

Niveau:

Pré-requis:

Plan: I) Barrière de potentiel et effet tunnel

1) Position du problème

2) Prerequis

3) Probabilité de transmission

II) Une application technologique: le microscope à effet tunnel

1) Microscopie à effet tunnel.

2) Spectroscopie à effet tunnel.

III) Radioactivité α

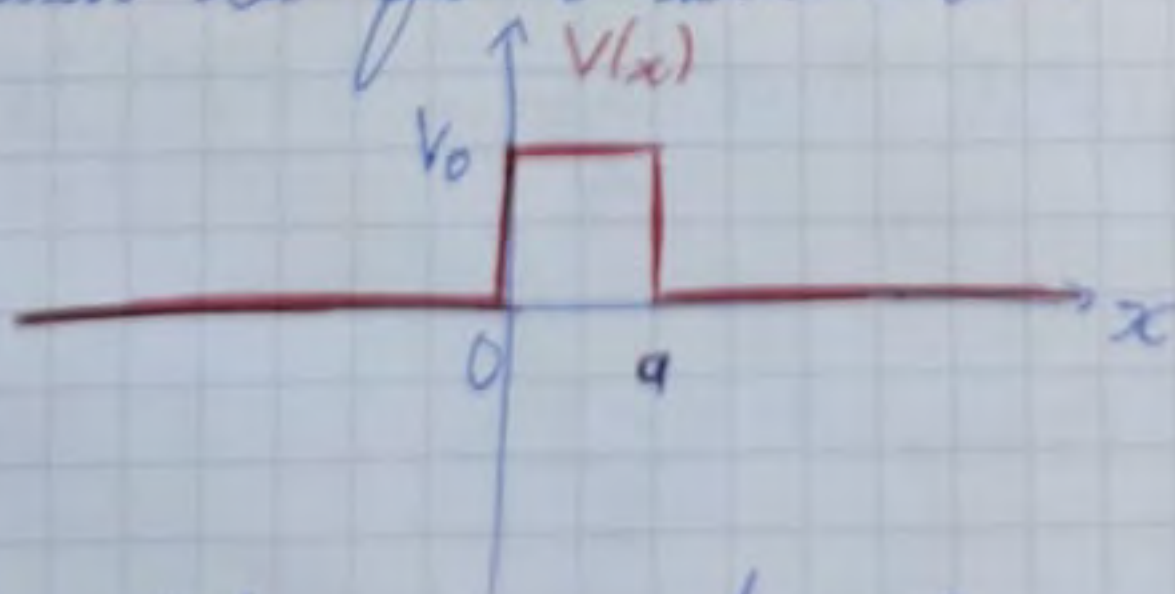
Introduction:

* Comme il a été vu dans les cours d'électromagnétisme (par exemple effet de peau dans un conducteur), les champs \vec{E} et \vec{B} peuvent pénétrer sur une certaine distance dans la matière (ondes évanescentes).

* Étant donné la dualité onde-corpuscule, des particules de matière (comme l'électron par exemple) peuvent elles aussi présenter ce caractère d'onde évanescente? Si oui, quelles conséquences un tel phénomène peut-il avoir?

↳ C'est l'objet de cette leçon.

* Considérons un profil d'énergie potentielle pour une station qui aurait la forme suivante:



→ Soit un électron provenant de la gauche et allant vers la droite

avec une énergie cinétique $0 < E < V_0$.

