

## Chapitre 7 : Transitions de phases (application du chapitre 4)

Point crucial : L'existence d'interactions

↓  
phénomènes collectifs  
coopératifs

Mêmes ingrédients microscopiques peuvent produire ~~des~~ différents types d'organisation à l'échelle macroscopique.

I) Transition liquide-Gaz. (pas fait en cours ^ ^ ) Lol ptdr mdr XD :)

II) Transition para-ferro.

A) Introduction.

Objectif : Certains matériaux peuvent porter une aimantation

C'est vient des interactions entre moments magnétiques

Effet énergétique : Alignement des moments sous l'effet de l'interaction

Effet entropique : agitation thermique

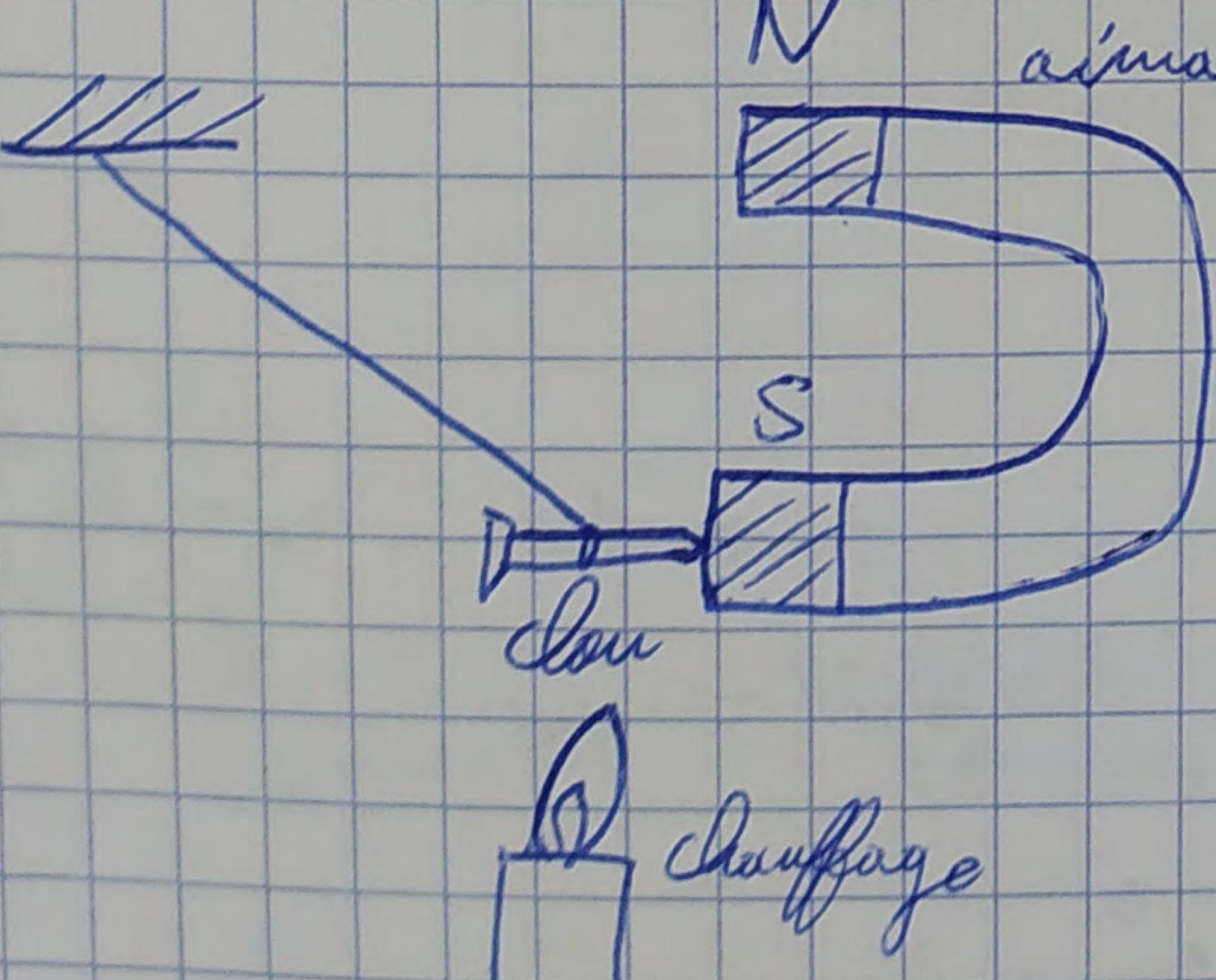
=> Faire un modèle pour essayer de comprendre cette compétition

1) Description du phénomène.

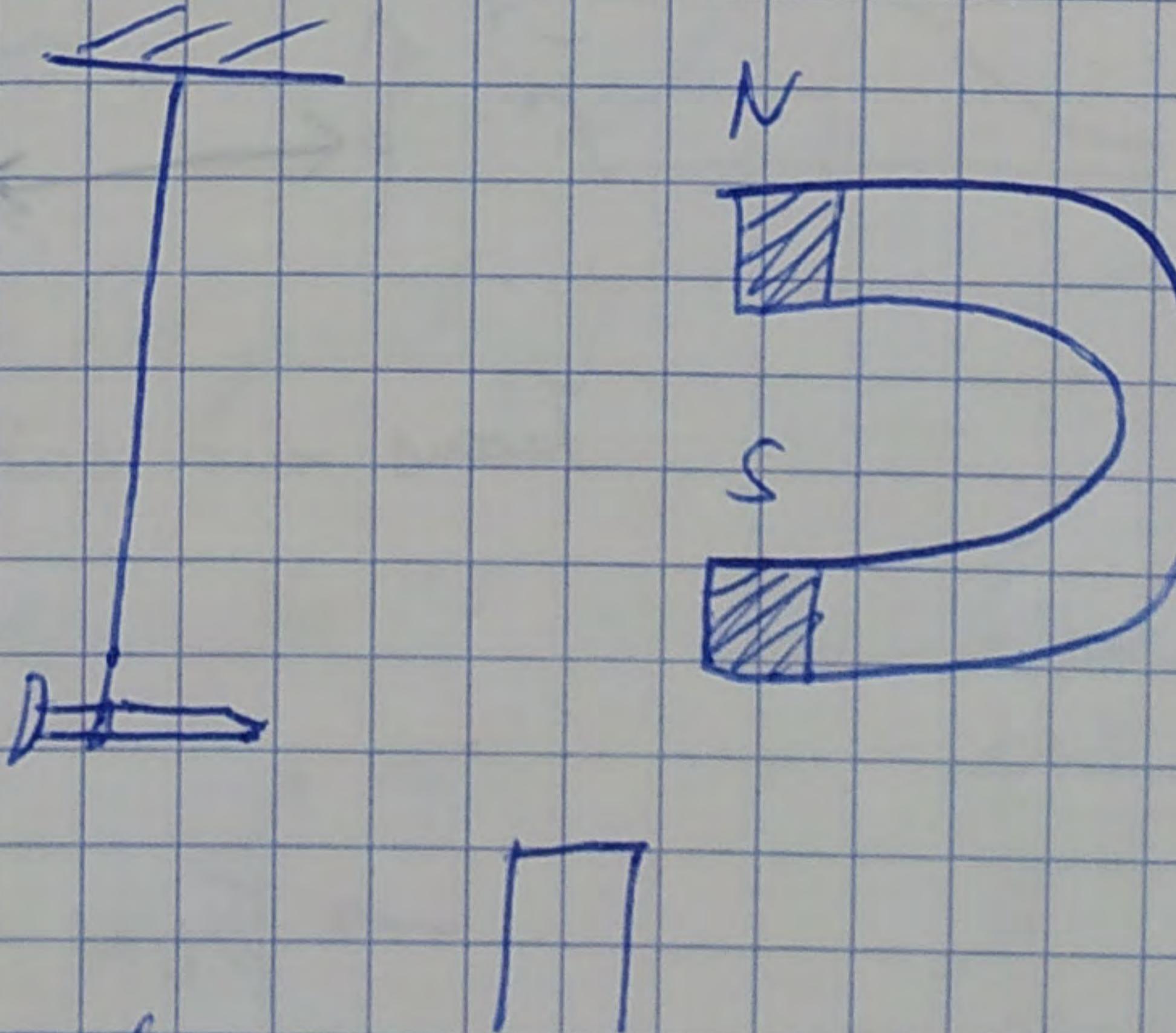
Exemple d'expérience :

Feu → ferromagnétiques

N aimant



→ Le clou se détache



En chauffant le clou, on lui fait perdre son aimantation.

Il existe une température, dite température critique, notée  $T_c$ , telle que

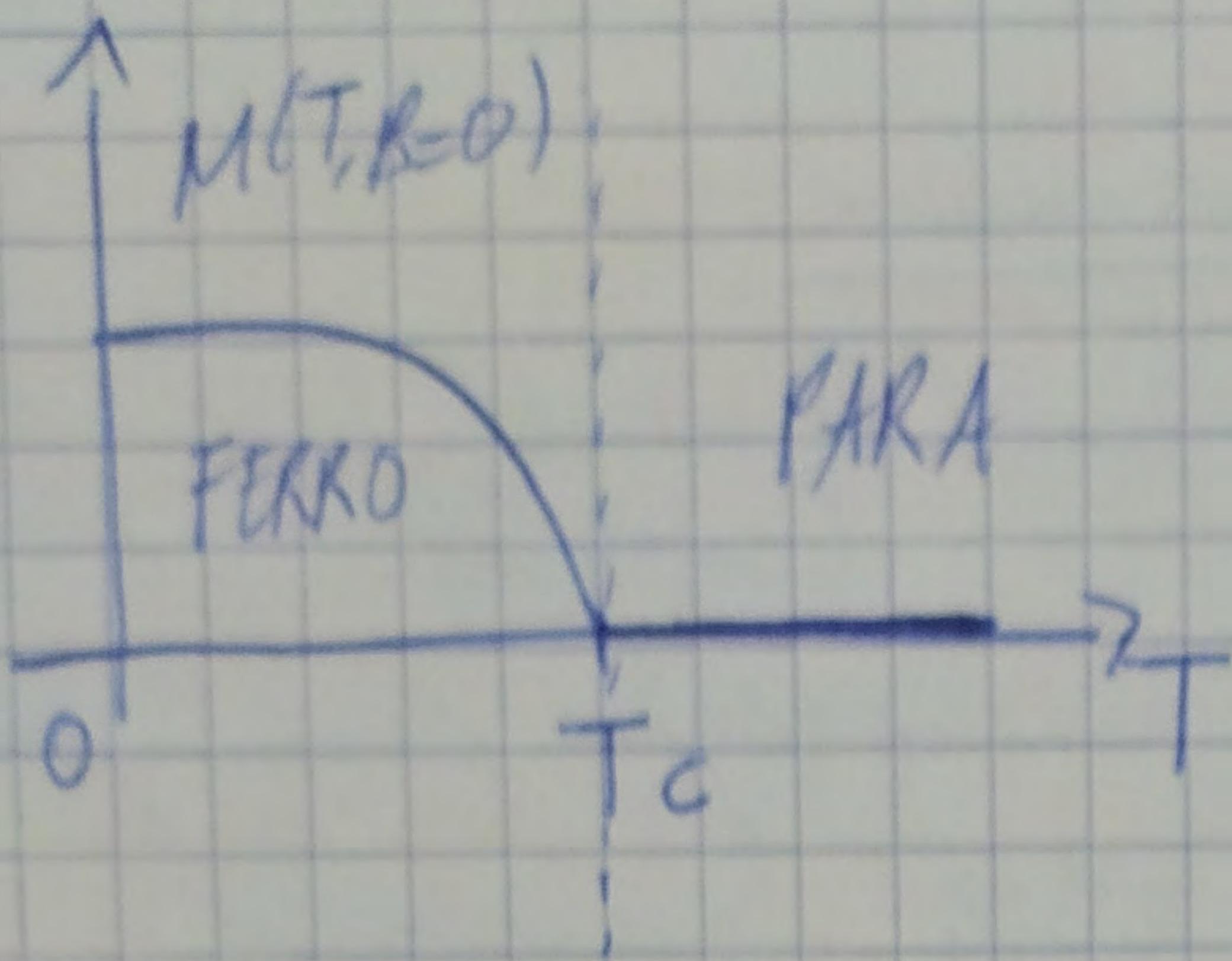
si  $T > T_c \Rightarrow M = 0$   
( $B=0$ ) aimantation

amontante

gradien

si  $T < T_c \Rightarrow M \neq 0$   
( $B \neq 0$ )

Opposent (même de M) ( $B=0$ ) :



$T_c$  dépend du matériau :

Fe :  $T_c = 1043 \text{ K}$

Co :  $T_c = 1388 \text{ K}$

Ni :  $T_c = 627 \text{ K}$

Résumé : \*  $T_c$  dépend du matériau (chimie)

\* La force de  $M(T)$  ne dépend pas du matériau

Origine de l'interaction ?

→ faire un modèle

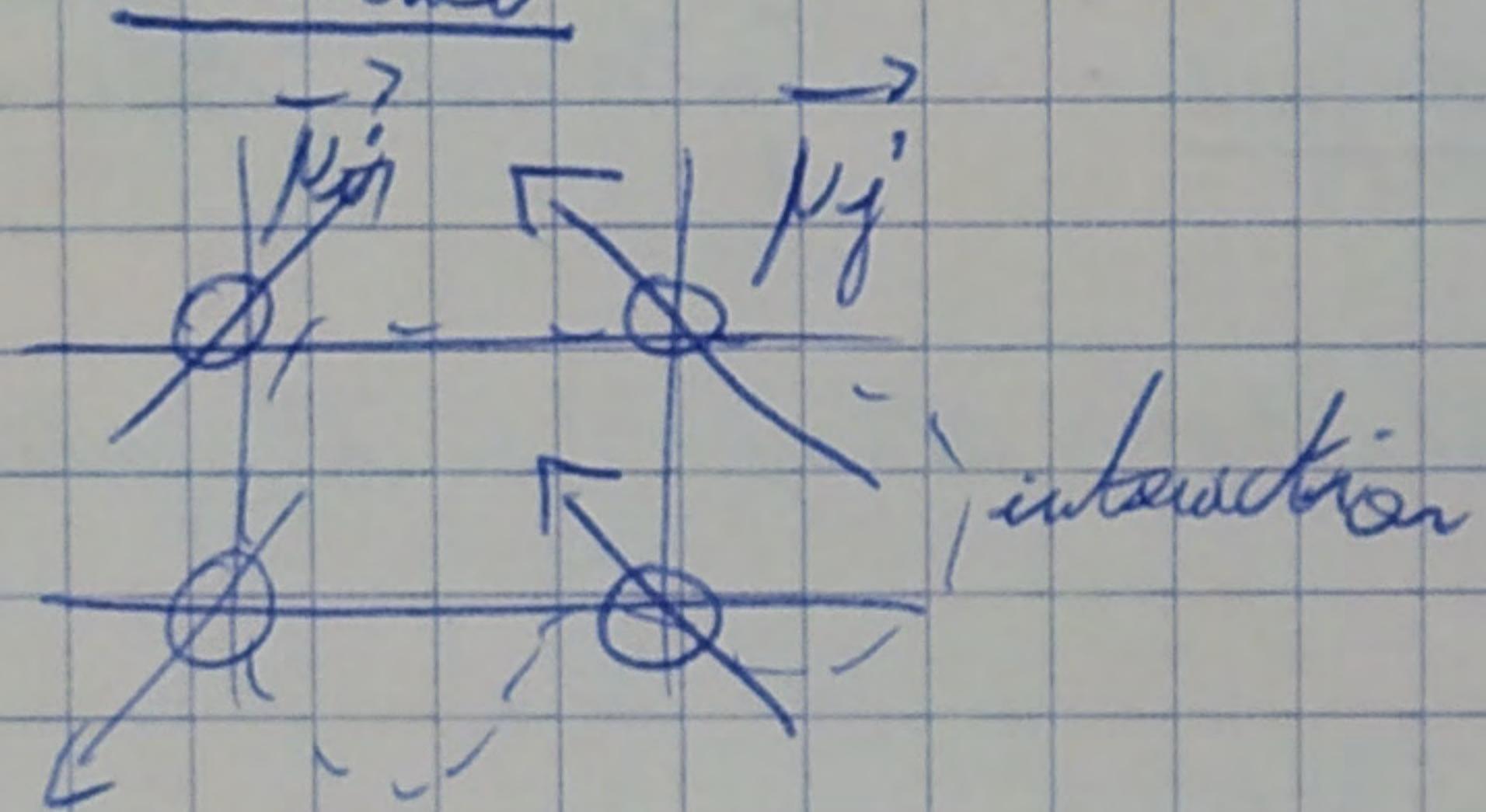
2 types de ferromagnétisme :

\* ferromagnétisme itinérant

(aimantation portée par les élections de conduction, délocalisés)

\* ferromagnétisme localisé

cristal :



1<sup>ère</sup> piste (pour l'interaction) entre moments magnétiques : interaction dipolaire magnétique.

$$E_{DM} \sim \frac{\mu_0}{r^3} \|\vec{p}_i\| \cdot \|\vec{p}_j\|$$

A diagram showing two magnetic moments  $\vec{p}_i$  and  $\vec{p}_j$  represented by arrows originating from a common center. A vector  $\vec{r}$  connects the tips of the two arrows, representing the separation between the moments.

