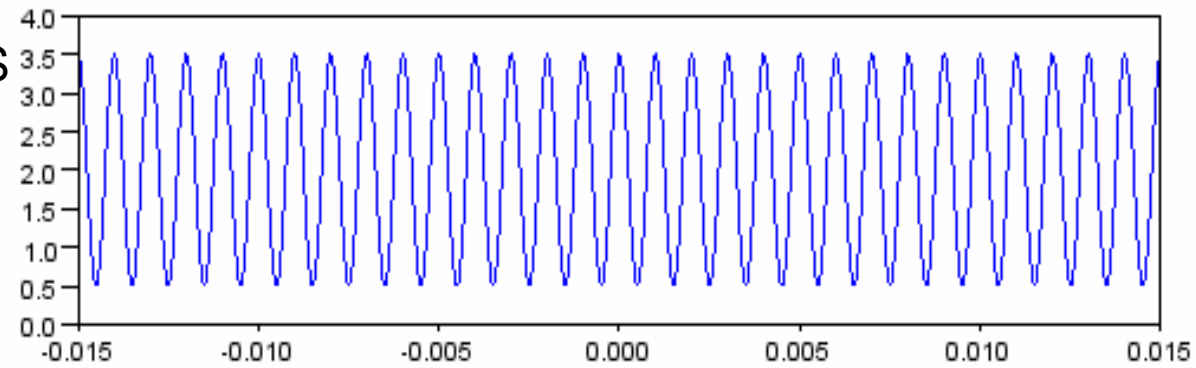


Intensité en M

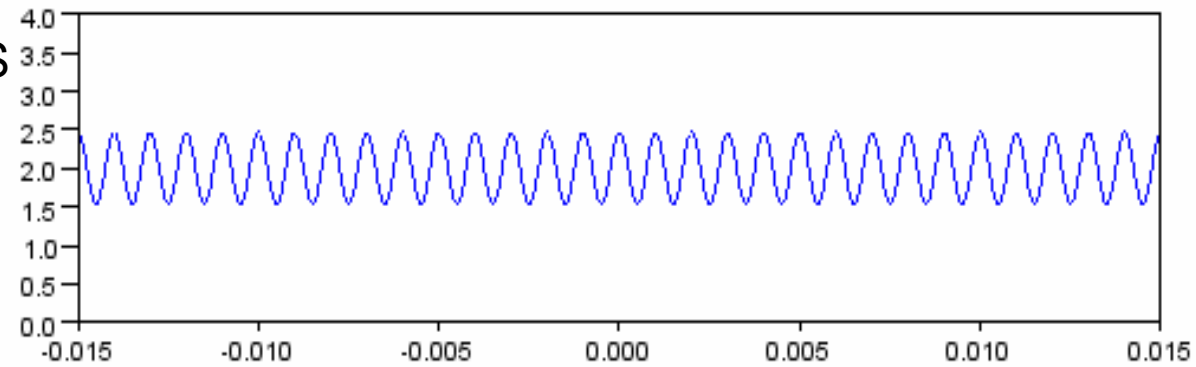
Taille de la source S
 $d = 100\mu\text{m}$



Taille de la source S
 $d = 400\mu\text{m}$



Taille de la source S
 $d = 800\mu\text{m}$



Position x du point M

Notion de longueur de cohérence spatiale

- Sur l'exemple précédent, on voit que le contraste des franges est maximale si $d=0$ (source ponctuelle)
- Le contraste tend vers zero si d augmente (source très étendue) → **Avec une source trop grande, pas de franges !**
- **Pour une source étendue (taille d non nulle) il est en théorie toujours possible de choisir une distance a entre les trous suffisamment petite ou une distance L suffisamment grande pour garder des franges visibles:**

Il faut que le sinus cardinal ne s'annule pas soit:

$$\frac{\pi a d}{\lambda L} < \pi$$

$$a < \frac{\lambda L}{d} = \Lambda_T$$

Λ_T est la longueur de cohérence transverse ou
LONGUEUR DE COHERENCE SPATIALE
du champ, au niveau du plan des trous

Généralisation

Si on a une distribution d'intensité $I(X)$ suivant X , on peut développer un formalisme équivalent à celui de la cohérence temporelle:

$$dI(M) = 2i_0(X)dX \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} + \frac{2\pi aX}{\lambda L}\right) \right)$$

$$I(M) = \int_{-\infty}^{\infty} dI_M = 2 \int_{-\infty}^{\infty} i_0(X) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} + \frac{2\pi aX}{\lambda L}\right) \right) dX$$

$$I(M) = 2I_0 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} i_0(X) \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} + \frac{2\pi aX}{\lambda L}\right) dX$$

$$I(M) = 2I_0 + 2 \operatorname{Re} \left(\exp\left(-i \frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \int_{-\infty}^{\infty} i_0(X) \exp\left(-i \frac{2\pi aX}{\lambda L}\right) dX \right)$$