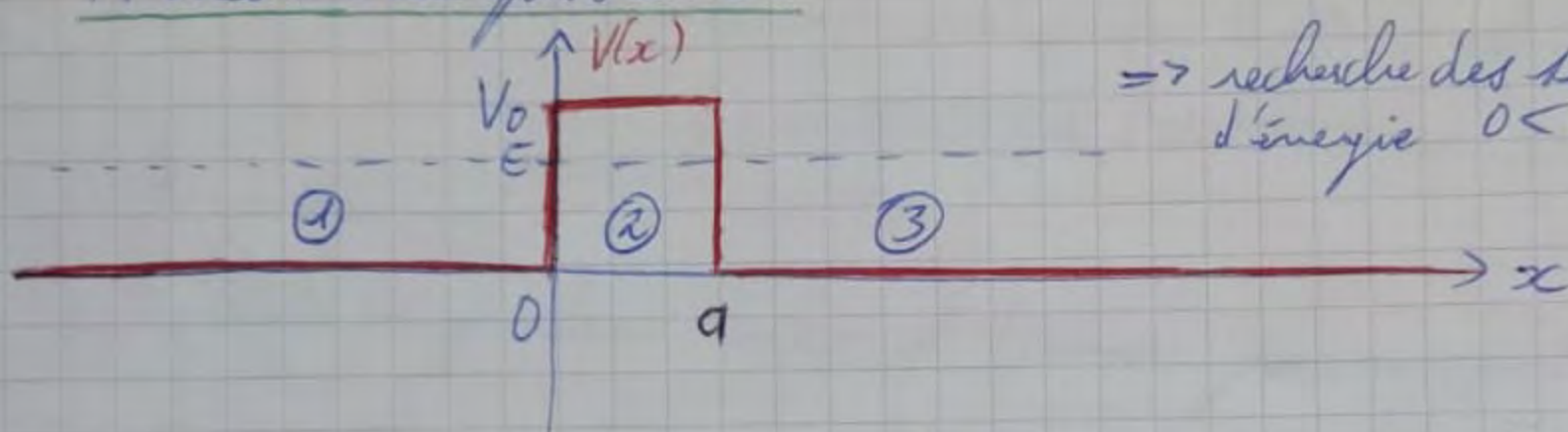
→ Ici on voit que l'électron classique ne peut pas exister dans la zone $[0, a]$, car du fait de la conservation de l'énergie mécanique cela impliquerait une énergie cinétique < 0
 (IMPOSSIBLE)

(C) CLASSIQUEMENT l'électron est réfléchi

↳ que se passe-t-il quantiquement ?

I) Barrière de potentiel et effet tunnel.

1) Position du problème.



Equation de Schrödinger stationnaire:

$$\begin{cases} \textcircled{1} : -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_1(x)}{\partial x^2} = E \psi_1(x) \\ \textcircled{2} : -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_2(x)}{\partial x^2} + V_0 \psi_2(x) = E \psi_2(x) \\ \textcircled{3} : -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_3(x)}{\partial x^2} = E \psi_3(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} : \frac{\partial^2 \psi_1(x)}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1(x) = 0 \\ \textcircled{2} : \frac{\partial^2 \psi_2(x)}{\partial x^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \psi_2(x) = 0 \\ \textcircled{3} : \frac{\partial^2 \psi_3(x)}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_3(x) = 0 \end{cases}$$

On pose :

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$K = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

⇒ La fonction d'onde admet pour solution :

$$\begin{cases} \psi_1(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \\ \psi_2(x) = C \operatorname{ch}(Kx) + D \operatorname{sh}(Kx) \\ \psi_3(x) = E e^{ikx} + F e^{-ikx} \end{cases}$$

* On suppose une onde incidente provenant de la gauche :

$$\psi_1(x) = e^{ikx} + r e^{-ikx}$$

$$\psi_2(x) = C \operatorname{ch}(Kx) + D \operatorname{sh}(Kx)$$

$$\psi_3(x) = t e^{ikx}$$

↳ Comment trouver les expressions de C, D, r et t ?

(→ UTILISER CONDITIONS DE RACCORDEMENT)

2) Raccordement.