Dans un cristal (ordre de grandeur) :

$$\begin{aligned} r &\rightarrow 1 \text{ Å} \quad n_{\text{ao}} = \frac{h^3}{a^3} \text{ ou } \frac{e^3}{4\pi a^3} \\ \|\vec{p}\| &\rightarrow \mu_B = \frac{g_e \hbar}{2m_e} \end{aligned}$$

$$\rightarrow E_{DM} \sim \frac{\mu_0}{a^3} \left( \frac{q_e h}{m_e} \right)^2 \sim \frac{e^2}{2a} \times a^2$$

Hydeby

$\hookrightarrow \alpha = \frac{e^2}{2C}$  (capacité de polarisation fine)

$$\Rightarrow E_{DM} \sim 10^{-5} \text{ eV} \leftrightarrow 0,1 \text{ K}$$

Une montre que ce n'est pas ce phénomène physique qui il faut rendre compte

2<sup>e</sup> piste (la bosse): Mécanisme d'échange

↳ interaction effective qui repose sur deux ingrédients: interaction coulombienne + principe de Pauli

2 électrons → fonction d'onde

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$\uparrow$        $\uparrow$   
 $e_1$      $e_2$

$$H = H_0 + H_{\text{Coulomb}}$$

$\hookrightarrow$   $e^2$   
coulombique  
potentiel  
extérieur ( cristallin )  
 $||\vec{r}_1 - \vec{r}_2||$

$$[H, \vec{S}_1] = 0$$

Consequence du

Principe de Pauli: L'état de spin affecte l'état orbital des 2 e-

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{\sigma}_1; \vec{r}_2, \vec{\sigma}_2) \rightarrow \text{antisymétrique}$$

$\uparrow$        $\uparrow$   
spin      spin

sous l'opérateur  
de  $(\vec{r}_1, \sigma_1 \leftrightarrow \vec{r}_2, \sigma_2)$

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$\uparrow$        $\uparrow$

$$\text{Spin } \frac{1}{2} \quad \text{Spin } \frac{1}{2}$$

$$S = 0 \text{ ou } 1$$

$$\hookrightarrow \hbar^2 S(S+1)$$

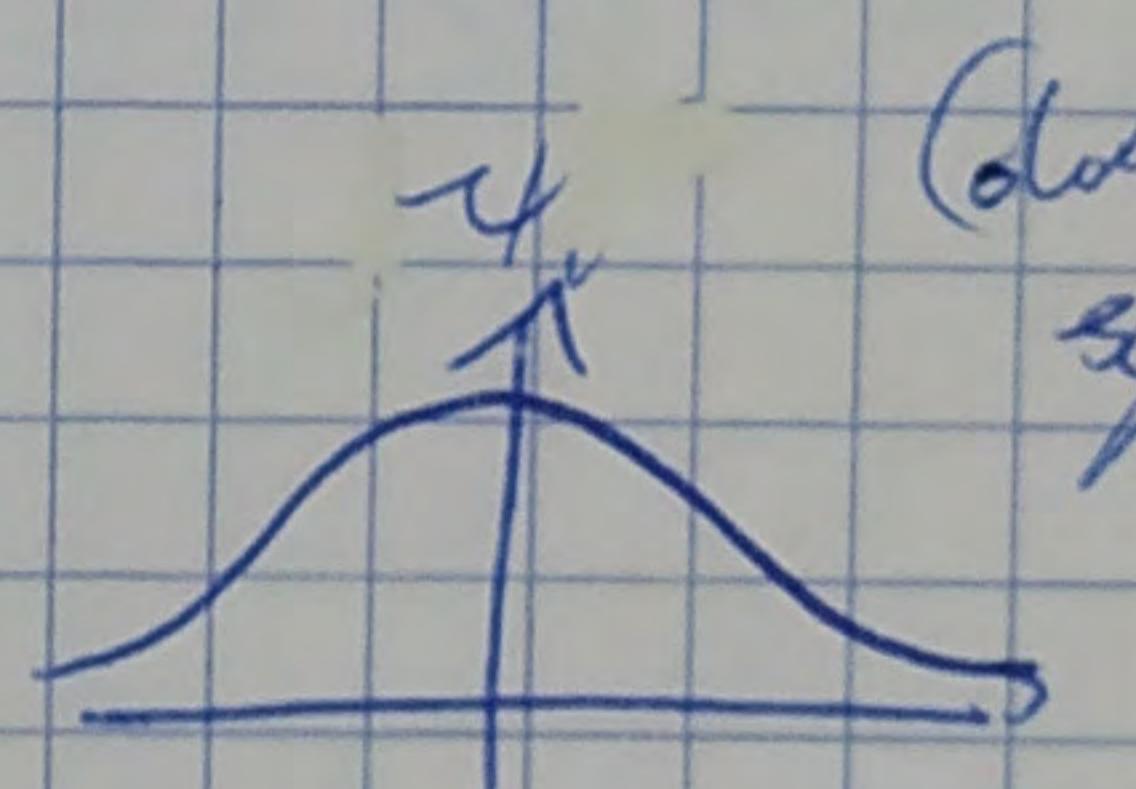
$$\underline{S=0}$$

$$\frac{|1\downarrow\rangle - |1\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

spins  
anti-alignés

antisymétrique pour échange des spins

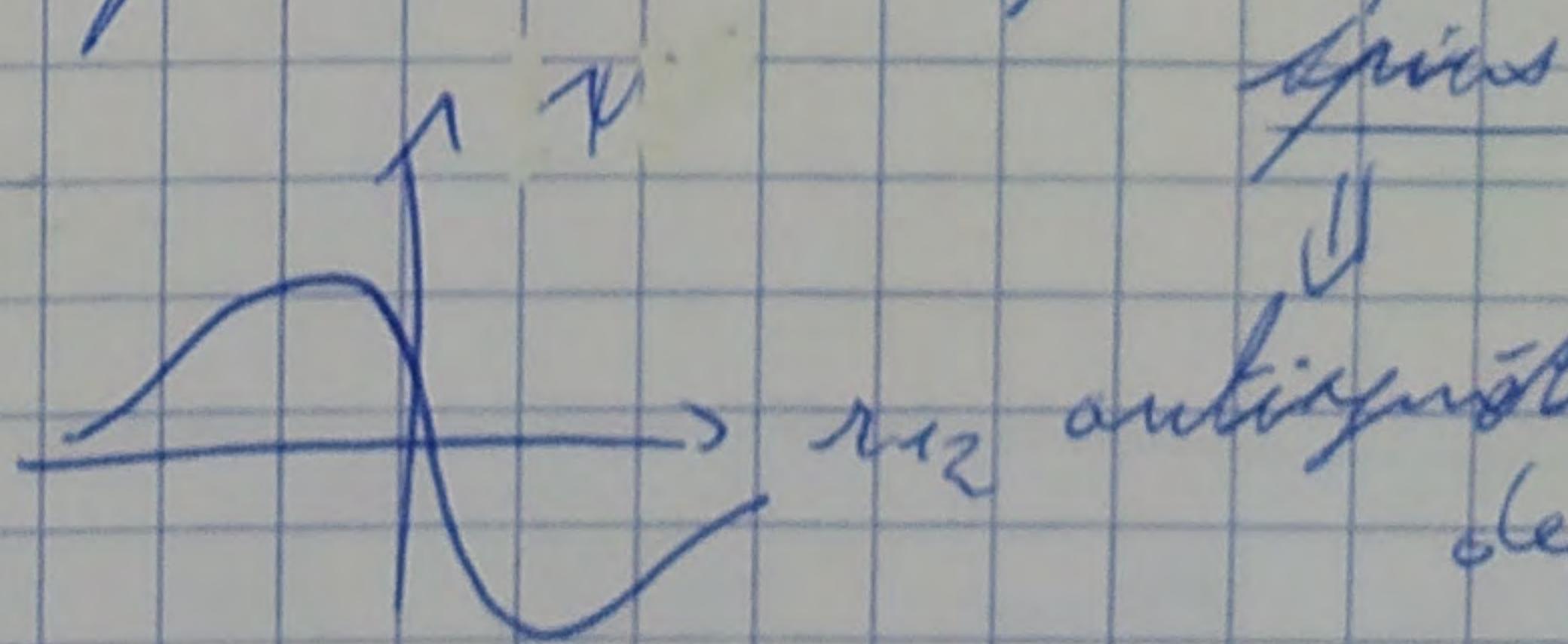
symétrique pour échange des positions



(dans cet exemple  
explicatif, on considère  
4 vues)

$$\underline{S=1}$$

spins alignés partie spin de  $\Psi \rightarrow$  symétriques lors échange des spins



r1, r2 antisymétrique lors l'échange  
des positions

$$\langle H_{\text{coul}} \rangle_{\text{état } S=0} > \langle H_{\text{coul}} \rangle_{\text{état } S=1}$$

$$\frac{e^2}{r_{12}}$$

$$\frac{(2s+1)\cdots}{S=0}$$

: spins anti-alignés

$$\underline{S=1}$$

: spins alignés

Conclusion:  $\rightarrow$  Coulomb + Pauli  $\Rightarrow$  donne le même spectre des énergies que

$$H_{\text{eff}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -\frac{J}{2} \left( \vec{S}^2 - \frac{3}{2} \hbar^2 \mathbb{I} \right)$$

J vient de Houlz  $\frac{e^2}{2a_0}$   
 (J 10.1 eV)  
 1  
 100K  
 coul

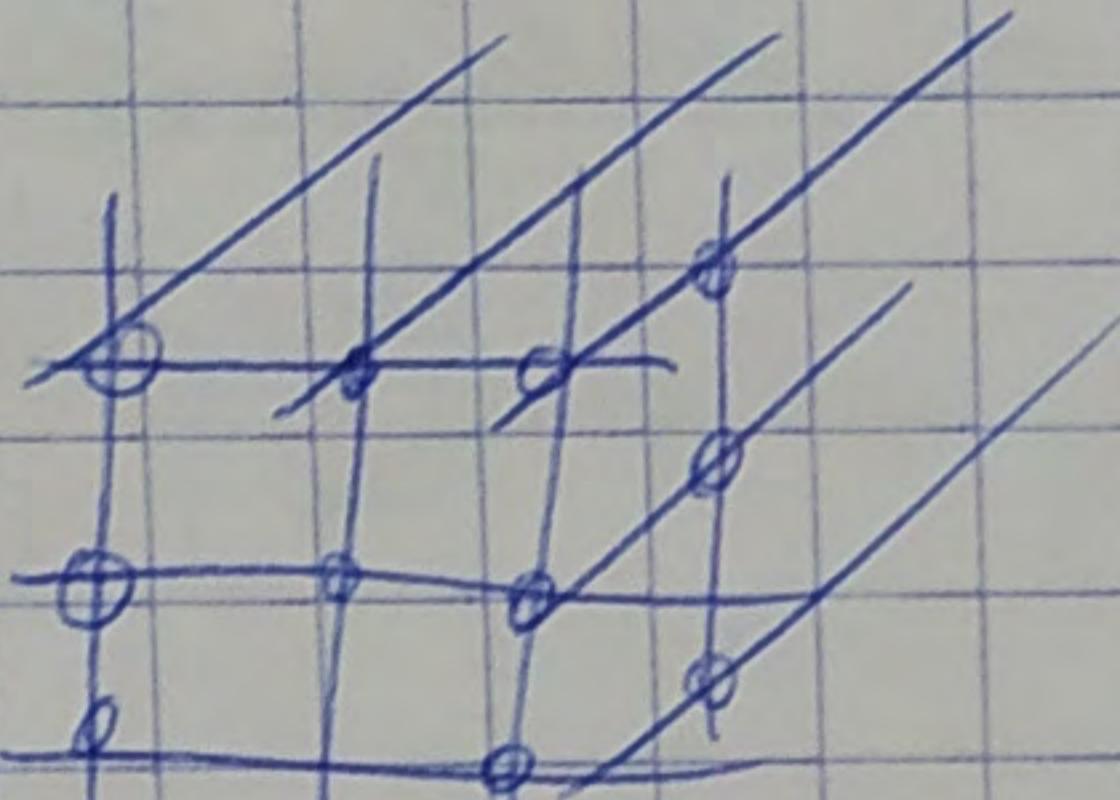
lié à l'interaction Coulombienne principale de Pauli

$E$   
 $s=0$   
 $s=1$

### 3) Modèle.

$\rightarrow$  pour le cristal

Hypothèse: un spin  $\frac{1}{2}$  par noyau du réseau cristallin



$\Rightarrow$  1<sup>ère</sup> simplification:

Hypothèse: l'interaction ( $J_{ij}$ ) dépend de la distance

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

Heisenberg

ou

$\sum_{\langle i,j \rangle}$ : somme sur les paires de sites voisins

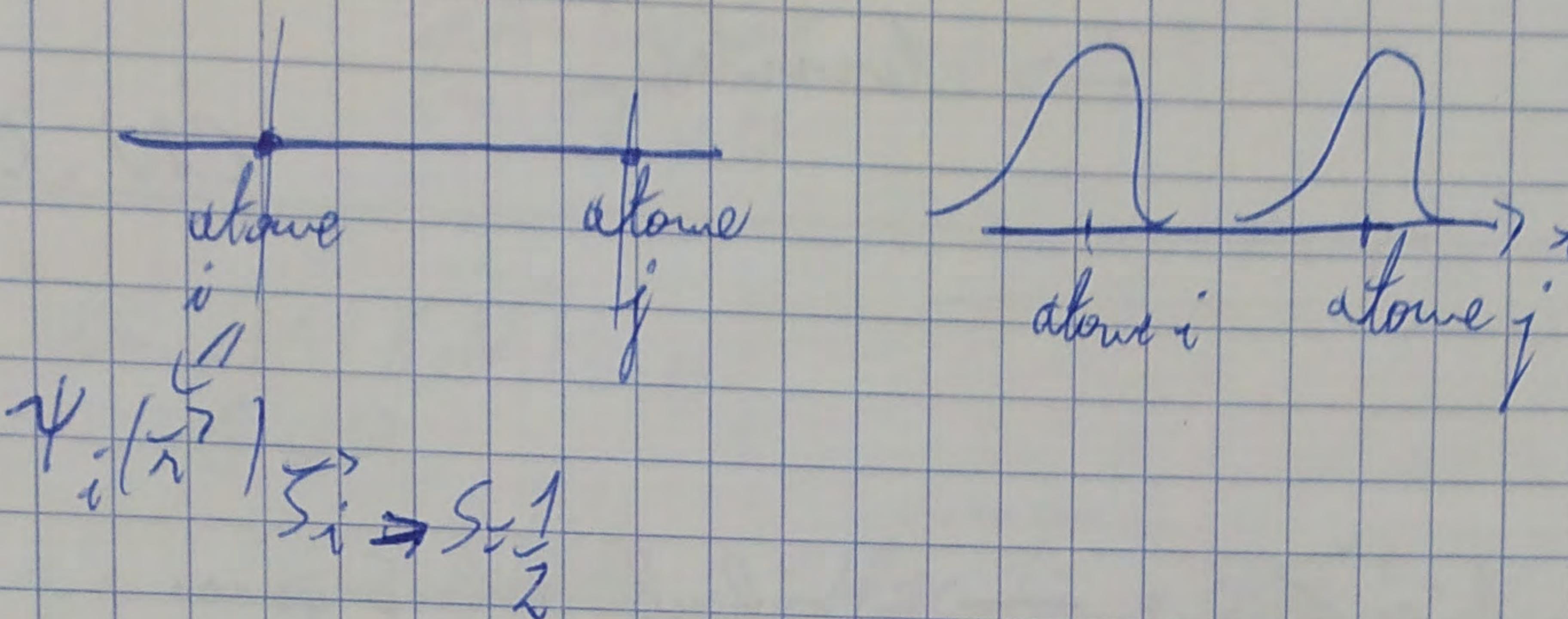
Somme des liaisons du réseau

$S_i \cdot J > 0:$   $-J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$

$\hookrightarrow$  favorise l'alignement des spins  
i.e. un ordre ferromagnétique

$\Rightarrow$  On parle (pour  $J > 0$ )  
 $\Leftrightarrow$  d'interaction ferro  $\gg$

Remarque :  $J \rightarrow$  lié à l'interaction coulombienne  
i.e. le recouvrement des fonctions d'onde associées à deux sites voisins



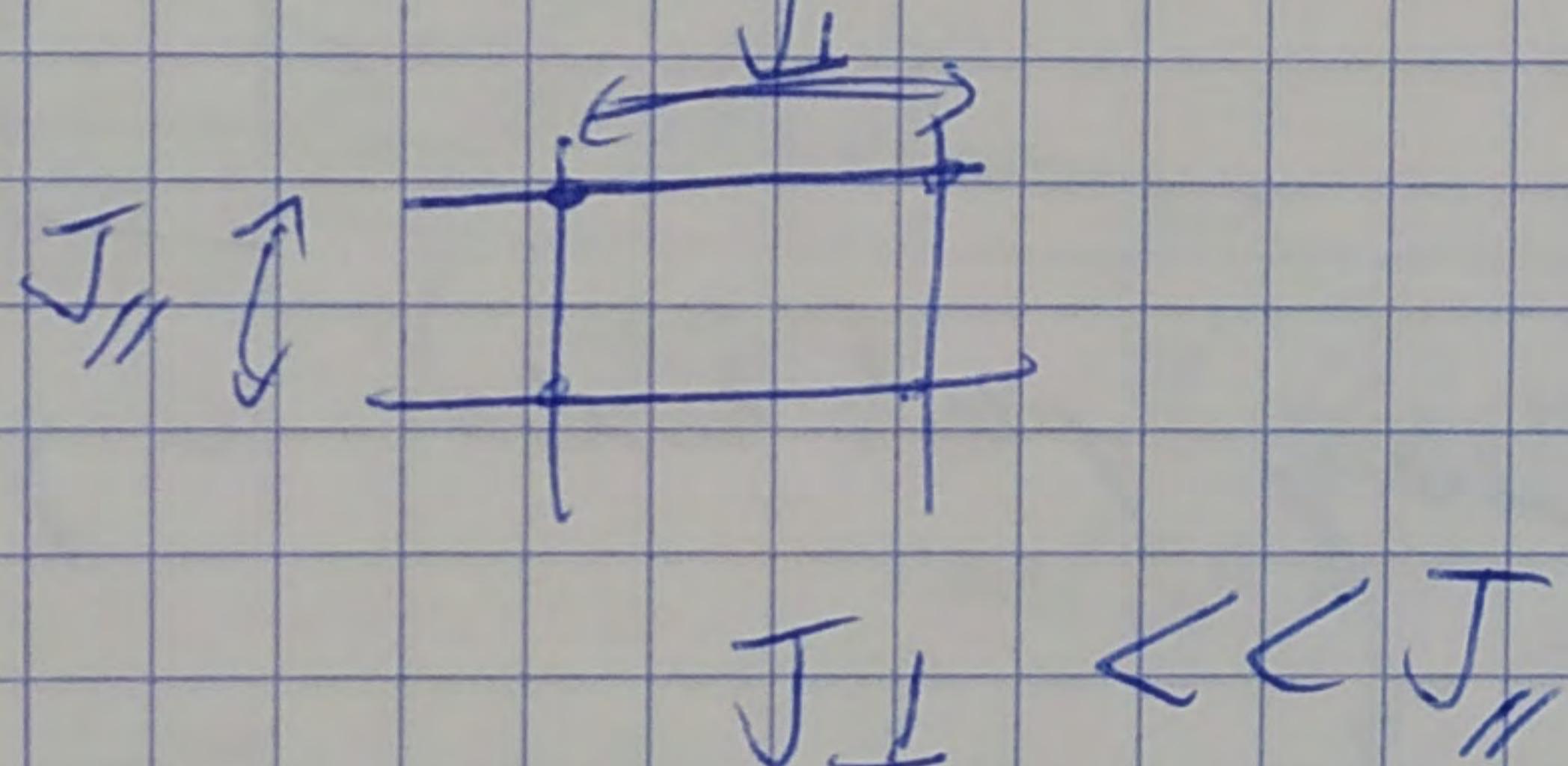
Consequence n°1 : Le signe de  $J$  dépend des orbitales (du cristal)

$J > 0 \rightarrow$  FERRO  $\uparrow \uparrow$

$J < 0 \rightarrow$  ANTI-FERRO  $\uparrow \downarrow$

$$H_{\text{Heisenberg}} = +|J| S_i \cdot S_j$$

Consequence 2 : Si la structure cristalline est anisotrope



Modèle de Heisenberg anisotrope :

$$H_{\text{Heisenberg}} = -J^x S_i^x S_j^x + J^y S_i^y S_j^y + J^z S_i^z S_j^z$$

Simplification : Considérons la situation où  $J^z \gg J^x$  et  $J^y$

$$H_{\text{Heisenberg}} \rightarrow -J^z \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^z S_j^z$$

Le modèle que nous allons étudier : modèle d'Ising

$\sigma_i$   
spin

$$H_{\text{Ising}} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - B \sum_i \sigma_i$$

$[J] =$  Energie

$[B] =$  Energie

( $\gamma$  charge magnétique  
en énergie)

Résultats connus :

- dim = 1 :  $\rightarrow$  faible (1925)
- dim = 2 :  $\rightarrow \mathbb{Z}(T, B=0)$   
Onsager, 1944  
 $\rightarrow$  démonstration  $\Rightarrow$  CN. Onsager 1952

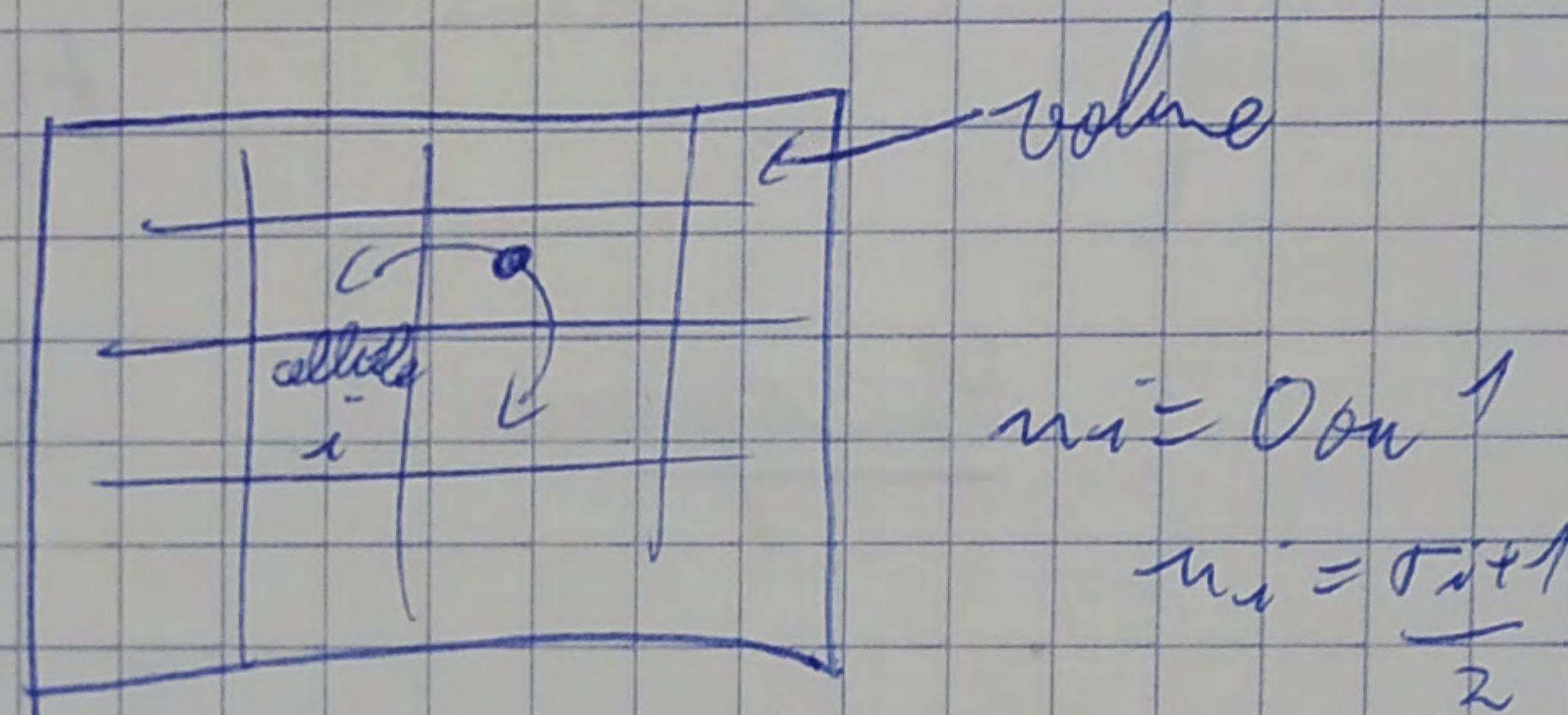
dim  $\geq 3$  :  $\rightarrow$  calculs numériques

D'autres problèmes physiques décrits par le modèle d'Ising :

Un réseau + une variable prenant 2 valeurs :

\* magnétique

\* gaz sur réseau



$$n_i = 0 \text{ ou } 1$$

$$n_i = \frac{\sigma_i + 1}{2}$$

$H_{\text{Ising}}$  peut décrire un gaz de particules en interaction

\* allonge linéaire

B) Paramètre d'ordre et brisure spontanée de symétrie.