Généralisation: théorème de Van Cittert - Zernicke

Si on a une distribution d'intensité $I(X)$ suivant X , on peut développer un formalisme équivalent à celui de la cohérence temporelle:

$$dI(M) = 2i_0(X)dX \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} - \frac{2\pi aX}{\lambda L}\right) \right)$$

$$I(M) = \int_{-\infty}^{\infty} dI_M = 2 \int_{-\infty}^{\infty} i_0(X) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} - \frac{2\pi aX}{\lambda L}\right) \right) dX$$

$$I(M) = 2I_0 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} i_0(X) \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} + \frac{2\pi aX}{\lambda L}\right) dX$$

$$I(M) = 2I_0 + 2 \operatorname{Re} \left(\exp\left(-i \frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \int_{-\infty}^{\infty} i_0(X) \exp\left(-i \frac{2\pi aX}{\lambda L}\right) dX \right)$$

$$I(M) = 2I_0 + 2 \operatorname{Re} \left(\exp\left(-i \frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \int_{-\infty}^{\infty} i_0(X) \exp(-i 2\pi q X) dX \right)$$

$$q = \frac{a}{\lambda L}$$

Franges des
trous d'Young

Contraste des franges ...
c'est la Transformée de Fourier de $i_0(X)$

Applications

Application de la cohérence temporelle: Spectroscopie TF

- Objectif : déterminer le spectre d'une source $J_0(\nu)$
- On enregistre le contraste des franges $C(\delta)$ en fonction de la différence de marche δ .
- La TF inverse de $C(\delta)$ permet de revenir à $J_0(\nu)$.
- Le plus petit écart en fréquence que l'on peut distinguer est inversement proportionnel à la différence de marche δ_{\max} que l'on peut atteindre techniquement.

Application de la spectroscopie Infrarouge par transformée de Fourier (FTIR): Identification de molécules complexes (transitions ro-vibrationnelles) dans un milieu.

Cosmochimie, planétologie (exobiologie), analyse d'œuvres d'art, médecine légale, recherche de polluants...

Multivariate Analysis of FTIR and Ion Chromatographic Data for the Quality Control of Tequila

DIRK W. LACHENMEIER,^{*,†} ELKE RICHLING,[§] MERCEDES G. LÓPEZ,[#]
WILLI FRANK,[†] AND PETER SCHREIER[§]

Chemisches und Veterinäruntersuchungsamt (CVUA) Karlsruhe, Weissenburger Strasse 3,
76187 Karlsruhe, Germany; Lehrstuhl für Lebensmittelchemie, Universität Würzburg, Am Hubland,
97074 Würzburg, Germany; and Unidad de Biotecnología e Ingeniería Genética de Plantas,
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, 36500 Irapuato, Gto., Mexico

!!!

Principal component analysis (PCA) was applied to the chromatographic and spectroscopic data of authentic Mexican tequilas ($n = 14$) and commercially available samples purchased in Mexico and Germany ($n = 24$). The scores scatter plot of the first two principal components (PC) of the anions chloride, nitrate, sulfate, acetate, and oxalate accounting for 78% of the variability allowed a classification between tequilas bottled in Mexico and overseas; however, no discrimination between tequila categories was possible. Mexican products had a significantly ($p = 0.0014$) lower inorganic anion concentration (range = 1.5–5.1 mg/L; mean = 2.5 mg/L) than the products bottled in the importing countries (range = 3.3–62.6 mg/L; mean = 26.3 mg/L). FTIR allowed a rapid screening of density and ethanol as well as the volatile compounds methanol, ethyl acetate, propanol-1, isobutanol, and 2-/3-methyl-1-butanol using partial least-squares regression (precisions = 5.3–29.3%). Using PCA of the volatile compounds, a differentiation between tequila derived from "100% agave" (*Agave tequilana* Weber var. *azul*, Agavaceae) and tequila produced with other fermentable sugars ("mixed"

Source cohérente temporellement

- c'est une source ayant une largeur spectrale très faible.
- Sa longueur L_c de cohérence et donc son temps de cohérence sont grands

Sources:

Raie spectrale de lampe à vapeur métalliques ($L_c=1\text{mm}$ à 1cm)

Laser monomode ($L_c= 20\text{cm}$!!!)

Intérêt : expériences d'interférométrie nécessitant des différences de marche importantes

- TP à vocation pédagogiques (pas trop précis sur les distances...)
- interférométrie à grande distance
- **holographie** (enregistrement d'objets en 3D, analyse de vibrations, de déformations)

Source incohérente temporellement

- c'est une source ayant une largeur spectrale très grande.
- Sa longueur L_c de cohérence et donc son temps de cohérence sont petits

Sources:

- **Lumière blanche**
- **diodes blanches**
- **lasers femtosecondes (Titane-Saphir)**

Intérêt : permet de repérer la différence de marche nulle avec une très grande précision (franges nulle part sauf près de la différence de marche nulle)

- Mesure absolue de distance
- Couplée à la microscopie: **Tomographie par cohérence optique (OCT en anglais)**. Permet d'obtenir le profil vertical d'un tissu vivant (peau, rétine...) avec une très bonne résolution.

Application de la cohérence spatiale: téléscope interférométrique

Si on mesure le contraste des franges en fonction de la différence de marche, on peut déterminer la répartition d'intensité dans la source.

Ce principe est à la base des télescopes interférométriques comme le VLTI (Very Large Telescope Interferometer).

En faisant interférer la lumière provenant de différents télescopes observant la même étoile, il est possible de reconstituer son image avec une résolution très supérieure à celle d'un seul des télescopes !

La différence de marche est « scannée » à l'aide de miroirs montés sur rails

Application de la cohérence spatiale: téléscope interférométrique



The Four Auxiliary Telescopes at Paranal



ESO PR Photo 51c/06 (22 December