Égalité des fonctions d'onde et dérivée par rapport à x en $x=0$ et $x=a$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(0) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(0) \\ \psi_2(a) = \psi_3(a) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(a) = \frac{\partial \psi_3}{\partial x}(a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+r = C & \textcircled{I} \\ ik - ikr = KD & \textcircled{II} \\ C \operatorname{ch}(Ka) + D \operatorname{sh}(Ka) = t e^{ika} & \textcircled{III} \\ (K \operatorname{sh}(Ka) + D K \operatorname{ch}(Ka)) = ikt e^{ika} & \textcircled{IV} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = 1+r \\ D = \frac{ik}{K}(1-r) \\ \textcircled{III} \times K \times \operatorname{sh}(Ka) - \textcircled{IV} \times \operatorname{ch}(Ka): \\ -DK = t e^{ika} [K \operatorname{sh}(Ka) - ik \operatorname{ch}(Ka)] \\ \textcircled{III} \times K \times \operatorname{ch}(Ka) - \textcircled{IV} \times \operatorname{sh}(Ka): \\ DK = t e^{ika} [K \operatorname{ch}(Ka) - ik \operatorname{sh}(Ka)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = 1 + r \\ D = \frac{ih}{K} (1 - r) \\ C = t e^{ika} \left[\text{ch}(Ka) - \frac{ih}{K} \text{sh}(Ka) \right] \\ D = -t e^{ika} \left[\text{sh}(Ka) - \frac{ih}{K} \text{ch}(Ka) \right] \end{cases}$$

SLIDE 1: NE PAS FAIRE LE CALCUL, MONTRER SUR SLIDE

SLIDE 2: \Rightarrow MONTRER ENSUITE SLIDE SUIVANT POUR INTRODUIRE $\delta = \frac{1}{K}$

\hookrightarrow Expression de T ?

3) Probabilité de transmission.

* Sous la limite d'une barrière épaisse $\begin{cases} \frac{a}{\delta} \gg 1 \\ Ka \gg 1 \end{cases}$

* Dans cette limite: $\text{sh}(Ka) \approx \frac{e^{Ka}}{2}$

\Rightarrow
remettre
slide

$$T \approx \frac{16 h^2 K^2}{(K^2 + h^2)^2} e^{-2Ka}$$

Comme $h = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$$K = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\Rightarrow T = \frac{16 E (V_0 - E)}{V_0^2} e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}} \quad (*)$$

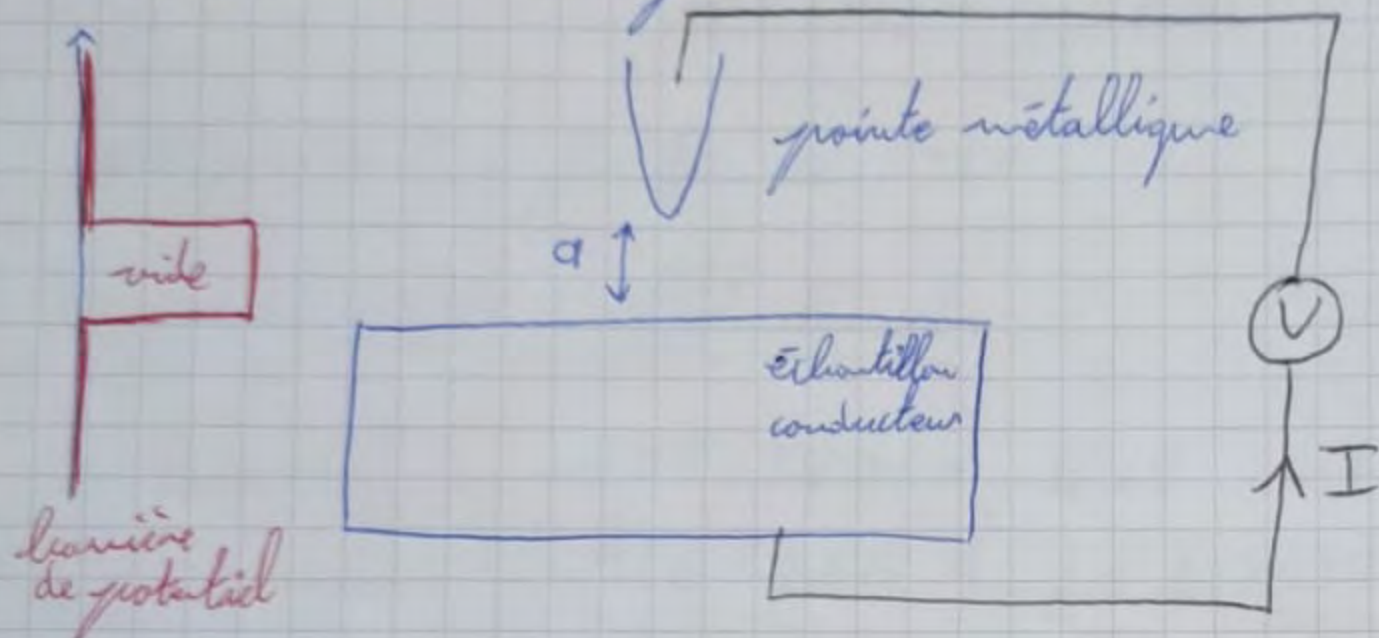
\hookrightarrow Dans la partie suivante nous allons expliquer comment ceci est exploité dans le microscope à effet tunnel