Deux notions centrales dans la théorie des transitions de phases

Si on considère le cas  $B=0$

$$H_{\text{Ising}}(\{\sigma_i\}) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

l'Hamiltonien a une symétrie

Comment le calcul va-t-il conduire à  $\langle M \rangle \neq 0$

$$\text{où } M = \sum_i \sigma_i$$

$$\sigma_i \leftrightarrow -\sigma_i$$

$$Z_{\text{Ising}} = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H_{\text{Ising}}}$$

$Z^{\text{M termes}}$

Comment comprendre l'existence d'une phase telle que  $\langle M \rangle \neq 0$ ?

$$M(B, N) = \lim_{B \rightarrow 0^+} \frac{\partial F(T, B, N)}{\partial B}$$

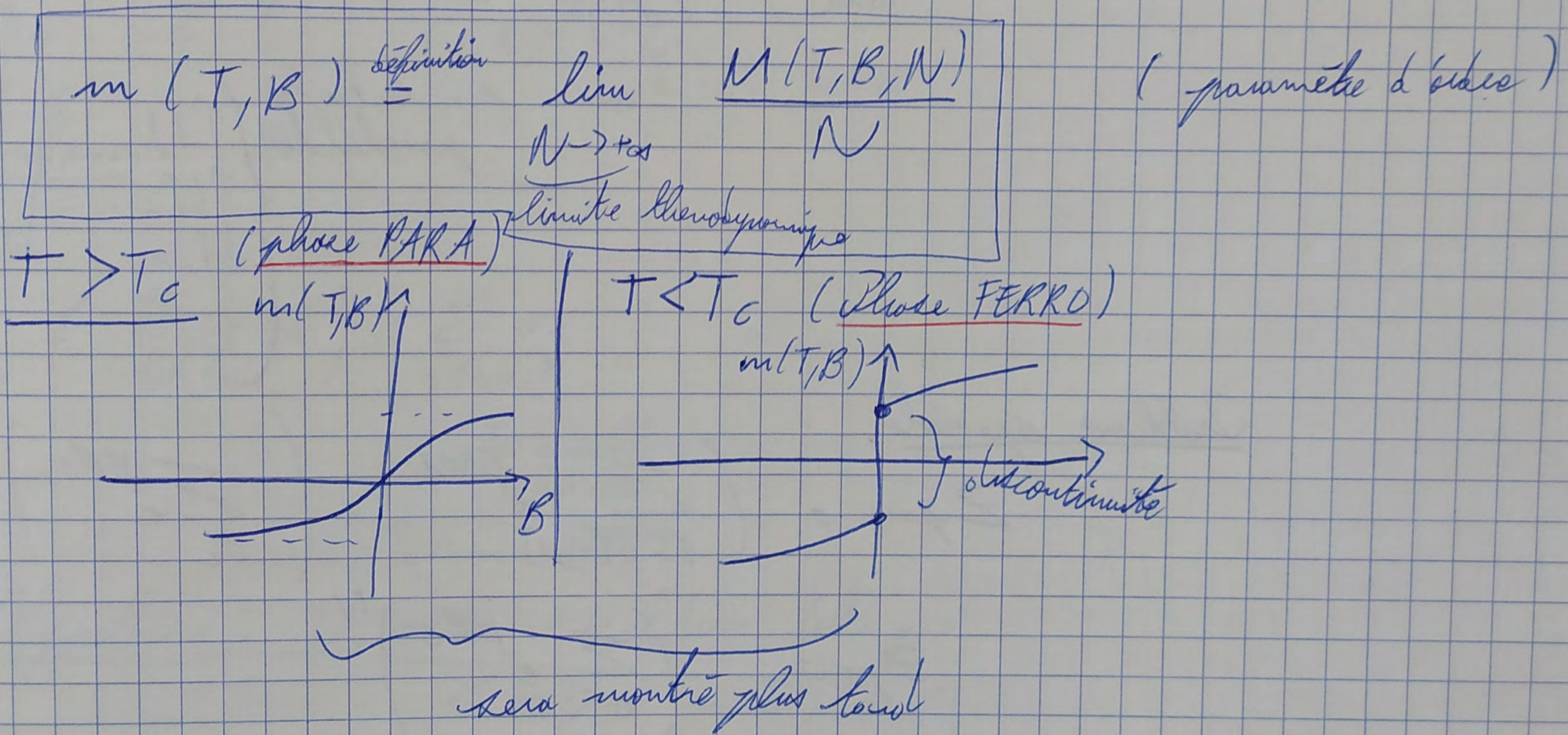
annulation  
moyenne  
pour  $N$  pairs  
 $\Rightarrow B \neq 0$

$$\lim_{B \rightarrow 0^+} M(B, N) = 0$$

Il y a une subtilité mathématique liée à l'ordre de ces limites

$\lim_{N \rightarrow \infty}$  : limite thermodynamique

$\lim_{B \rightarrow 0^+}$  : l'histoire antérieure des matériaux



Phase PARA:  $m(T, 0) = 0$

$\hookrightarrow$  respecte la symétrie de la théorie

$$H_x^{+} (T - \alpha) = H_x^{-} (T + \beta) \quad (\text{à } B = 0 \text{ et } \text{ordre } 1)$$

Phase FERRO: l'état du cristal

$$\lim_{B \rightarrow 0^+} m(T, B) > 0$$

ne respecte pas la symétrie de la théorie.

$\Rightarrow$  C'est ce qu'on appelle une brisure spontanée de symétrie

~~Donc~~

$\Rightarrow \varphi$  est fondamental  $\rightarrow$  cela permet de voir la transition de phase.

$\Rightarrow$  On étudie un paramètre d'onde (ici  $m(T, 0)$ ) qui signale la brisure de symétrie.

C) Étirement de champ moyen du modèle d'Ising.

1) Préliminaire : le paramagnétisme.

$J=0$  mais  $B \neq 0$

$$H(\{\sigma_i\}) = -B \sum_i \sigma_i$$

$$Z_{\text{para}} = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta B \sum_i \sigma_i}$$

(somme sur toutes les possibilités)

$\begin{cases} TT\dots \\ TTT\dots \\ JT\dots \\ \vdots \end{cases}$

Problème séparable :

$$Z_{\text{para}} = \left( \sum_{\sigma_1 \in \{1, -1\}} e^{\beta B \sigma_1} \right) \times \left( \sum_{\sigma_2} e^{\beta B \sigma_2} \right) \times \dots$$

$$Z_{\text{para}} = \left( \sum_{\sigma} e^{\beta B \sigma} \right)^N$$

$$\boxed{Z_{\text{para}} = [2 \cosh \beta B]^N}$$

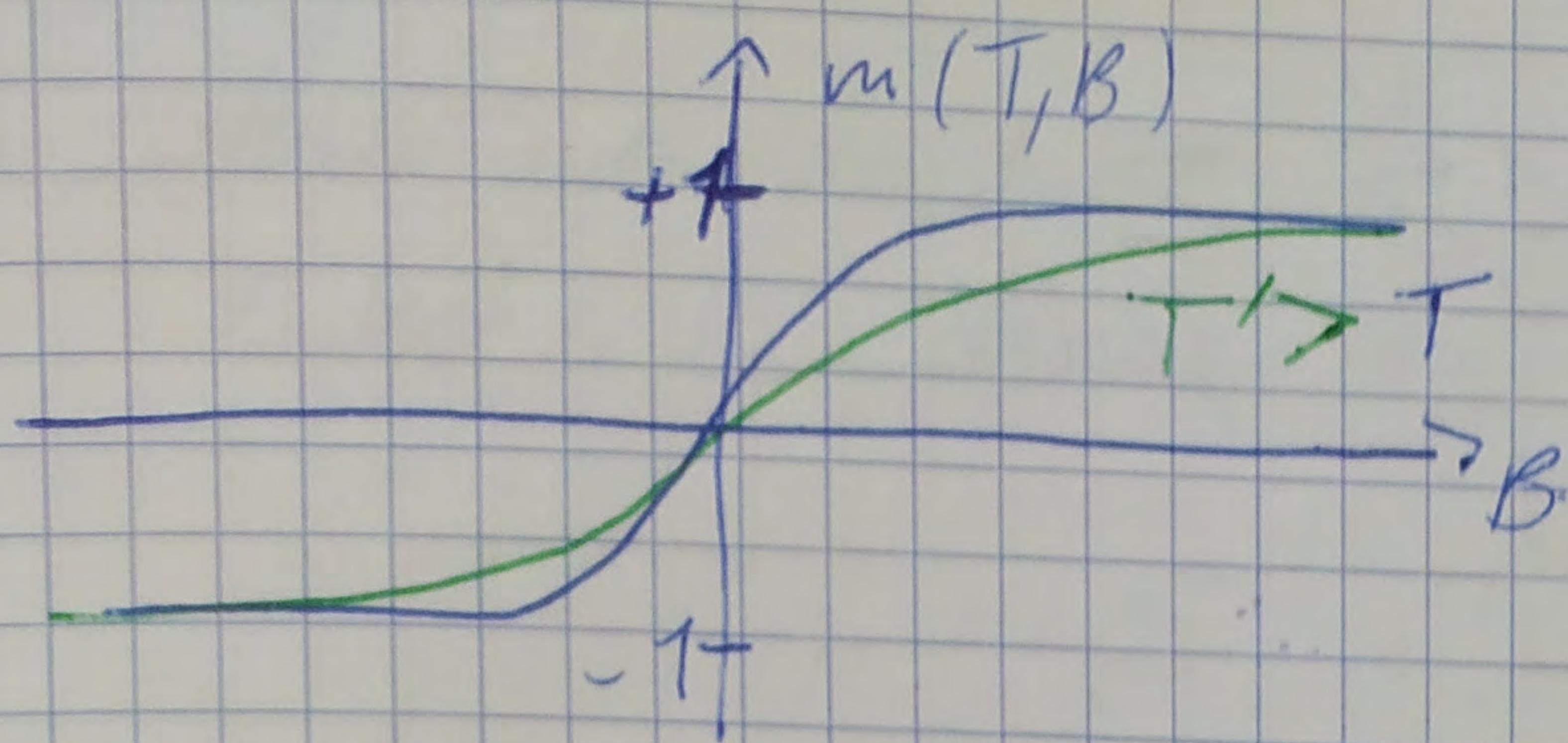
Montant moyen :  $m(T, B) = -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial B}$

$$m(T, B) = \frac{\langle M \rangle}{N} = \frac{1}{NB} \frac{\partial \ln Z}{\partial B}$$

$$= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln [2 \cosh \beta B]$$

$$\boxed{m(T, B) = \tanh \left( \frac{B}{T} \right)}$$

$T_B = 1$



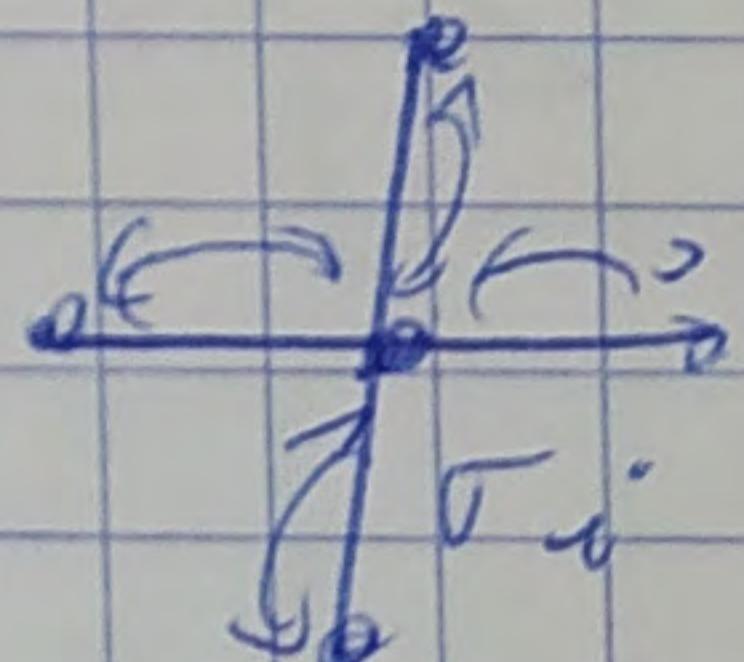
2) Approximation de champ moyen (méthode de Bragg - Williams).

a) Idée de l'approximation (champ moléculaire de Weiss).

Un spin  $\sigma_i$  a sent un champ local  $B_i^{\text{loc}} = B + \text{champ créé par les voisins}$

$$\Rightarrow B_i^{\text{loc}} = B + J \sum_{j \in v(i)} \sigma_j$$

$$H_{\text{Smy}} = -B \sum_i \sigma_i - J \sum_{\langle j, i \rangle} \sigma_j \sigma_i$$



$$\frac{\partial}{\partial \sigma_i} \left( \sum_{\langle j, i \rangle} \sigma_j \sigma_i \right) = \sum_{j \in v(i)} \sigma_j$$

$v(i)$  = ensemble des sites voisins

$\Rightarrow$  Hypothèse : Il existe une solution telle que

$$\langle \sigma_i \rangle = m \in [-1, +1]$$

$$\langle B_i^{\text{loc}} \rangle = B + J q m$$

$q$  = nombre de voisins

3D : réseau cubique  $q = 6$

$$\sigma_i = m + \delta \sigma_i$$

fluctuations autour de la moyenne

$$H_{\text{Smy}} = -J \sum_{\langle i, j \rangle} (m + \delta \sigma_i)(m + \delta \sigma_j) - B \sum_i \sigma_i$$

$$\sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j = m^2 \sum_{\langle i, j \rangle} 1 + 2m \sum_{\langle i, j \rangle} \delta \sigma_i + \sum_{\langle i, j \rangle} \delta \sigma_i \delta \sigma_j$$

Propriété utile:

$$\sum_{\langle i,j \rangle} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} f(\sigma_i)$$

somme  
sur les  
liens

$$\rightarrow \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j = m^2 \frac{g N}{2} + g_m \sum_{i=1}^N \sigma_i + \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

$$H_{\text{ising}} = -J \frac{g N m^2}{2} - J g_m \sum_{i=1}^N \underbrace{\sigma_i}_{\sigma_{\text{ave}}} - J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - B \sum_i \sigma_i$$

$$H_{\text{ising}} = N \frac{g J m^2}{2} - (\underbrace{B + J g_m}_{\langle B_i^{\text{loc}} \rangle}) \sum_{i=1}^N \sigma_i - J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

b) Hamiltonien de champ moyen.

Hypothèse (non contrôlée): On néglige les fluctuations

$$H_{\text{CM.}}(\tau_i) = N \frac{J g m^2}{2} - \cancel{(\underbrace{B + J g_m}_{\langle B_i^{\text{loc}} \rangle})} \sum_i \sigma_i$$

la solution option facile!

→ Je suppose ici que la dynamique d'un spin est plutôt contrôlée par l'ordre moyen ( $m = \langle \sigma_i \rangle$ ) que par les fluctuations.

→ méthode auto-cohérente

Intérêt de la méthode :  $H_{CM} \leftarrow$  champ moyen  $\rightarrow$  problème résolu

$$+ Z_{CM} = \sum_{[O_i]} e^{-\beta H_{CM}} = e^{-\frac{NBJqm^2}{2}} [2 \operatorname{ch}(\beta(B+Jqm))]^N$$

$$* f_{CM}(m) = -\frac{1}{N\beta} \ln(Z_{CM}) = \frac{Jqm^2}{2} - \frac{1}{\beta} \ln(2 \operatorname{ch}(\beta(B+Jqm)))$$

Équation auto-cohérente :  $\bar{M} = -\frac{\partial F}{\partial B} \Rightarrow m = -\frac{\partial f_{CM}(m)}{\partial B}$

nous obtenons

$$m = \operatorname{th}(\beta Jqm + B)$$

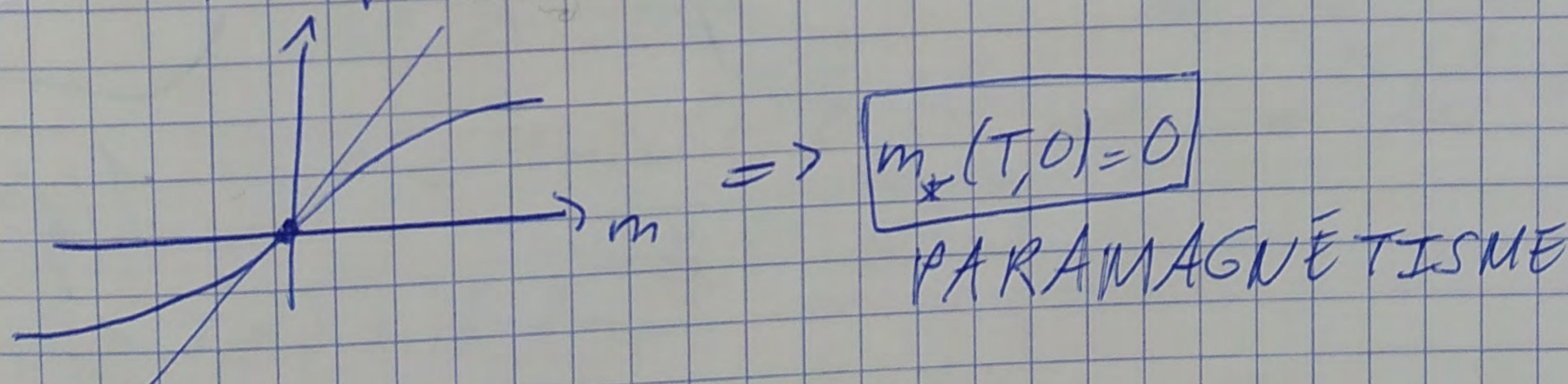
, soit une équation pour  $m$

On note  $m^*(T, B)$  la solution

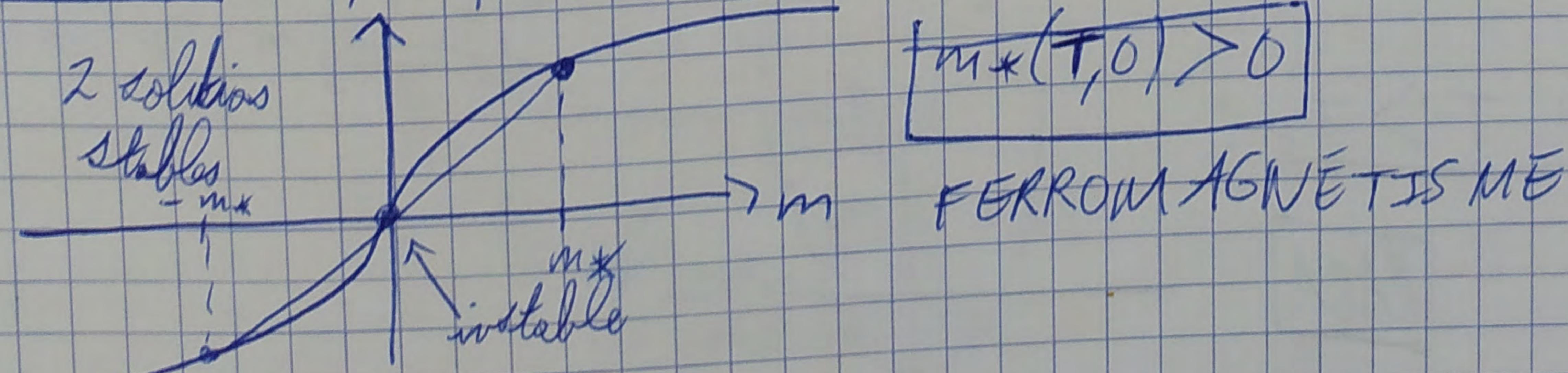
a) Réolution de (\*) à  $B=0$

$$m = \operatorname{th}(\beta Jqm)$$

1<sup>er</sup> cas :  $\beta Jq < 1 \rightarrow T > J_q$



2<sup>ème</sup> cas :  $\beta Jq > 1 \rightarrow T < J_q$



Température critique ou température de Curie:

$$T_c = \frac{J}{\beta} = \frac{1}{\beta c}$$

↑      ↑  
nombre d'interactions  
de voisins  
d'un spin

b) Analyse de stabilité ( $B=0$ ).

