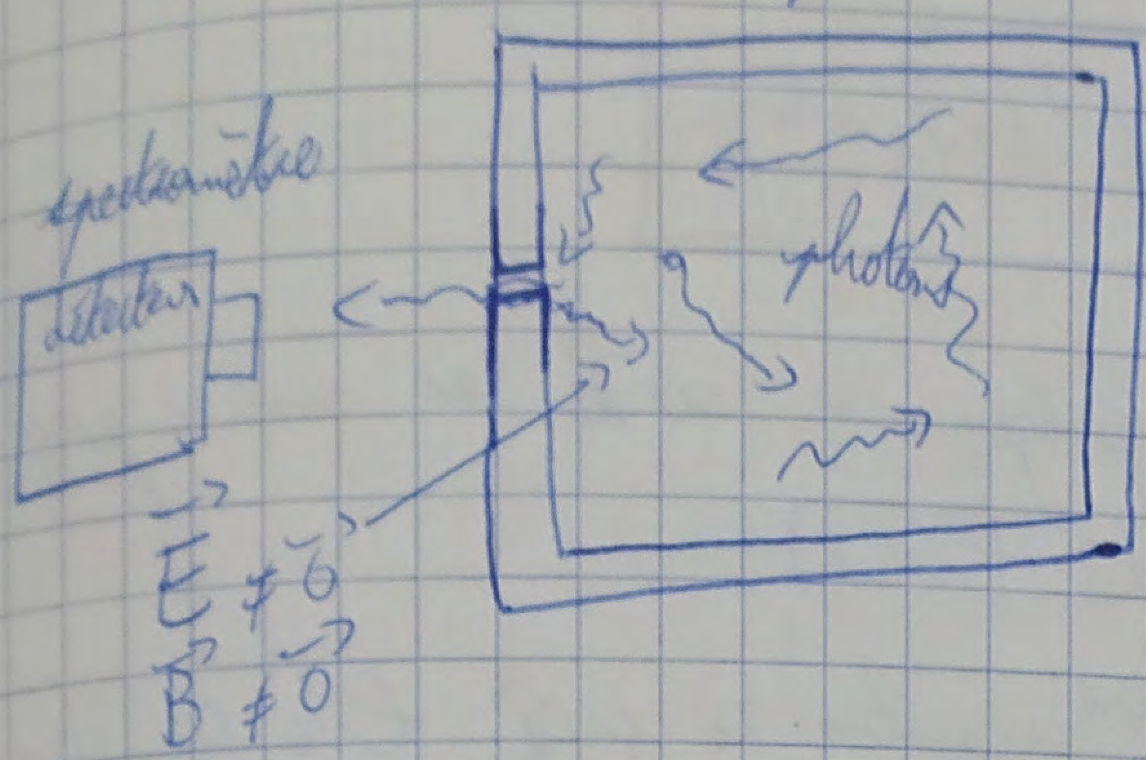
Photons ⟷ énergie

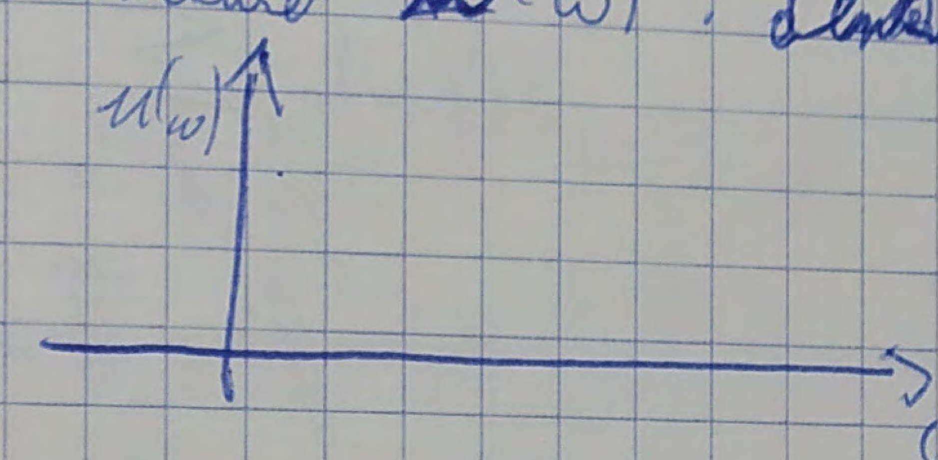
III) Thermodynamique du rayonnement (corps noir).