#) Une application technologique : le microscope à effet tunnel.

SLIDE 3 : MONTRER QUE LE COURANT TUNNEL EST PROPORTIONNEL À T

1) Microscopie à effet tunnel.

* Considérons le système suivant :



* Si une différence de potentiel V est appliquée, on mesure un courant $I \propto T$

$$I \propto e^{-\frac{2a\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}}$$

Si $E \approx 0$ mais $\neq 0$

$$m = m_{\text{électron}} = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$V_0 = W = 4 \text{ eV}$$

(travail de sortie typique des métaux)

\Rightarrow Regardons de combien varie I lorsque l'on éloigne la pointe de seulement $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 5 \text{ \AA} \\ a_2 = 6 \text{ \AA} \end{array} \right\} \rightarrow \Delta a = 1 \text{ \AA} \Rightarrow \frac{T_{a_1}}{T_{a_2}} \approx 10$$

\hookrightarrow Eloigner la pointe d' 1 \AA de la surface diminue le courant tunnel par un facteur 10

⇒ Courent tunnel permet de déterminer avec une grande précision la distance d'une pointe conductrice à un échantillon conducteur

↳ SLIDE 4: MONTRER IMAGERIE À COURANT CONSTANT

⇒ SLIDES: MONTRER LES CONDITIONS D'IMAGERIE PAR EFFET TUNNEL

⇒ pas unique fonction du STM

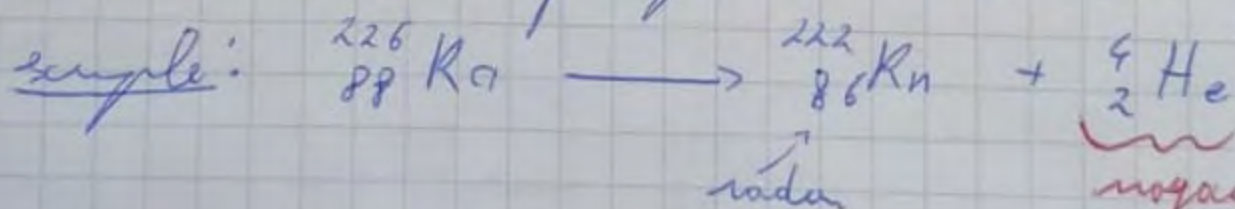
2) Spectroscopie à effet tunnel.

SLIDE 6: EXPLIQUER QUE L'ON PEUT ACCÉDER À LA DENSITÉ D'ÉTATS LOCALE

⇒ Phénomènes naturels mettant en évidence l'effet tunnel?

III) Radioactivité α .

* On considère un noyau constitué de A nucléons dont Z protons. Certains noyaux instables (comme le radium 226) sont susceptibles de se désintégrer par radioactivité α .



radon

noyau d'hélium α
particule α

SLIDE 7: Montrer tableau

$E \nearrow \rightarrow T_{1/2} \searrow$

↳ On se propose de retracer ce résultat.

Modèle de Gamow, Gurney et Condon :

* L'interaction forte est une interaction attractive entre les différents nucléons du noyau.