Principe de minimisation de  $F$  (chapitre 4)

1ère observation:  $\frac{\partial f_{cm}}{\partial m} = 0 \rightarrow J_{qm} - \frac{1}{\beta} B J_{qm} \tanh(\beta J_{qm} + B) = 0$   
 $\Rightarrow$  on retombe (\*)

$m^*$  est un minimum des  $f_{cm}(m)$

à  $B=0$  
$$f_{cm}(m) = \frac{1}{2\beta c} m^2 - \frac{1}{\beta} \ln(2 \cosh(\frac{B_m}{\beta c}))$$

Comportements limites.

\*  $\frac{B_m}{B_c} \rightarrow \pm \infty$

$$f_{cm}(m) \approx \frac{m^2}{2\beta c} - \frac{1}{\beta} |m|$$

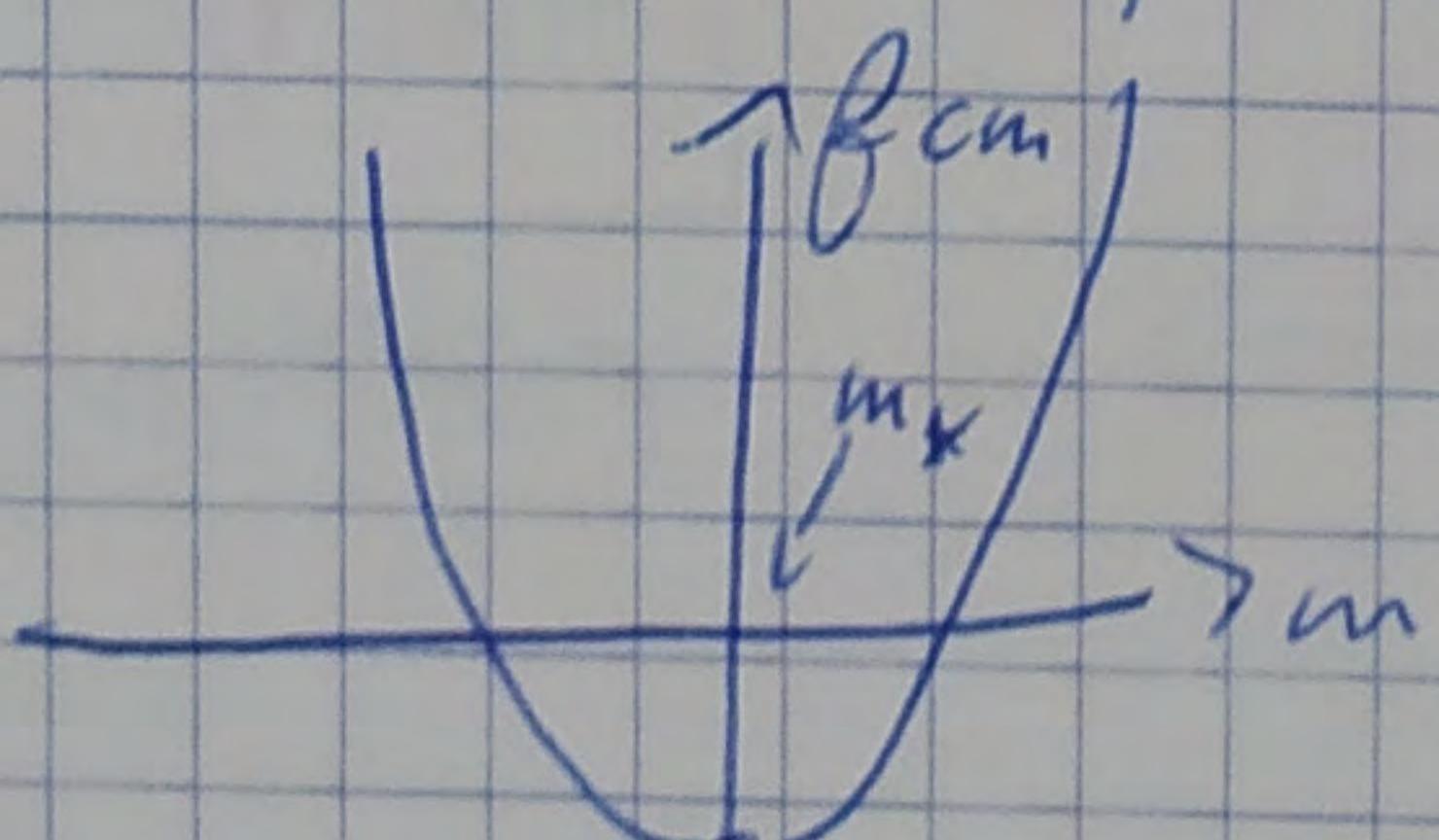
\*  $m \rightarrow 0$  
$$f_{cm}(m) = \frac{m^2}{2\beta c} - \frac{1}{\beta} \left[ \ln 2 + \ln \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{B_m}{\beta c} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{B_m}{\beta c} \right)^4 + \dots \right) \right]$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{B_m}{\beta c} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{B_m}{\beta c} \right)^4 - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{B_m}{\beta c} \right)^2 + \dots \right]^2$$

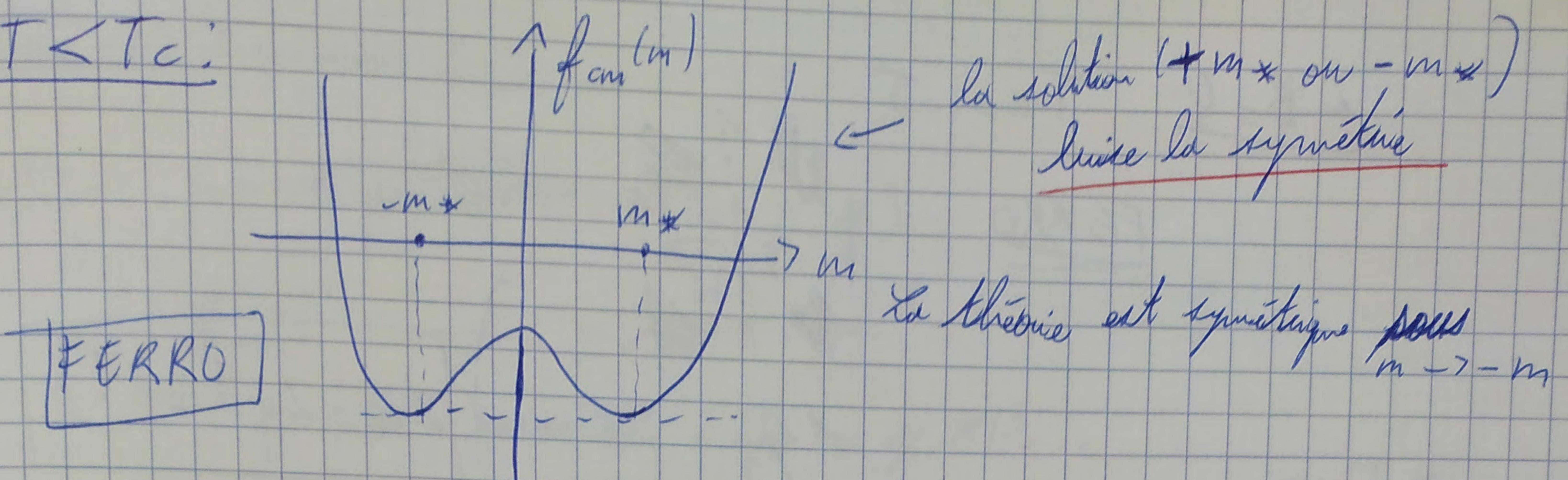
$$f_{cm}(m) = -T \ln 2 + \frac{1}{2} T_c \left( 1 - \frac{T_c}{T} \right) m^2 + \frac{1}{12} \frac{T_c^4}{T^3} m^4 + \mathcal{O}(m^6)$$

$T > T_c$ :

PARA



si  $T < T_c$ :



SI Analyse du paramètre d'ordre  $m^*(T, B)$ .

$T > T_c$ :  $\rightarrow$  phase cohérente  $\Rightarrow$  PAKA

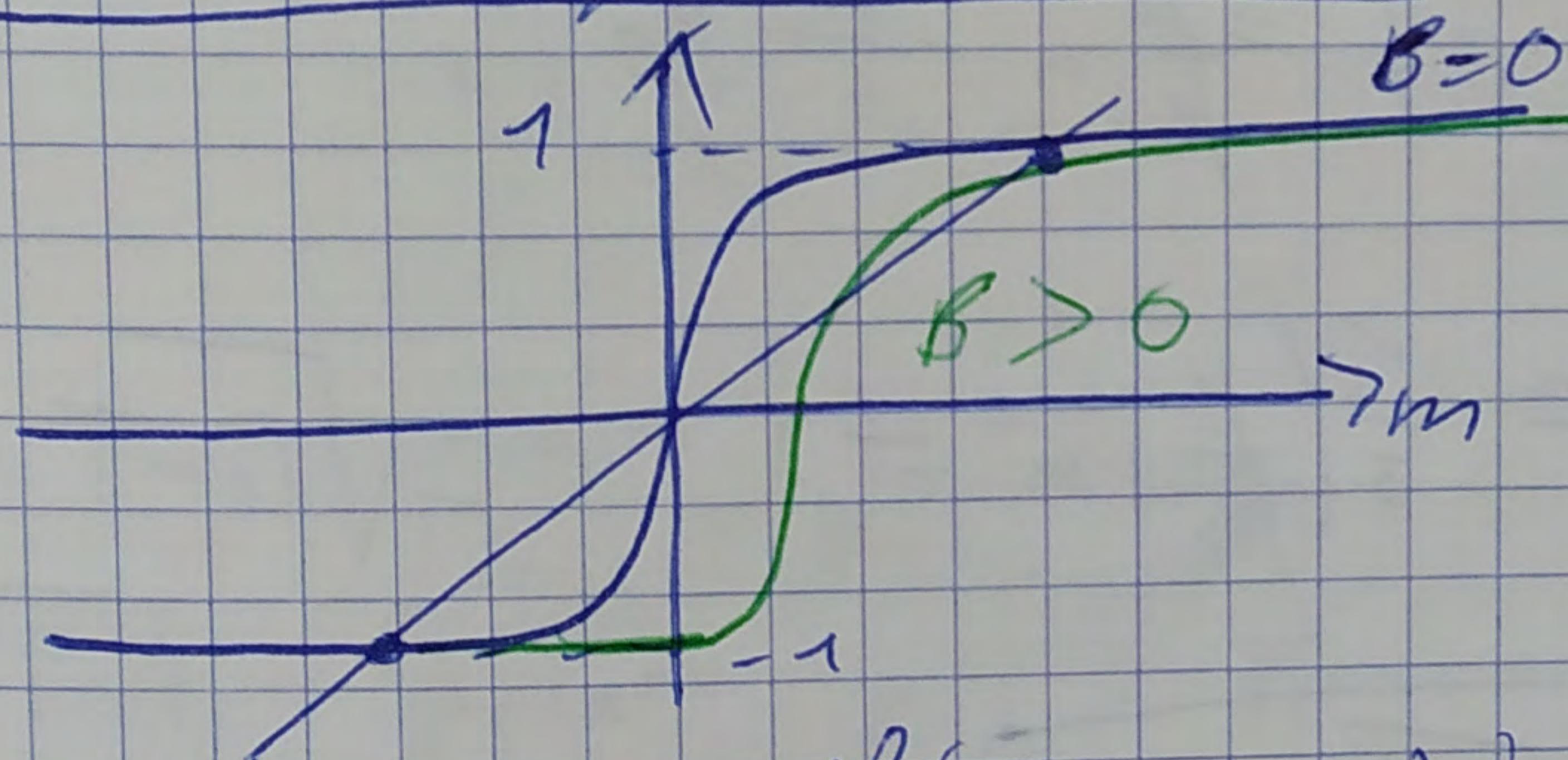
$$m^* = 0$$

$T < T_c$ :  $\rightarrow$  phase avec ordre FERRO  
 $m^* > 0$

Objectif  $\rightarrow$  étudier  $m^*(T, B)$

La solution de (\*)

a) Basse température  $T \ll T_c$ .



$$m = \tanh\left(\frac{\beta}{\beta_c} (m + B)\right) \rightarrow \text{solution } m \sim 1$$

$$\tanh x \approx 1 - e^{-2x}$$

$$m \approx 1 - e^{-2\beta \left( \frac{m}{\beta_c} + B \right)} \approx 1 - 2e^{-2\beta \left( \frac{1}{\beta_c} + B \right)}$$