A) Description du problème.



rayonnement à l'équilibre avec de la matière

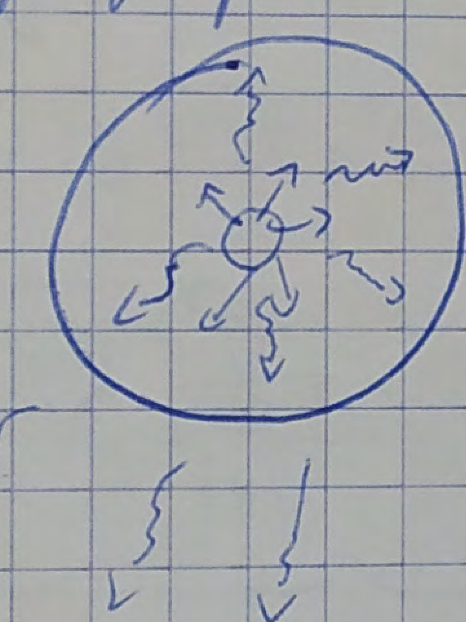
Question : On mesure $u(\omega)$: densité d'énergie du rayonnement



← que peut-on dire sur cette courbe ?

Exemples de contextes physique :

1) Etoiles



(processus d'émissions/absorptions)

Si le flux de photons émis on considère que l'étoile est en état d'équilibre (sur des échelles de temps courts), ou du moins que certaines couches de l'étoile le sont (on considère que les photons sont à l'équilibre avec la matière)

2) Fond diffus cosmologique.

B) Aspects microscopiques.

Rayonnement électromagnétique dans une boîte (dans le vide)

↑ conditions aux limites

Equations de Maxwell :
$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{E} = 0 & \leftarrow \rho = 0 \\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{0} \leftarrow \vec{j} = 0 + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$
création du champ par les sources

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}\,\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \end{array}$$

$\phi = 0$

$$\left[\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{0}\right.$$

Analyse spectrale

$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_{\vec{k}} \times e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \|\vec{k}\| c}$

Boîte : $\longrightarrow$ conditions aux limites

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Les modes propres du champ e-m sont quantifiés (classique)}}$

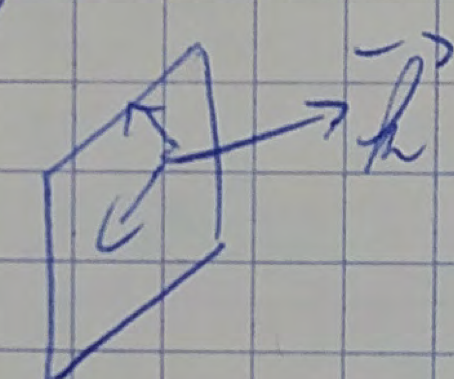
Comment sont distribuées les fréquences $\omega_{\vec{k}}$ des modes propres ?

$\longrightarrow$ Densité de mode $\rho(\omega)$

$\rho(\omega)\, d\omega \overset{\text{définition}}{=}$ nombre de $\omega_{\vec{k}}$ (modes) $\in [\omega, \omega + d\omega]$

$$\rho(\omega) = 2 \sum_{\vec{k}} \delta(\omega - \omega_{\vec{k}})$$

si on fixe $\vec{k}$ $\rightarrow$ il y a 2 polarisations



$$\omega_{\vec{k}} = \|\vec{k}\| c$$

$$\rho(\omega) = 2 \times V \underbrace{\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}}_{\sum_{\vec{k}}} \delta(\omega - \|\vec{k}\| c)$$

$$= \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dk\, k^2 \times \delta(\omega - kc)$$

$$\boxed{\rho(\omega) = \frac{V}{\pi^2 c^3}\, \omega^2}$$ (classique) même avec quantique

↳ pour la physique statistique $\rho(\omega)$ contient toute l'information microscopique nécessaire

(Parenthèse : Une relation utile

$f(x)$ possède des racines simples en x_i

$$f(x) \underset{x \sim x_i}{\simeq} f(x_i)(x - x_i)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$$

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|}\,\delta(x)$$

2) Energie électromagnétique.

$$H_{em} = \int_V d\vec{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right)$$ ~~[illegible]~~

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ B(\vec{r}) &= \vec{\mathrm{rot}}(\vec{A}) \end{aligned}\right| \xrightarrow{\text{Fourier}} \quad \begin{aligned} \tilde{\vec{E}}_{\vec{k}} &= -\frac{\partial \tilde{\vec{A}}_{\vec{k}}}{\partial t} \\ \tilde{\vec{B}}_{\vec{k}} &= \vec{k} \wedge \tilde{\vec{A}}_{\vec{k}} \end{aligned}$$

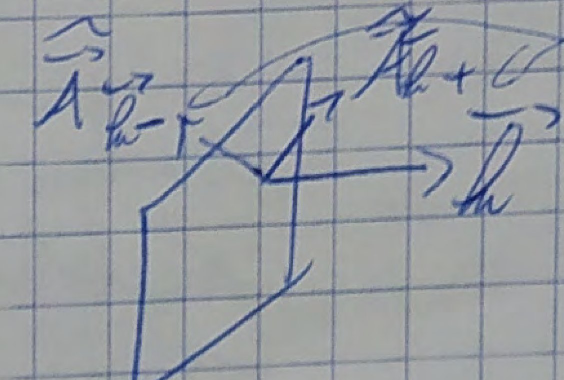
(principe de correspondance)

(Parseval-Plancherel) $$\boxed{H_{e-m} = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\vec{k},\sigma} \left[|\partial_t \tilde{\vec{A}}_{\vec{k},\sigma}|^2 + \omega_{\vec{k}}^2 |\tilde{\vec{A}}_{\vec{k},\sigma}|^2 \right]}$$

$\vec{k} \perp \vec{A}_{\vec{k}}$ $\quad \dfrac{\vec{k}^2}{\mu_0 \varepsilon_0}$ $\quad$ polarisation

$\tilde{\vec{A}}_{\vec{k}}(t) \to$ « coordonnées normales »

$$\boxed{\text{Le champ électromagnétique} \Longleftrightarrow \text{un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants}}$$



$$\boxed{\begin{gathered}\text{un mode propre du champ e-m } (\vec{k}, \sigma) \\ \Updownarrow \\ \text{un oscillateur harmonique}\end{gathered}}$$

B) Théorie quantique du rayonnement.

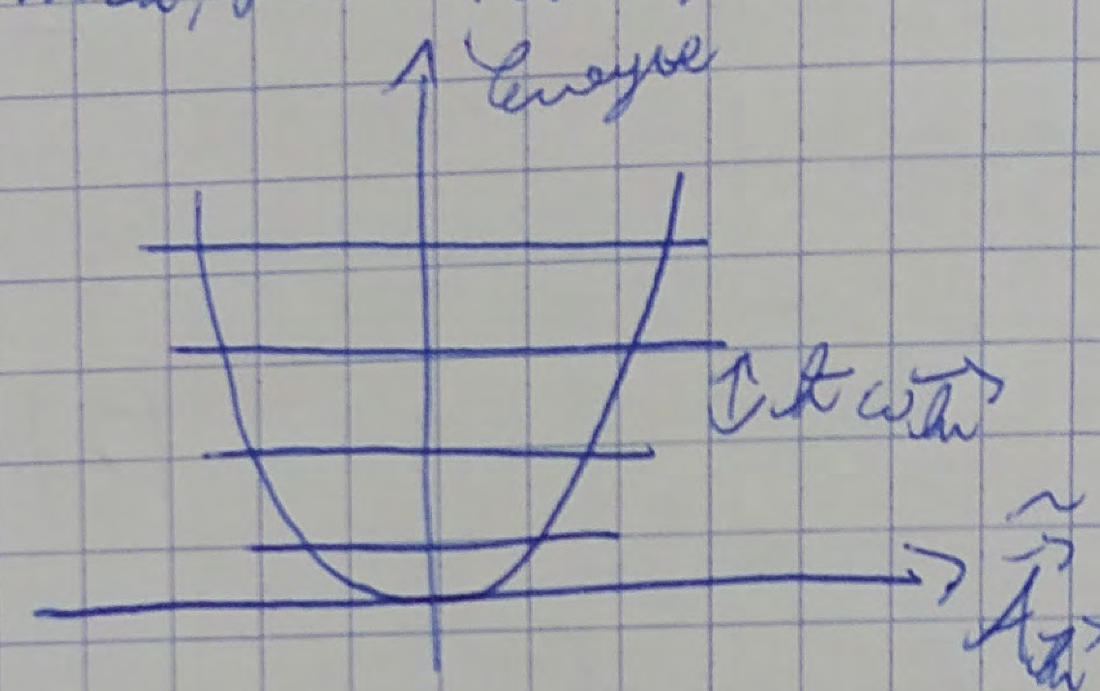
Quantification d'oscillateurs harmoniques :

1 mode $(\vec{k},\sigma)$ $\longrightarrow$ un oscillateur $\omega_{\vec{k}}$

une fréquence mais 2 modes

énergie du mode : $\hbar\omega_{\vec{k}}\left(n_{\vec{k},\sigma}+\frac{1}{2}\right)$

$n_{\vec{k},\sigma}\in\mathbb{N}$



$$\boxed{\begin{aligned} n_{\vec{k},\sigma} &= \text{degré d'excitation du mode} \\ &= \text{nombre de photons}\end{aligned}}$$

H_{em} $\longrightarrow$ quantifiée

$\Downarrow$

valeurs propres

$$\boxed{E\{n_{\vec{k},\sigma}\} = \sum_{\vec{k},\sigma}\hbar\omega_{\vec{k}}\left(n_{\vec{k},\sigma}+\frac{1}{2}\right)}$$

C) Thermodynamique du rayonnement.

1) Fonction de partition.

$$\boxed{Z_{e-m} = \prod_{(\vec{k},\sigma)} \underbrace{\frac{1}{2\,sh\left(\frac{\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}\right)}}_{\text{fonction de partition d'un mode}}}$$

$$F_{e-m} = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{e-m}$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{(\vec{k},\sigma)} \ln\Big[2\,\underbrace{\mathrm{sh}\Big(\frac{\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}\Big)}_{e^{\beta\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}}\left(1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}\right)}\Big]$$

$$F_{e-m} = \underbrace{\sum_{\vec{k},\sigma} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2}}_{\substack{E_0 = \text{énergie du vide} \\ \text{(fondamentale)}}} + \underbrace{\sum_{\vec{k},\sigma} \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega_{\vec{k}}}\right)}_{\substack{\text{excitation} \\ \updownarrow \\ \text{photons} \\ = \text{rayonnement}}}$$

$$\boxed{F_{e-m}(T,V) = E_0 + \underbrace{k_B T \int_0^\infty d\omega\, \rho(\omega) \ln\left(1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)}_{F_{\text{rayonnement}}(T,V)}}$$

$$= E_0 +$$

2) Énergie moyenne.

$$\bar{E}_{e-m} = \sum_{\vec{k},\sigma} \hbar\omega_{\vec{k}}\left(\bar{n}_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \underbrace{E_0}_{\text{énergie du vide}} + \bar{E}_{\text{rayonnement}}$$

$$\bar{E}_{\text{rayonnement}} = \int_0^\infty d\omega\, \rho(\omega) \times \hbar\omega \times \bar{n}_\omega \quad \text{où } \bar{n}_\omega = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

(Bose-Einstein)

$$\frac{\bar{E}_{\text{rayonnement}}}{V} = \int_0^\infty d\omega\, \underbrace{\frac{\rho(\omega)}{V} \times \hbar\omega \times \bar{n}_\omega}_{\text{définition } u(\omega,T)}$$

$$V \times u(\omega,T)\, d\omega \equiv \text{énergie moyenne des modes} \in [\omega, \omega + d\omega]$$

$$\boxed{u(\omega,T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}}$$

Loi de Planck (1900)

Cas limites : **1) Classique $k_B T \gg \hbar\omega$**

$$u(\omega,T) \simeq \underbrace{\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}}_{\frac{\rho(\omega)}{V}\ \simeq \text{ nombre de modes}} \underbrace{k_B T}_{\text{énergie moyenne d'un oscillateur}}$$

loi de Rayleigh-Jeans

Analyse classique (fin XIX^{ème} siècle) :

$$u(\omega,T) \propto \omega^2 T$$

$$E_{\text{rayonnement}} = \int d\omega\, u(\omega,T) \sim T \int_0^\infty d\omega\, \omega^2 = \infty$$

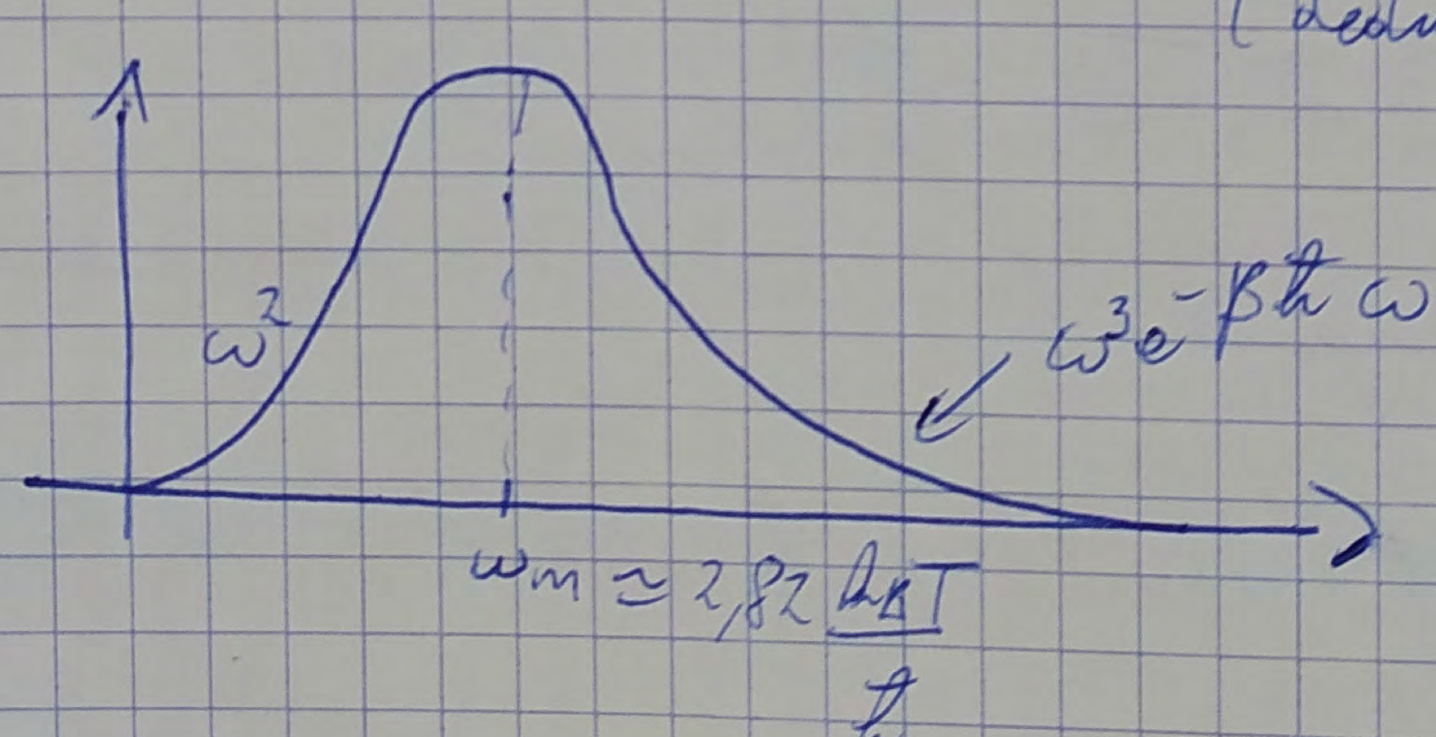
« catastrophe ultraviolette »

$\longrightarrow$ Le problème du corps noir

2) Régime quantique : $k_B T \ll \hbar\omega$

$$u(\omega,T) \simeq \frac{\hbar\omega}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$$

loi de Wien
(déduite de l'observation)



La distribution de l'énergie est une courbe **universelle** ne dépendant que de T.

$$u_{tot}(T) = \int_0^\infty d\omega\, u(\omega,T) \quad \Leftarrow \text{densité volumique d'énergie}$$

$$= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \underbrace{\int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}}_{\left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1}} \qquad \frac{\pi^4}{15}$$

Loi de Stephan - Boltzmann :

$$\boxed{u_{tot}(T) = \frac{\overline{E_{ray}}}{V} = \frac{\pi^2}{15}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}}$$

$F_{ray}(T, V)$

N photons n'est pas fixé

photon $\Leftrightarrow$ énergie e-m

$$\boxed{\mu_{photons} = 0}$$

4) Pression du rayonnement.

$$F_{ray}(\underbrace{T}_{\text{intensive}}, \underbrace{V}_{\text{extensive}}) = -p_{ray} \times V$$

photon $\rightarrow \vec{k}, \omega_{\vec{k}} \rightarrow \begin{cases} \vec{p} = \hbar \vec{k} \Rightarrow \text{pression} \\ E_{\vec{k}} = \hbar \omega_{\vec{k}} = \hbar \|\vec{k}\| c \end{cases}$

$$F_{ray} = \underbrace{-\frac{1}{3}}_{\text{preuve dans les notes de cours}} \overline{E_{ray}}$$

$$\boxed{p_{ray} = \frac{\pi^2}{45}\frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}}$$

Soleil : $T = 5800K$

$\Downarrow$

$p_{ray} = 0{,}33 Pa$