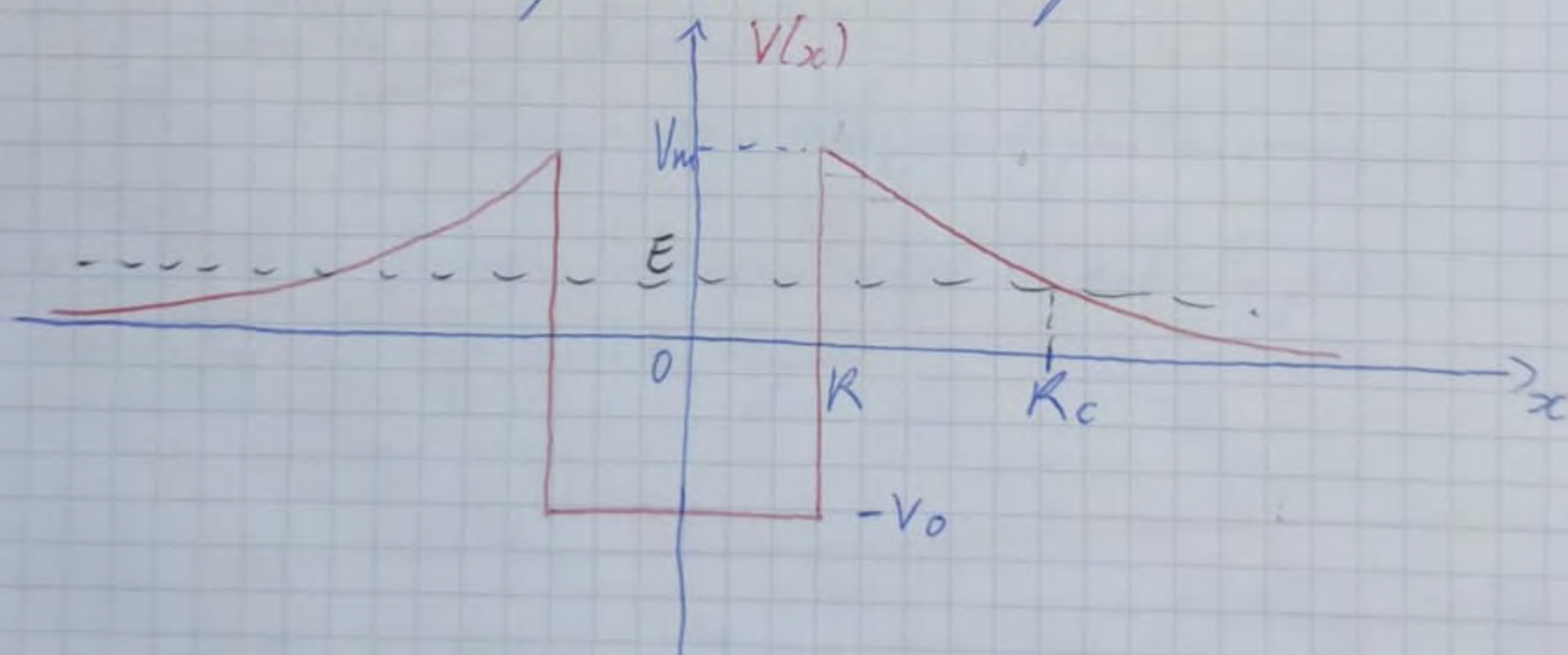
On suppose deux choses :

↳ À l'échelle du noyau, c'est l'interaction forte qui domine.