$$m^*(T, B) = 1 - 2e^{-\frac{2}{\beta_c} (T_c + B)}$$

signale l'existence  
d'un gap

$$\uparrow \beta \uparrow \sigma = +1 \rightarrow \downarrow \sigma = -1$$

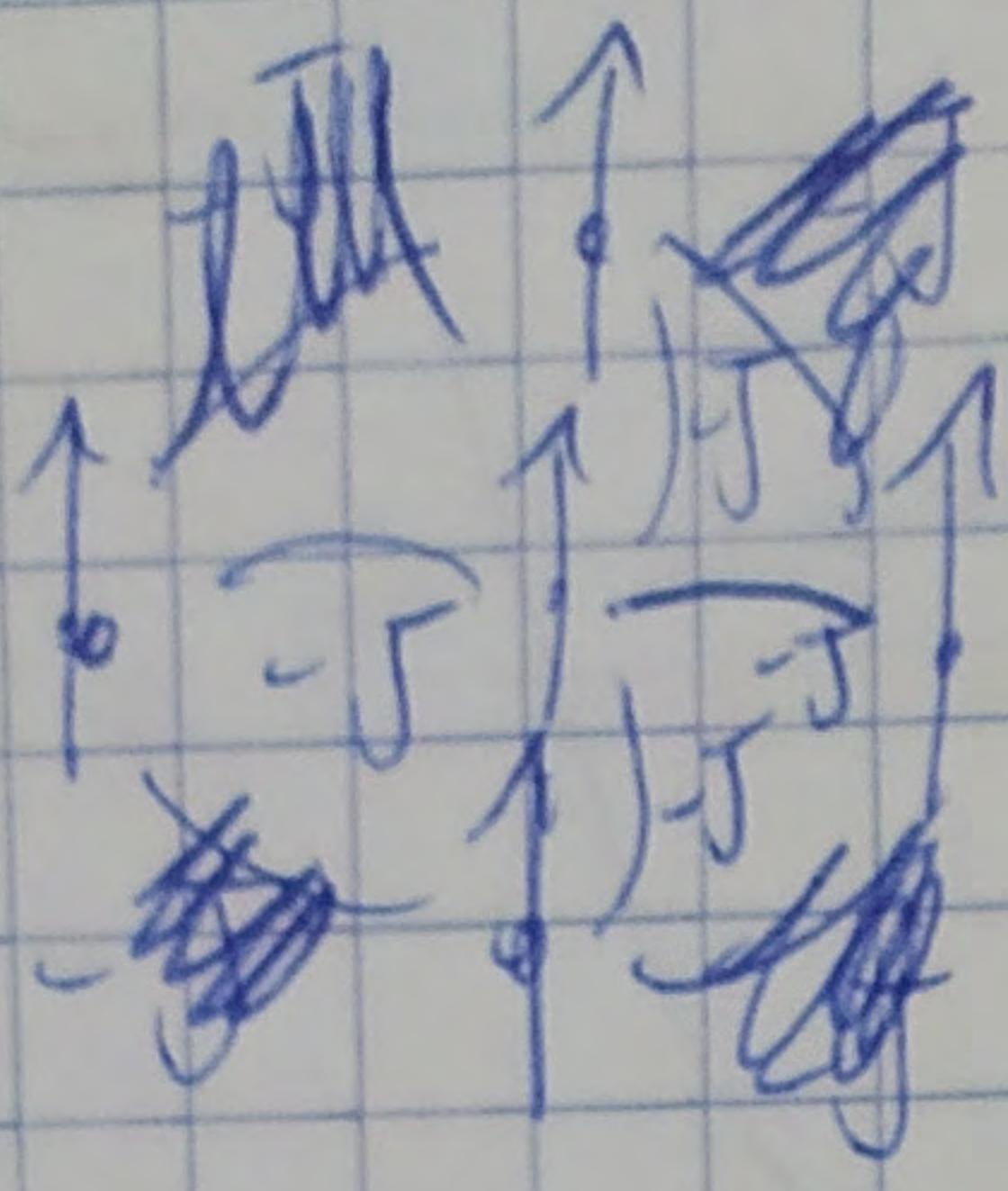
$$E = -B \rightarrow E = +B$$

$$\text{const} \Delta E = 2B$$

$$\Rightarrow \text{explique } 1+m^* \propto e^{-\frac{2B}{T}}$$

$$\tilde{B} = 0 \quad T_c = g J$$

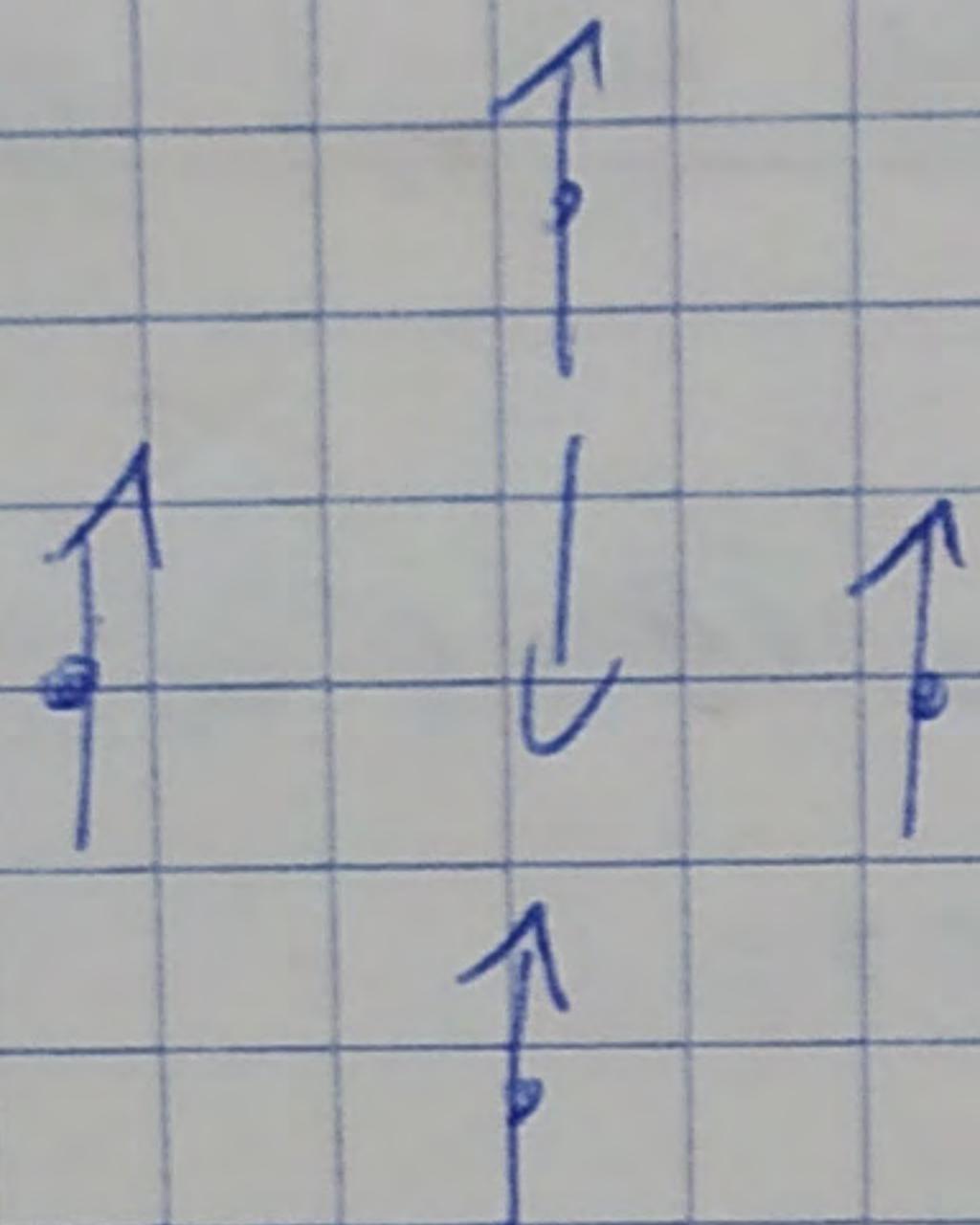
FERRO



$$E = -g J$$

1 spin a  $g=4$  working

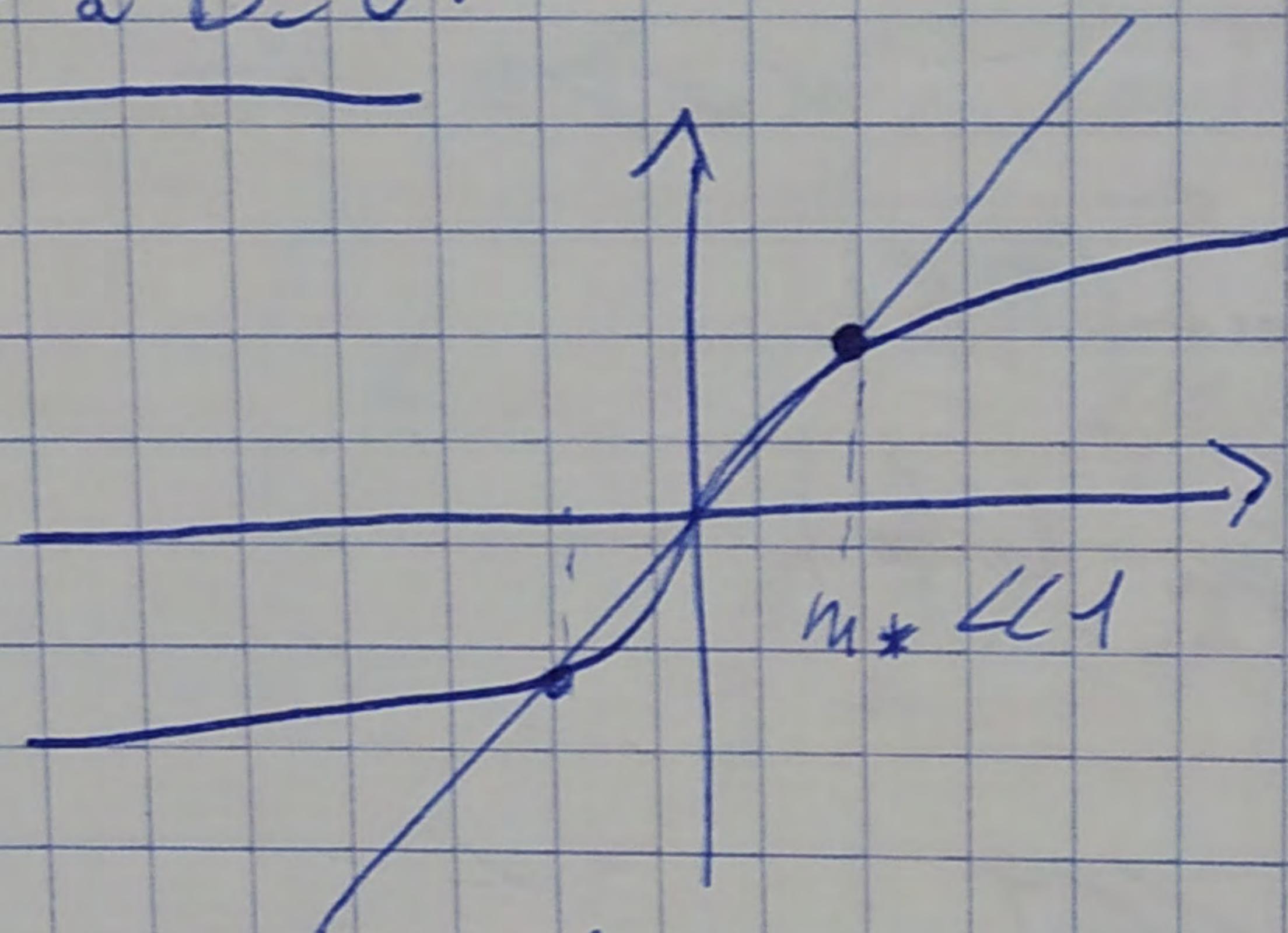
$$\Delta E = 2g J = 2T_c$$



$$E = +g J$$

b) Voisinage de  $T_c$  à  $B=0$ .

$$T < T_c$$



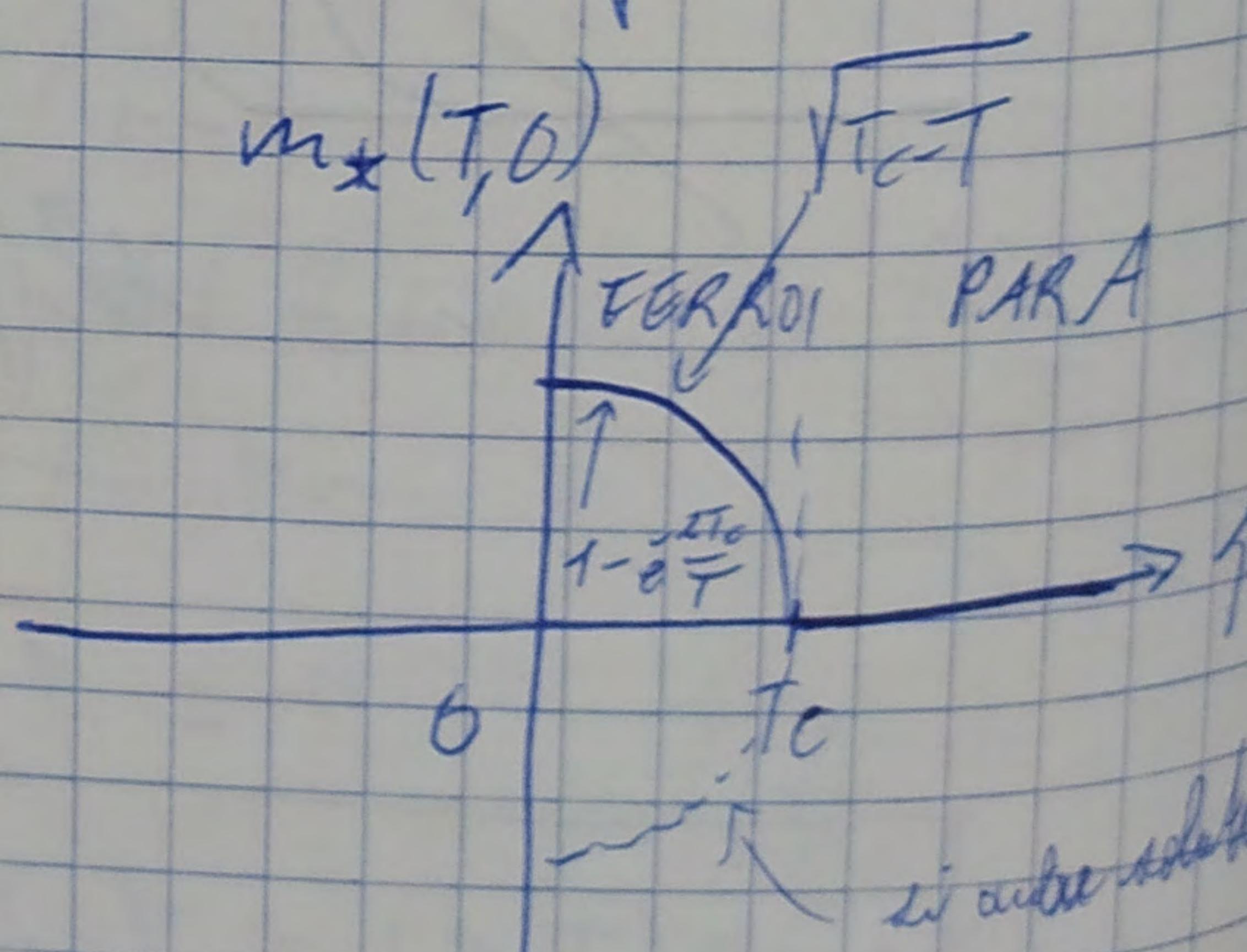
$$m = \beta h \left( \frac{\beta}{\beta_c} m \right) = \frac{\beta}{\beta_c} m - \frac{1}{3} \left( \frac{\beta m}{\beta_c} \right)^3 + \dots$$

$$1 - \frac{\beta}{\beta_c} \approx \frac{1}{3} \left( \frac{\beta}{\beta_c} \right)^3 m^2 \Rightarrow m \propto \sqrt{T_c - T}$$

$$m_*(T, 0) \approx \sqrt{-\beta E}$$

with  $t = \frac{T}{T_c} - 1$

Résumons à elle :



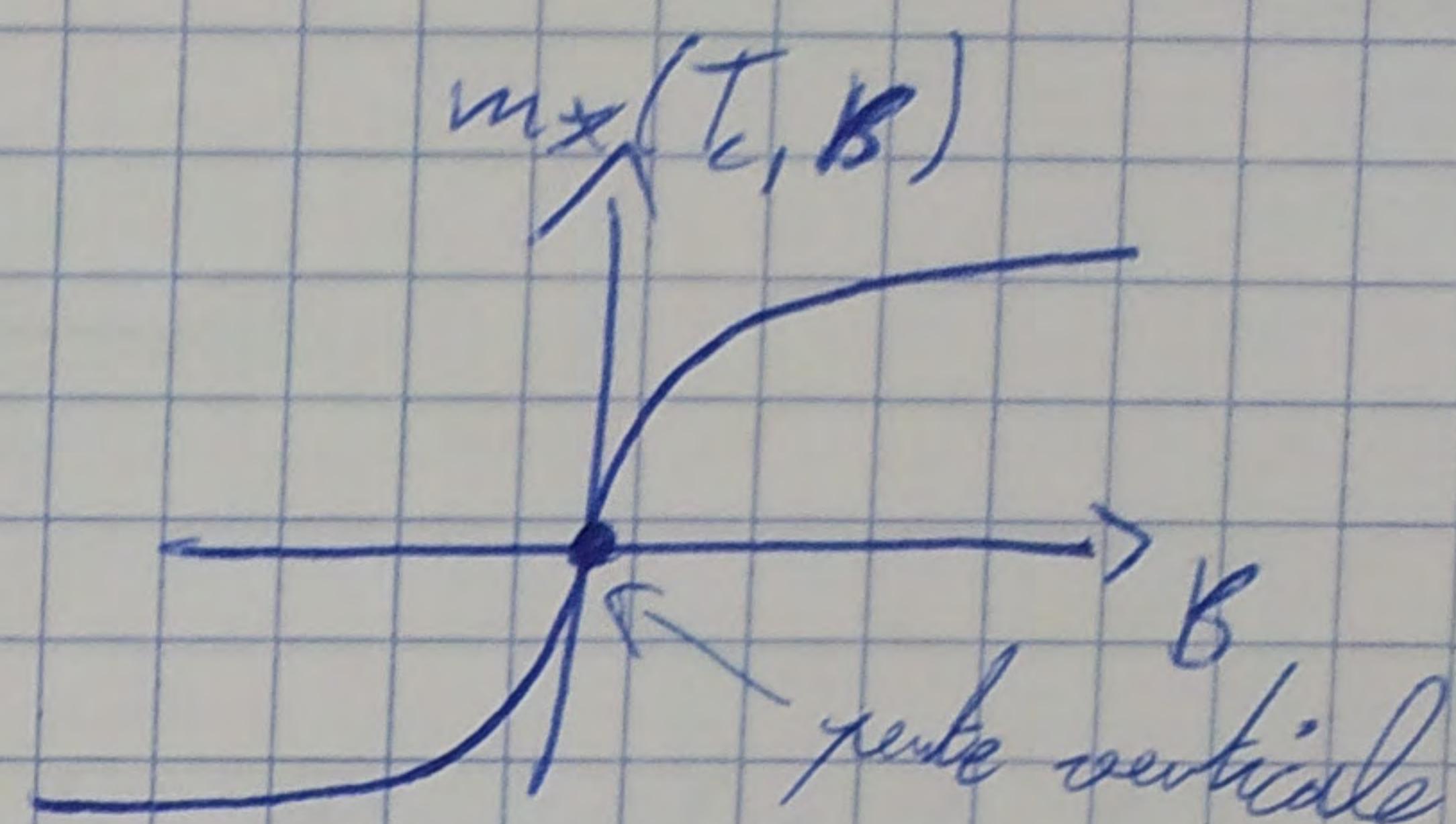
c) Le cas  $T = T_c$  pour  $B \neq 0$ .

$$(*) \rightarrow m = \cancel{\text{th}(m + \beta_0 B)} \quad \text{th}(m + \beta_0 B)$$

$$\underline{B \rightarrow 0} \rightarrow m \ll 1$$

$$m = m + \beta_0 B - \frac{1}{3} (m + \beta_0 B)^3 + \dots$$

$$\left[ m^*(T_c B) \underset{B \rightarrow 0}{\sim} \cancel{\text{th}} \left( \frac{3B}{T_c} \right)^{\frac{1}{3}} \right]$$



d) Le cas  $T > T_c$  à  $B \neq 0$ .

Q: Dans la phase PARA, comment le système réagit au champ  $B$  extérieur?

$$m = \text{th} \beta \left( \frac{m}{\beta_0} + B \right)$$

$$T \approx T_c \Rightarrow m \ll 1$$

$$B \rightarrow 0$$

$$\rightarrow m = \frac{\beta}{\beta_0} m + \beta B$$

$$\begin{aligned} m &\underset{\parallel}{\approx} \frac{\beta}{1-\beta} B \\ &\underset{\perp}{\approx} \frac{\beta}{\beta_0} B \end{aligned}$$

$$\left[ m^*(T, B) \underset{B \rightarrow 0}{\sim} \frac{B}{T-T_c} \quad T > T_c \right]$$

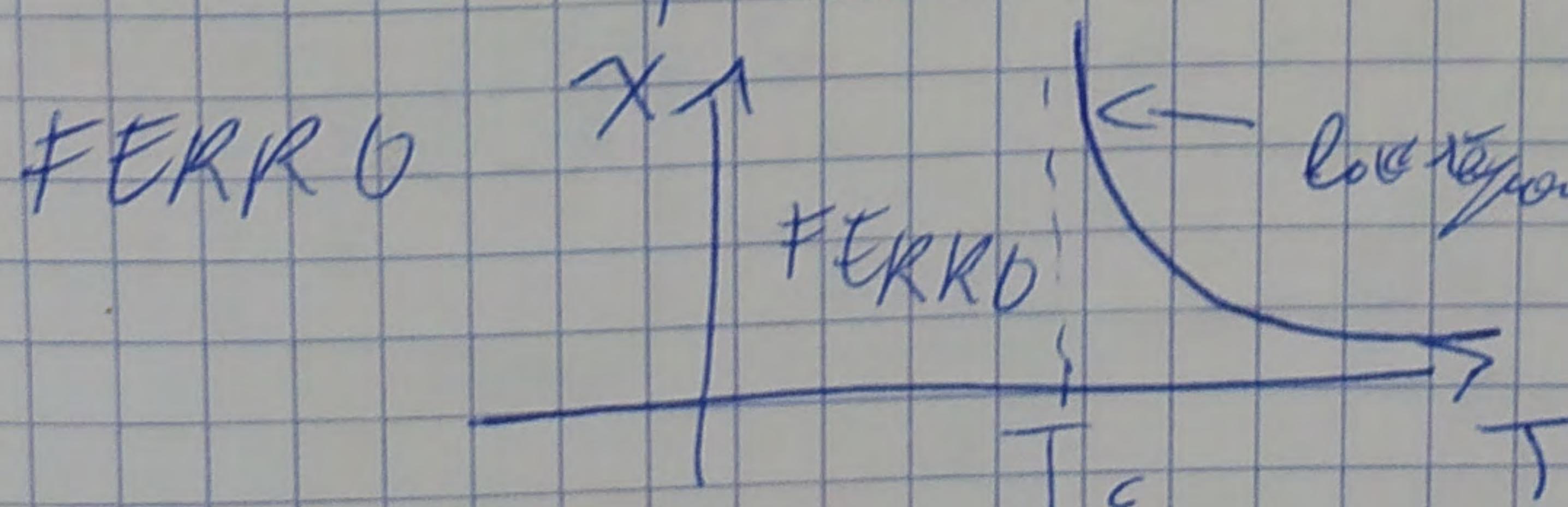
↳ susceptibilité magnétique

$$X = + \frac{\partial m^*}{\partial B} \Big|_{B=0}$$

$$\boxed{X = \frac{1}{T-T_c} \quad \text{si } T \approx T_c \quad T > T_c}$$

Loi de Curie-Weiss

$$\text{PARA: } \rightarrow X \approx \frac{1}{T} \quad \text{si } T \nearrow \text{les fluctuations dominent } B = m$$



↳ responses (l'aimantation diverge à  $T_c$ )

e) Discussions Lois de puissance et universalité

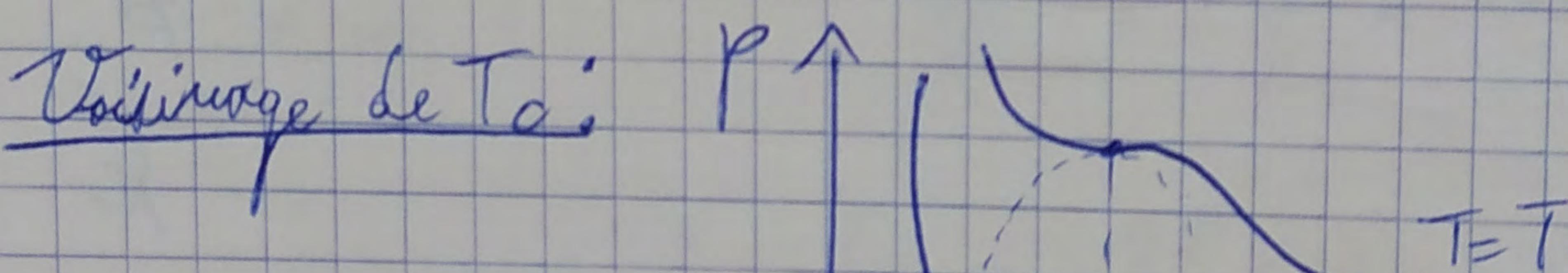
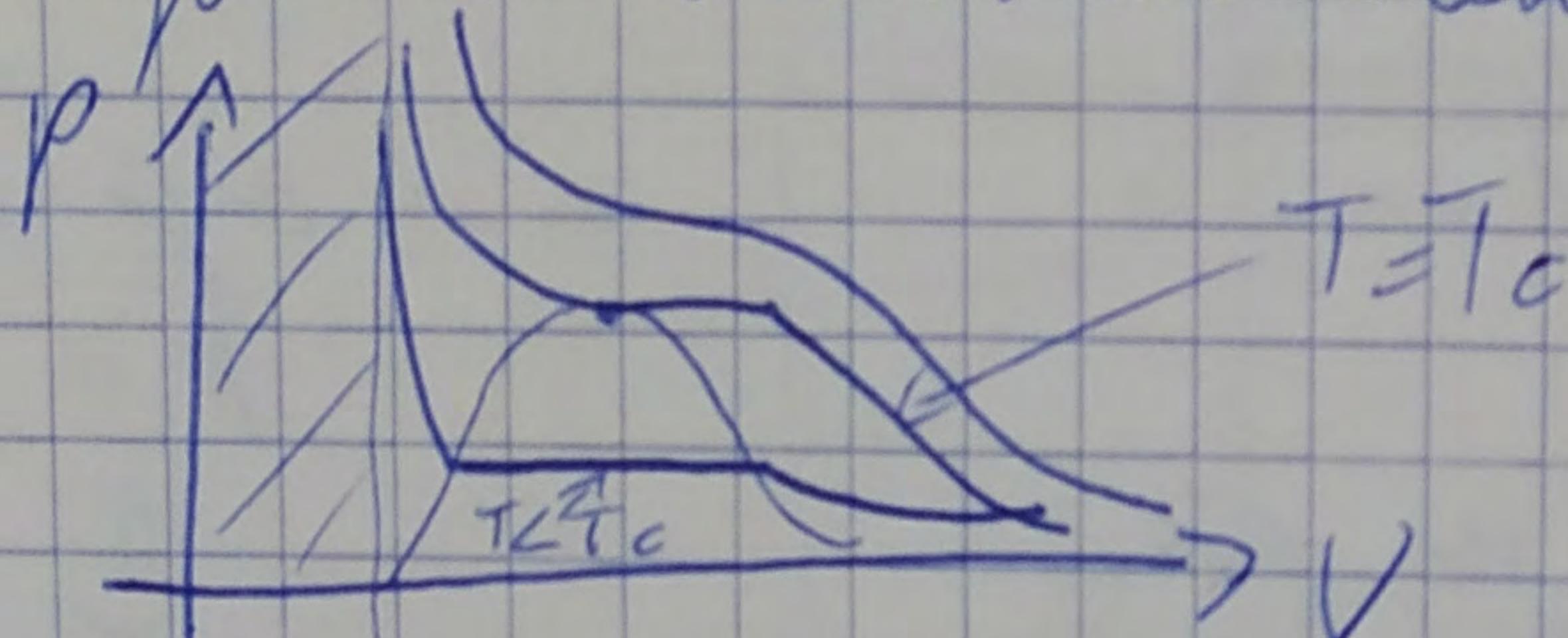
Voisinage de  $T_c$

$$\left\{ \begin{array}{l} m^*(T, 0) \propto \sqrt{-t} ; t < 0 \\ \left( t = \frac{T - T_c}{T_c} \right) \\ m^*(T_c, b) \propto b^{\frac{1}{3}} ; t = 0 \\ \propto \frac{1}{t} \quad t > 0 \end{array} \right.$$

Lois de puissance  $\Rightarrow$  absence d'échelle(s) caractéristique(s)

Comparaison avec la transition liquide-gaz :

- Théorie de champ moyen
- équation de Van der Waals.



$$\left[ \rho_g - \rho_c \propto \sqrt{-t} \quad \text{pour } T < T_c \right]$$

à  ~~$T = T_c$~~ :  $\rho_g - \rho_c \propto |p - p_c|^{\frac{1}{3}}$

$T > T_c$ : Compatibilité  $K_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$

$$K_+ = \frac{1}{t}$$

Transition PARA-FERRO

Transition liquide-gaz

$$T < T_c \quad m \propto (-t)^{\beta_{cm}} \quad \text{ou} \quad \beta_{cm} = \frac{1}{2}$$

$$T = T_c \quad m \propto B^{\frac{1}{cm}} \quad \text{ou} \quad \beta_{cm} = \frac{1}{3}$$

$$T > T_c \quad X \propto \frac{1}{t^{\gamma_{cm}}} \quad \gamma_{cm} = 1$$

$$\delta p \propto (-t)^{\beta_{cm}}$$

$$\delta p \propto (\delta p)^{\frac{1}{\beta_{cm}}}$$

$$K \propto \frac{1}{t^{\gamma_{cm}}}$$

égalité entre  
les exposants  
utilisés  
( $\beta_{cm}$ ,  $\delta_{cm}$ ,  $\gamma_{cm}$ )

$cm = \text{charge moyenne}$

Analyses numériques :  $\rightarrow$  Confirme l'égalité entre les exposants critiques ( $\beta$ ,  $\delta$  et  $\gamma$ )

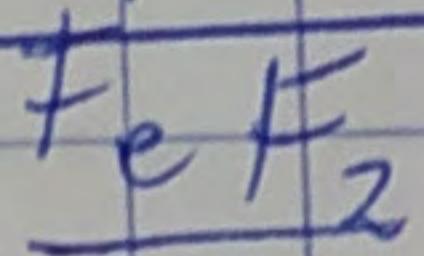
$$\begin{array}{l} \text{Ising} \\ \hline 3D \end{array} \quad \beta = 0,326$$

$$\delta = 1,79$$

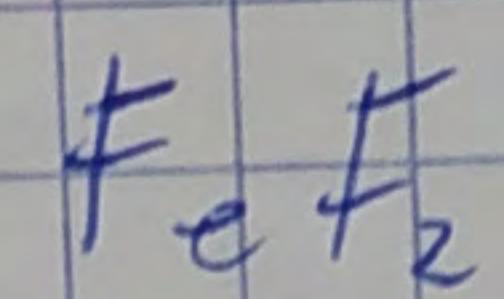
$$\gamma = 1,24$$

Expérimentalement :

PARA-FERRO

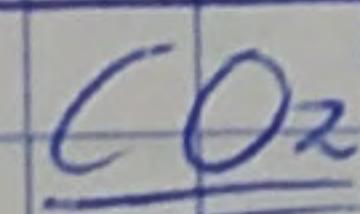


$$\beta = 0,325(2)$$

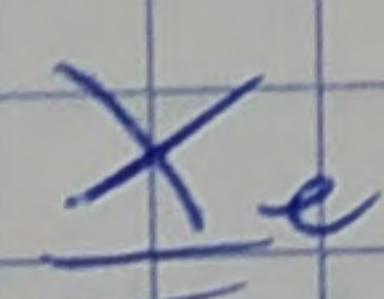


$$\gamma = 1,25(1)$$

LIQ-GAZ



$$\beta = 0,324(2)$$



$$\gamma = 1,246(10)$$

6) Energie, Entropie, etc...

a) Energie libre.

$$f_{cm}(m) \rightarrow f(T, B) = f(m^*(T, B))$$

$$\text{entropie: } S = -\frac{\partial f}{\partial T}, \quad E = +\frac{\partial}{\partial B} (Bf)$$

Une relation utile:

$$m^* \text{ satisfait } (*) \quad m^* = \ln \beta \left( \frac{m^*}{B_c} + B \right)$$

$$\underline{Q:} \quad \frac{\partial m^*}{\partial \beta} \text{ ou } \frac{\partial m^*}{\partial B} ?$$

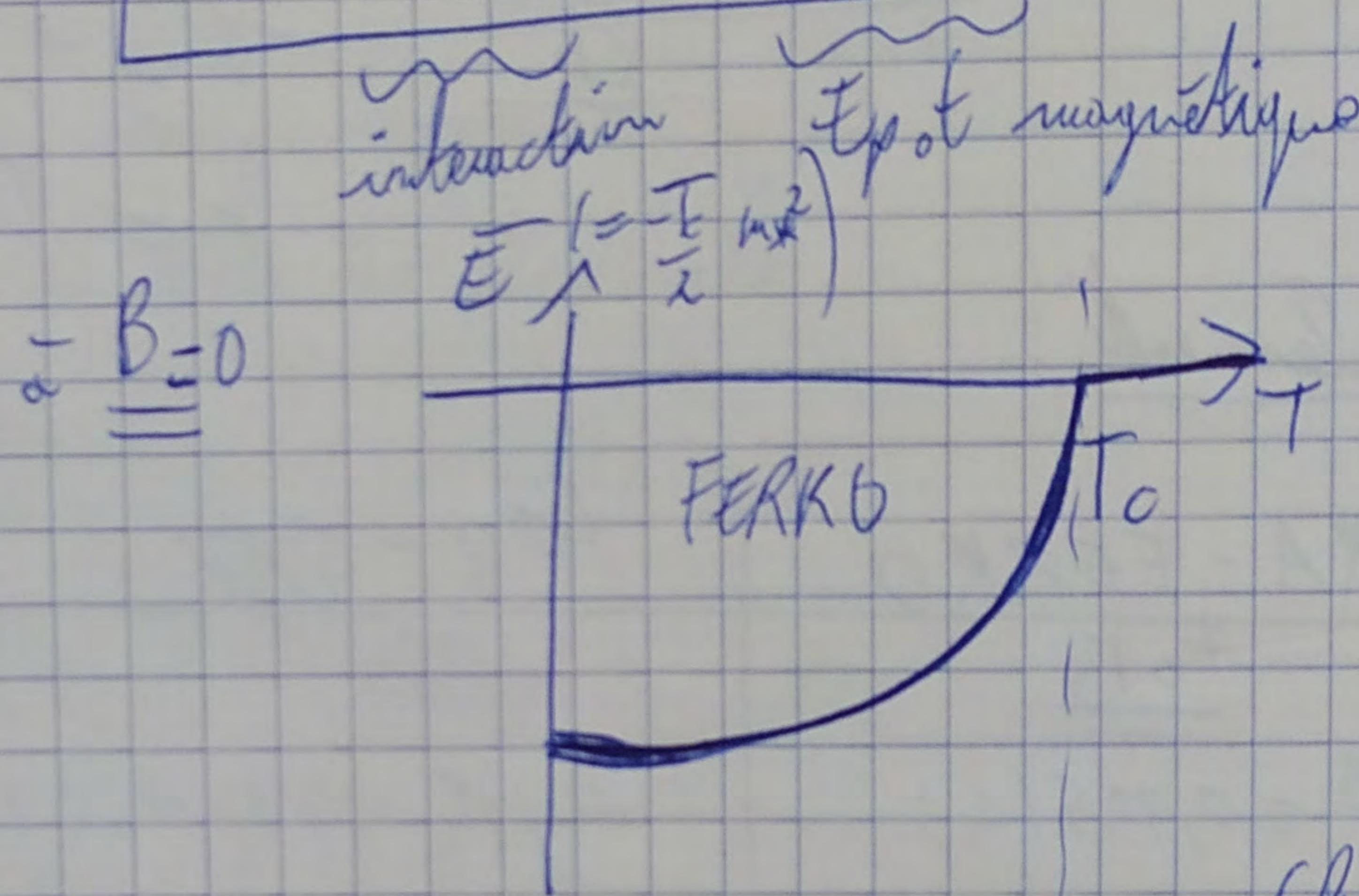
$$\frac{\partial f}{\partial \beta} \Rightarrow \frac{\partial m^*}{\partial \beta} = \left( \frac{m^* + B}{B_C} + \beta \frac{\partial m^*}{\partial \beta} \right) \left( 1 - \underbrace{\frac{\beta h^2}{m^{*2}}} \right)$$

$$\therefore \frac{\partial m^*}{\partial \beta} = \frac{\left( \frac{m^*}{B_C} + B \right) \left( 1 - m^{*2} \right)}{1 - \beta \left( 1 - m^{*2} \right)}$$

b) Application: Calcul de  $\bar{E}$

$$\bar{E} = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta f) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{B m^{*2}}{2 B_C} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - m^{*2}}{4} \right]$$

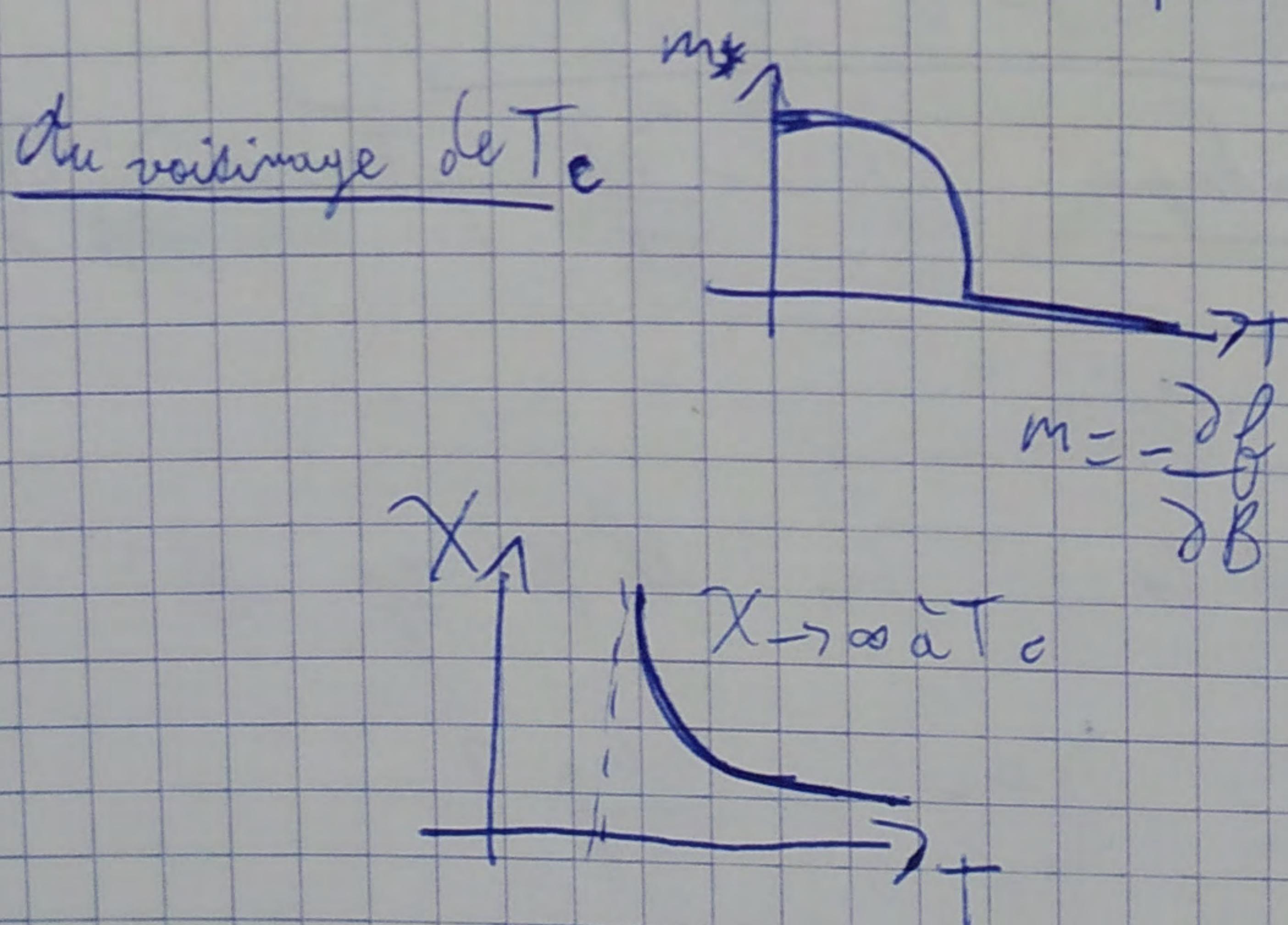
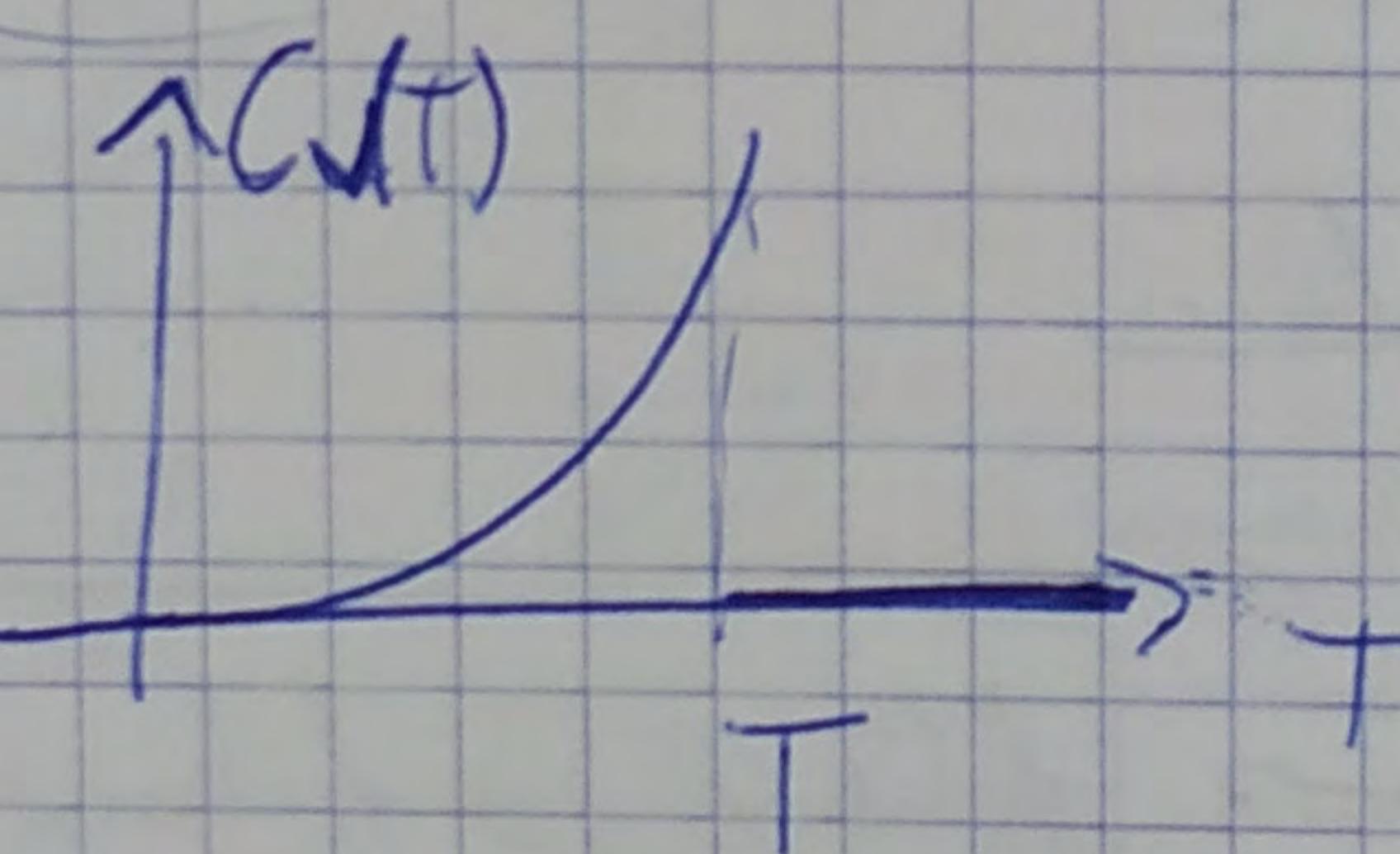
$$\Rightarrow \boxed{\bar{E} = -T_C \frac{m^{*2}}{2} - m^* B}$$



FERKO:  $C_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \underset{T \rightarrow T_C}{\approx} \frac{3}{2}$

( $k_B = 1$ )

PARA:  $C_V = 0$



$$C_V \propto \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$$

$$\chi = - \frac{\partial^2 f}{\partial B^2}$$

Réduite première de  $f \rightarrow$  continue

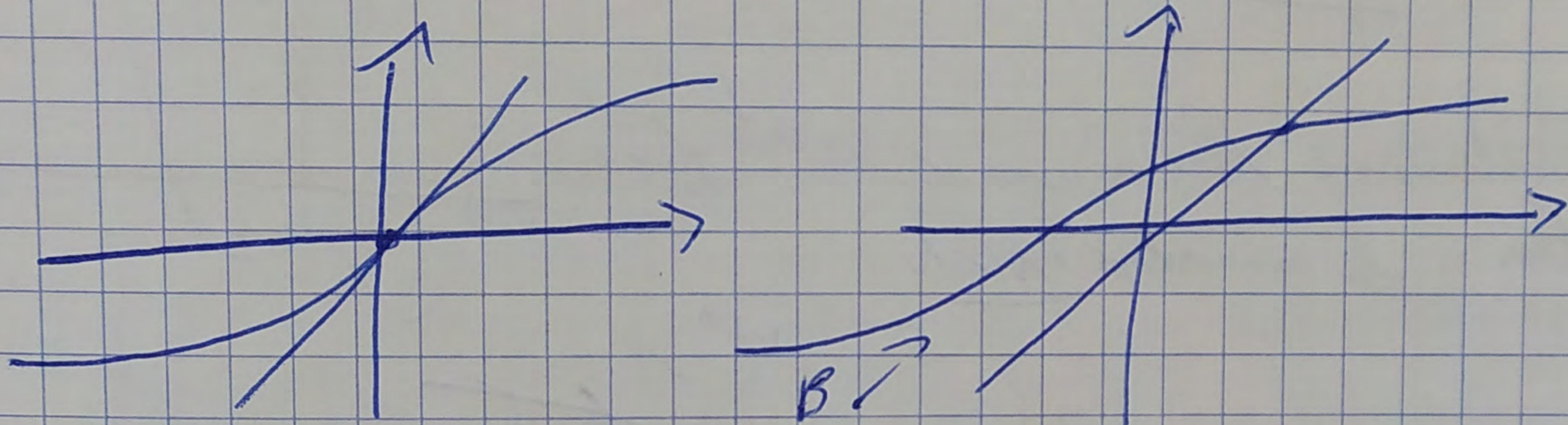
Réduite seconde de  $f \rightarrow$  discontinuité ou divergence

$\Rightarrow$  transition du second ordre

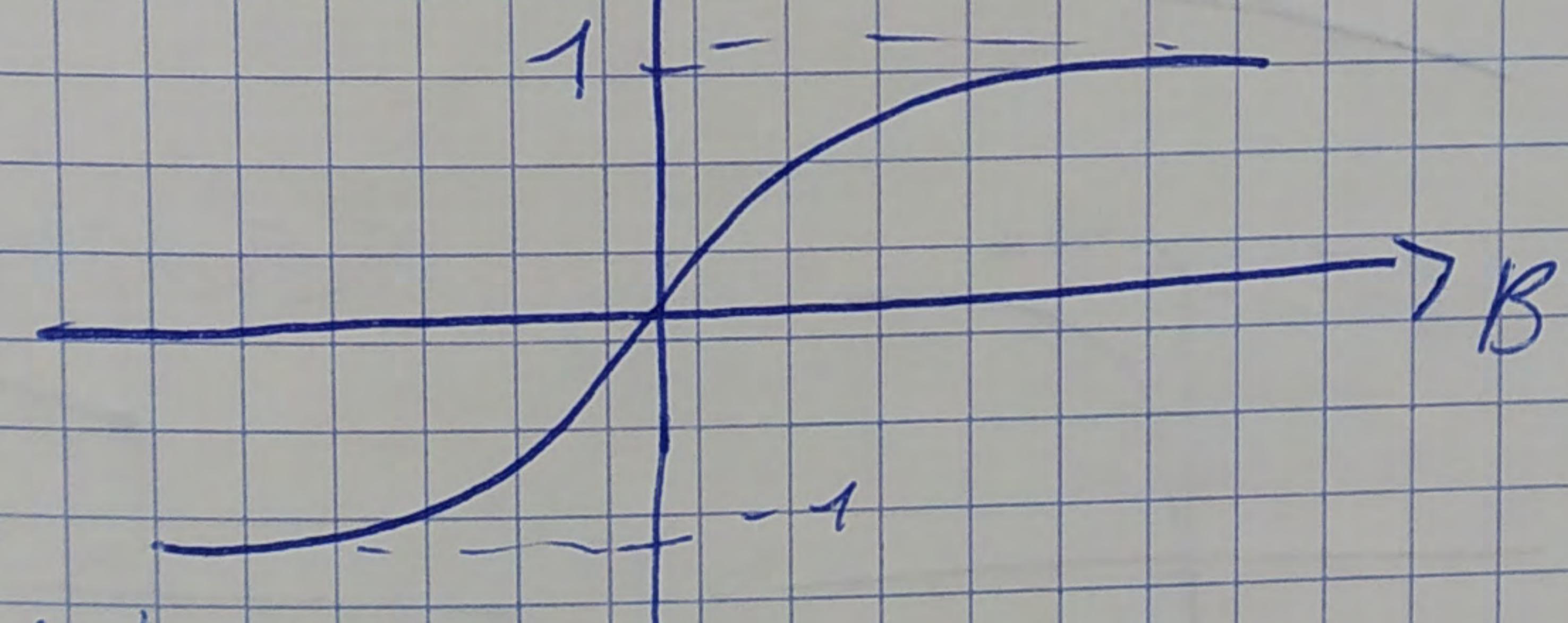
## F) Stimulation en fonction de B - Métabolisme et lysérisis.

a)  $T > T_c$

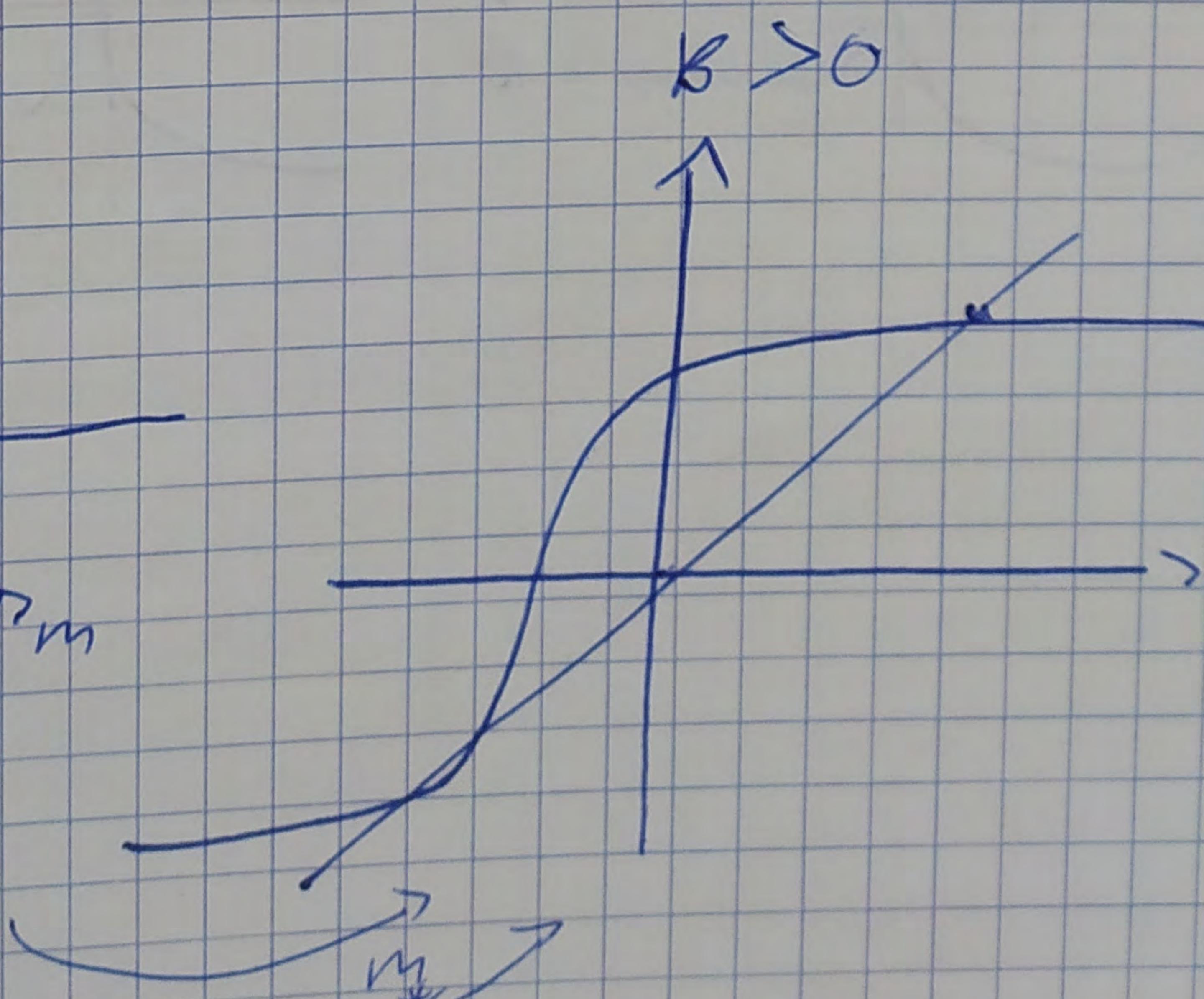
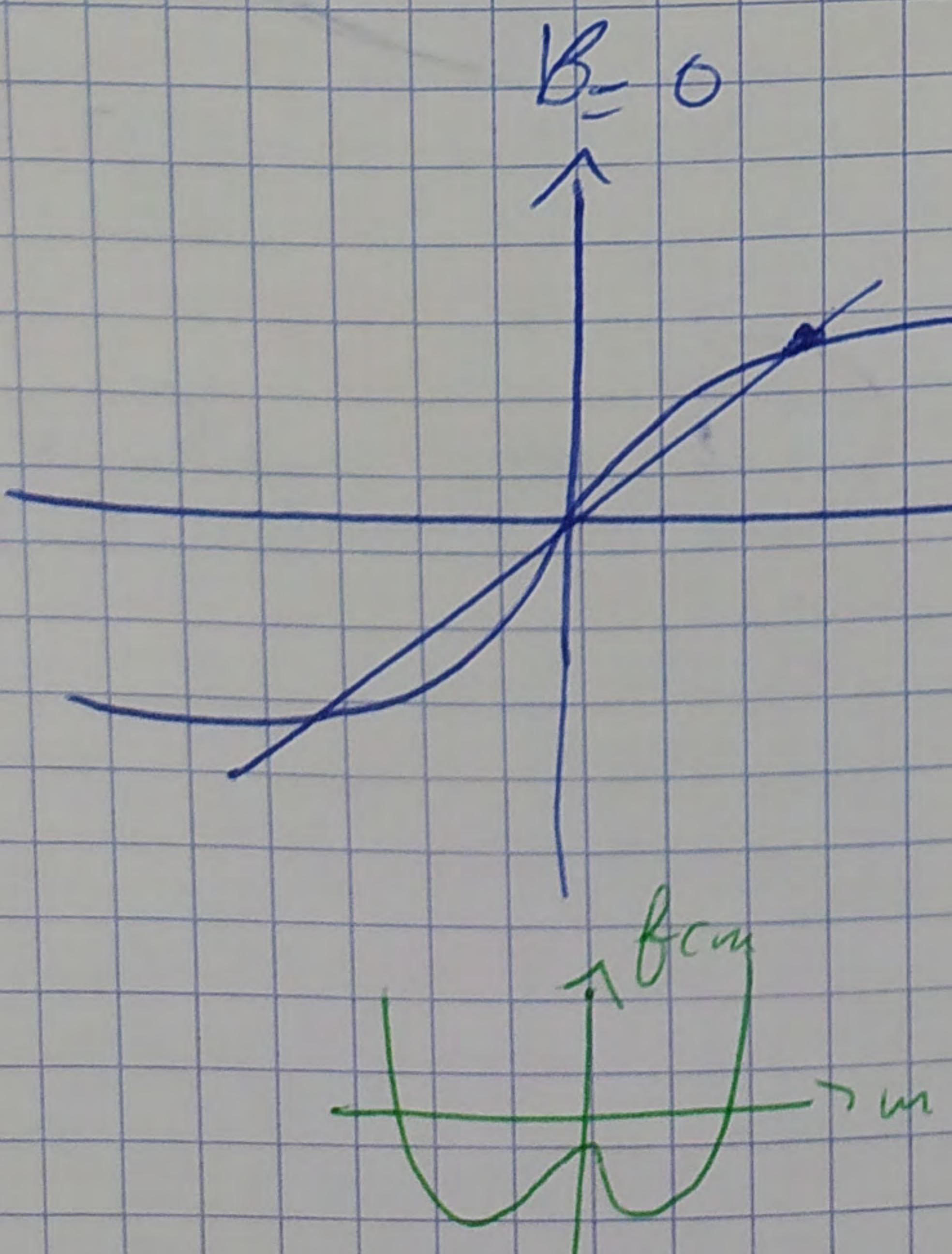
$\underline{Q} :$  Comportement de  $m_*$  en fonction de  $B$



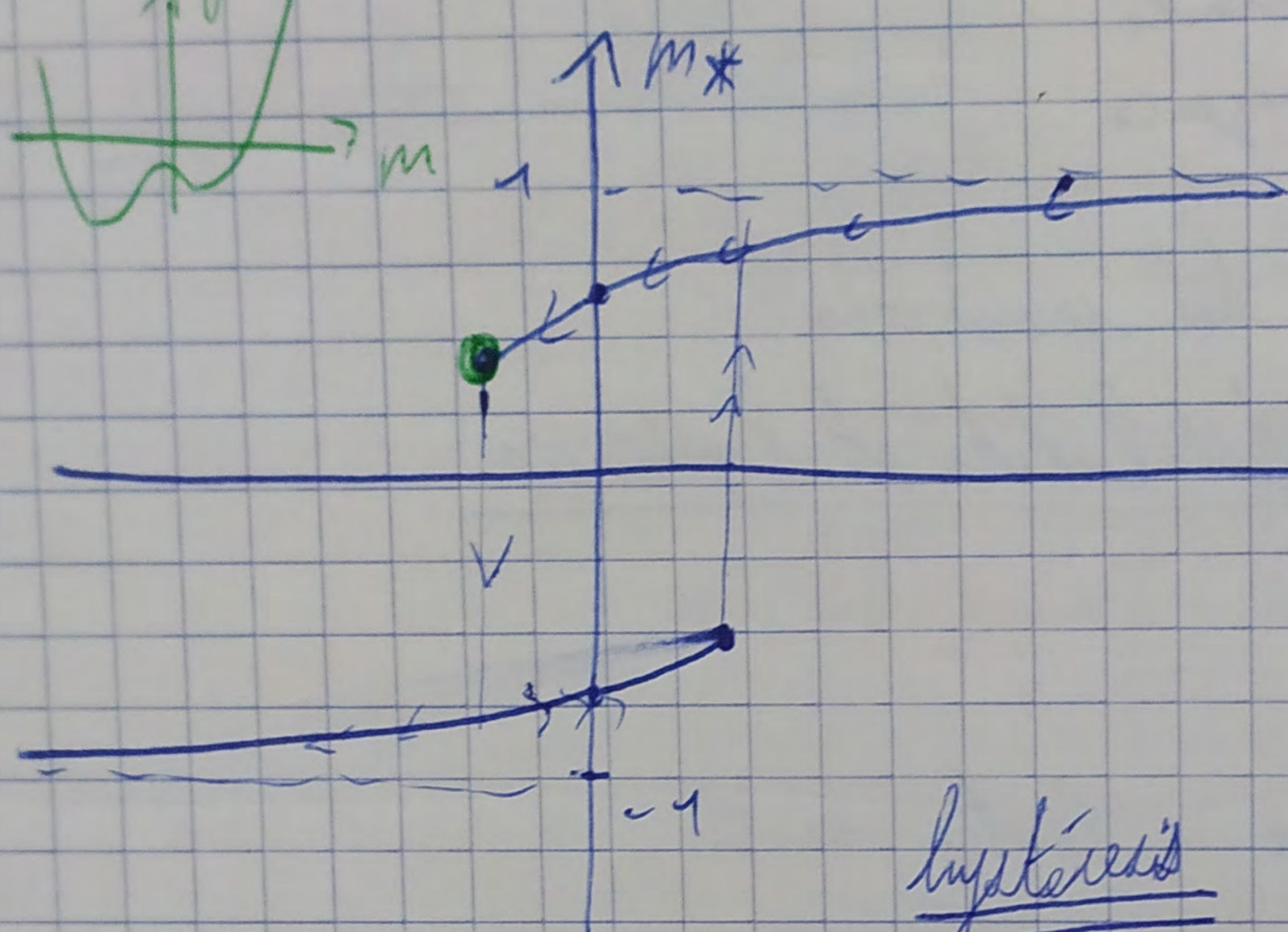
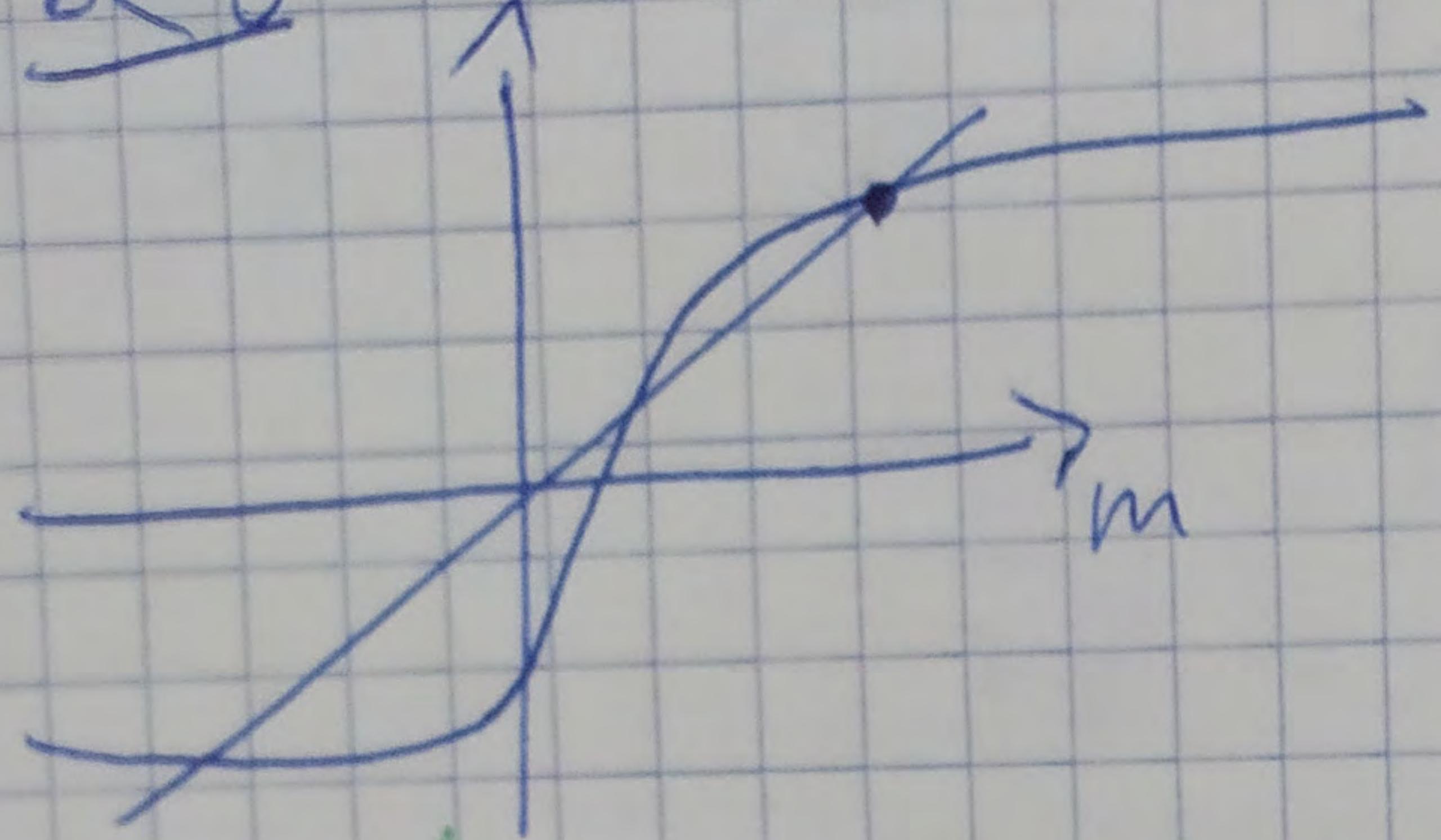
$$m_* (T, B)$$



$$b) T < T_c$$

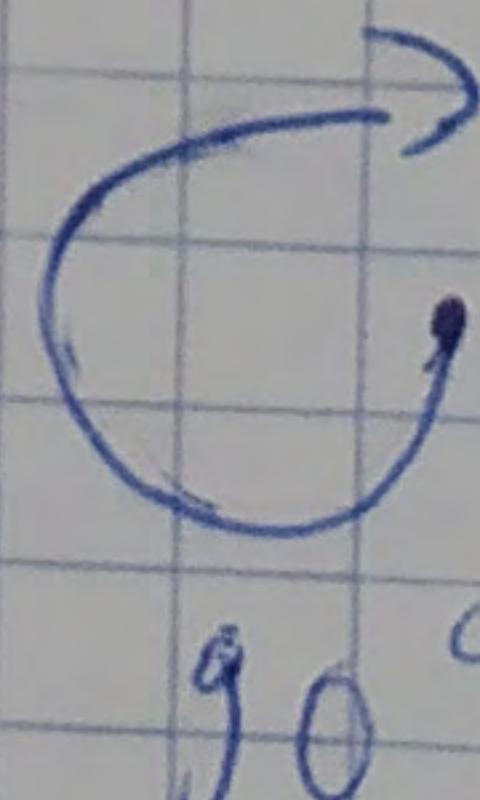
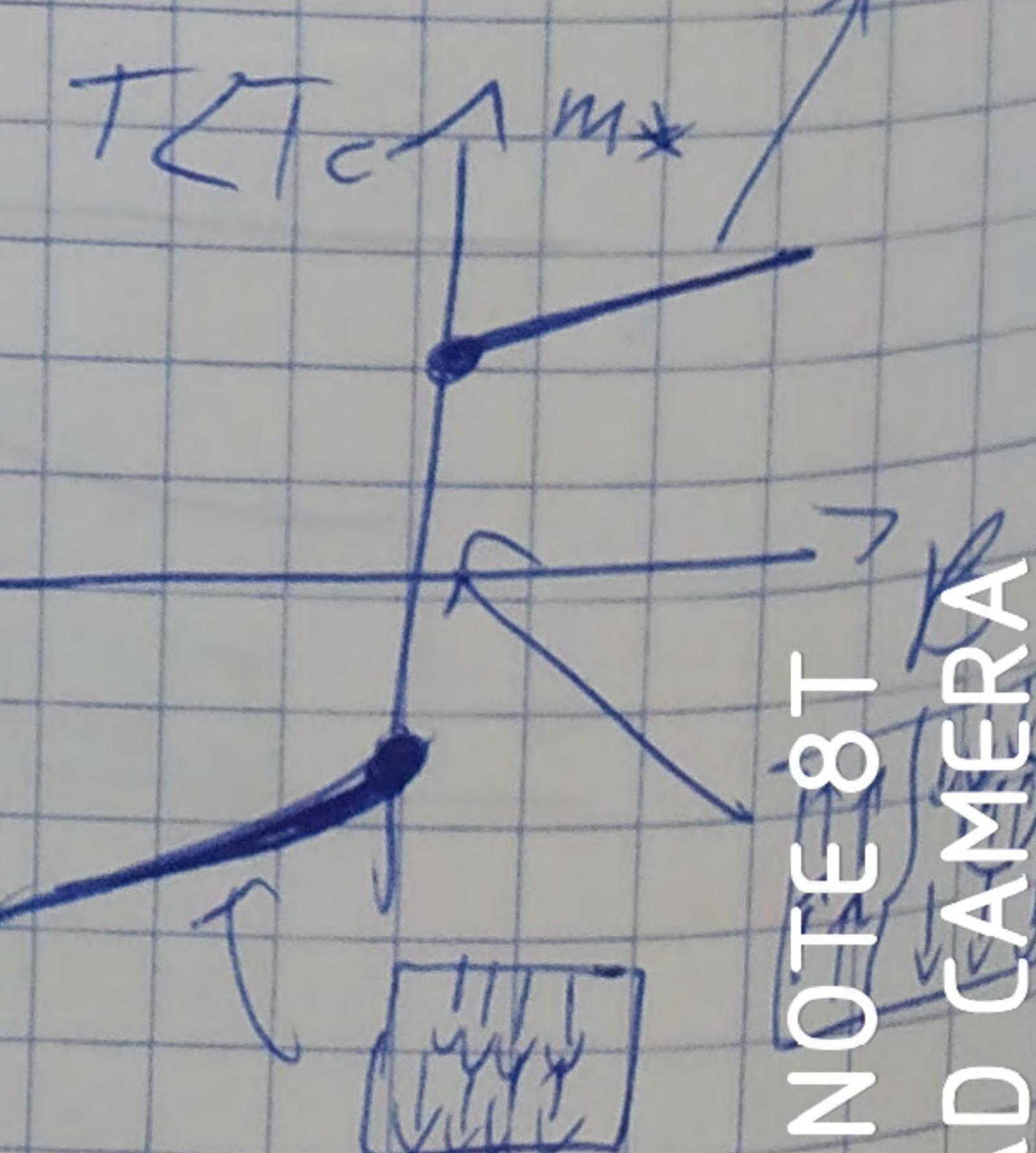
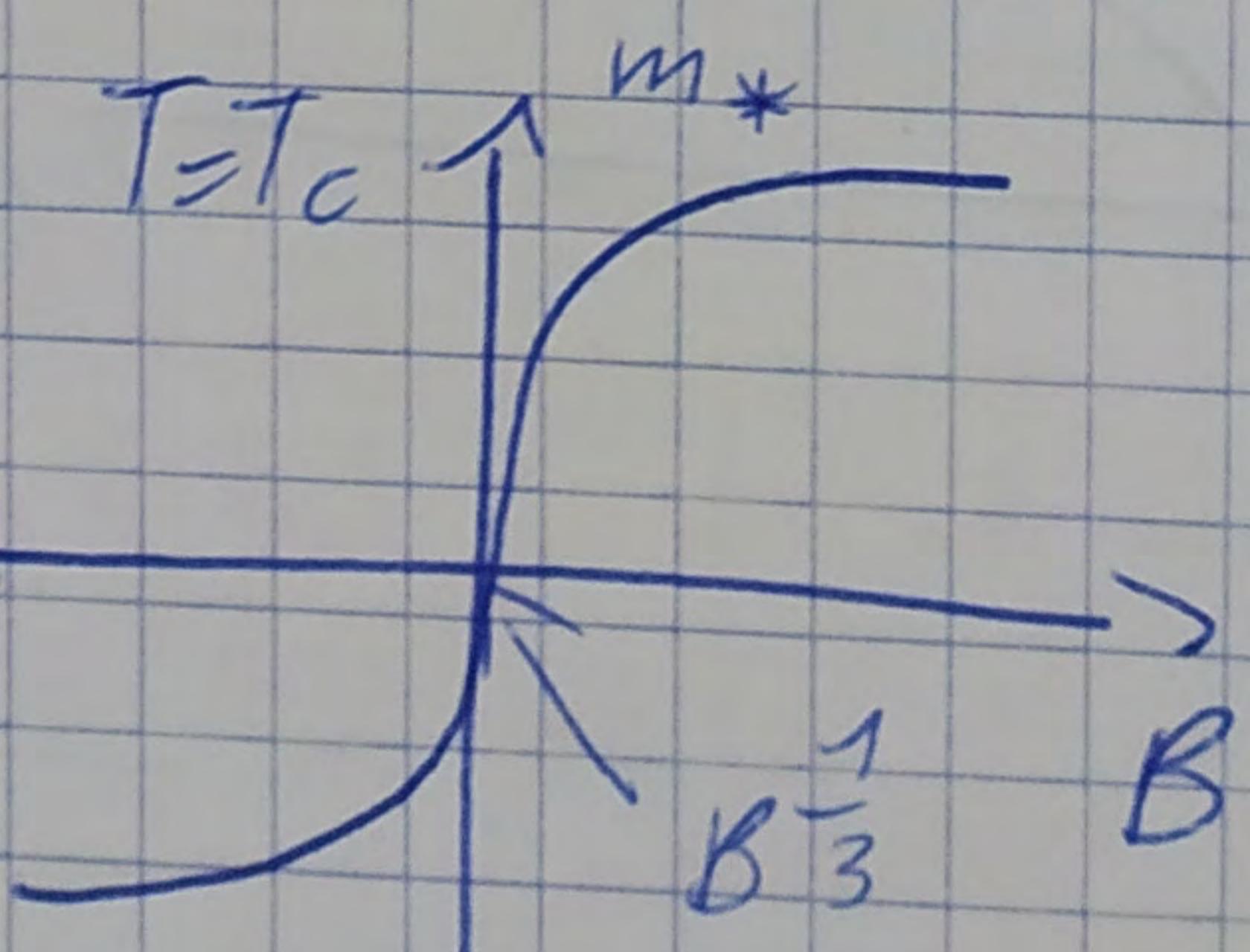
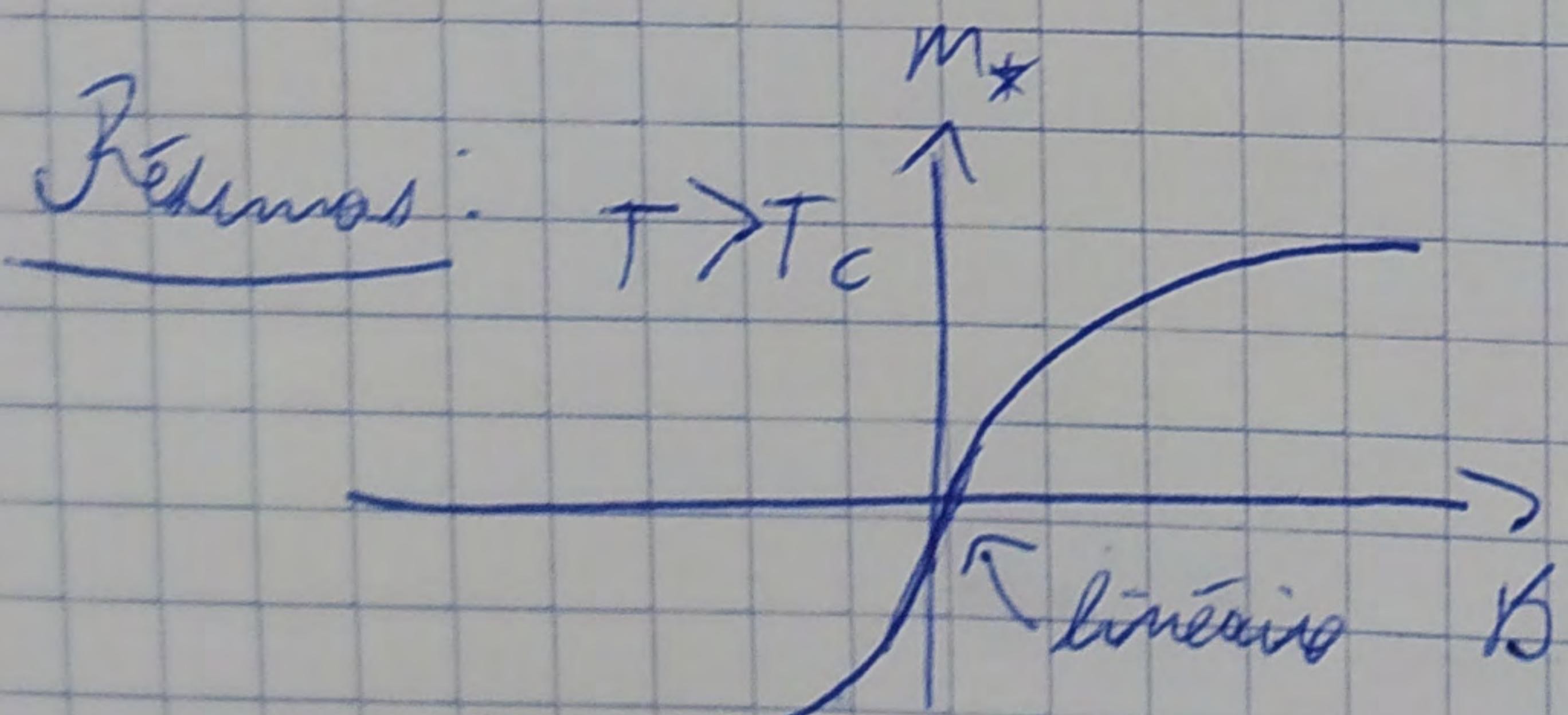
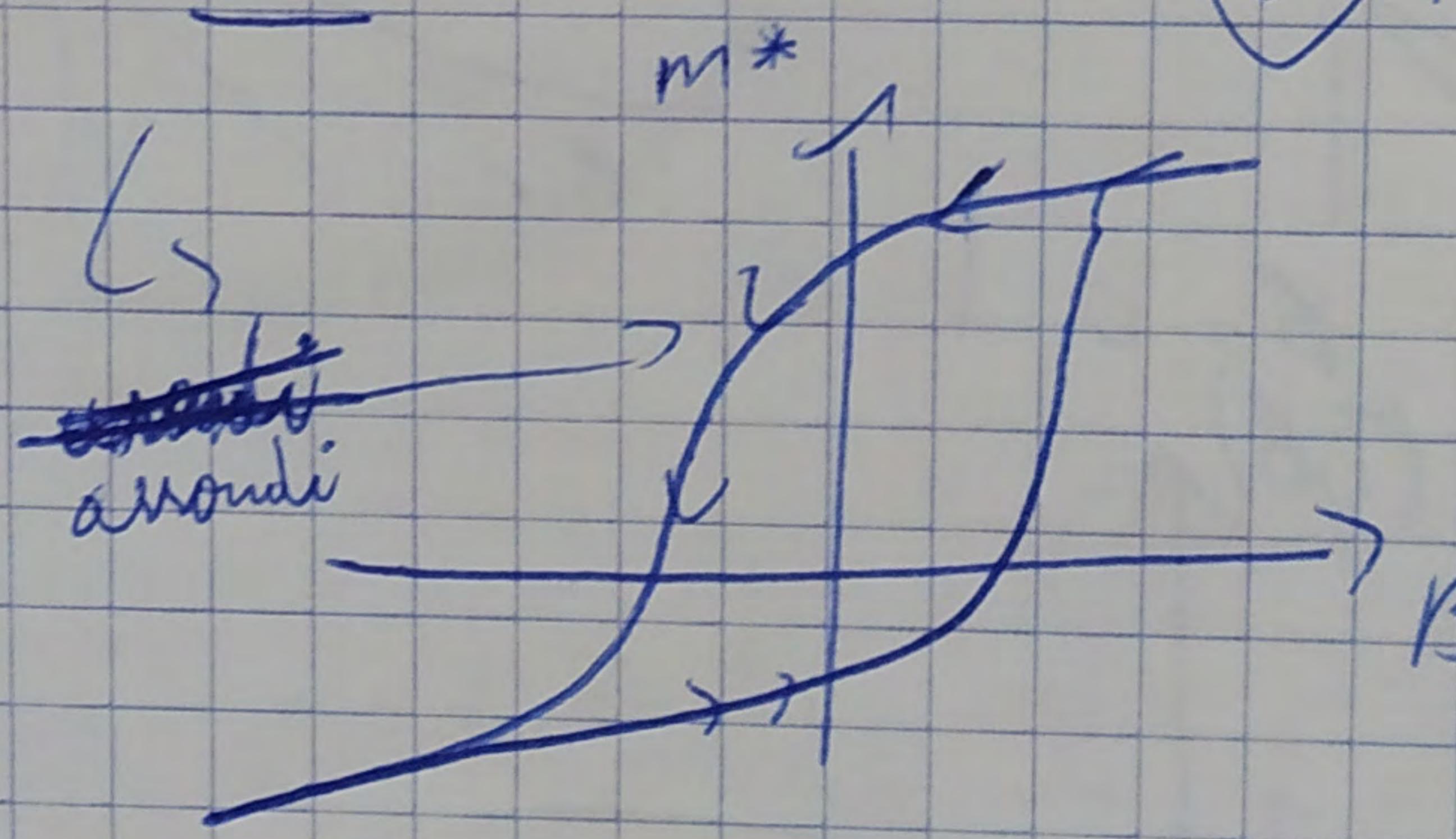
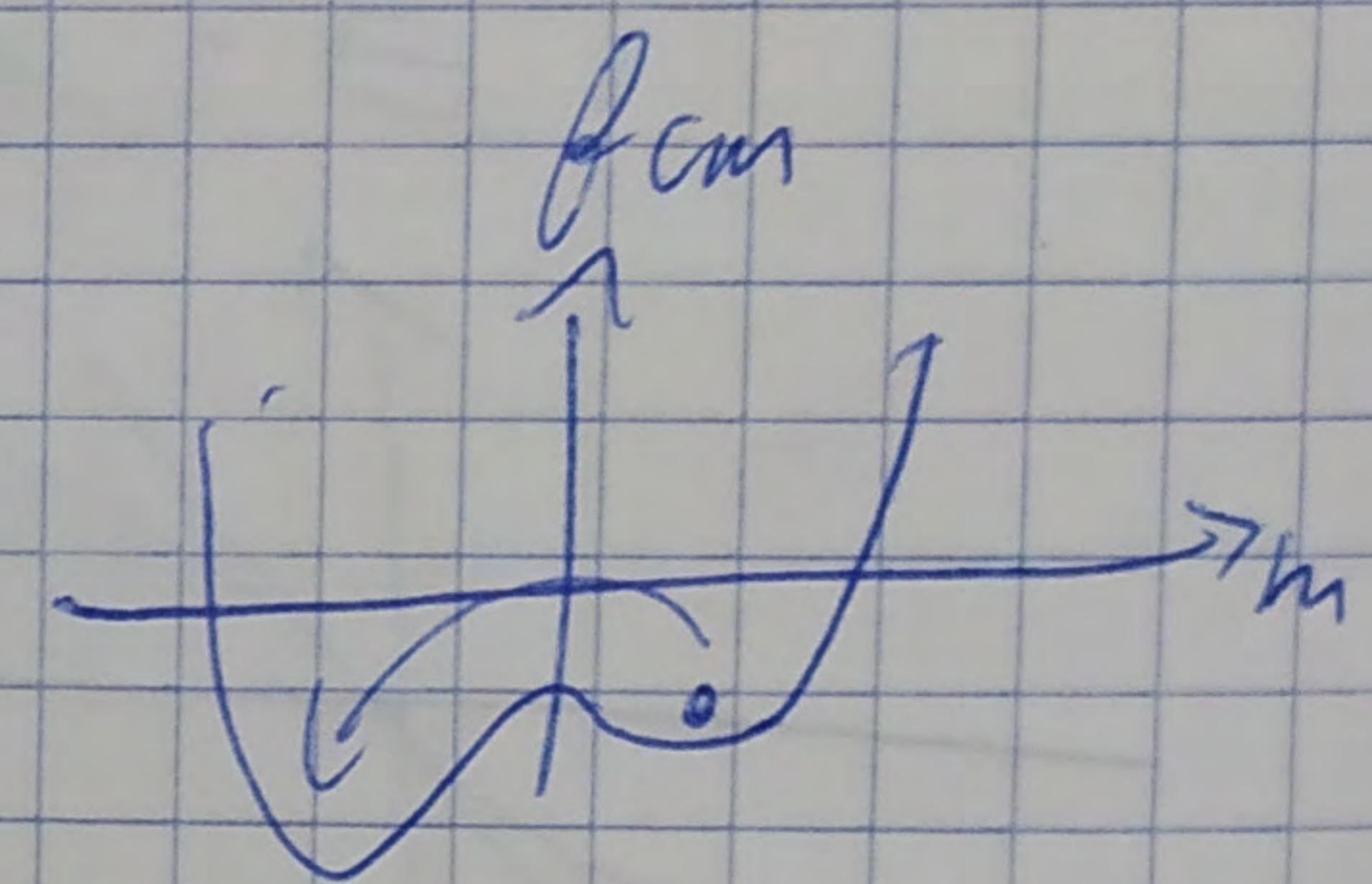


$B < 0$



hystéresis

Si les fluctuations thermiques peuvent faire quitter le minimum local



$\Rightarrow$  instabilités de Van der Waals