On suppose que celle-ci est nulle en dehors du noyau (interaction de très courte portée)

↳ Pour $x > R$, seule l'interaction coulombienne compte

=> Au final, on va considérer une particule α de masse m_α , de charge Ze , soumise au potentiel :



$$\left. \begin{array}{l} V_m = 40,5 \text{ MeV} \\ E = 4,9 \text{ MeV} \end{array} \right\} \text{ pour } {}^{222}_{88}\text{Ra}$$

↳ L'émission de particule α (si elle est observée) doit être expliquée par l'effet tunnel

→ D'après la formule (*), la probabilité pour la particule α de tunneler à travers une barrière de potentiel de hauteur $V(x)$ et d'épaisseur a est :

$$T_{\alpha} = e^{-\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m_{\alpha}(V(x)-E)} dx}$$

$$\ln T_{\alpha} = -\frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m_{\alpha}(V(x)-E)} dx$$

→ Multiplication probabilité barrière ^{rectangulaire} d'épaisseur a (intégration de R à R+a)

$$\ln(T) = -\frac{2}{\hbar} \int_R^{R+a} \sqrt{2m_{\alpha} \left(\frac{Z(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 x} - E \right)} dx$$

APRÈS CALCULS :

$$\ln(T) = -\frac{\pi R V_m \sqrt{2m_{\alpha}}}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{E}} + \frac{2R \sqrt{V_m m_{\alpha}}}{\hbar}$$

$T \equiv$ probabilité d'être transmise à une collision $\alpha \rightarrow$ lumière

→ Il faut $\frac{1}{T}$ collisions pour sortir du noyau (en moyenne)

Si $\tau_0 \equiv$ durée traversée du noyau, alors la particule passe une durée $\tau = \frac{\tau_0}{T}$ dans le noyau

$$\left(\tau = \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\tau_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{\tau_0 \ln 2}{T} = \tau_0 \ln 2 e^{\frac{\pi R V_m \sqrt{2m_{\alpha}}}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{2R \sqrt{V_m m_{\alpha}}}{\hbar}}$$

($\tau_{1/2}$) quand $E \nearrow$
(ON A RETROUVÉ)

CONCLUSION

CALCUL INTEGRALE

AI TRIPLE CAMERA
SHOT ON MI 9

$$\ln(T) = -\frac{2}{h} \sqrt{2m\phi} \int_R^{R_c} \sqrt{\frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 x} - E} dx$$

$$\ln(T) = -\frac{2}{h} \sqrt{2m\phi} \int_R^{R_c} \sqrt{\frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 E} \frac{1}{x} - 1} dx$$

$$x^2 = \frac{R_c}{R_c} \cdot 2dx = \frac{2}{R_c} dx$$

$$\ln(T) = -\frac{2}{h} \sqrt{2m\phi} \int_{\sqrt{\frac{R}{R_c}}}^1 \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \frac{1}{2} R_c x dx$$

$$x = \sin\phi, dx = \cos\phi d\phi$$

$$\ln(T) = -\frac{2}{h} \sqrt{2m\phi} \int_{\arcsin\sqrt{\frac{R}{R_c}}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\ln(T) = -\frac{2}{h} \sqrt{2m\phi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2\phi)}{2} - \phi \right]_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\ln(T) = -\frac{2}{h} \sqrt{2m\phi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2\phi_0)}{2} - \phi_0 \right]$$

$$\ln(T) = -\frac{2}{h} \sqrt{2m\phi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2\phi_0)}{2} - \phi_0 \right]$$

$$\ln(T) = -\frac{2}{h} \sqrt{2m\phi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(2\phi_0)}{2} - \phi_0 \right]$$

$$\ln(T) = -\frac{R_c}{h} \sqrt{2m\phi} \left[\pi - \sin(2\phi_0) - 2\phi_0 \right]$$

$$\ln(T) = -\frac{R_c}{h} \sqrt{2m\phi} \left[\pi - \sin(2\phi_0) - 2\phi_0 \right]$$

$$\ln(T) = -\frac{1}{h} \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 E} \sqrt{2m\phi} \left[\pi - 4\sqrt{\frac{E}{V_m}} \right]$$

$R V_m$
↑
max

$$\ln(T) = -\frac{\pi R V_m}{h} \sqrt{\frac{2m\phi}{E}} + \frac{4R \sqrt{V_m \max Z}}{h}$$

replacer totale
valeur fonction

P 41 : Effet tunnel

Niveau: