

## Problemas de máximos e mínimos



## Integrantes do PETMAT

Orientação: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues

Departamento de Matemática

Universidade de Brasília



---

## Conteúdo

---

<b>1 O problema de Dido</b>	<b>13</b>
<b>2 Refração da luz e a lei de Snell</b>	<b>19</b>
2.1 Princípio de Fermat . . . . .	19
2.2 Princípio de Huygens . . . . .	21
<b>3 Máximos e mínimos em Geometria</b>	<b>25</b>
3.1 Problema de Euclides . . . . .	25
3.2 Problema de Arquimedes . . . . .	26
3.3 Problema de Steiner . . . . .	29
3.4 O problema da menor área . . . . .	31
3.5 O problema do menor perímetro . . . . .	32
<b>4 Tartaglia, cúbicas e desigualdades entre médias</b>	<b>35</b>
4.1 Problema de Tartaglia . . . . .	35
4.2 Desigualdade aritmético-geométrica . . . . .	38
4.3 Desigualdade aritmético-geométrica – caso geral . . . . .	40
4.4 Desigualdades com a média quadrática . . . . .	46
4.5 Soluções usando Cálculo . . . . .	48
4.6 Desigualdade de Cauchy-Schwarz . . . . .	52
4.7 Desigualdade de Hölder . . . . .	53
<b>5 O problema do barril de vinho de Kepler</b>	<b>57</b>
5.1 Versão bidimensional . . . . .	57
5.2 Versão tridimensional . . . . .	59
<b>6 A cicloide e o problema da braquistócrona</b>	<b>61</b>
6.1 Um pouco de história . . . . .	61
6.2 Cicloide . . . . .	62
6.3 Solução do problema . . . . .	63
<b>7 O problema aerodinâmico de Newton</b>	<b>69</b>
7.1 Solução do problema para o tronco de cone . . . . .	70
7.2 O problema de Newton para uma linha dividida em duas . . . . .	73

7.3	O problema de Newton para uma linha dividida em $n$ partes . . . . .	75
7.4	Solução do problema de Newton . . . . .	77
<b>8</b>	<b>O desenvolvimento da definição de função</b>	<b>79</b>
8.1	O início do conceito de função . . . . .	79
8.2	Desenvolvimentos “recentes” . . . . .	81
<b>9</b>	<b>Formalização e problemas de extremo</b>	<b>85</b>
<b>10</b>	<b>Mínimos de funções de uma variável</b>	<b>89</b>
<b>11</b>	<b>O princípio de Lagrange</b>	<b>103</b>
11.1	Funções de várias variáveis . . . . .	103
11.2	Uma aplicação inusitada . . . . .	108
11.3	Uma observação sobre funções convexas . . . . .	109
<b>12</b>	<b>Resolução de problemas</b>	<b>111</b>
12.1	O problema de Snell sobre a refração da luz . . . . .	111
12.2	O problema de Tartaglia . . . . .	112
12.3	A desigualdade aritmético-geométrica . . . . .	112
12.4	A desigualdade aritmético-quadrática . . . . .	113
12.5	As desigualdades de Cauchy-Bunyakovski e de Hölder . . . . .	114
<b>13</b>	<b>Sobre funcionais lineares e o problema de Dido</b>	<b>117</b>
13.1	O que é uma função com um número infinito de variáveis? . . . . .	118
13.2	Problemas extremos para funcionais . . . . .	120

---

## Prefácio

---

O grupos PET (Programa de Educação Tutorial) foram criados com o objetivo de promover a formação ampla dos seus integrantes, desenvolvendo atividades de ensino, pesquisa e extensão. São grupos formados por um professor tutor e por 12 estudantes bolsistas e até 6 estudantes não bolsistas, ambos selecionados por processo seletivo.

O PET Matemática (PETMAT) da Universidade de Brasília (UnB) realiza várias atividades de ensino, pesquisa e extensão. Nos anos de 2020 e 2021 as atividades do grupo foram realizadas de forma remota, devido a suspensão das atividades presenciais na UnB imposta pela pandemia do COVID-19.

Entre as atividades desenvolvidas pelo grupo destacamos a PETMAT Pesquisa Coleativa que é um estudo, sobre um tema específico de Matemática, feito por todo o grupo e orientado pela tutora. No ano de 2021, que corresponde aos semestres letivos 2020/2 e 2021/1, já que, por conta da COVID 19, atualmente, os semestres letivos não coincidem com o semestres ordinários, a pesquisa coletiva foi baseada na leitura e interpretação do livro "Histórias sobre máximos e mínimos" [Tikhomirov, 1991], principal referência.

Os integrantes do PETMAT, em 2021, foram divididos em duplas e trios e eram responsáveis por estudar e apresentar, para todo o grupo, um capítulo específico desse livro e também por registrar, na forma escrita, esses estudos. As exposições foram seguidas de comentários e sugestões que serviram para melhorar a interpretação dos resultados e a escrita do texto. Nos primeiros meses do ano de 2022, o material escrito foi revisado por alguns integrantes do grupo e deu origem a esse texto.

Portanto, este texto é fruto do trabalho colaborativo entre os integrantes do PETMAT, relacionados a seguir, aos quais registro os meus agradecimentos e os meus parabéns pela conclusão deste texto, em equipe.

Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues  
tutora do PETMAT UnB  
30 de junho de 2022

PETianos que participaram da escrita do texto

Anita Boaventura Carneiro	Ayrton Anjos Teixeira
Caio Tomás de Paula	Davi Batisaco Lírio Nunes
Herbert Luan Silva	Isadora Silva Teles
João Vitor Teixeira Moura	Jorge Lucas de Azevedo Ribeiro
Lívia Nascimento de Alencar	Matheus de Freitas Souza
Rafael de Almeida Guimarães	Railandi Sousa Assunção
Thailany Machado dos Santos	Thaís Regina Duarte Marçal

PETianos que participaram da revisão do texto

Ayrton Anjos Teixeira	Caio Tomás de Paula
Davi Batisaco Lírio Nunes	Henrique Meneses
Pedro Cusinato Loiola Lima	Rafael de Almeida Guimarães

---

## Agradecimentos

---

Deixamos registrados os nossos agradecimentos à professora Luciana Ávila pela orientação e paciência ao longo do desenvolvimento e produção deste trabalho.



---

## Introdução

---

Este texto é fruto da atividade de Pesquisa Coletiva realizada pelos integrantes do PET Matemática da Universidade de Brasília ao longo do ano de 2021. Essa atividade consiste no estudo em conjunto por todo o grupo e orientado pela tutora, professora Luciana Ávila, de um tema previamente acordado entre os integrantes.

No ano de 2021, estudamos o livro [Tikhomirov, 1991], que trata de problemas de máximos e mínimos. Mais especificamente, o grupo foi dividido em equipes de duplas e trios, com cada equipe sendo responsável por estudar um capítulo da referência e apresentar ao restante do grupo os resultados deste estudo. Sendo assim, esse material é a coletânea, por escrito, de todos esses estudos.

Frisamos que nosso texto não é autoral. O que buscamos fazer foi tornar as explicações mais claras onde fosse necessário, dando detalhes que por vezes ficaram omitidos e elaborando em partes que ficaram um pouco mais obscuras em [Tikhomirov, 1991]. Além disso, buscamos, onde fosse possível, traçar um paralelo com as técnicas de solução de problemas de máximo e mínimo do Cálculo Diferencial e Integral, o quê não é muito abordado na referência principal.

Cada capítulo trata ou de um problema específico ou de classes de problemas. O Capítulo 1 trata do chamado problema de Dido, também conhecido como problema isoperimétrico, que consiste em encontrar, entre todas as curvas fechadas de perímetro dado, a que delimita a maior área.

O Capítulo 2 explica e demonstra a lei de Snell, que decorre do fenômeno da refração da luz e dita a relação entre os ângulos de incidência e refração no momento que os raios de luz mudam de meio.

O Capítulo 3 resolve 5 problemas de otimização de natureza geométrica, relacionados a encontrar figuras geométricas de menor área e menor perímetro satisfazendo certas condições.

O Capítulo 4 se ocupa em deduzir a fórmula para resolução de equações cúbicas e em demonstrar diferentes desigualdades entre médias, que são posteriormente usadas para resolver problemas de otimização clássicos. Ao final, comparamos essas soluções com as soluções “clássicas”, que utilizam o ferramental do Cálculo Diferencial e Integral.

O Capítulo 5 resolve duas versões do chamado problema do barril de vinho de Kepler: a versão bidimensional e a versão tridimensional. É um problema interessante e de origem curiosa; sua versão bidimensional consiste em encontrar, entre todos os retângulos inscritos em uma dada circunferência, aquele de maior área. Naturalmente, sua versão

tridimensional consiste em encontrar, entre todos os paralelepípedos retângulos inscritos em uma dada esfera, aquele de maior área.

O Capítulo 6 traz uma discussão histórica acerca da cicloide e resolve o chamado problema da braquistócrona, que consiste em encontrar a equação da trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo.

O Capítulo 7 discorre acerca de um problema enunciado por Newton em sua obra *Principia Mathematica* acerca do formato de um projétil que minimize o arrasto.

O Capítulo 8 é um pouco mais “filosófico”, trazendo uma breve discussão histórica acerca da definição do conceito de função.

O Capítulo 9 se ocupa em deixar mais preciso o significado da frase “resolver um problema de máximo/mínimo”, colocando essa classe de problemas em termos mais formais.

O Capítulo 10 define algumas noções de convexidade de funções de uma variável, que são usadas em resultados sobre a existência de mínimos de funções de uma variável.

O Capítulo 11 enuncia e demonstra o famigerado princípio de Lagrange, aplicando-o ao final para resolver um problema interessante.

O Capítulo 12 resolve vários dos problemas de capítulos anteriores usando a formalização estabelecida no Capítulo 9.

Por fim, o Capítulo 13 define o conceito de funcional linear e resolve alguns problemas de extremo para esses operadores.

Desejamos uma ótima leitura!

## Lista de símbolos e notações

---

$A, B, C, \dots$	pontos no plano ou espaço
$d(A, B)$ ou $\overline{AB}$	distância (euclidiana) entre $A$ e $B$
$AB$	segmento que liga os pontos $A$ e $B$
$a, b, c, \dots$	retas ou medidas de segmentos
$\overleftrightarrow{AB}$	reta pelos pontos $A$ e $B$
$\overrightarrow{AB}$	semirreta de origem $A$ que passa por $B$
$\gamma$ ou $\mathcal{C}$	circunferência
$\gamma_{O,r}$	circunferência de centro $O$ e raio $r$
$\underline{AB}$	medida do segmento orientado $AB$
$\Delta ABC$	triângulo de vértices $A, B$ e $C$
$\square ABCD$	quadrilátero de vértices $A, B, C$ e $D$
$\angle ABC$ e $\hat{A}$	ângulo $ABC$ e ângulo em $A$
$(\angle ABC)^\circ$ ou $(\angle A)^\circ$	medida, em graus, do ângulo $ABC$ e medida, em graus, do ângulo em $A$
$\cong$	congruência
$\sim$	semelhança

---



# CAPÍTULO 1

---

## O problema de Dido

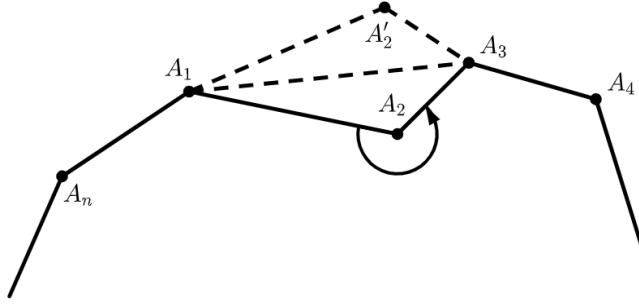
Herbert Luan e Rafael Almeida

---

Fugindo da perseguição de seu irmão, a princesa fenícia Dido partiu para oeste ao longo da costa do mediterrâneo em busca por refúgio. Um certo local na costa, que hoje é a baía de Tunis, chamou sua atenção. Dido negociou a compra de uma terra com o líder local, Yarb. Ela pediu muito pouco — tanto quanto poderia ser “cercado com a pele de um touro”. Dido persuadiu Yarb, e um acordo foi fechado. Dido então cortou a pele do touro em tiras estreitas, amarrou-as juntas e cercou uma grande extensão de terra. Nessa terra ela construiu uma fortaleza e, perto dela, a cidade de Cartago. Lá ela estava destinada a experimentar um amor não correspondido e a morte de um mártir. Esse incidente gerou a questão: quanta terra pode ser cercada por uma pele de touro? Dito de maneira mais matemática: entre todas as curvas planas fechadas de dado comprimento, qual delas determina a maior área?

Esse problema ficou conhecido como **problema de Dido** e também como **problema isoperimétrico clássico**. Vamos resolvê-lo de maneira geométrica através de alguns lemas. No que segue, usamos o termo “ $n$ -ágono máximo” para nos referirmos ao  $n$ -ágono que tem área máxima entre todos os  $n$ -águlos de mesmo perímetro.

Além disso, suponha que o ângulo  $\angle A_1A_2A_3$  do  $n$ -ágono de vértices  $A_1, A_2, \dots, A_n$  seja maior que  $180^\circ$ . Seja  $A'_2$  a imagem do vértice  $A_2$  refletido na reta  $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ . O polígono  $A_1A'_2A_3 \dots A_n$  tem uma área maior que o polígono  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  e é isoperimétrico a ele. Portanto, podemos supor que o polígono é convexo.



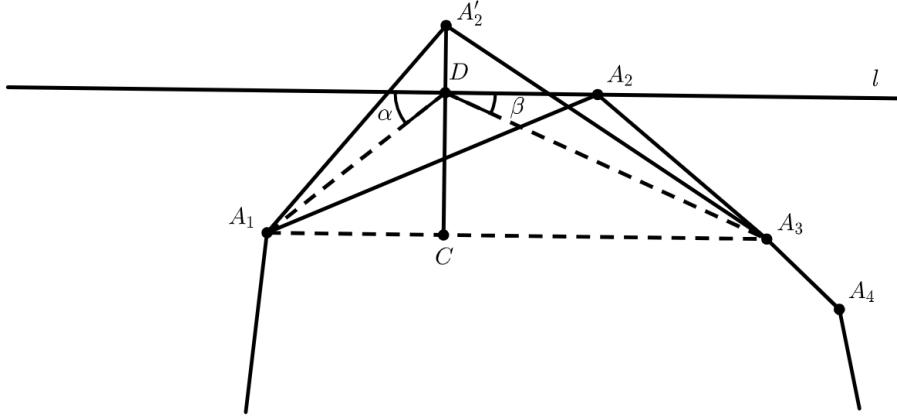
**Figura 1.1:** Ilustração do argumento de que um polígono não convexo não pode ter área máxima se comparado a um polígono convexo de mesmo perímetro.

Vamos começar mostrando que um  $n$ -ágono máximo deve ser regular através dos seguintes lemas.

**Lema 1.0.1.** Um  $n$ -ágono máximo deve ter lados iguais.

**Lema 1.0.2.** Um  $n$ -ágono máximo deve ter ângulos iguais.

*Prova do Lema 1.0.1.* Seja  $A_1A_2\dots A_n$  um  $n$ -ágono máximo. Como notado, ele é uma figura convexa. Vamos supor que nem todos os seus lados são iguais para chegarmos a uma contradição.



**Figura 1.2:** Ilustração do argumento.

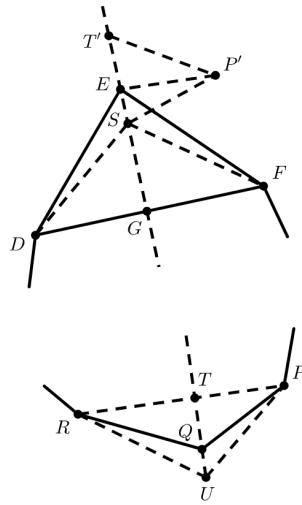
Sejam  $\overleftrightarrow{A_1A_2}$  e  $\overleftrightarrow{A_2A_3}$  dois lados adjacentes diferentes. Seja  $l$  a reta que passa por  $A_2$  e é paralela a  $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ . Agora consideremos o problema de Heron para a reta  $l$  e os pontos  $A_1$  e  $A_3$ , isto é, o problema de encontrar um ponto  $D$  em  $l$  que minimiza a soma  $\overleftrightarrow{A_1D} + \overleftrightarrow{A_3D}$ .

Sabemos que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  em  $D$  são iguais, pois como  $l \parallel \overleftrightarrow{A_1A_3}$  segue que  $D$  é precisamente a interseção da mediatrix de  $\overleftrightarrow{A_1A_3}$  com a reta  $l$  e, portanto,  $\alpha$  e  $\beta$  têm mesma medida. Ora, mas  $\alpha$  é igual ao ângulo  $\angle DA_1A_3$ , e  $\beta$  é igual ao ângulo  $\angle DA_3A_1$  pela propriedade de ângulos alternos opostos entre paralelas. Isso significa que  $\triangle A_1DA_3$  é um triângulo isósceles, portanto,  $D$  é diferente de  $A_2$ . Além disso:

1. A área do triângulo  $\triangle A_1DA_3$  é igual a área do triângulo  $\triangle A_1A_2A_3$ , pois eles têm alturas e bases iguais;
2.  $\overleftrightarrow{A_1D} + \overleftrightarrow{D A_3} < \overleftrightarrow{A_1A_2} + \overleftrightarrow{A_2A_3}$ , pois  $D \neq A_2$  é a solução para o problema de Heron.

Agora vamos construir o triângulo isósceles  $\Delta A_1 A'_2 A_3$  que satisfaz  $\overline{A_1 A'_2} + \overline{A'_2 A_3} = \overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3}$ . Sua área, com certeza, é maior do que a área do triângulo  $\Delta A_1 A_2 A_3$ , pois a altura  $\overline{A'_2}$  é maior do que a altura  $\overline{DC}$ , pelo fato que  $\overline{A_1 A'_2} > \overline{A_1 D}$ . Mas isso significa que a área do polígono  $A_1 A'_2 \dots A_n$  é maior do que a área do polígono  $A_1 A_2 \dots A_n$  isoperimétrico a ele, uma conclusão que contradiz a maximalidade da área do último polígono. Isso completa a prova do Lema 1.0.1.  $\square$

*Prova do Lema 1.0.2.* Novamente, seja  $A_1 A_2 \dots A_n$  um polígono máximo. Nós sabemos, agora, que todos os seus lados são iguais (Lema 1.0.1) e também que esse polígono é convexo. Vamos supor que nem todos os ângulos são iguais e chegar em uma contradição. Se os ângulos não são iguais, então deve haver dois ângulos ( $\alpha$  e  $\beta$ ) adjacentes diferentes. Iremos mostrar que isso implica a existência de dois ângulos não adjacentes diferentes.



**Figura 1.3:** Ilustração do argumento.

Considere os ângulos sucessivos  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$  (não menos que cinco) do polígono. Se  $\gamma \neq \alpha$  ou  $\delta \neq \beta$ , então a prova está completa, já que  $\alpha$  e  $\gamma$  (ou  $\beta$  e  $\delta$ ) são não adjacentes. Se  $\alpha = \gamma, \beta = \delta$  e  $\alpha \neq \beta$ , então nossa sequência de ângulos é escrita como  $\alpha, \beta, \alpha, \beta, \varepsilon, \dots$ , e a prova está completa, já que o primeiro e o quarto ângulo são não adjacentes.

Nós vemos que nossa suposição justifica a conclusão de que há dois triângulos  $\Delta DEF$  e  $\Delta PQR$  com interiores disjuntos. Como cada um deles é formado por sucessivos vértices do nosso  $n$ -ágono, podemos supor o ângulo  $\angle E$  é menor do que o ângulo  $\angle Q$ .

Visto que

$$\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{PQ} = \overline{QR},$$

a desigualdade dos ângulos  $\angle E$  e  $\angle F$  implica que  $\overline{DF} < \overline{PR}$ . Dos pontos  $E$  e  $Q$  baixamos as perpendiculares  $\overleftrightarrow{EG}$  e  $\overleftrightarrow{QT}$  em relação às retas  $\overleftrightarrow{DF}$  e  $\overleftrightarrow{PR}$ , respectivamente. Em seguida, estendemos o segmento  $EG$  e construímos na semirreta  $\overrightarrow{GE}$  o triângulo  $\Delta ET'P'$  congruente ao triângulo  $\Delta QTP$  ( $T'$  corresponde ao ponto  $T'$ ,  $P'$  ao ponto  $P$  e  $Q$  ao ponto  $E$ ).

Agora consideramos o problema de Heron para a reta  $\overleftrightarrow{T'G}$  e os pontos  $P'$  e  $F$ . Seja  $S$  a solução para o problema de Heron, ou seja,  $S$  é um ponto em  $\overleftrightarrow{T'G}$  tal que a soma das distâncias de  $P'$  a  $S$  e de  $S$  a  $F$  seja mínima. Como o ângulo  $\angle P'ET'$  (de medida igual à metade da medida de  $\angle Q$ ) é maior do que o ângulo  $\angle FEG$  (igual à metade do ângulo

$\angle E$ ), o ponto  $S$  não coincide com o ponto  $E$  (os ângulos  $\angle P'ST'$  e  $\angle FSG$  são iguais) e, além disso,  $S$  encontra-se no segmento  $EG$ .

Marcamos na reta  $\overleftrightarrow{QT}$  o segmento  $TU$  de mesmo comprimento que o segmento  $T'S$  e consideremos os triângulos  $\Delta DSF$  e  $\Delta PUR$ . A soma dos lados laterais desses triângulos é menor que a soma das laterais dos triângulos originais  $\Delta DEF$  e  $\Delta PQR$ . De fato,

$$\overline{DS} + \overline{SF} + \overline{PU} + \overline{UR} = 2(\overline{SF} + \overline{SP'}) < 2(\overline{FE} + \overline{EP'}) = \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{PQ} + \overline{QR},$$

onde usamos o fato de que nossos triângulos são isósceles e que  $S$  é a solução para o problema de Heron.

Por outro lado, a área do triângulo  $\Delta P'ES$  é maior do que a área do triângulo  $\Delta ESF$ , pois suas respectivas alturas são

$$\overline{P'T'} = \frac{1}{2}\overline{PR}$$

e

$$\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{DF}.$$

Além disso,  $\overline{DF} < \overline{PR}$ . Conclui-se que a soma das áreas dos triângulos  $\Delta DSF$  e  $\Delta PUR$  é maior do que a soma das áreas dos triângulos originais  $\Delta DEF$  e  $\Delta PQR$ . De fato, denotando a área do triângulo  $\Delta UVW$  por  $S(\Delta UVW)$ , nós temos:

$$\begin{aligned} S(\Delta DSF) + S(\Delta PUR) &= S(\Delta DEF) - 2S(\Delta ESF) + S(\Delta PQR) + 2S(\Delta P'ES) \\ &> S(\Delta DEF) + S(\Delta PQR) \end{aligned}$$

Isso significa que o polígono  $DSF \cdots PUR \cdots$  tem um perímetro menor e uma área maior do que o nosso polígono original  $DEF \cdots PQR \cdots$ . Agora podemos tratar qualquer triângulo ( $\Delta DSF$  ou  $\Delta PUR$ ) como tratamos o triângulo  $\Delta A_1 DA_3$  na prova do Lema 1.0.1, isto é, podemos elevá-lo para obter um polígono isoperimétrico ao polígono  $DEF \cdots PQR \cdots$ . Como a área do nosso novo polígono é maior do que a área do polígono  $DSF \cdots PUR \cdots$ , certamente é maior do que a área do polígono  $DEF \cdots PQR \cdots$ . Isso contradiz a maximalidade da área do polígono  $DEF \cdots PQR \cdots$ . Assim, completamos a prova do Lema 1.0.2.  $\square$

Mostramos que se um  $n$ -ágono máximo existe, então ele deve ser regular. Mas a pergunta “existe um  $n$ -ágono máximo?” ainda permanece, pois nem todas as funções atingem o máximo e, se não houvesse um tal  $n$ -ágono, não existiria solução para o problema de Dido. Por exemplo, a função  $f(x) = -(1+x^2)^{-1}$  não atinge o seu máximo.

Os matemáticos da antiguidade, em geral, não se preocupavam com questões de existência de soluções. Foi apenas há cerca de 100 anos que os matemáticos começaram a avaliar o significado das questões de existência e a desenvolver métodos para provar teoremas de existência. Mais tarde, teremos muitas ocasiões para lidar com essas questões.

Aqui, iremos assumir sem prova a existência de um  $n$ -ágono máximo. Assim, os Lemas 1.0.1 e 1.0.2 nos permitem concluir que

**Teorema 1.1.** Um  $n$ -ágono máximo é regular.

Agora, sejam  $P$  o perímetro de um  $n$ -ágono regular e  $S$  sua área. Sabemos que  $P = 2nR \operatorname{sen}(\pi/n)$ , onde  $R$  é o raio da circunferência circunscrita, e também que  $S = rP/2$ , onde  $r$  é o raio da circunferência inscrita. Temos também  $r = R \cos(\pi/n)$ , donde segue que

$$P^2 - 4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) S = 0.$$

O Teorema 1.1 implica que se  $P$  é o perímetro de um  $n$ -ágono arbitrário e  $S$  sua área, então

$$P^2 - 4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) S \geq 0. \quad (1.1)$$

Tomando o limite  $n \rightarrow \infty$ , usando a desigualdade  $\tan \alpha \geq 0$ , válida para  $0 < \alpha < \pi/2$ , e a desigualdade (1.1) obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^2 - 4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) S = P^2 - 4\pi S \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos(\pi/n)} \cdot \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = P^2 - 4\pi S \geq 0, \quad (1.2)$$

que vale para um  $n$ -ágono arbitrário. Notamos que, para um círculo qualquer, vale

$$P^2 - 4\pi S = 0, \quad (1.3)$$

onde  $P$  é o comprimento da circunferência do círculo e  $S$  é sua área.

Agora, vamos enunciar um lema ligando todos os conceitos envolvidos na formulação do problema isoperimétrico clássico e a noção de um  $n$ -ágono. Seu significado é que é possível aproximar o comprimento de uma curva e a área que ela determina por meio do comprimento e da área de um  $n$ -ágono, e fazer isso com precisão arbitrária.

**Lema 1.1.1.** Para toda curva plana fechada de comprimento  $P_*$  que inclui uma área  $S_*$  e para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $n$ -ágono de perímetro  $P$  e área  $S$  tal que

$$|P - P_*| \leq \varepsilon, \quad |S - S_*| \leq \varepsilon.$$

O Lema 1.1.1 e a relação (1.2) implicam que para todo  $\varepsilon > 0$  existe um polígono com perímetro  $P$  e área  $S$  tal que

$$4\pi S_* \leq 4\pi S + 4\pi\varepsilon \leq P^2 + 4\pi\varepsilon \leq (P_* + \varepsilon)^2 + 4\pi\varepsilon = P_*^2 + \varepsilon(2P_* + 4\pi + \varepsilon).$$

Ja que  $\varepsilon$  é arbitrário, chegamos na desigualdade final

$$4\pi S_* \leq P_*^2. \quad (1.4)$$

De acordo com (1.3), essa desigualdade torna-se uma igualdade para um círculo. Resumimos os resultados no seguinte teorema, que completa a solução do problema isoperimétrico.

**Teorema 1.2.** A área delimitada por uma curva fechada arbitrária de determinado comprimento não excede a área delimitada por um círculo de perímetro igual ao comprimento da curva.



# CAPÍTULO 2

---

## Refração da luz e a lei de Snell

Anita Boaventura e Davi Nunes

---

O foco deste capítulo é demonstrar a Lei de Snell. Willebrord Snellius, hoje conhecido simplesmente por Snell, mostrou que a razão entre o seno do ângulo de incidência e o seno do ângulo de refração é constante. Nós vamos demonstrá-la usando o princípio de Huygens e vamos mostrar sua relação com o princípio de Fermat.

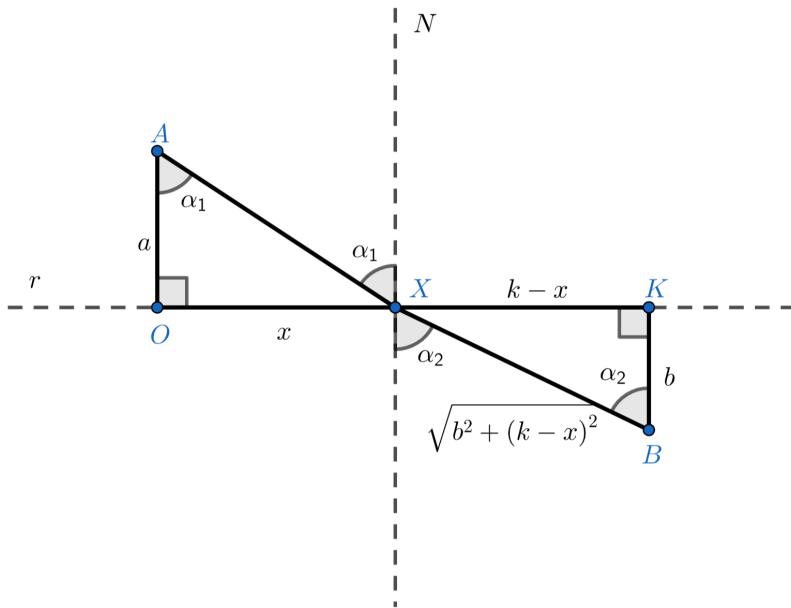
### 2.1 Princípio de Fermat

Com o objetivo de explicar a lei de refração da luz (lei de Snell), Fermat chegou em um princípio do tipo extremo, que diz: dados dois pontos  $A$  e  $B$ , a luz viaja de  $A$  até  $B$  pelo caminho que leva menos tempo.

Para demonstrar esse princípio, nós vamos buscar o mínimo da função  $T$  dada por:

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (k - x)^2}}{v_2},$$

que vem da seguinte modelagem, ilustrada abaixo.

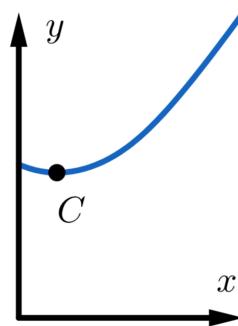


**Figura 2.1:** Configuração do problema.

Considere que  $A$  e  $B$  são pontos arbitrários que estão nos meios 1 (superior) e 2 (inferior), respectivamente. Os meios são limitados pela reta  $r$  e a luz viaja neles com velocidade  $v_1$  e  $v_2$ , nessa ordem. O feixe de luz com origem  $A$  encontra a fronteira entre os meios no ponto  $X$  e refrata. Sejam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  os ângulos de incidência e refração, respectivamente. Se  $A$  está localizado em  $(0, a)$ ,  $B$  em  $(0, b)$  e chamarmos de  $x$  o tamanho de  $\overline{OX}$ , conseguimos montar os triângulos retângulos destacados e encontrar as medidas de suas hipotenusas.

Portanto, o tempo que a luz leva para percorrer  $AX$  é  $\sqrt{a^2 + x^2}/v_1$ , enquanto que o tempo para percorrer  $XB$  é  $\sqrt{b^2 + (k-x)^2}/v_2$ . Somando ambas as frações, temos o tempo total  $T(x)$  que a luz leva para sair de  $A$  e chegar em  $B$ .

Mas estamos de fato buscando um mínimo? O que nos garante que  $T$  realmente possui um valor mínimo? Para responder essas perguntas, considere o gráfico de  $T$  a seguir.



**Figura 2.2:** Ilustração do gráfico de  $T(x)$  com o ponto de mínimo  $C$ .

Observamos que  $T$  tem um mínimo global,  $C$ , que é o ponto que queremos encontrar.

Para tanto, procedemos via técnicas do Cálculo. Note que

$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{k-x}{\sqrt{b^2 + (k-x)^2}}.$$

Observe que, pela modelagem, temos  $x = \overline{OX}$ ,  $\sqrt{a^2 + x^2} = \overline{AX}$ ,  $k - x = \overline{XK}$  e  $\sqrt{b^2 + (k-x)^2} = \overline{XB}$ . Assim, fazendo  $T'(x) = 0$ , temos

$$\frac{1}{v_1} \cdot \frac{\overline{OX}}{\overline{AX}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{\overline{XK}}{\overline{XB}} = 0.$$

Por fim, observando que

$$\frac{\overline{OX}}{\overline{AX}} = \operatorname{sen}(\alpha_1), \quad \frac{\overline{XK}}{\overline{XB}} = \operatorname{sen}(\alpha_2),$$

segue finalmente a lei de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{v_1} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{v_2} = 0 \iff \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Dito de outro modo, o ponto que minimiza o tempo que a luz leva para viajar de  $A$  até  $B$  é o ponto tal que a lei de Snell é satisfeita.

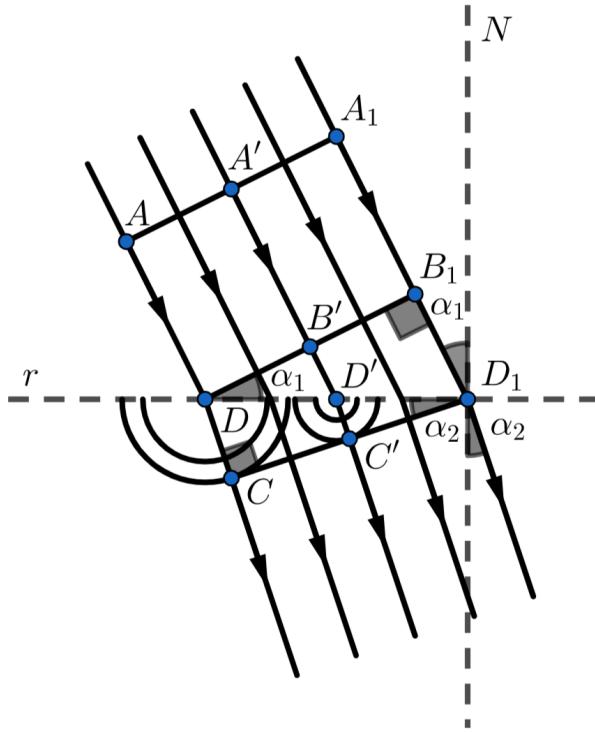
## 2.2 Princípio de Huygens

Vamos usar agora o princípio de Huygens para deduzir a lei de Snell. Para tanto, precisamos falar sobre frente de onda e sobre o princípio de Huygens.

Uma frente de onda é a região do espaço que reúne todos os pontos da onda que estão no mesmo estado de vibração. Esses pontos possuem duas propriedades especiais:

- os feixes de luz são perpendiculares à frente de onda;
- eles satisfazem o princípio de Huygens.

Esse princípio nos diz que cada ponto de uma frente de onda se torna uma fonte secundária. Com isso, obtemos um família de frentes de onda e a nova frente de onda é a superfície tangente a todas as frentes de onda secundárias.



**Figura 2.3:** Raios de luz e frentes de onda.

Inicialmente, vamos considerar raios de luz paralelos vindos de cima que se propagam através de dois meios homogêneos e vamos supor que  $l$  é um plano horizontal que divide esses dois meios. Denotaremos a velocidade no meio superior por  $v_1$  e a velocidade no meio inferior por  $v_2$ . Na figura acima,  $\alpha_1$  é o ângulo de incidência e  $\alpha_2$  é o ângulo de refração.

Para provar a lei de Snell, vamos analisar a frente de onda  $A_1A'A$ . Ela está se movendo com velocidade  $v_1$  e no instante  $t$  ela alcança a fronteira  $l$  no ponto  $D$ . A frente de onda continua se movendo e alcança o ponto  $D_1$  no instante:

$$t_1 = t + \frac{\overline{B_1 D_1}}{v_1} = t + \frac{\overline{D D_1} \operatorname{sen}(\alpha_1)}{v_1}.$$

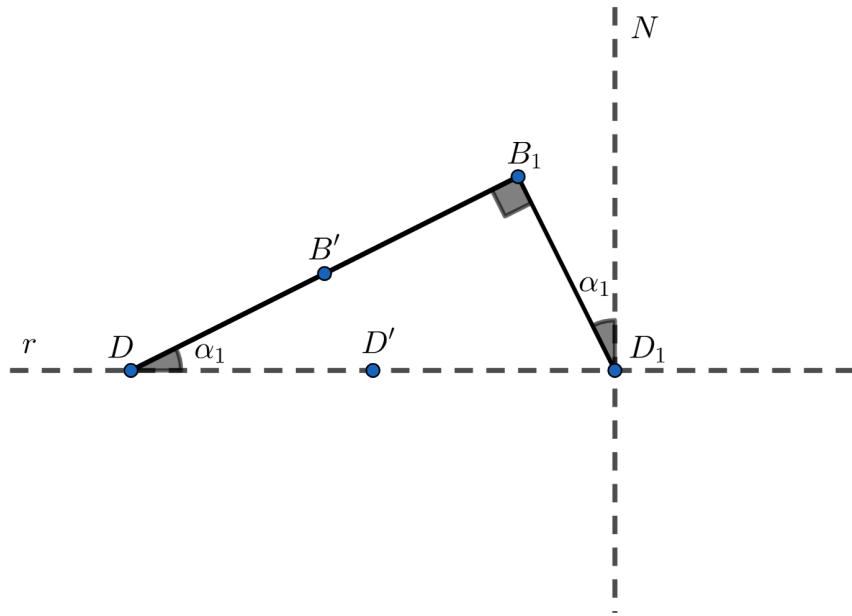
De fato, usando a fórmula da velocidade, temos que

$$v_1 = \frac{\Delta S}{t_1 - t} \iff t_1 = t + \frac{\Delta S}{v_1}$$

Também podemos observar que no intervalo  $t_1 - t$ , o deslocamento é  $\Delta S = \overline{B_1 D_1}$ . Logo,

$$t_1 = t + \frac{\overline{B_1 D_1}}{v_1}.$$

Agora, considere o triângulo  $\Delta DB_1D_1$ , ilustrado abaixo.

**Figura 2.4:** Ilustração do triângulo.

Sabemos que o ângulo de incidência é  $\alpha_1$ , ou seja,  $\angle B_1 D_1 D = \pi/2 - \alpha_1$  e  $k = \alpha_1$ . Observando a figura, podemos deduzir que:

$$\operatorname{sen} \alpha_1 = \frac{\overline{B_1 D_1}}{\overline{D D_1}} \implies \overline{B_1 D_1} = \overline{D D_1} \operatorname{sen} \alpha_1$$

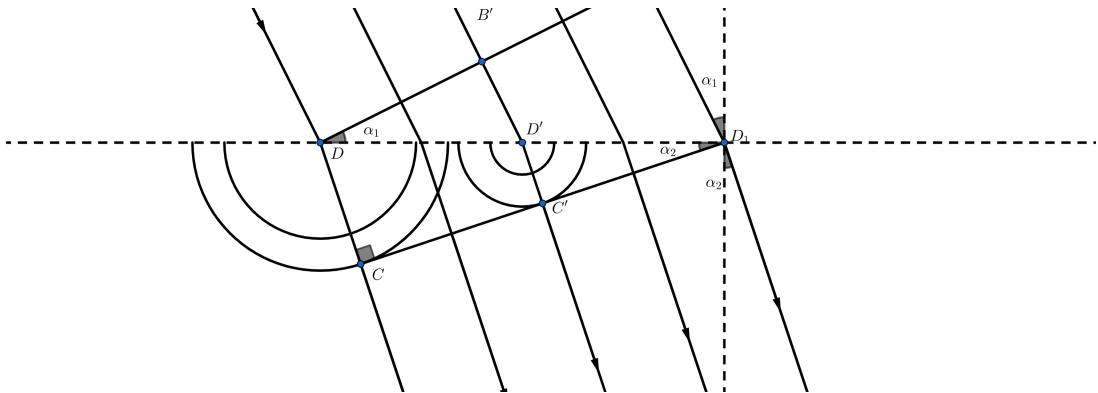
Substituindo, temos:

$$t_1 = t + \frac{\overline{B_1 D_1}}{v_1} = t + \frac{\overline{D D_1} \operatorname{sen} \alpha_1}{v_1}$$

Essa frente de onda alcança o ponto  $D'$ , que é um ponto intermediário entre  $D$  e  $D_1$ , no instante  $t'$ . Analogamente ao processo realizado anteriormente, podemos mostrar que

$$t' = t + \frac{\overline{D D'} \operatorname{sen} \alpha_1}{v_1}.$$

Verificaremos agora o que acontece no segundo meio. Pelo princípio de Huygens, os pontos  $D$  e  $D'$  são fontes secundárias de luz. Vamos analisar as ondas esféricas originadas nesses pontos.

**Figura 2.5:** Ondas esféricas no segundo meio.

No instante  $t_1$ , a onda com origem em  $D$  tem raio  $r_1$ . Se observarmos a figura acima, vemos que  $r_1 = \overline{CD}$ . Sabendo que  $\Delta S = \Delta v \Delta t$  e considerando  $\Delta v = v_2$ , porque estamos no segundo meio,  $\Delta t = t_1 - t$  e  $\Delta S = \overline{CD} = r_1$ , temos:

$$r_1 = v_2(t_1 - t).$$

Pela fórmula do  $t_1$  encontrada anteriormente, temos:

$$t_1 = t + \frac{\overline{DD_1} \operatorname{sen} \alpha_1}{v_1} \implies (t_1 - t) = \frac{\overline{DD_1} \operatorname{sen} \alpha_1}{v_1}.$$

Substituindo na fórmula de  $r_1$  encontramos:

$$r_1 = v_2(t_1 - t) = \overline{DD_1} \operatorname{sen} \alpha_1 \frac{v_2}{v_1}.$$

No instante  $t_1$ , a onda que tem origem em  $D'$  tem raio igual a  $r'$ . Para encontrar sua fórmula fazemos o mesmo processo, utilizando  $\Delta t = t_1 - t'$ ,  $\Delta S = \overline{C'D'} = r'$  e obtendo

$$r' = \overline{D'D_1} \operatorname{sen} \alpha_1 \frac{v_2}{v_1}.$$

Vamos observar agora os triângulos  $\Delta DD_1C$  e  $\Delta D'D_1C'$ . Pela imagem, concluímos que os ângulos  $\angle DD_1C$  e  $\angle D'D_1C$  são iguais a  $\alpha_2$ . A partir disso, podemos verificar que as tangentes  $D_1C$  e  $D_1C'$  das esferas coincidem. Isso significa que todas as ondas secundárias são tangentes à reta  $\overleftrightarrow{CD_1}$  no instante  $t_1$ , uma das propriedades de frente de onda. Essa reta forma um ângulo  $\alpha_2$  com o plano  $l$ .

Para concluir que  $p = \alpha_2$ , vamos chamar o ângulo entre eles de  $x$ . Note que  $x + \alpha_2 = \pi$ , pela da propriedade citada acima. Note também que  $p + x = \pi$ , logo  $p = \alpha_2$ .

Com os triângulos  $DD_1C$  e  $D'D_1C'$  conseguimos encontrar duas fórmulas para  $\operatorname{sen} \alpha_2$ .

$$\operatorname{sen} \alpha_2 = \frac{\overline{CD}}{\overline{DD_1}} = \frac{r_1}{\overline{DD_1}}$$

e

$$\operatorname{sen} \alpha_2 = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{D'D_1}} = \frac{r'}{\overline{D'D_1}}.$$

Voltando para as equações de  $r'$  e  $r_1$ , obtemos

$$\frac{r'}{\overline{D'D_1}} = \operatorname{sen} \alpha_1 \cdot \frac{v_2}{v_1}, \quad \frac{r_1}{\overline{DD_1}} = \operatorname{sen} \alpha_1 \cdot \frac{v_2}{v_1}.$$

Igualando as duas equações, temos

$$\operatorname{sen} \alpha_2 = \operatorname{sen} \alpha_1 \frac{v_2}{v_1} \implies \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

obtendo a lei de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

# CAPÍTULO 3

## Máximos e mínimos em Geometria

Ayrton Anjos e João Vítor

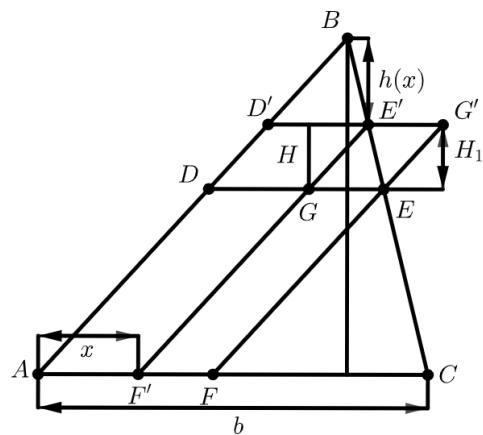
Neste capítulo, vamos resolver alguns problemas de máximo e mínimo que são de natureza geométrica. Por simplicidade, denotaremos:

- triângulos e ângulos congruentes pelo símbolo  $\cong$ ;
- triângulos semelhantes por  $\sim$ ;
- área de uma figura plana  $A$  por  $S(A)$ ;
- comprimento do segmento  $AB$  por  $\overline{AB}$ .

### 3.1 Problema de Euclides

Começamos com o seguinte problema:

**Problema 3.1** (Euclides). Dado um triângulo  $\Delta ABC$  qualquer, inscreva um paralelogramo  $ADEF$ , sendo  $EF \parallel AB$  e  $DE \parallel AC$ , de área máxima.



**Figura 3.1:** Ilustração do problema de Euclides.

Este problema é o único problema de máximo presente no livro *Os Elementos*, de Euclides. A solução apresentada aqui é a mesma que há no livro, apenas com uma linguagem e notação mais modernas. Provaremos que o que caracteriza o paralelogramo procurado é o fato de que os vértices  $D, E$  e  $F$  são pontos médios dos lados do triângulo  $\Delta ABC$ .

*Solução.* Seja  $AD'E'F'$  um paralelogramo inscrito em  $\Delta ABC$  distinto de  $ADEF$ . Sejam também  $G'$  a interseção entre as semirretas  $\overrightarrow{D'E'}$  e  $\overrightarrow{F'E}$  e  $G$  a interseção entre as semirretas  $\overrightarrow{DE}$  e  $\overrightarrow{F'E'}$ . Mostraremos que  $S(AD'E'F') = S(ADEF) - S(AD'E'F')$ . Para tanto, sejam  $H$  o comprimento da altura de  $\Delta ABC$  por  $B$ ,  $b = \overline{AC}$  e  $H_1$  o comprimento da altura de  $\Delta GE'E$  por  $E'$ . Como os triângulos  $\Delta ABC \sim \Delta GE'E$ , temos que:

$$\frac{H_1}{\overline{GE}} = \frac{H}{b} \iff \frac{H_1}{H/2} = \frac{\overline{GE}}{b/2}.$$

Dessa relação, segue que  $S(D'G'ED) = S(EGF'F)$ , o que implica que

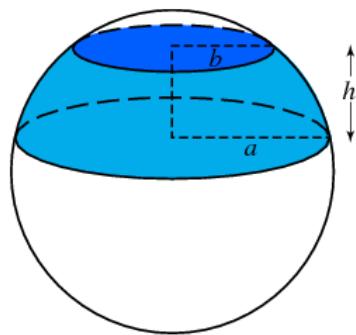
$$S(ADEF) = S(AD'G'EGF) = S(AD'E'F') + S(EG'E'G),$$

resolvendo o problema.  $\square$

## 3.2 Problema de Arquimedes

Para darmos sequência com o nosso segundo problema, precisamos antes definir o que vem a ser um segmento esférico.

**Definição 3.1.** Chamaremos de segmento esférico o sólido obtido ao intersectar uma esfera com um par de planos paralelos, como ilustrado abaixo.



**Figura 3.2:** Ilustração, em azul, de um segmento esférico.

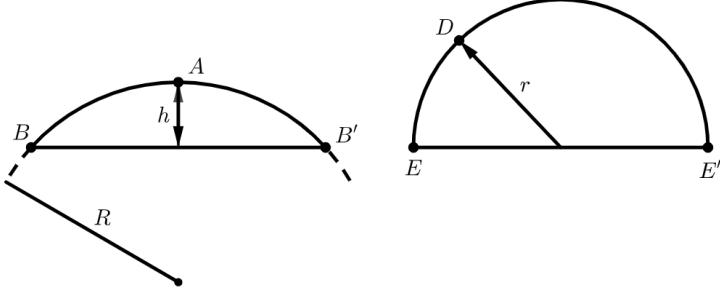
Arquimedes, no seu trabalho *On the sphere and cylinder*, propõe e soluciona o problema:

**Problema 3.2** (Problema de Arquimedes). Entre todos os segmentos esféricos de mesma área, encontre o que possui maior volume.

Aqui, mostraremos a solução apresentada por Arquimedes, apenas com uma linguagem algébrica atual. Para manter uma fidelidade maior com a solução original do matemático grego, daremos uma segunda demonstração utilizando uma linguagem mais geométrica e mais próxima da original.

A primeira demonstração se baseia na seguinte proposição.

**Proposição 3.1.** Considere uma esfera de raio  $R$  e um segmento esférico de volume  $V$ , denotado por  $BAB'$ . Considere também um hemisfério  $EDE'$  de raio  $r$  que possui volume  $V'$ . Se  $BAB'$  e  $EDE'$  possuem a mesma área, então  $V' > V$ .



**Figura 3.3:** Ilustração da Proposição 3.1.

*Demonstração.* Seja  $h$  a altura do segmento esférico, de modo que  $V = \pi h^2(R - h/3)$ . Por outro lado,  $V' = 2\pi r^3/3$ . Por hipótese, temos:

$$2\pi Rh = 2\pi r^2 \iff Rh = r^2.$$

Agora provaremos a seguinte desigualdade:

$$(2R - r)r > (2R - h)h, \quad h \neq R.$$

Suponha  $h < R$ . Então

$$\begin{aligned} R^2 > r^2 = Rh > h^2 &\implies r > h, R > h \\ &\implies R - r < R - h \\ &\implies R^2 - (R - r)^2 > R^2 - (R - h)^2 \\ &\implies (2R - r)r > (2R - h)h. \end{aligned}$$

Suponha agora  $h > R$ . Então

$$\begin{aligned} r^2 &= Rh < h^2, \\ r^2 &= Rh > R^2. \end{aligned}$$

Logo,  $h > r > R$  e, daí,

$$\begin{aligned} r - R < h - R &\implies R^2 - (R - r)^2 > R^2 - (R - h)^2 \\ &\implies (2R - r)r > (2R - h)h \end{aligned}$$

Multiplicando (3.1) por  $\pi h/3$  e usando que  $r^2 = Rh$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\pi h}{3}(2R - r)r &> \frac{\pi h}{3}(2R - h)h \\ \frac{\pi h}{3}2Rr - \frac{\pi h}{3}r^2 &> \frac{\pi h^2}{3}(2R - h) \\ \frac{\pi r^2}{3}2r &> \frac{\pi h^2}{3}(2R - h) + \frac{\pi h}{3}Rh \\ \frac{2\pi}{3}r^3 &> \frac{\pi h^2}{3}(3R - r) = \pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right). \end{aligned}$$

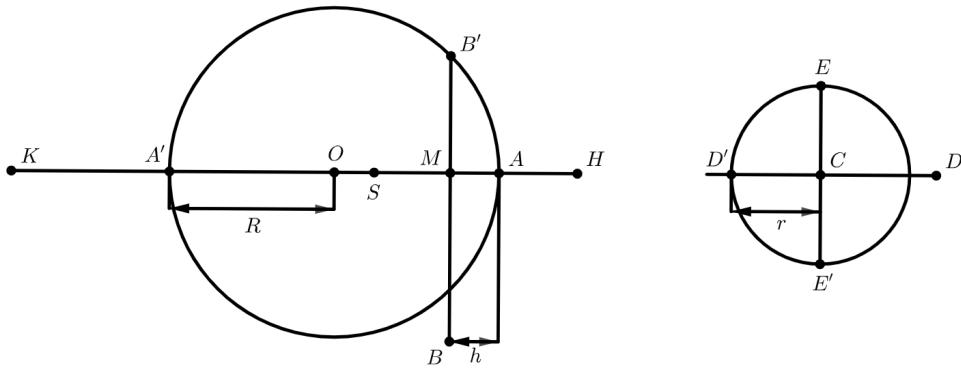
Daí,

$$V' = \frac{2\pi}{3}r^3 > \pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right) = V,$$

e está demonstrado o resultado.  $\square$

Essa proposição nos permite concluir, então, que entre todos os segmentos esféricos de mesma área, o hemisfério é o de maior volume, resolvendo o problema.

*Segunda demonstração.* Para a segunda demonstração, considere os mesmos elementos definidos anteriormente e sejam  $O$  o centro da esfera de raio  $R$ ,  $C$  o centro da esfera de raio  $r$ ,  $A'$  o ponto antípoda de  $A$ ,  $D'$  o ponto antípoda de  $D$  e  $M$  a interseção de  $AA'$  e  $BB'$ .



**Figura 3.4:** Ilustração da segunda demonstração do problema de Arquimedes.

Tome  $H \in \overrightarrow{OA}$  tal que o cone de altura  $\overline{MH}$  e raio  $\overline{MB}$  tenha volume  $V$  e tome  $K \in \overrightarrow{AA'}$  tal que  $\overline{KA'} = R$ . Pela escolha de  $H$  e  $K$ , temos

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} \overline{MH} \cdot \overline{MB}^2 \\ &= \frac{\pi}{3} \overline{MH} \cdot \overline{MA'} \cdot \overline{AM} \\ &= \frac{\pi}{3} \overline{KM} \cdot \overline{AM}^2, \end{aligned}$$

onde obtemos a seguinte relação

$$\frac{\overline{MH}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{KM}}{\overline{A'M}}. \quad (3.1)$$

Temos também  $\overline{ED} = r\sqrt{2}$  e  $\overline{AB}^2 = \overline{AA'} \cdot \overline{AM}$ . Daí, considerando a igualdade das áreas,  $2\pi Rh = 2\pi r^2$ , segue que

$$\overline{AB} = \overline{ED}, \quad (3.2)$$

já que

$$\pi \overline{AB}^2 = \pi \overline{AA'} \cdot \overline{AM} = \pi 2Rh = 2\pi r^2 = \pi \overline{ED}^2.$$

Considere agora  $S \in \overrightarrow{AA'}$  tal que  $\overline{AS} = \overline{CD}$ . Aqui, Arquimedes usou o fato de que “entre dois retângulos de mesmo perímetro, o que possui maior área é aquele com menor lado maior” para justificar que

$$\overline{A'S} \cdot \overline{AS} > \overline{A'M} \cdot \overline{AM}. \quad (3.3)$$

Da igualdade entre as áreas, segue que  $\overline{AM} \cdot \overline{A'K} = \overline{CD}^2 = \overline{AS}^2$ . Por (3.3), segue que

$$\overline{AA'} \cdot \overline{AS} > \overline{KM} \cdot \overline{AM}.$$

De fato, temos  $\overline{AA'} = \overline{A'S} + \overline{AS}$ . Daí,

$$\begin{aligned} \overline{AA'} \cdot \overline{AS} &> \overline{A'M} \cdot \overline{AM} + \overline{AM} \cdot \overline{A'K} = \overline{AM} \cdot (\overline{A'M} + \overline{A'K}) \\ &= \overline{AM} \cdot \overline{KM}. \end{aligned}$$

Por fim, temos

$$\begin{aligned} \overline{KM} \cdot \overline{AM}^2 &= \overline{HM} \cdot \overline{MB}^2 \\ \overline{ED}^2 &= \overline{A'A} \cdot \overline{AM} \\ \overline{AS} \cdot \overline{AA'} \cdot \overline{AM} &> \overline{KM} \cdot \overline{AM}^2 \\ \overline{AS} &= \overline{CD} \end{aligned}$$

e, daí,

$$\frac{\pi}{3} \overline{CD} \cdot \overline{ED}^2 = \frac{\pi}{3} \overline{AS} \cdot \overline{A'A} \cdot \overline{AM} > \frac{\pi}{3} \overline{KM} \cdot \overline{AM}^2 = \frac{\pi}{3} \overline{HM} \cdot \overline{MB}^2,$$

ou seja,  $V' > V$ . □

### 3.3 Problema de Steiner

Passamos agora para um segundo problema:

**Problema 3.3** (Steiner). No plano de um triângulo, determine um ponto tal que a soma das distâncias desse ponto aos vértices do triângulo é mínima.

Esse problema faz parte de uma série de problemas estudados pelo matemático Jakob Steiner. Por isso, o chamamos de *problema de Steiner*. A solução será dada em duas partes: a primeira contemplará triângulos cujos ângulos internos não excedem  $120^\circ$  e a segunda, triângulos que possuem um ângulo interno cuja medida é maior ou igual a  $120^\circ$ .

#### Primeiro caso

Para o primeiro caso, precisaremos de dois lemas preliminares para resolver o problema.

**Lema 3.0.1** (Ponto de Torricelli). Dado um triângulo  $\Delta ABC$  com todos os ângulos internos menores que  $120^\circ$ , existe  $P$  no interior de  $\Delta ABC$  tal que  $\angle APC = \angle APB = \angle BPC = 120^\circ$ , chamado *ponto de Torricelli* ou *ponto de Fermat*.

*Demonstração.* Veja *College Geometry - David C. Kay* páginas 391-392. □

**Lema 3.0.2.** Se  $\Delta ABC$  é tal que seu ponto de Torricelli  $P$  está no exterior do triângulo, então  $P$  não é solução do problema de Steiner.

*Demonstração.* Suponha que  $P$  está no interior de  $\angle BAC$ . Então o segmento  $PA$  intercepta o segmento  $BC$  em um ponto  $D$  e, utilizando a desigualdade triangular, vemos que a soma das distâncias de  $D$  aos vértices de  $\Delta ABC$  é menor que a soma das distâncias de  $P$  aos vértices de  $\Delta ABC$ , logo  $P$  não soluciona o problema de Steiner. Os casos em que  $P$  está no interior de  $\angle ACB$  ou no interior de  $\angle CBA$  são análogos.

Agora, suponha que  $P \in \overrightarrow{AC}$ . Utilizando a desigualdade triangular, temos que a soma das distâncias de  $C$  aos vértices de  $\Delta ABC$  é maior que a soma das distâncias de  $P$  aos vértices de  $\Delta ABC$ . Assim,  $P$  não soluciona o problema de Steiner. Os casos em que  $P$  está em alguma das outras semirretas determinadas por  $A, B, C$  são análogos e deixados para o leitor.  $\square$

Agora podemos solucionar o primeiro caso do problema de Steiner.

**Proposição 3.2.** Seja  $\Delta ABC$  um triângulo tal que nenhum de seus ângulos internos excede  $120^\circ$ . Então o ponto que soluciona o problema de Steiner é o ponto de Torricelli.

*Demonstração.* O triângulo  $\Delta ABC$  não pode ter todos os ângulos menores que  $60^\circ$ , pois desse modo teríamos  $180^\circ = \angle A + \angle B + \angle C < 180^\circ$ . Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que  $\angle C \geq 60^\circ$ . Rotacionando  $\Delta ABC$  em torno de  $C$  por  $60^\circ$ , obtemos o triângulo  $\Delta A'B'C$ , onde  $A'$  e  $B'$  são as imagens de  $A$  e  $B$  pela rotação, respectivamente. Sejam  $D$  um ponto qualquer no interior de  $\Delta ABC$  e  $D'$  sua imagem pela mesma rotação acima. Como rotações preservam distâncias, temos que

$$\overline{AD} + \overline{DB} + \overline{DC} = \overline{DB} + \overline{DD'} + \overline{D'A'},$$

ou seja, a soma das distâncias de  $D$  aos vértices de  $\Delta ABC$  é o comprimento da poligonal  $BDD'A'$ , que será mínimo quando essa poligonal for um segmento de reta. Afirmamos que se  $\hat{D}$  é o ponto de Torricelli de  $\Delta ABC$ , então  $B\hat{D}\hat{D}'A'$  é um segmento de reta. De fato, como  $\angle B\hat{D}C = 120^\circ$ , então  $\hat{D}'$  vai estar sobre a reta  $B\hat{D}$ . Além disso, como rotações preservam ângulos,  $\hat{D}'$  é o ponto de Torricelli de  $\Delta A'B'C$  e, de forma análoga  $A'$ ,  $\hat{D}'$  e  $\hat{D}$  são colineares.  $\square$

## Segundo caso

Para demonstrar este caso, usaremos a proposição abaixo, que utiliza coordenadas cartesianas e algumas propriedades do produto interno de vetores.

**Proposição 3.3.** Seja  $\Delta ABC$  um triângulo com  $\angle C \geq 120^\circ$ . Então  $C$  é solução do problema de Steiner.

*Demonstração.* Fixe coordenadas cartesianas tais que  $C$  seja a origem. Sejam  $a = \overrightarrow{CA}$ ,  $b = \overrightarrow{CB}$  e  $x = \overrightarrow{CX}$  vetores com  $X \neq C$ . Iremos mostrar que

$$|a| + |b| < |a - x| + |b - x| + |x|,$$

ou seja, que a soma das distâncias de qualquer ponto aos vértices de  $\Delta ABC$  é maior que a soma das distâncias de  $C$  aos vértices de  $\Delta ABC$ . Para tanto, defina  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  vetores

unitários nas direções de  $a$  e de  $b$ , respectivamente. Defina também  $v = -(\hat{a} + \hat{b})$ . Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|a| = \langle a, \hat{a} \rangle = \langle a - x, \hat{a} \rangle + \langle x, \hat{a} \rangle < |a - x| + \langle x, \hat{a} \rangle,$$

onde vale a desigualdade estrita pois podemos desconsiderar o caso em que  $X$  é colinear com  $A$  e  $C$ . Analogamente,

$$|b| \leq |b - x| + \langle x, \hat{b} \rangle.$$

Ademais, note que

$$|v|^2 = |\hat{a} + \hat{b}|^2 = \langle \hat{a}, \hat{a} \rangle + 2\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle + \langle \hat{b}, \hat{b} \rangle = 2 + 2|\hat{a}| \cdot |\hat{b}| \cos \alpha.$$

Por hipótese,  $\alpha \geq 120^\circ$  e, portanto,  $\cos \alpha \leq -1/2$ . Daí,  $|v| \leq 1$  e, dessa forma,

$$0 = \langle 0, v \rangle = \langle -x, v \rangle + \langle x, v \rangle = |x| \cdot |v| \cos \beta + \langle x, v \rangle \leq |x| + \langle x, v \rangle.$$

Por fim,

$$\begin{aligned} |a| + |b| &< |a - x| + \langle x, \hat{a} \rangle + |b - x| + \langle x, \hat{b} \rangle + |x| + \langle x, v \rangle \\ &\leq |a - x| + |b - x| + |x| + \langle x, \hat{a} + \hat{b} + v \rangle. \end{aligned}$$

Como  $v = -(\hat{a} + \hat{b})$ , o resultado segue.  $\square$

## 3.4 O problema da menor área

Consideramos agora um terceiro problema:

**Problema 3.4.** Dado um ângulo e um ponto em seu interior, traçar uma reta pelo ponto dado cuja interseção com o ângulo forma um triângulo de área mínima.

Para resolvê-lo, mostraremos que a reta procurada é tal que seu segmento no interior do ângulo é dividido pela metade pelo ponto dado.

*Demonstração.* Seja  $\theta$  o ângulo formado pelos segmentos  $AB$  e  $AC$ . Além disso, seja  $M$  o ponto dado do interior de  $\theta$ . Primeiramente, tome  $A' \in \overrightarrow{AM}$  tal que  $\overline{A'M} = \overline{AM}$ . Além disso, seja  $s \parallel \overleftrightarrow{AC}$  por  $A'$ . Sejam  $D$  o ponto de interseção entre  $s$  e  $\overline{AB}$  e  $\overline{DE}$  o segmento que liga  $D$  a  $M$  e intersecta  $\overline{AC}$  num determinado ponto  $E$ . O segmento  $DE$  é tal que  $\overline{DM} = \overline{ME}$ , pois  $\Delta MDA' \cong \Delta MEA$ .

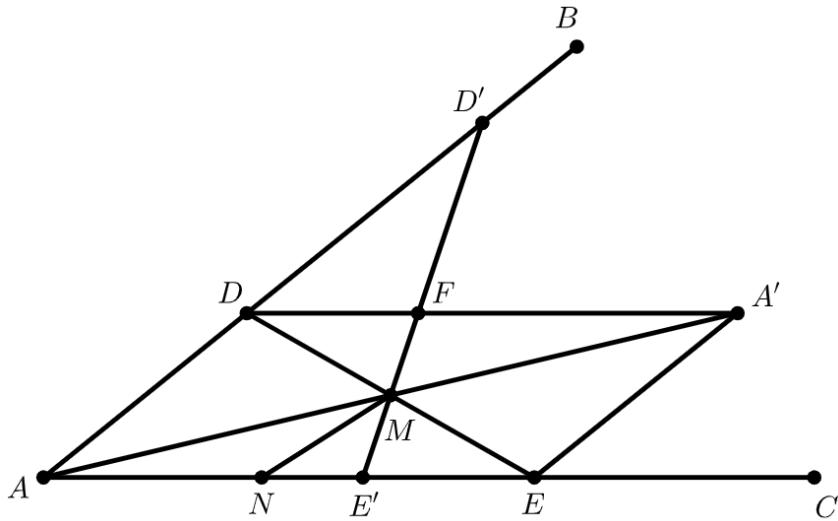
Seja  $E'$  um ponto entre  $A$  e  $E$ . Seja  $r$  a reta por  $M$  e  $E'$ , que intercepta  $\overline{AB}$  em  $D'$ . Dessa forma, temos

$$S(\Delta AE'D') = S(\Delta AED) - S(\Delta EME') + S(\Delta MDD').$$

Seja  $F$  o ponto de interseção entre  $DA'$  e  $D'E'$ . Assim, temos  $\Delta EME' \cong \Delta MDF$  são congruentes. Como o triângulo  $\Delta MDF$  está contido no triângulo  $\Delta MDD'$ , isso implica que

$$S(\Delta ADE) < S(\Delta AD'E'),$$

o que conclui a solução do problema.



**Figura 3.5:** Ilustração do problema da menor área.

□

### 3.5 O problema do menor perímetro

Por fim, consideramos o seguinte problema:

**Problema 3.5.** Dado um ângulo e um ponto em seu interior, traçar uma reta pelo ponto dado tal que a interseção com o ângulo forme um triângulo de perímetro mínimo.

Para resolvê-lo, precisaremos da definição de excírculo e também de alguns resultados envolvendo homotetias, que são transformações do plano nele mesmo que preservam ângulos.

**Definição 3.2** (Excírculo). Dado um triângulo  $\Delta BAC$ . O excírculo de  $\angle BAC$  referente ao lado  $BC$  é o círculo tangente às semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  e ao lado  $BC$ .

**Definição 3.3** (Homotetia). Sejam  $P$  um ponto e  $k > 0$ . A homotetia  $\rho_{P,k}$  é a transformação do plano nele mesmo que fixa  $P$  e leva qualquer outro ponto  $Q$  no ponto  $Q' \in \overleftrightarrow{PQ}$  tal que  $k\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ .

Também podemos definir homotetias para razões negativas, basta considerar um ponto  $Q'$  na semirreta oposta a  $\overrightarrow{PQ}$  satisfazendo  $|k|\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ . Vale ressaltar que dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  no plano, sempre existe uma homotetia que leva  $A$  em  $B$ : basta tomar  $\rho_{P,k}$  onde  $P$  é um ponto na reta  $\overleftrightarrow{AB}$  distinto de  $A$  e de  $B$  e  $k = \overline{CB}/\overline{CA}$ .

**Proposição 3.4.** Seja  $\rho_{P,k}$  uma homotetia de centro  $P$  e razão  $k > 0$ . Então  $\angle BAC$  e  $\angle B'A'C'$  são congruentes. Ou seja, homotetias preservam ângulos.

Uma consequência dessa proposição, que usaremos para resolver o problema do menor perímetro, é que homotetias preservam perpendicularismo. Agora, considere a seguinte construção, que será usada para solucionar o problema do menor perímetro.

**Construção.** Dados o ângulo  $\angle BAC$  e um ponto  $P$  em seu interior, construa uma reta  $r$  por  $P$  que determina o triângulo  $\Delta RAQ$  cujo excírculo referente ao lado  $RQ$  é tangente a  $\overrightarrow{RQ}$  em  $P$ .

**Solução.** Os passos seguintes mostram como realizar a construção desejada.

1. Tome  $E \in \overrightarrow{AC}$  e trace a perpendicular a  $\overrightarrow{AC}$  por  $E$ ;
2. tome  $F \in \overrightarrow{AB}$  tal que  $\overline{AE} = \overline{AF}$ ;
3. trace a perpendicular a  $\overrightarrow{AB}$  por  $F$  e seja  $G$  a interseção das duas perpendiculares;
4. os triângulos  $\Delta GEA$  e  $\Delta GFA$  são congruentes; em particular,  $\overline{GE} = \overline{GF}$ ;
5. a circunferência  $K$  de centro  $G$  e raio  $\overline{GE}$  é tangente a  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ ;
6. seja  $M$  a interseção de  $K$  com a reta por  $A$  e  $P$ ;
7. trace por  $M$  a reta  $s$  tangente a  $K$ . A imagem de  $s$  por uma homotetia que leva  $M$  em  $P$  é a reta desejada.

Com isso, estamos prontos para resolver o problema do menor perímetro, cuja solução será dada pela seguinte proposição.

**Proposição 3.5.** Sejam  $\angle BAC$  um ângulo,  $M$  um ponto em seu interior e  $r$  uma reta por  $M$ . Sejam  $D$  e  $E$  as interseções de  $r$  com  $\angle BAC$ . Nessas condições, a reta  $r$  que soluciona o problema de menor perímetro é aquela em que o excírculo do triângulo  $\Delta ADE$  é tangente ao lado  $DE$  no ponto  $M$ .

*Demonstração.* Seja  $r$  uma reta qualquer por  $M$ . Sejam  $E'$  e  $D'$  os pontos em que  $r$  intercepta  $\angle BAC$  nas semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , respectivamente. Defina também por  $E''$ ,  $D''$  e  $F$  os pontos em que o excírculo  $\alpha$  do triângulo  $\Delta AE'D'$  intercepta  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{E'D'}$ , respectivamente. Por fim, denote por  $X$  o centro de  $\alpha$ .

Mostraremos que  $\Delta E'FX \cong \Delta E'E''X$ . Primeiro, note que ambos compartilham o lado  $E'X$ . Pela definição de excírculo, os ângulos  $\angle E'FX$  e  $\angle E'E''X$  são retos e, portanto, congruentes. Além disso,  $FX$  e  $E''X$  são congruentes, pois são raios de  $\alpha$ , donde segue a congruência desejada. Logo,  $E'F \cong E'E''$  são congruentes e, analogamente,  $D'F \cong D''F$  congruentes. Portanto,

$$\begin{aligned}\overline{AD'} + \overline{AE'} + \overline{D'E'} &= \overline{AD'} + \overline{AE'} + \overline{D'F} + \overline{FE'} \\ &= \overline{AD'} + \overline{AE'} + \overline{D'D''} + \overline{E'E''} \\ &= \overline{AD''} + \overline{AE''}.\end{aligned}$$

Além disso,  $\overline{AD''} = \overline{AE''}$ , logo o perímetro do triângulo  $\Delta AD'E'$  é mínimo quando  $E'$  e  $D'$  estão o mais próximo possível de  $A$ , ou seja, quando  $F = M$ .  $\square$



# CAPÍTULO 4

---

## Tartaglia, cúbicas e desigualdades entre médias

Caio Tomás, Giulia Albuquerque e Railandi Assunção

---

Neste capítulo, vamos discutir e resolver alguns problemas de máximos e mínimos de natureza analítica. Para tanto, usaremos como ferramenta, além do Cálculo, desigualdades entre as médias, que serão demonstradas ao longo do texto.

### 4.1 Problema de Tartaglia

Começamos nossa discussão com o seguinte problema, proposto por Niccolo Tartaglia (1500-1557):

**Problema 4.1** (Tartaglia). Dividir o número 8 em duas partes tais que multiplicar o produto dessas partes pela diferença entre elas nos dá o maior valor possível.

Antes de discutir a solução geral, discutiremos um pouco sobre a fórmula para as raízes de uma equação cúbica por radicais. Essa discussão se mostrará muito útil na solução do problema.

### Cúbicas

O primeiro a resolver a equação

$$x^3 + px + q = 0, \quad p > 0, q < 0,$$

foi Scipione del Ferro (1465?-1526). À época, as únicas raízes admissíveis eram as positivas. As negativas e as imaginárias eram ignoradas. Apesar de ter sido o primeiro a deduzir a fórmula, del Ferro não publicou sua descoberta, mas a compartilhou com seus associados. Naquela época, “torneios matemáticos” eram bastante populares. Naturalmente, um dos iniciados no segredo de resolver equações cúbicas resolveu se aproveitar de tal segredo para prevalecer em um torneio e, se não fosse pelo fato de ter encontrado Niccolo Tartaglia, ele teria sido bem sucedido.

A tarefa de Tartaglia era resolver 30 equações cúbicas da forma acima para diferentes valores de  $p$  e  $q$ . A princípio, ele desconhecia o fato de que seu oponente sabia o segredo da solução geral, ficando ciente deste fato logo antes do prazo para apresentação das soluções dos problemas. Por meio de um tremendo esforço, Tartaglia conseguiu encontrar, sozinho, o método geral 8 dias antes do prazo. Assim como del Ferro, Tartaglia obteve a fórmula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (4.1)$$

A fórmula (4.1) nos dá uma expressão para a raiz positiva no caso de del Ferro ( $p > 0$  e  $q < 0$ ), mas também nos dá uma raiz real em outros casos (e.g., quando  $p < 0$  e  $q > 0$ , como veremos). Essa fórmula é geralmente chamada de **fórmula de Cardano** em homenagem a Girolamo Cardano (1501-1576), que foi o primeiro a publicá-la em seu livro *Ars Magna*. Antes de prosseguir à solução do problema de Tartaglia, é interessante deduzir (4.1). Abaixo segue o raciocínio proposto por Cardano.

Introduza duas variáveis  $u$  e  $v$  tais que  $u + v = t$ . Substituindo em  $t^3 + pt + q = 0$ , obtemos

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Aqui, Cardano impôs a condição  $3uv + p = 0$ , donde segue que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -p/3, \end{cases}$$

e segue que  $u^3$  e  $v^3$  são soluções de

$$(x - u^3)(x - v^3) = x^2 - (u^3 + v^3)x + (uv)^3 = 0,$$

ou seja, soluções de

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0.$$

O discriminante dessa equação é  $q^2 + \frac{4p^3}{27}$ , e as soluções reais são

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Assim, sem perda de generalidade na escolha de  $u$  e  $v$ , temos

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Por fim, como  $u + v = t$ , segue que

$$t = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Note que a fórmula de Cardano nos dá raiz real para  $4p^3 + 27q^2 \geq 0$ . Sendo assim, sempre que  $p > 0$  e  $q < 0$  a fórmula funciona e, ainda que tenhamos  $p < 0$  e  $q > 0$ , a fórmula ainda pode funcionar, dependendo dos valores de  $p$  e  $q$ .

## A solução

Retornemos, então, ao problema desejado. Sem descrever a solução, Tartaglia descreveu a resposta ao seu problema como

*“Divida 8 pela metade. O quadrado dessa metade acrescido de um terço desse quadrado é igual ao quadrado da diferença das duas partes.”*

Dito de outro modo, se  $a$  e  $b$ ,  $a > b$ , são as partes procuradas, então Tartaglia diz que

$$(a - b)^2 = (8/2)^2 + (1/3)(8/2)^2 = 64/3,$$

logo  $a - b = 8/\sqrt{3}$  e  $a = 4 + 4/\sqrt{3}$ . Veremos que Tartaglia estava, de fato, correto.

Para isso, vamos dividir  $S \in \mathbb{R}_+^*$  ao invés de 8. Façamos  $x = a - b > 0$ , de modo que

$$a = \frac{S+x}{2}, \quad b = \frac{S-x}{2},$$

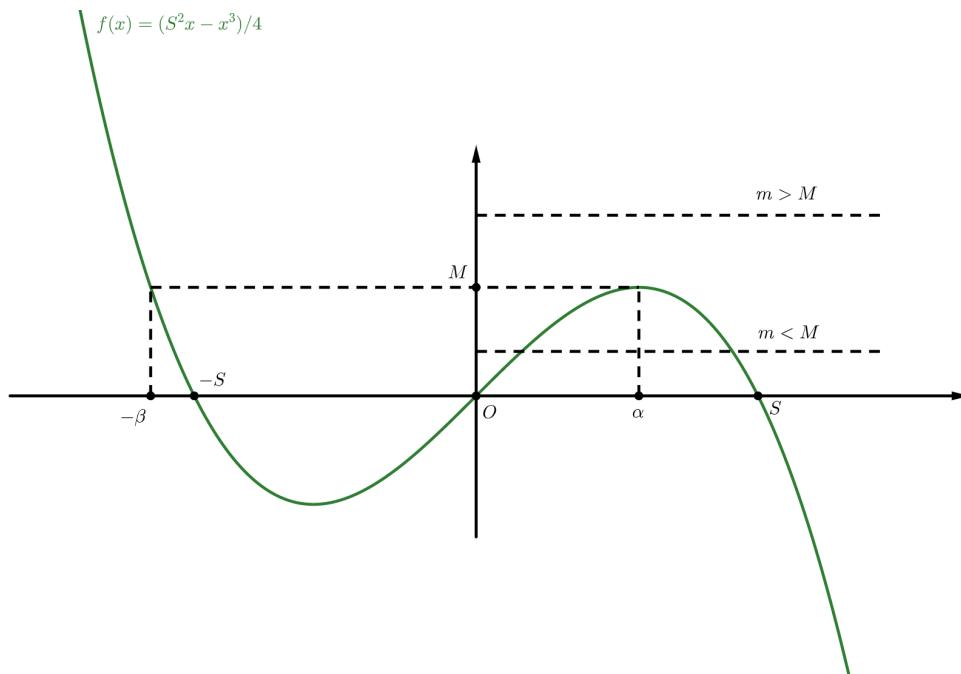
e estamos procurando o máximo  $M$  de

$$f(x) = x(S/2 + x/2)(S/2 - x/2) = (S^2x - x^3)/4, \quad x \geq 0.$$

Então, temos

$$x \left( \frac{S}{2} + \frac{x}{2} \right) \left( \frac{S}{2} - \frac{x}{2} \right) = M \iff x^3 - S^2x + 4M = 0. \quad (4.2)$$

Aqui temos  $p = -S^2 < 0$  e  $q = 4M > 0$ , e não podemos aplicar a fórmula de Cardano em (4.2). Não obstante, (4.2) tem uma raiz negativa,  $-\beta$ , e uma positiva de multiplicidade dois,  $\alpha$ , como ilustra a figura abaixo.



**Figura 4.1:** Gráfico da cúbica.

O gráfico acima mostra que a equação

$$x^3 - S^2x + 4m = 0$$

não tem raiz positiva para  $m > M$ , tem uma raiz positiva para  $m = M$  e duas para  $m < M$ . Como estamos olhando apenas para  $x > 0$ , nos interessa justamente a raiz positiva,  $\alpha$ . Podemos então escrever

$$x^3 - S^2x + 4M = (x + \beta)(x - \alpha)^2 = x^3 + (\beta - 2\alpha)x^2 + (\alpha^2 - 2\alpha\beta)x + \alpha^2\beta,$$

de modo que

$$\begin{aligned}\beta &= 2\alpha \\ p &= -S^2 = -2\alpha\beta + \alpha^2 = -3\alpha^2 \\ q &= 4M = \alpha^2\beta = 2\alpha^3.\end{aligned}$$

Mas isso implica em

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0 \iff \frac{(4M)^2}{4} = \frac{S^6}{27} \iff (2M)^2 = (S^2/3)^3$$

e a fórmula de Cardano nos dá a raiz negativa:

$$-\beta = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -2\sqrt[3]{2M} = -2\frac{S}{\sqrt{3}} \iff \beta = \frac{2S}{\sqrt{3}}.$$

Daí,

$$\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{S}{\sqrt{3}} \implies \alpha^2 = \frac{S^2}{3} = \left(\frac{S}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{S}{2}\right)^2,$$

em concordância à solução de Tartaglia para  $S = 8$ .

## 4.2 Desigualdade das médias aritmética e geométrica de dois números

Começaremos abordando uma das desigualdades mais antigas da história, que afirma que a média geométrica não excede a média aritmética. Como veremos na demonstração, neste caso, a igualdade ocorre. Desigualdades deste tipo, onde a igualdade ocorre, são chamadas exatas. Podemos enunciar este resultado de maneira formal do seguinte modo.

**Proposição 4.1.** Dados  $a, b \in \mathbb{R}_+$  quaisquer, temos

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \tag{4.3}$$

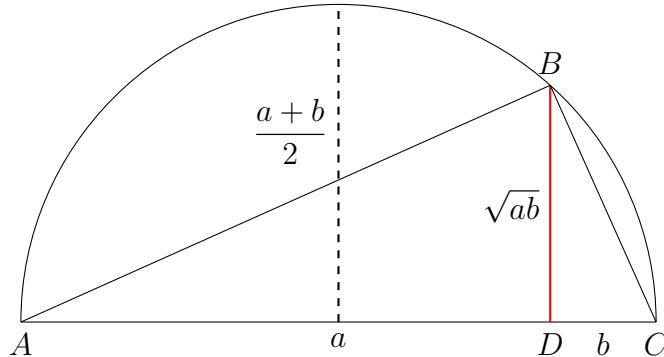
e a igualdade ocorre se, e somente se,  $a = b$ .

*Demonstração.* Provaremos este resultado de duas formas distintas.

1. A primeira maneira é puramente algébrica:

$$\begin{aligned}0 &\leq (a-b)^2 \\ \implies 2ab &\leq a^2 + b^2 \\ \implies 4ab &\leq (a+b)^2 \\ \implies \sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

2. A segunda maneira é geométrica: tomamos um segmento  $AC$ , de comprimento fixo  $a + b$ , e  $D$  entre  $A$  e  $C$  tal que  $\overline{AD} = a$  e  $\overline{DC} = b$ , como ilustrado na Figura 4.2.



**Figura 4.2:** Demonstração geométrica de (4.3).

Construímos uma semicircunferência de diâmetro  $AC$  e traçamos a perpendicular a  $\overleftrightarrow{AC}$  por  $D$ . Seja  $B$  a interseção da semicircunferência com a perpendicular. Temos, então,  $\Delta ABD$  semelhante a  $\Delta BCD$  pelo critério ângulo-ângulo, donde segue que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{ab}.$$

Assim, observando que  $\overline{BD} \leq \overline{AC}/2$ , fica demonstrada a desigualdade. Note que a igualdade ocorre se, e somente se,  $D$  é ponto médio de  $AC$ , ou seja, se, e somente se,  $a = b$ .

□

Nas aplicações que faremos de (4.3) ao longo do texto, usaremos com mais frequência a forma alternativa:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

A desigualdade (4.3) pode ser utilizada para resolver problemas de maximização como os dois a seguir.

**Problema 4.2.** Encontrar o máximo do produto de dois números  $x, y > 0$  cuja soma é constante e igual a  $S \in \mathbb{R}_+$ .

*Solução.* Note que maximizar o produto é o mesmo que maximizar a raiz do produto, já que  $x$  e  $y$  são não negativos. Logo, (4.3) nos diz

$$\sqrt{xy} \leq \frac{S}{2},$$

ou seja, que o máximo da raiz ocorre quando  $x$  e  $y$  são iguais e vale

$$\frac{x+x}{2} = x,$$

de modo que o máximo do produto é

$$\left(\frac{x+x}{2}\right)^2 = x^2,$$

ou seja, o quadrado da metade da soma.

□

**Problema 4.3.** Encontrar a maior área de um triângulo retângulo cuja soma das medidas dos catetos é constante.

*Solução.* Basta notar que a área do triângulo retângulo com catetos de medidas  $x$  e  $y$  é  $xy/2$ . Fixando  $x + y = S$ , temos, por (4.3), que

$$\frac{xy}{2} \leq \frac{S^2}{8},$$

de modo que a área é máxima quando  $x$  é igual a  $y$ , ou seja, quando o triângulo é isósceles.  $\square$

### 4.3 Desigualdade das médias aritmética e geométrica de $n$ números

Podemos generalizar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica como na proposição a seguir.

**Proposição 4.2.** Dado um conjunto  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+$  qualquer, vale

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}. \quad (4.4)$$

A igualdade ocorre se, e somente se,  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ .

*Demonstração.* Como no caso  $n = 2$ , também há várias maneiras de demonstrar a desigualdade no caso geral. Apresentaremos duas formas: a primeira, formulada por Cauchy, é considerada uma das mais bonitas; a segunda, formulada por Ellers\*, é mais sucinta e direta.

1. Para o primeiro método, começaremos provando (4.4) para  $n = 4$  e, em seguida, “desceremos” para  $n = 3$ , usando a técnica de *forward-backward induction*.

Para  $n = 4$  a desigualdade (4.4) segue se aplicarmos (4.3) como a seguir:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 &= (x_1 \cdot x_2)(x_3 \cdot x_4) \leq \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 \left( \frac{x_3 + x_4}{2} \right)^2 \\ &= \left[ \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \left( \frac{x_3 + x_4}{2} \right) \right]^2 \\ &\leq \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \right)^4. \end{aligned}$$

Usando essa desigualdade auxiliar, temos

$$\begin{aligned} (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^{1/3} &= [x_1 \cdot x_2 \cdot x_3(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^{1/3}]^{1/4} \\ &\leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + (x_1 x_2 x_3)^{1/3}}{4}, \end{aligned}$$

---

\*O autor de [Tikhomirov, 1991] cita apenas o sobrenome deste matemático. Ao que nossas pesquisas indicaram, se trata de Erich Werner Ellers, professor emérito da Universidade de Toronto.

onde segue que

$$\frac{3}{4}(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^{1/3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}$$

e, portanto,

$$\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Note que, usando o método acima, podemos provar (4.4) para todo  $n$  da forma  $2^k$ , com  $k \geq 2$ .

Para concluir a indução, suponhamos que a desigualdade seja válida para  $n = m+1$ . Por hipótese, temos

$$\begin{aligned} (x_1 \cdots x_m)^{1/m} &= [(x_1 \cdots x_m)(x_1 \cdots x_m)^{1/m}]^{1/(m+1)} \\ &\leq \frac{x_1 + \cdots + x_m + (x_1 \cdots x_m)^{1/m}}{m+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$(x_1 \cdots x_m)^{1/m} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) \leq \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m+1},$$

ou seja,

$$\sqrt[m]{x_1 \cdots x_m} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m},$$

e concluímos a demonstração.

2. O argumento de Ellers consiste em mostrar, por indução, que se

$$x_1 \cdots x_n = 1$$

com  $x_i > 0$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , então

$$x_1 + \cdots + x_n \geq n.$$

Provada esta implicação, seguirá que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq 1 = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

que é o que queremos provar. Vamos, então, mostrar a validade da implicação.

Para  $n = 1$  vale a implicação acima. Suponha que ela seja válida para  $n = m$ . Ora, então se

$$x_1 \cdots x_{m+1} = 1,$$

sabemos que há dois números no conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_{m+1}\}$  tais que um deles é maior ou igual a 1 e outro é menor ou igual a 1. Sem perda de generalidade, podemos supor que  $x_1 \geq 1$  e  $x_2 \leq 1$ . Essas duas desigualdades são equivalentes a

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0,$$

isto é,

$$x_1 x_2 + 1 \leq x_1 + x_2.$$

Com isso e usando a hipótese de indução, temos

$$x_1 + \cdots + x_{m+1} \geq 1 + x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{m+1} \geq 1 + m,$$

como queríamos.

□

Nas soluções usaremos mais frequentemente a forma equivalente de (4.4)

$$x_1 \cdots x_n \leq \left( \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^n.$$

A seguir, faremos uma interpretação geométrica de (4.4) e, em seguida, resolveremos alguns problemas relacionados.

**Interpretação geométrica.** A desigualdade (4.4) possui uma interpretação geométrica interessante. Para  $n = 2$ , (4.4) nos diz que

$$2\sqrt{x_1 x_2} \leq x_1 + x_2 \iff 4\sqrt{x_1 x_2} \leq 2(x_1 + x_2),$$

ou seja, que um retângulo de dada área tem perímetro mínimo se ele é um quadrado. Para  $n$  qualquer, (4.4) é uma generalização dessa ideia.

De fato, cada vértice de um ortotopo  $n$ -dimensional, que é a generalização de paralelepípedo reto retângulo para dimensões maiores que 3, é ligado a  $n$  arestas, com comprimentos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Como há  $2^n$  vértices, podemos estimar o número de arestas por  $n2^{n-1}$ . Mas como cada aresta liga 2 vértices, essa estimativa contará o número de arestas duas vezes. Portanto, concluímos que há  $2^{n-1}n$  arestas neste ortotopo  $n$ -dimensional. Agora, como há a mesma quantidade de arestas de cada comprimento e há  $n$  comprimentos possíveis, sabemos que há  $2^{n-1}$  arestas de cada comprimento, e a soma dos comprimentos de todas as arestas é

$$2^{n-1}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Multiplicando (4.4) por  $n2^{n-1}$ , podemos escrever

$$2^{n-1}(x_1 + \cdots + x_n) \geq n2^{n-1}\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

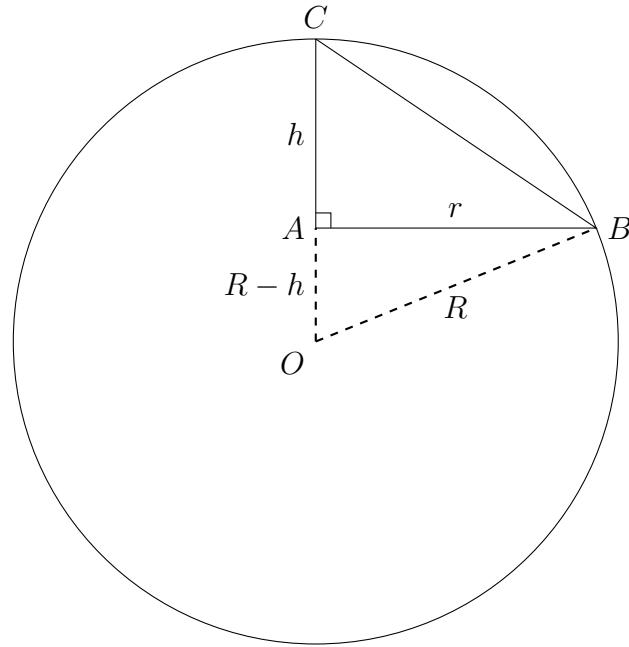
O lado esquerdo desta desigualdade é o análogo, para dimensões maiores, do perímetro em dimensão 2, enquanto que o lado direito é uma constante multiplicada pela raiz  $n$ -ésima do volume do ortotopo. Portanto, como a igualdade é válida somente quando todos os  $x_k$  são iguais, podemos concluir que entre todos os ortotopos de dimensão  $n$  com mesmo volume, o  $n$ -cubo tem a menor soma de comprimentos das arestas ligadas a cada vértice.

**Problemas.** Para terminar esta seção, vamos discutir três problemas estereométricos, isto é, envolvendo volume de sólidos, que podem ser resolvidos usando (4.4).

**Problema 4.4.** Numa dada esfera, inscrever o cone de volume máximo.

*Solução.* Sejam  $R$  o raio da esfera,  $O$  o centro da esfera,  $r$  o raio da base do cone e  $h$  a altura do cone. Aqui temos dois casos para lidar.

**Caso 1:**  $0 \leq h \leq R$ . Neste caso, a seção vertical do cone com a esfera é algo como ilustrado na figura abaixo.



**Figura 4.3:** Seção vertical do cone com a esfera no Caso 1.

Pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$R^2 = r^2 + (R - h)^2 \iff r^2 = R^2 - (R - h)^2,$$

e, substituindo na fórmula do volume  $V$  do cone, temos

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h}{3} [R^2 - (R - h)^2] = \frac{\pi h^2}{3} (2R - h).$$

Daí, usando (4.4), temos

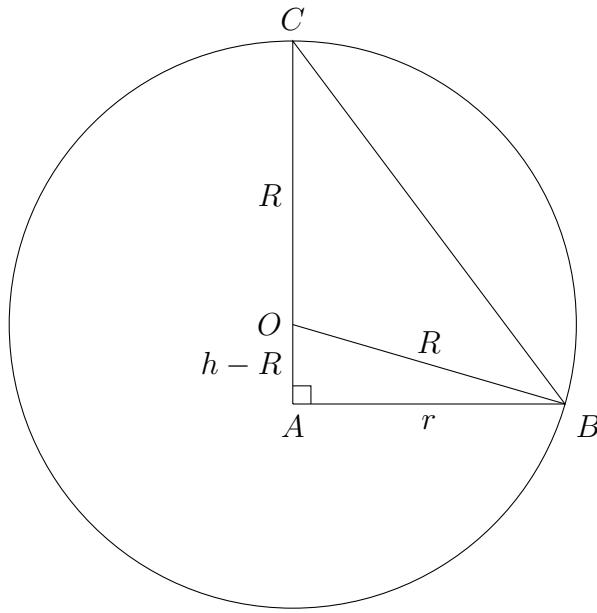
$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} (2R - h) \leq \left(\frac{2R}{3}\right)^3,$$

e a igualdade é válida quando

$$\frac{h}{2} = 2R - h \iff h = \frac{4}{3}R,$$

o que é absurdo, pois estamos supondo  $h \leq R$ . Portanto, o máximo não ocorre para  $0 \leq h \leq R$ .

**Caso 2:**  $R \leq h \leq 2R$ . Neste caso, a seção vertical do cone com a esfera é como mostrada abaixo.



**Figura 4.4:** Seção vertical do cone com a esfera no Caso 2.

Novamente pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$R^2 = r^2 + (h - R)^2 \iff r^2 = R^2 - (h - R)^2,$$

e, substituindo na fórmula do volume  $V$  do cone, temos

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h}{3} [R^2 - (h - R)^2] = \frac{\pi h^2}{3} (2R - h).$$

Usando (4.4) como no Caso 1, temos

$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} (2R - h) \leq \left(\frac{2R}{3}\right)^3,$$

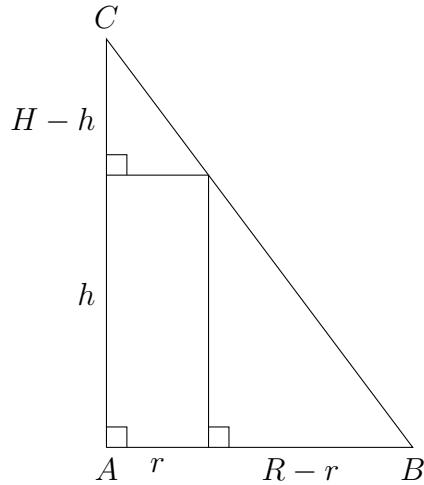
e a igualdade, novamente, ocorre quando

$$\frac{h}{2} = 2R - h \iff h = \frac{4}{3}R,$$

ou seja,  $h = (4/3)R$  maximiza  $3V/(4\pi)$  e, portanto, maximiza  $V$ .  $\square$

**Problema 4.5.** Num dado cone, inscrever o cilindro de volume máximo.

*Solução.* Sejam  $R$  o raio do cone,  $H$  a altura do cone,  $r$  o raio do cilindro e  $h$  a altura do cilindro. Observe a seção vertical do cilindro com o cone abaixo.



**Figura 4.5:** Seção vertical do cilindro com o cone.

Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H},$$

ou seja,

$$h = H \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Daí, o volume do cilindro é dado por

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{H}{R} (R-r).$$

Logo, temos

$$\frac{RV}{4\pi H} = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} (R-r) \leq \left(\frac{R}{3}\right)^3,$$

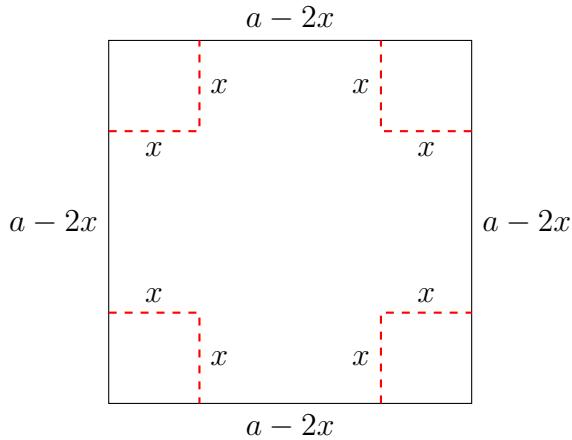
e a igualdade vale quando

$$\frac{r}{2} = R-r \iff r = \frac{2R}{3}.$$

Portanto,  $r = (2/3)R$  maximiza  $RV/(4\pi H)$  e, portanto, maximiza  $V$ .  $\square$

**Problema 4.6.** Dada uma folha quadrada  $a \times a$ , cortar quadrados congruentes nos cantos da folha de modo que a caixa (aberta) obtida dobrando as arestas tenha volume máximo.

*Solução.* Seja  $x$  a medida do lado dos quadrados retirados. Observe a Figura 4.6.



**Figura 4.6:** Quadrado de lado  $a$  com pequenos quadrados de lado  $x$  removidos.

O volume da caixa é  $V = (a - 2x)(a - 2x)x$ . Daí, temos

$$4V = (a - 2x)(a - 2x)4x \leq \left(\frac{2a}{3}\right)^3,$$

onde segue que  $V$  é máximo quando  $a - 2x = 4x$ , ou seja, quando  $x = a/6$ .  $\square$

## 4.4 Desigualdades com a média quadrática

Nesta seção, vamos demonstrar a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática e a desigualdade entre as médias geométrica e quadrática e, em seguida, aplicá-las em problemas de otimização. As desigualdades são enunciadas e demonstradas nas duas proposições a seguir.

**Proposição 4.3.** Dado um conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+$  qualquer, vale

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}. \quad (4.5)$$

A igualdade é válida se, e somente se,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

*Demonstração.* Dados  $a, b \geq 0$  quaisquer com  $a > b$ , temos que

$$0 \leq (a - b)^2 \iff 2ab \leq a^2 + b^2.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 &= \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \dots + 2x_{n-1}x_n}{n^2} \\ &\leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2}{n^2} \\ &= n \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n^2} \\ &= \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}, \end{aligned}$$

e (4.5) segue.  $\square$

**Proposição 4.4.** Dado um conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}_+$  qualquer, vale

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}. \quad (4.6)$$

A igualdade é válida se, e somente se,  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ .

*Demonstração.* Basta justapor (4.4) com (4.5):

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \stackrel{(4.4)}{\leq} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \stackrel{(4.5)}{\leq} \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

□

Com (4.6), vamos resolver os dois problemas de otimização a seguir.

**Problema 4.7.** Encontrar, entre todos os retângulos inscritos em uma dada circunferência, o de maior área.

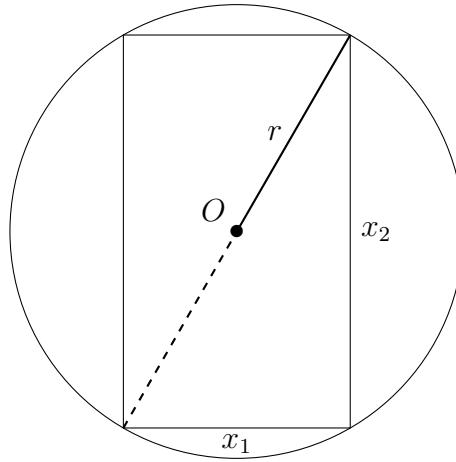
*Solução.* Usando (4.6) com  $n = 2$ , temos

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}.$$

Daí, se o retângulo tem lados  $x_1$  e  $x_2$  e está inscrito numa circunferência de raio  $r$ , então

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} = r\sqrt{2},$$

como ilustra a figura abaixo.



**Figura 4.7:** Retângulo de lados  $x_1$  e  $x_2$  inscrito na circunferência de raio  $r$ .

Portanto, a área é máxima quando  $x_1 = r\sqrt{2} = x_2$ , ou seja, quando o retângulo é um quadrado. □

**Problema 4.8.** Encontrar, dentre todos os paralelepípedos retângulos inscritos numa dada esfera, o de maior volume.

*Solução.* Podemos resolver esse problema com uma aplicação direta de (4.6). O paralelepípedo de maior volume será um cubo cujos lados têm medida  $2R/\sqrt{3}$ , sendo  $R$  o raio da esfera. De fato, sendo  $x_1, x_2, x_3$  as medidas dos lados do paralelepípedo, temos por (4.6) que

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

ou seja, o volume do paralelepípedo é máximo quando  $x_1 = x_2 = x_3$  e, nesse caso, temos

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}} = x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

□

## 4.5 Soluções usando Cálculo

Nesta seção resolveremos os problemas apresentados nas seções anteriores usando as ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral. Enunciaremos cada problema novamente antes de resolvê-lo.

**Problema 4.2.** Encontrar o máximo do produto de dois números  $x, y > 0$  cuja soma é constante e igual a  $S \in \mathbb{R}_+$ .

*Solução.* Sejam  $x$  e  $y$  os números considerados, com soma constante e igual a  $S \in \mathbb{R}_+$  fixa. Temos, então,

$$x + y = S \iff y = S - x.$$

A área do retângulo é dada por

$$f(x) = xy = x(S - x), \quad x \in [0, S].$$

Derivando e igualando a zero, temos

$$f'(x) = S - 2x = 0 \iff x = \frac{S}{2}.$$

Portanto,  $S/2$  é ponto crítico de  $f$ . Como  $f$  é contínua em  $[0, S]$  e

$$f(0) = 0 = f(S), \quad f\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{S^2}{4} > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que  $x = S/2$  maximiza  $f$ , como esperado. □

**Problema 4.3.** Encontrar a maior área de um triângulo retângulo cuja soma das medidas dos catetos é constante.

*Solução.* Sejam  $x$  e  $y$  as medidas dos catetos do triângulo, e suponhamos que  $x + y = S$ , com  $S \in \mathbb{R}_+$  fixo. A área do triângulo é dada por

$$f(x, y) = \frac{xy}{2},$$

que pode ser escrita em termos de  $x$  como

$$f(x) = \frac{x(S-x)}{2}, \quad x \in [0, S].$$

Derivando  $f$ , temos

$$f'(x) = \frac{S}{2} - x.$$

Igualando a derivada a zero, temos que  $S/2$  é ponto crítico de  $f$ . Como  $f$  é contínua em  $[0, S]$  e

$$f(0) = 0 = f(S), \quad f\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{S^2}{8} > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que  $x = S/2$  maximiza  $f$ , como esperado.  $\square$

**Problema 4.4.** Numa dada esfera, inscrever o cone de volume máximo.

*Solução.* Observando a Figura 4.4, vimos que

$$r^2 = R^2 - (h-R)^2.$$

Substituindo na fórmula do volume do cone, obtivemos

$$V(h) = \frac{\pi h^2}{3}(2R-h), \quad h \in [0, 2R],$$

ou seja, escrevemos  $V$  em função de  $h$ ; derivando, temos

$$V'(h) = \frac{2\pi h}{3}(2R-h) - \frac{\pi h^2}{3} = \frac{4\pi Rh}{3} - \pi h^2 = \pi h \left( \frac{4R}{3} - h \right).$$

Igualando a primeira derivada a zero temos que 0 e  $4R/3$  são pontos críticos de  $V$ . Como  $V$  é contínua em  $[0, 2R]$  e

$$V(0) = 0 = V(2R), \quad V\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{32\pi R^3}{81} > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que  $h = 4R/3$  maximiza a função volume, como esperado.  $\square$

**Problema 4.5.** Num dado cone, inscrever o cilindro de volume máximo.

*Solução.* Observando a Figura 4.5, foi visto que

$$h = H \left( 1 - \frac{r}{R} \right).$$

Daí, o volume do cilindro é dado, em função de  $r$ , por

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi \frac{H}{R} r^2 (R-r), \quad r \in [0, R].$$

Derivando  $V$ , temos

$$V'(r) = \pi \frac{H}{R} [2r(R-r) - r^2].$$

Igualando a derivada a zero, temos que 0 e  $2R/3$  são pontos críticos de  $V$ . Como  $V$  é contínua em  $[0, R]$  e

$$V(0) = 0 = V(R), \quad V\left(\frac{2R}{3}\right) = \frac{4\pi HR^2}{27} > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que  $r = 2R/3$  maximiza a função volume, como esperado.  $\square$

**Problema 4.6.** Dada uma folha quadrada  $a \times a$ , cortar quadrados congruentes nos cantos da folha de modo que a caixa (aberta) obtida dobrando as arestas tenha volume máximo.

*Solução.* Vimos que o volume da caixa é dado, em função de  $x$ , por

$$V(x) = x(a - 2x)^2, \quad x \in [0, a/2].$$

Derivando  $V$ , temos

$$V'(x) = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x).$$

Portanto, igualando  $V'$  a zero temos que os pontos críticos de  $V$  são  $x = a/2$  e  $x = a/6$ . Como  $V$  é contínua em  $[0, a/2]$  e

$$V(0) = 0 = V\left(\frac{a}{2}\right), \quad V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27} > 0.$$

Logo, pelo Teorema de Weierstrass, temos que  $x = a/6$  maximiza a função volume, como esperado.  $\square$

**Problema 4.7.** Encontrar, entre todos os retângulos inscritos em uma dada circunferência, o de maior área.

*Solução.* Da Figura 4.7, sabemos que

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \iff x_2 = \sqrt{4r^2 - x_1^2},$$

pois  $x_1, x_2 > 0$ . Daí, a área do retângulo é dada por

$$A(x_1) = x_1 \sqrt{4r^2 - x_1^2}, \quad x_1 \in [0, 2r].$$

Derivando, temos que

$$A'(x_1) = \sqrt{4r^2 - x_1^2} - \frac{x_1^2}{\sqrt{4r^2 - x_1^2}}.$$

Igualando a derivada a zero, obtemos que  $r\sqrt{2}$  é o ponto crítico de  $A$ . Daí, como  $A$  é contínua em  $[0, 2r]$  e

$$A(0) = 0 = A(2r), \quad A(r\sqrt{2}) = 2r^2 > 0,$$

segue do Teorema de Weierstrass que  $x_1 = r\sqrt{2}$  maximiza a área. Portanto, o retângulo de área máxima tem dimensões  $x_1 = r\sqrt{2} = x_2$ , ou seja, é um quadrado, como esperado.  $\square$

**Problema 4.8.** Encontrar, dentre todos os paralelepípedos retângulos inscritos numa dada esfera, o de maior volume.

*Solução.* Neste problema, queremos encontrar, entre todos os paralelepípedos retângulos inscritos numa dada esfera, o de maior volume. Para tanto, vamos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange. O problema então se traduz em maximizar a função

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3,$$

com a condição de que

$$g(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

sendo

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4R^2,$$

pois a diagonal do paralelepípedo retângulo é um diâmetro da esfera. Como  $x_1, x_2$  e  $x_3$  são as medidas dos lados de um paralelepípedo, vamos supor que  $x_1, x_2, x_3 > 0$ .

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, sabemos que, no ponto de máximo, temos

$$\nabla V(x_1, x_2, x_3) = \lambda \nabla g(x_1, x_2, x_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Calculando os gradientes, temos

$$\nabla V(x_1, x_2, x_3) = (x_2 x_3, x_1 x_3, x_1 x_2), \quad \nabla g(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3).$$

Portanto, no ponto de máximo temos

$$\begin{cases} x_2 x_3 = 2\lambda x_1 \\ x_1 x_3 = 2\lambda x_2 \\ x_1 x_2 = 2\lambda x_3 \end{cases} .$$

Dividindo a primeira equação pela segunda, temos

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \iff x_1^2 = x_2^2.$$

Analogamente, dividindo a segunda equação pela terceira, temos

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} \iff x_2^2 = x_3^2.$$

A condição  $g(x_1, x_2, x_3) = 0$  implica que

$$3x_1^2 = 4R^2 \implies x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

pois  $x_1 > 0$ . Logo, temos

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2R}{\sqrt{3}},$$

ou seja, o paralelepípedo retângulo que tem volume máximo é o cubo de lado  $2R/\sqrt{3}$ , como esperado.  $\square$

## 4.6 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Apresentamos aqui a desigualdade de Cauchy-Schwarz: dados  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ , vale

$$a_1b_1 + \dots + a_nb_n \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}(b_1^2 + \dots + b_n^2)^{1/2}. \quad (4.7)$$

Essa desigualdade também é exata, com a igualdade ocorrendo só se  $a_i = b_i$  para todo  $i$ . Vamos à demonstração.

*Demonstração.* Se  $b_i = 0$  para todo  $i$ , terminamos. Suponha  $b_i \neq 0$  para algum  $i$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$  arbitrário, temos

$$(a_1 + xb_1)^2 + \dots + (a_n + xb_n)^2 = ax^2 + 2bx + c,$$

com

$$a = b_1^2 + \dots + b_n^2, \quad b = a_1b_1 + \dots + a_nb_n, \quad c = a_1^2 + \dots + a_n^2.$$

Note que  $a > 0$  e que,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , vale

$$ax^2 + 2bx + c \geq 0,$$

que é equivalente a

$$b^2 - ac \leq 0 \iff (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2),$$

como queríamos mostrar.  $\square$

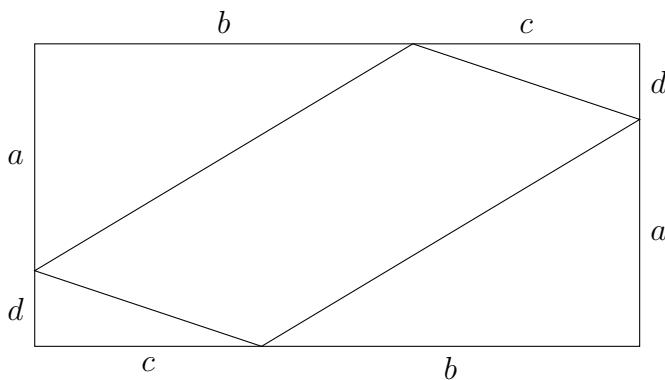
Uma demonstração geométrica interessante da desigualdade de Cauchy-Schwarz para  $n = 2$  é a seguinte.

*Demonstração geométrica.* Dado um retângulo de lados  $a+d$  e  $b+c$  e um paralelogramo inscrito que divide os lados  $a+d$  nos lados  $a$  e  $d$  e os lados  $b+c$  nos lados  $b$  e  $c$ , segue que o paralelogramo tem lados  $\sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\sqrt{c^2 + d^2}$ , de modo que sua área é menor ou igual a  $\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$ . Por outro lado, a área do paralelogramo é dada por

$$(b+c)(a+d) - ab - cd = ac + bd,$$

de modo que

$$\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd \iff (ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$



**Figura 4.8:** Retângulo com paralelogramo inscrito.

$\square$

## Generalizações

A desigualdade de Cauchy-Schwarz também admite algumas generalizações. Uma primeira generalização é para  $\mathbb{R}^n$ : dados  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  quaisquer, sendo  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  e sendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o produto interno canônico em  $\mathbb{R}^n$ , (4.7) pode ser lida como

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Podemos ainda generalizar a desigualdade para  $\mathbb{C}^n$ , o espaço complexo  $n$ -dimensional: dados  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  com  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  (note que  $u_i, v_i \in \mathbb{C}$ ), definimos o *produto interno canônico* (ou *produto interno hermitiano*) em  $\mathbb{C}^n$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 \overline{v_1} + \cdots + u_n \overline{v_n}.$$

Assim, (4.7) pode ser lida como em  $\mathbb{R}^n$ :

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

## 4.7 Desigualdade de Hölder

Dados  $\{a_1, \dots, a_n\}, \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}_+$ ,  $1 < p \in \mathbb{R}$  e sendo  $p' = p/(p-1)$ , mostraremos que vale

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} (b_1^{p'} + \cdots + b_n^{p'})^{1/p'}, \quad (4.8)$$

chamada desigualdade de Hölder. Ela foi descoberta primeiro por Leonard Rogers em 1888, e descoberta por Hölder independentemente em 1889. Vamos à demonstração.

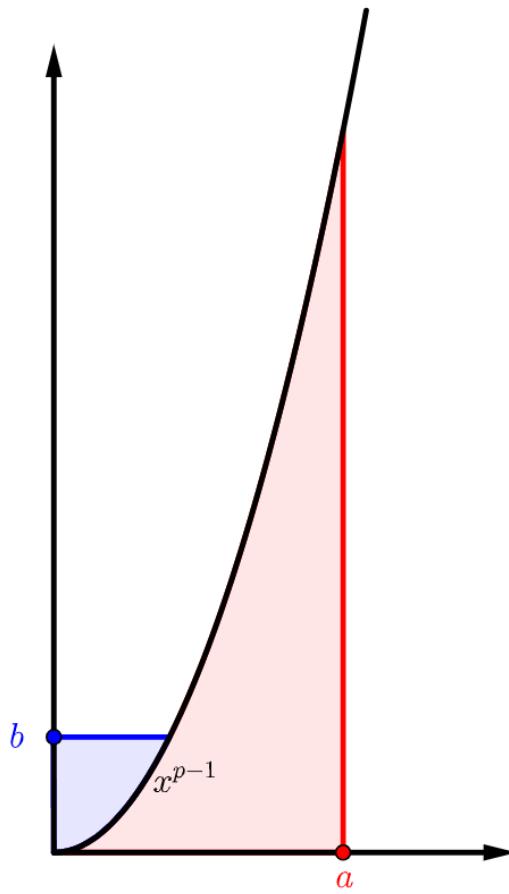
*Demonstração.* Considere as funções  $y = x^{p-1}$  e  $x = y^{p'-1}$ , que são inversas. De fato,

$$\begin{aligned} y \circ x &= (y^{p'-1})^{p-1} = y^{pp'-p-p'+1} = y^{p'+p-p-p'+1} = y \\ x \circ y &= (x^{p-1})^{p'-1} = x^{pp'-p-p'+1} = x^{p'+p-p-p'+1} = x. \end{aligned}$$

Escolha  $a, b \in \mathbb{R}$  positivos. Então

$$\int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}, \quad \int_0^b y^{p'-1} dy = \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Observe o gráfico abaixo.



**Figura 4.9:** Ilustração do argumento para a prova da desigualdade de Hölder.

Ora,  $a^p/p$  é a área da região em vermelho, e  $b^{p'}/p'$  é a área da região em azul. Além disso, podemos ver que, independentemente da forma como  $a$  e  $b$  são escolhidos, a soma das áreas coloridas sempre excede a área do retângulo de lados  $a$  e  $b$ , com igualdade só se  $a^{p-1} = b$ . Dito de outro modo, vale a desigualdade de Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \quad (4.9)$$

Então, sejam  $\{a_1, \dots, a_n\}, \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}_+$ . Se  $b_i = 0$  para todo  $i$ , a desigualdade vale. Assuma então que  $A = (a_1^p + \dots + a_n^p)^{1/p} \neq 0$  e  $B = (b_1^{p'} + \dots + b_n^{p'})^{1/p'} \neq 0$ . Definamos

$$x_k = \frac{a_k}{A}, \quad y_k = \frac{b_k}{B}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

De (4.9), segue que

$$x_k y_k \leq \frac{a_k^p}{p A^p} + \frac{b_k^{p'}}{p' B^{p'}}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

donde

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{AB} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{A^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{b_1^{p'} + \dots + b_n^{p'}}{B^{p'}} = 1,$$

que implica, finalmente,

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq AB = (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} (b_1^{p'} + \cdots + b_n^{p'})^{1/p'}.$$

□



# CAPÍTULO 5

---

## O problema do barril de vinho de Kepler

Matheus Freitas e Thais Marçal

---

Neste capítulo, nos dedicamos a resolver o problema do barril de vinho de Kepler, que recebe esse nome em homenagem ao importante astrônomo, astrólogo e matemático alemão Johannes Kepler, nascido em 1571 e considerado uma figura chave para a revolução científica do século XVII.

O problema surge da seguinte maneira: Kepler, aproveitando uma época de boa colheita de uvas, compra barris de vinho para sua casa. Os vendedores, então, medem a quantidade de vinho nos barris por um método único e simples, que funciona para barris de diferentes formas e tamanhos. O método consistia em enfiar uma régua pelo buraco do barril em duas direções diferentes até que atingisse as bordas inferiores no limite entre o fundo e as paredes do barril. Kepler fica intrigado quando os vendedores falam os volumes no barril meramente olhando para os comprimentos medidos na régua e se questiona se esta medição é correta. Surge, então, o livro *New solid geometry of wine barrels* \*, de sua autoria. O resultado principal deste livro, que será tratado aqui, é motivado pelo seguinte problema

**Problema 5.1.** Entre todos os cilindros com a mesma diagonal, qual tem maior volume?

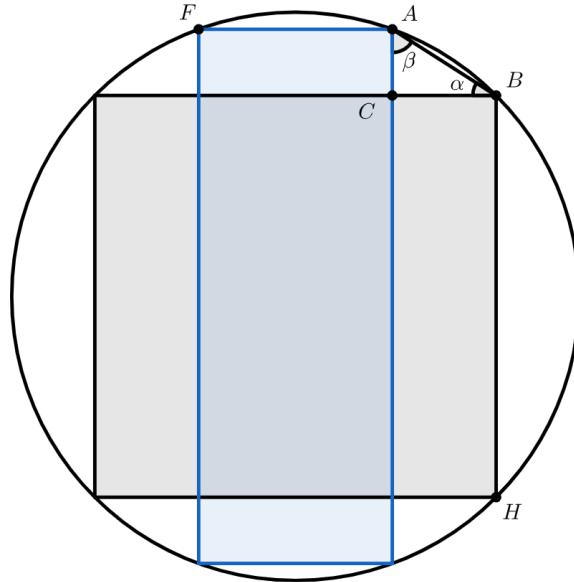
Dito de outro modo: entre todos os cilindros inscritos numa mesma esfera, qual tem maior volume? Essa segunda formulação é equivalente à primeira pois dois cilindros terem a mesma diagonal é o mesmo que estarem inscritos na mesma esfera. Resolveremos duas versões deste problema, a tridimensional e a bidimensional, usando raciocínios estritamente geométricos e do Cálculo.

### 5.1 Versão bidimensional

O problema em duas dimensões, ou no plano, consiste em achar o retângulo inscrito em uma circunferência que tenha a maior área. Ilustramos o problema abaixo.

---

\*Em tradução livre, “A nova geometria sólida dos barris de vinho”.



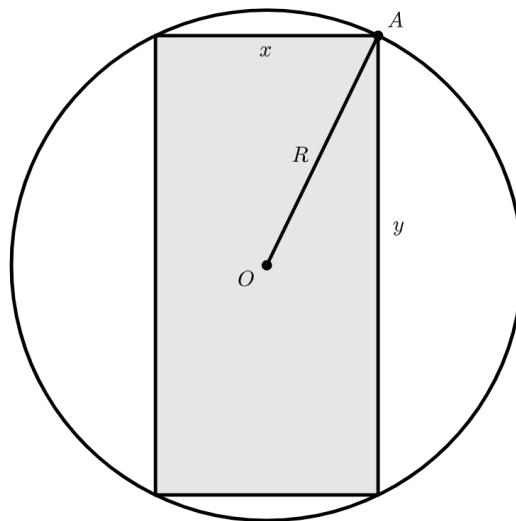
**Figura 5.1:** Ilustração geométrica do problema de Kepler no plano.

Considere um quadrado inscrito na circunferência, juntamente com um retângulo qualquer. Pensando geometricamente, vemos que  $\alpha < \beta$  com  $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ , pois o arco subtendido por  $\alpha$  é menor que aquele subtendido por  $\beta$ . Isso nos dá a relação

$$\tan \beta > \tan \alpha \iff \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} > \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}},$$

ou seja,  $\overline{CB} > \overline{AC}$ . Além disso,  $\overline{BH} > \overline{AF}$ , logo  $\overline{CB} \cdot \overline{BH} > \overline{AC} \cdot \overline{AF}$ . Segue que a área do quadrado é maior que a área de qualquer retângulo (não quadrado) e, portanto, o quadrado resolve o nosso problema.

Podemos também resolver este problema usando Cálculo. Denotamos por  $R$  o raio do círculo e por  $x$  e  $y$  os lados do retângulo, como ilustrado a seguir.



**Figura 5.2:** Solução usando Cálculo do problema de Kepler no plano.

O problema se traduz em maximizar a função

$$f(x, y) = xy, \quad x, y > 0,$$

ou, equivalentemente, o seu quadrado

$$F(x, y) = f^2(x, y) = x^2y^2,$$

o que é mais simples, já que temos a relação

$$(2R)^2 = x^2 + y^2.$$

Essa igualdade nos permite reescrever  $F$  como função de uma variável:

$$g(y) = y^2(4R^2 - y^2) = 4R^2y^2 - y^4.$$

Derivando  $g$  e igualando a derivada a zero, encontramos

$$0 = g'(y) = 8R^2y - 4y^3 \implies y^2 = 2R^2 \implies y = R\sqrt{2} \implies x = R\sqrt{2}$$

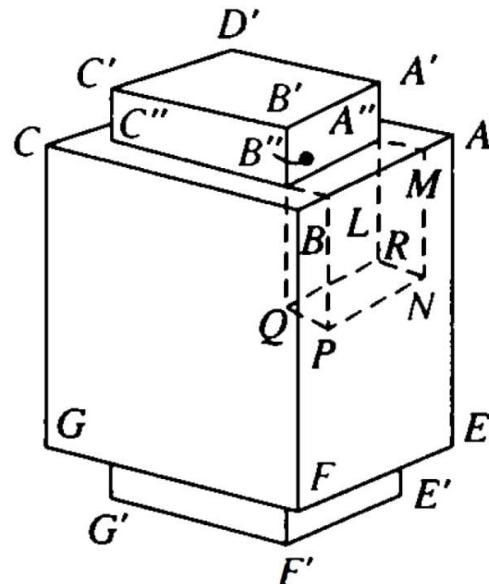
Logo, o retângulo tem lados iguais e deve ser um quadrado. Para verificar que esse ponto realmente fornece um máximo, basta ver que

$$g''(R\sqrt{2}) = 8R^2 - 24R^2 = -16R^2 < 0.$$

## 5.2 Versão tridimensional

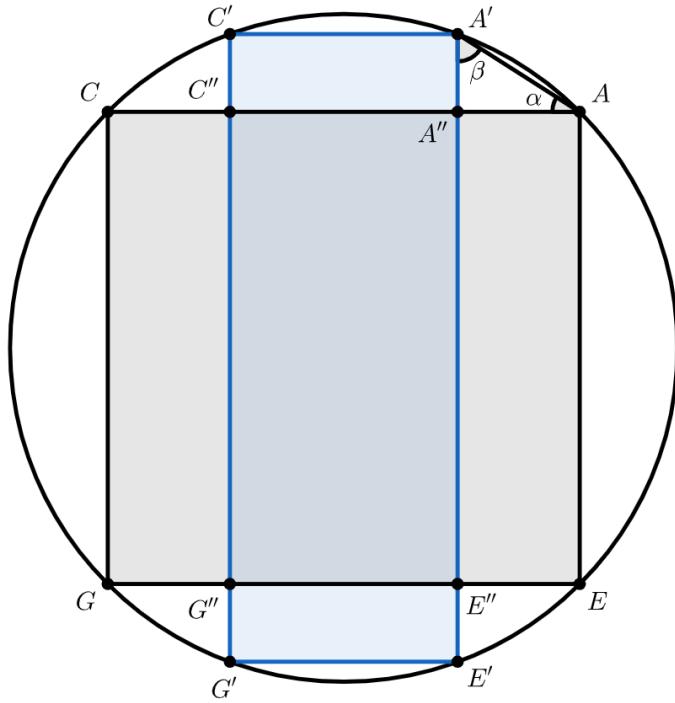
Para resolver o problema em três dimensões, i.e., na esfera, Kepler considera o problema equivalente de encontrar o paralelepípedo de base quadrada inscrito numa esfera que tenha o maior volume. Estas situações são equivalentes porque há uma correspondência bijetiva entre os cilindros inscritos numa esfera e os paralelepípedos de base quadrada inscritos na mesma esfera. De fato, para ver isso considere uma esfera e uma reta que passa pelo seu centro. Os cilindros e paralelepípedos de base quadrada têm como eixo essa reta. A ideia é que em cada um desses cilindros podemos inscrever apenas um paralelepípedo de base quadrada, donde segue a bijeção.

Considere o cubo  $ABCDEFGH$  inscrito na esfera e um paralelepípedo de base quadrada  $A'B'C'D'E'F'G'H'$  também inscrito na mesma esfera. O primeiro caso que consideramos é aquele em que  $\overline{AE} < \overline{A'E'}$ , como ilustrado abaixo.



**Figura 5.3:** Ilustração do cubo e do paralelepípedo, retirada de [Tikhomirov, 1991, p. 51].

Ao fazermos a interseção deste objeto com um plano contendo as diagonais  $AC$  e  $GE$  das faces do cubo, observamos que  $\beta > \alpha$ , como ilustrado abaixo.



**Figura 5.4:** Seção da configuração cubo-paralelepípedo-esfera.

Então

$$\frac{\overline{A''A'}}{\overline{A''A}} = \tan \alpha < \tan \beta = \frac{\overline{CA}}{\overline{AE}} = \sqrt{2},$$

e temos  $\overline{A''A'} < \sqrt{2} \cdot \overline{A''A}$ . Além disso,  $\overline{A''A} = \sqrt{2} \cdot \overline{A''M}$ , donde segue

$$\begin{aligned} 2\overline{A''B''}^2 \cdot \overline{A'A''} &< 2\overline{A''B''}^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \overline{A''A} \\ &= 2\overline{A''B''}^2 \cdot \sqrt{2}^2 \cdot \overline{A''M} \\ &= 4\overline{A''B''}^2 \cdot \overline{A''M}. \end{aligned}$$

E segue que o volume do cubo é maior que o do paralelepípedo, pois o que mostramos foi que o volume da região do cubo que não intercepta o interior do paralelepípedo é maior que o volume da região paralelepípedo no exterior do cubo. Logo, o cilindro de maior volume é aquele em que se pode inscrever um cubo, e encontramos a solução para o problema tridimensional.

# CAPÍTULO 6

---

## A cicloide e o problema da braquistócrona

Jorge Lucas e Lívia Nascimento

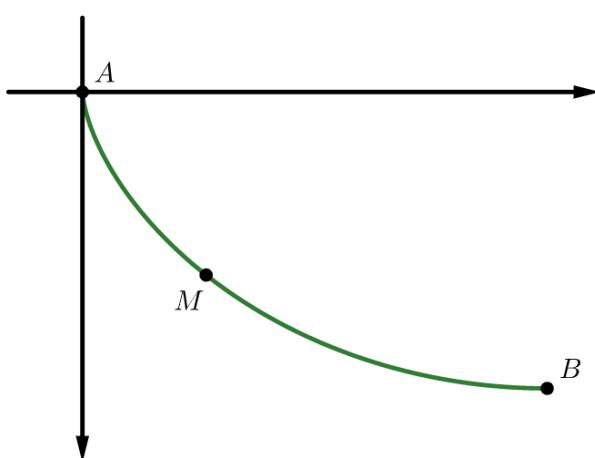
---

### 6.1 Um pouco de história

*Acta Eruditorum*, a primeira revista científica alemã, começou a ser publicada em 1682. A edição de junho de 1696 exibiu uma nota do famoso estudioso suíço Johann Bernoulli com um título intrigante, “Um novo problema que matemáticos estão convidados a resolver”.

É comum que o anúncio de um novo problema atraia a atenção de importantes estudiosos, até porque, é competindo uns com os outros que se criam poderosos métodos para a solução de problemas que mais tarde proporcionam um grande serviço à ciência. Esse foi o caso do problema de Johann Bernoulli. O autor começou assim:

**Problema 6.1** (Braquistócrona). Sejam dois pontos  $A$  e  $B$  (Figura 6.1) dados em um plano vertical. Encontre a curva que um ponto  $M$ , movendo-se em um caminho  $AMB$ , deve seguir de tal forma que, partindo de  $A$ , alcance  $B$  no menor tempo possível sob influência apenas de seu próprio peso.



**Figura 6.1:** Problema de Johann Bernoulli.

Ao apresentar seu problema, Bernoulli não fez menção alguma a Galileu. Como sabemos, todas as ciências naturais modernas “originaram” de Galileu, pois ele não só descobriu as leis fundamentais da mecânica como também foi o primeiro a fazer perguntas sobre a Natureza. O estágio atual de desenvolvimento da ciência começou quando Galileu subiu a Torre de Pisa para “perguntar à Natureza” sobre as leis dos corpos em queda.

Galileu fez duas afirmações sobre o movimento ao longo de arcos circulares, das quais apenas uma é verdadeira: O movimento ao longo de um arco é mais rápido do que o movimento ao longo de uma reta. Já a declaração sobre a igualdade de intervalos de tempo ao realizar movimentos é parcialmente correta e, como se verificou mais tarde, está diretamente relacionado ao problema de Bernoulli.

Seja como for, diante das afirmações de Galileu e do problema apresentado por Bernoulli, devemos nos perguntar: **qual curva corresponde ao menor intervalo de tempo**, ou seja, qual curva é a braquistócrona (em grego, a mais rápida)?

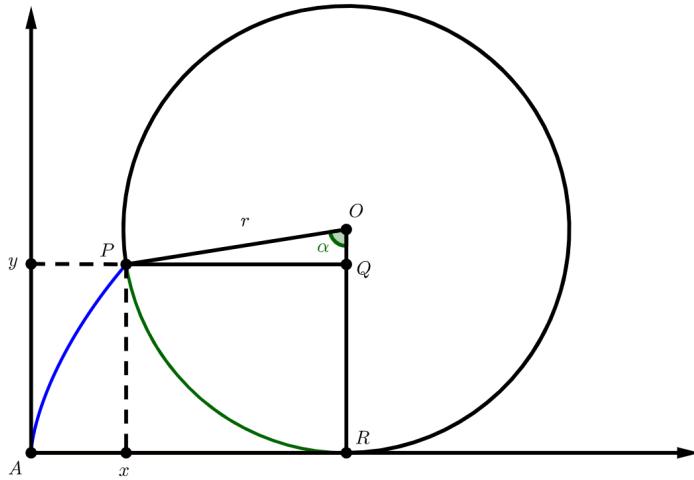
Muitos matemáticos responderam ao “convite” Johann Bernoulli. Um dos primeiros a resolver o problema da braquistócrona foi Leibniz, que o chamou de “esplêndido”. Em seguida, Jakob Bernoulli (irmão de Johann) e l’Hospital anunciaram seu êxito. E claro, o próprio Johann Bernoulli tinha uma solução. Havia também uma solução anônima identificada por especialistas como sendo proporcionada por Newton (que mais tarde admitiu ter levado 12 horas de ininterrupta análise para chegar à solução).

Todos esses estudiosos contribuíram significativamente para uma área em ascensão, a análise matemática. E, evidentemente, todos chegaram à mesma conclusão: *a braquistócrona é a cicloide invertida*. Aqui, devemos examinar essa notável curva.

## 6.2 Cicloide

Deixe uma circunferência de raio  $r$  e centro  $O$  deslizar ao longo do eixo  $x$ . Suponha que no tempo  $t = 0$ , o ponto a ser observado é o ponto de contato da circunferência e do eixo das abscissas; denotaremos de  $P$ . Considere o sistema de coordenadas com  $A$  como origem e o eixo  $x$  previamente definido.

Queremos determinar a posição de  $P$  seguindo uma rotação horária da circunferência através de  $\alpha$ . Denominamos *cicloide* a curva (em vermelho) descrita pelo ponto  $P$  quando a circunferência rola sobre o eixo  $x$ , sem deslizar.

**Figura 6.2:** Parametrização da cicloide.

Seja  $\Delta POQ$  um triângulo como mostra a figura acima. O seno e cosseno em relação ao ângulo  $\alpha$  são dados por

$$\sin \alpha = \frac{\overline{PQ}}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{\overline{OQ}}{r}$$

logo,

$$\overline{PQ} = r \cdot \sin \alpha \quad \overline{OQ} = r \cdot \cos \alpha.$$

Usando que  $\overline{PR} = r\alpha$ , temos

$$x = \overline{AT} = \overline{AR} - \overline{TR} = \overline{PR} - \overline{PQ} = r \cdot \alpha - r \cdot \sin \alpha = r(\alpha - \sin \alpha)$$

e também

$$y = \overline{QR} = \overline{OR} - \overline{OQ} = r - r \cdot \cos \alpha = r(1 - \cos \alpha).$$

Portanto, as coordenadas  $(x(\alpha), y(\alpha))$  de  $P$  são

$$x(\alpha) = r(\alpha - \sin \alpha), \quad y(\alpha) = r(1 - \cos \alpha). \quad (6.1)$$

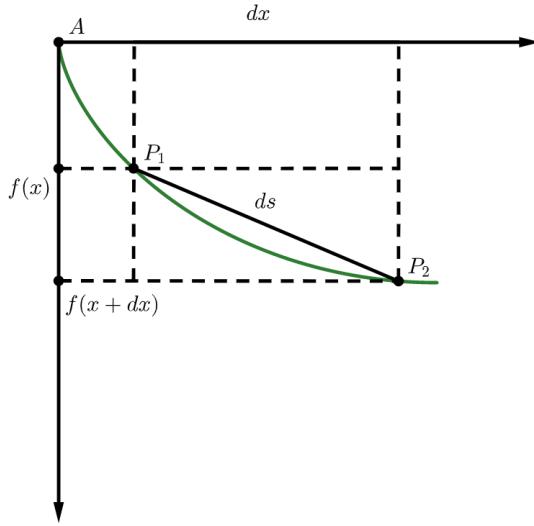
Mas o que é tão singular sobre essa curva? Como ela surgiu?

Primeiro, a cicloide é considerada a primeira curva não estudada na antiguidade que tem conexões com as leis da Natureza. Além disso, a primeira aparição da cicloide se deu em 1501 num trabalho de Charles Bovelles, mas os primeiros estudos rigorosos dos quais se tem conhecimento são obra de Roberval (que a chamou de “trocoide”, roda em grego), Pascal (que a chamou de “roulette”, roleta em francês) e Torricelli, discípulo de Galileu, e datam de aproximadamente um século depois.

## 6.3 Solução do problema

Apresentaremos aqui a solução formulada por Johann Bernoulli. Primeiramente, vamos considerar o sistema de coordenadas cartesiano com o eixo  $x$  horizontal e o eixo  $y$  positivo virado para baixo. Coloquemos o ponto  $A$  na origem (Figura 6.3). Seja  $y = f(x)$  a equação da curva que liga os pontos  $A$  e  $B = (a, b)$ . Precisamos determinar o tempo

necessário para um corpo de massa  $m$  cair de  $A$  até  $B$ , desconsiderando o atrito, ao longo da curva  $y$ .



**Figura 6.3:** Distância entre  $P_1$  e  $P_2$ .

Pela lei de conservação de energia, a energia cinética de um corpo em  $M = (x, f(x))$  é igual à diferença das energias potenciais em  $A$  e  $M$ , ou seja,

$$\frac{mv^2}{2} = mgf(x) \implies v = \sqrt{2gf(x)}.$$

Portanto, a velocidade do corpo no ponto  $M$  é  $v = \sqrt{2gf(x)}$ .

Considerando o caminho entre os pontos  $(x, f(x))$  e  $(x+dx, f(x+dx))$ , onde  $dx$  é um pequeno incremento na curva, o tamanho  $ds$  desse caminho é

$$ds \approx \sqrt{dx^2 + (f(x+dx) - f(x))^2}.$$

Usando que  $f(x+dx) - f(x) \approx f'(x)dx$ , chegamos em

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Numa pequena porção do caminho, podemos aproximar a velocidade como constante e igual a  $v = \sqrt{2gf(x)}$ . Assim, o tempo necessário para percorrer esta porção é

$$dt \approx \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2gf(x)}} dx$$

e, com isso, o tempo total de travessia é dado pela integral

$$T = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2gf(x)}} dx.$$

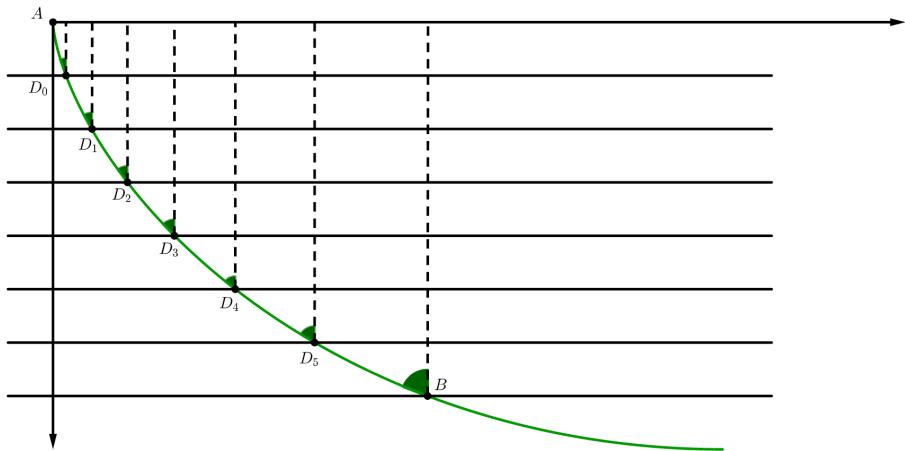
Resolveremos o problema de maneira discreta, ou seja, vamos discretizar o problema e, ao final, tomar um limite para obter a solução. Para tanto, dividimos o segmento  $[0, b]$  no eixo  $y$  em  $n$  partes iguais,

$$0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$$

e tomamos  $x_i$  sobre o eixo  $x$  tais que  $f(x_i) = y_i$  para  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  e  $x_n = a$ . Ligando os pontos  $(x_i, y_i)$  e  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , por segmentos de reta, obtemos a poligonal  $L_n$ . Note que  $L_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ . Daí, supondo que a velocidade em cada segmento seja constante e igual a  $\sqrt{2gy_{i+1}}$ , o tempo total  $T_n$  para percorrer o caminho  $L_n$  é

$$T_n = \sum_1^n \frac{\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}}{\sqrt{2gy_i}}. \quad (6.2)$$

Agora, imagine um meio óptico não homogêneo com  $n$  camadas homogêneas,  $s_1, \dots, s_n$  (por exemplo,  $n$  tipos diferentes de vidro). A velocidade de propagação da luz na camada  $s_i$  é  $\sqrt{2gy_i}$ . Se, nessas condições, a luz percorresse o caminho  $L_n$ , o tempo necessário para ela chegar de  $A$  até  $B$  seria  $T_n$ . Dito de outro modo, podemos pensar no nosso problema como sendo de natureza ótica ao invés de mecânica.



**Figura 6.4:** Ilustração da discretização do problema.

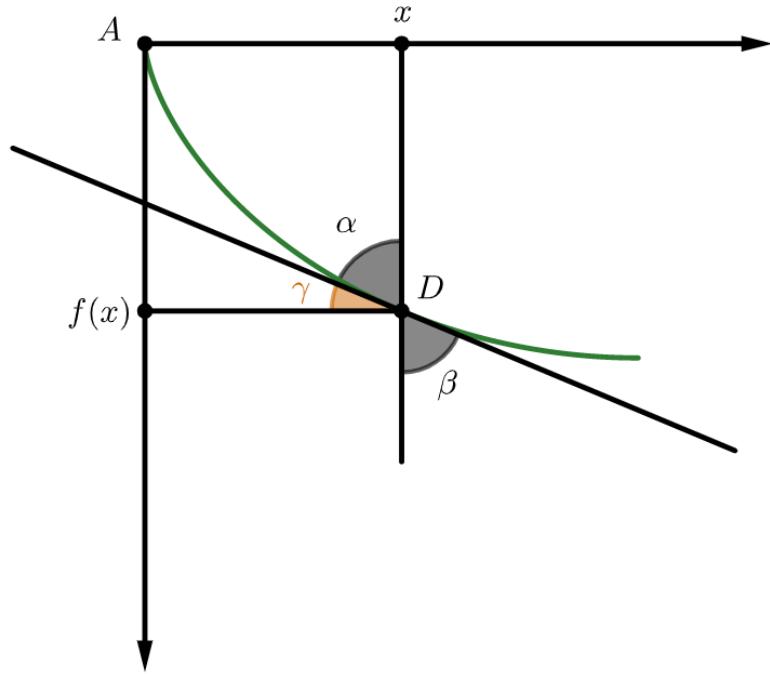
A vantagem de passar para uma interpretação ótica é a Lei de Snell:

$$\frac{\sin(\alpha_i)}{\sqrt{2gy_i}} = \text{constante}, i \in \{1, \dots, n\}.$$

À medida que as camadas se tornam cada vez mais finas, obtemos o limite

$$\frac{\sin(\alpha(x))}{\sqrt{2gf(x)}} = \text{constante}, \quad (6.3)$$

em que  $\alpha(x)$  é o ângulo entre a tangente de  $f(x)$  e o eixo paralelo ao eixo  $y$  no ponto  $(x, f(x))$ , como mostrado abaixo.



**Figura 6.5:** Ângulo limite  $\alpha(x)$ .

Ora, mas a tangente desse ângulo é também dada por  $\frac{1}{f'(x)}$ . Portanto,

$$f'(x)^2 = \frac{1}{\tan^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}$$

onde segue que

$$1 + f'(x)^2 = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \iff \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}.$$

Substituindo na equação (6.3), temos que  $f(x)$  satisfaz

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} \sqrt{f(x)} = C,$$

onde  $C$  é uma constante qualquer. Portanto,  $f$  também deve satisfazer

$$y' = \sqrt{\frac{C - y}{y}}. \quad (6.4)$$

Já na época de Johann Bernoulli, (6.4) era conhecida como a equação diferencial de uma cicloide. Outra maneira de resolver (6.4) é substituindo  $y'$  por  $dy/dx$  para obter

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C - y}{y}} \implies dx = \sqrt{\frac{y}{C - y}} dy \implies x = \int \sqrt{\frac{y}{C - y}} dy.$$

Para resolver a integral, fazemos a substituição  $u^2 = y/(C - y)$ , de modo que

$$y = \frac{Cu^2}{1 + u^2} \implies dy = \frac{2Cu}{(1 + u^2)^2} du$$

e, portanto,

$$x = \int \frac{2Cu^2}{(1+u^2)^2} du.$$

Agora, fazemos a substituição trigonométrica  $u = \tan \varphi$ , de modo que  $du = \sec^2 \varphi d\varphi$  e, portanto,

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{2C \tan^2 \varphi \sec^2 \varphi}{(1 + \tan^2 \varphi)^2} d\varphi = 2C \int \frac{\tan^2 \varphi}{\sec^2 \varphi} d\varphi \\ &= 2C \int \left( \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 \cdot \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= 2C \int \sin^2 \varphi d\varphi = C \int (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \\ &= \frac{C}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi) + k. \end{aligned}$$

Uma vez que  $y = \frac{Cu^2}{1+u^2}$ , temos que

$$y = \frac{C \tan^2 \varphi \sec^2 \varphi}{(1 + \tan^2 \varphi)^2} = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

Fazendo  $C/2 = r$  e  $2\varphi = \alpha$ , obtemos a equação paramétrica da cicloide:

$$x(\alpha) = r(\alpha - \sin \alpha), \quad y(\alpha) = r(1 - \cos \alpha).$$

O método, criado por Bernoulli, para resolver o problema da braquistócrona fez com que fosse possível resolver vários outros problemas óticos, mecânicos e geométricos. Em particular, podemos resolver o seguinte problema usando as ideias de Bernoulli:

**Problema 6.2.** Encontre a superfície de revolução de área mínima.

Por superfície de revolução queremos dizer a superfície obtida pela rotação, em torno do eixo  $x$ , da porção do gráfico da função não negativa  $y = f(x)$  entre os pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ . Pode-se mostrar que a área  $S$  dessa superfície é dada por

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

de modo que o problema consiste em minimizar  $S$ .

Para terminar o capítulo, fazemos um último comentário: o problema da braquistócrona foi o primeiro de vários problemas que motivaram a formulação do cálculo de variações. O capítulo a seguir trata de um problema que pertence a essa série e que foi formulado por Newton logo antes do surgimento do problema da braquistócrona.



# CAPÍTULO 7

---

## O problema aerodinâmico de Newton

Isadora Silva e Thailany Machado

---

Neste capítulo, vamos discutir o problema aerodinâmico de Newton, que consiste em encontrar o formato do corpo que, em um meio raro, sofre a menor resistência.

Por “meio raro”, nos referimos a um meio que consiste de partículas iguais e perfeitamente elásticas, dispostas livremente a distâncias iguaisumas das outras.

Por “resistência sofrida” pelo corpo, queremos dizer a força de arrasto aplicada pelo fluido sobre a superfície frontal do corpo. Newton propôs uma fórmula para a distribuição de pressão sobre a superfície do corpo.

Newton impõe, ainda, uma simetria ao formato do corpo, que é equivalente a exigir que ele seja um sólido de revolução. Portanto, o problema se resume em encontrar um tal sólido que experimenta uma resistência mínima quando se move através de um meio raro com velocidade constante na direção do eixo de revolução.

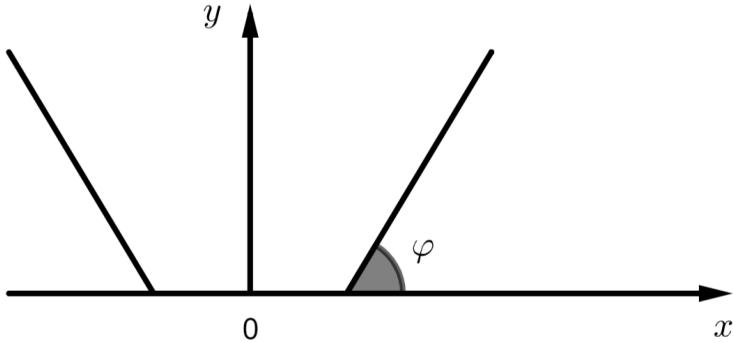
Veremos, como mostrado por Newton, que esse sólido “ótimo” tem a parte da frente “achatada”. Isso aparenta ser totalmente absurdo: se o formato que minimiza a resistência tem a frente achatada, por que os cascos de lanchas e navios têm “pontas”?

Esse aparente absurdo suscita a seguinte importante observação: a priori, o meio raro de Newton não tem qualquer relevância física. De fato, nem água, nem ar, nem qualquer líquido ou gás que encontramos usualmente exibe as propriedades do meio raro de Newton. Portanto, a solução desse problema aerodinâmico é inútil para construção de barcos, lanchas e transatlânticos, por exemplo. Contudo, em **altas altitudes**, o meio se torna “raro” e, lá, o problema de Newton se torna relevante. Para resolver o problema, vamos proceder em 3 etapas:

- i) primeiro, vamos resolver o problema para o tronco de cone, ou seja, encontrar as dimensões do tronco de cone que sofre resistência mínima;
- ii) em seguida, vamos resolver o problema para uma “linha quebrada em duas”, isto é, vamos encontrar o sólido de revolução, gerado por dois segmentos, que sofre resistência mínima;
- iii) por último, vamos generalizar o passo anterior para uma linha quebrada em  $n$  partes, e ver que a solução do problema de Newton original é obtida fazendo  $n \rightarrow \infty$ .

## 7.1 Solução do problema para o tronco de cone

Vamos assumir que o tronco está em repouso e o meio se move em relação a ele de baixo para cima com velocidade  $v$ . A parte do tronco que fica sujeita às colisões com as partículas é a base menor e o lado. Vamos computar a resistência sobre cada uma dessas partes separadamente.



**Figura 7.1:** Seção vertical do tronco de cone.

Sejam  $x$  o raio da base menor,  $R$  o raio da base maior e  $H$  a altura do tronco. As partículas que colidem com a base menor por unidade de tempo estavam, originalmente, num cilindro cuja base é a base menor do tronco e cuja altura é dada pelo produto entre a velocidade e o tempo decorrido, ou seja,  $v \cdot 1 = v$ . O volume  $V_0$  desse cilindro é dado por

$$V_0 = \pi x^2 v.$$

Sejam  $\rho$  a densidade do meio e  $m$  a massa de uma partícula. Se  $N_0$  é o número de partículas por unidade de tempo que atinge a base menor do tronco, então

$$N_0 = \frac{\rho}{m} V_0 = \frac{\rho}{m} \pi x^2 v \quad (7.1)$$

Após a colisão com a base menor, a velocidade de cada partícula se reverte, de modo que o seu momento aumenta de  $-2mv$ . Pela terceira lei de Newton, o momento do tronco aumenta de  $2mv$ , de modo que o ganho total de momento, devido às  $N_0$  partículas, é  $N_0 2mv = 2\pi \rho x^2 v^2$ .

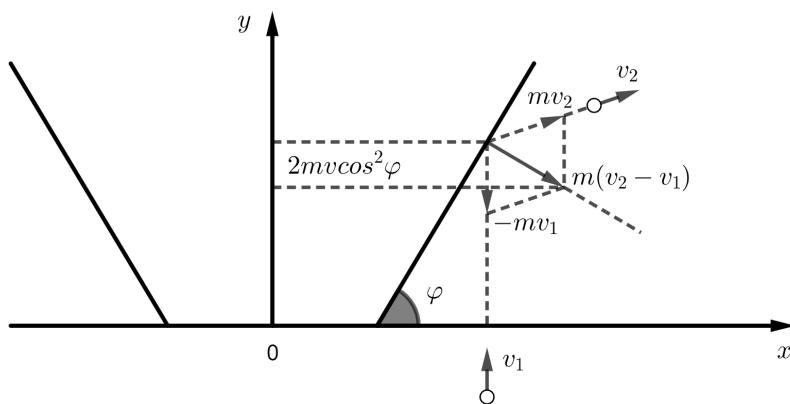
Considerações análogas valem para a superfície lateral do tronco: as partículas que colidem com ele por unidade de tempo pertenciam a um cilindro oco cujo volume  $V_1$  é dado por

$$V_1 = \pi(R^2 - x^2)v,$$

onde segue que o número de partículas,  $N_1$ , que colide com a superfície lateral do tronco por unidade de tempo, é dado por

$$N_1 = \frac{\rho}{m} V_1 = \frac{\rho}{m} \pi(R^2 - x^2)v. \quad (7.2)$$

Observe a figura abaixo.



**Figura 7.2:** Ilustração da colisão de uma partícula com a superfície lateral.

O ganho de momento de uma partícula que colide com a lateral do cone é igual a  $m(v_2 - v_1)$ , sendo  $v_2$  e  $v_1$  como na figura acima. Vemos, portanto, que a projeção do vetor  $v_2 - v_1$  é  $-2mv \cos^2 \varphi$ , sendo  $\varphi$  o ângulo entre uma geratriz do tronco e o plano de sua base menor. Portanto, o ganho de momento do tronco devido às colisões com a parte lateral é

$$N_1 \cdot 2mv \cos^2 \varphi = 2\pi\rho(R^2 - x^2)v^2 \cos^2 \varphi.$$

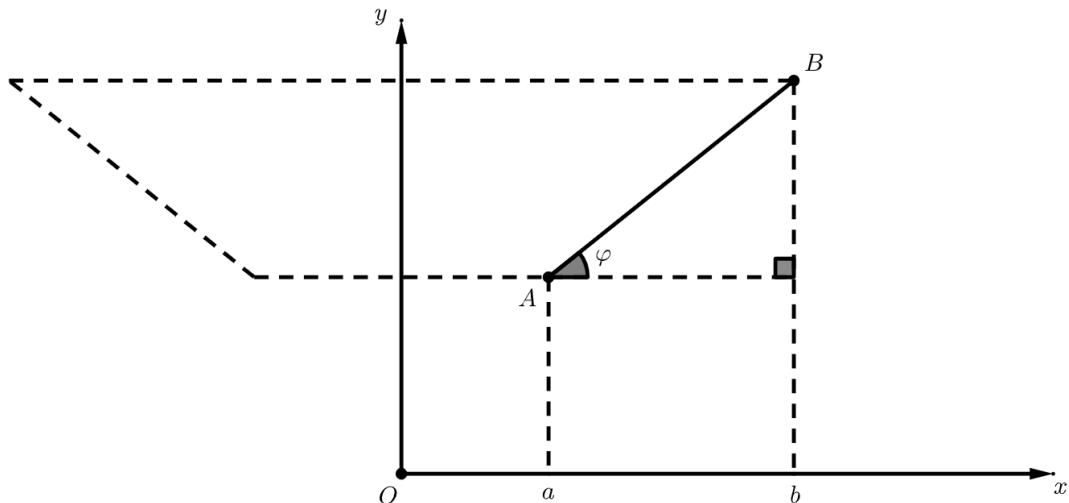
Assim, a resistência total oferecida pelo tronco de cone é

$$F(x) = K(x^2 + (R^2 - x^2) \cos^2 \varphi) = Kf(x), \quad (7.3)$$

sendo  $K = 2\pi\rho v^2$ . De maneira um pouco mais geral (que será útil para nós nos passos seguintes), podemos dizer que a resistência oferecida por um tronco de cone obtido pela revolução de um segmento  $AB$ , em torno do eixo  $y$ , sendo  $a$  e  $b$  as abscissas de  $A$  e  $B$ , respectivamente, é dada por

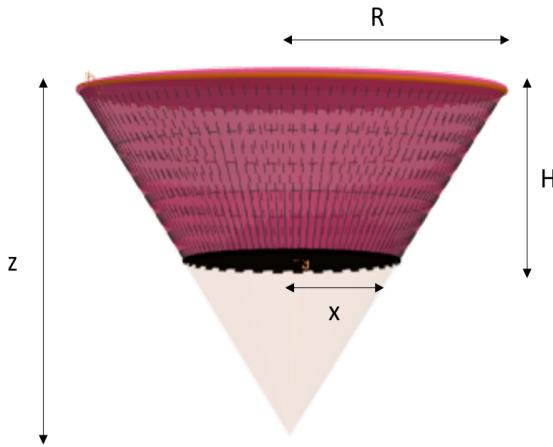
$$F = K(b^2 - a^2) \cos^2 \varphi, \quad (7.4)$$

sendo  $\varphi$  o ângulo de  $AB$  com o eixo  $x$ .



**Figura 7.3:** Seção do tronco de cone gerado pela revolução do segmento  $AB$ .

Com isso, o nosso problema agora se resume em encontrar o mínimo de  $f(x)$ , já que  $K > 0$  é constante. Considere o cone na Figura 7.4.



**Figura 7.4:** Ilustração do cone completo.

Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{x}{R} = \frac{z - H}{z} \iff R - x = \frac{RH}{z} \text{ e } x = R \cdot \frac{z - H}{z}$$

Substituindo  $x$  na expressão de  $f(x)$  e usando que  $\cos^2 \varphi = \frac{x^2}{x^2 + (z - H)^2}$ , podemos escrever  $f$  em função de  $z$  como

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 + \frac{(R^2 - x^2)x^2}{x^2 + (z - H)^2} \\ &= \frac{R^2(z - H)^2}{z^2} + \frac{R^4H(2z - H)(z - H)^2}{z^4} \cdot \frac{z^2}{(z - H)^2(R^2 + z^2)} \\ &= \frac{R^2(z - H)^2(R^2 + z^2) + R^4H(2z - H)}{z^2(R^2 + z^2)} \\ &= R^2 \cdot \frac{R^2 + z^2 + H^2 - 2zH}{R^2 + z^2} \\ &= R^2 \cdot \frac{(z - H)^2 + R^2}{z^2 + R^2} \\ &= R^2 h(z). \end{aligned}$$

Com isso, reduzimos o problema a encontrar o mínimo de  $h(z)$ , dado que  $z \geq H$ . Podemos encontrar esse mínimo sem a necessidade de usar Cálculo. De fato, seja  $m$  o menor valor que a função  $h$  pode assumir. Note que  $m \leq H(H) = R^2/(R^2 + H^2) < 1$ , ou seja,  $m < 1$ . Ademais, considerando  $z \geq H$ , temos que

$$h(z) \geq m \implies (z - H)^2 + R^2 - mz^2 - mR^2 \geq 0 \iff z^2(1 - m) - 2zH + H^2 + R^2(1 - m) \geq 0.$$

Se existir  $m < 1$  tal que a desigualdade acima vale para todo  $z$  e se, para esse  $m$ , pudermos encontrar  $z_* \geq H$  tal que a desigualdade se torna uma igualdade, então terminamos. Vamos, então, tentar encontrar um tal  $m$  e um tal  $z_*$ .

Ora, note que se  $az^2 + 2bz + c \geq 0$  para todo  $z$  e se existe  $z_*$  tal que  $az_*^2 + 2bz_* + c = 0$ , então o discriminante da equação de segundo grau é nulo, ou seja,  $\Delta = 4b^2 - 4ac = 0$  e  $z_* = -b/a$  (basta aplicar Bháskara). No nosso caso, o determinante é

$$\begin{aligned}\Delta &= 4H^2 - 4(1-m)[H^2 + R^2(1-m)] = 4mH^2 - 4R^2(1-m)^2 \\ &= 4mH^2 - 4R^2 + 8R^2m - 4m^2R^2 \\ &= -4[m^2R^2 - (2R^2 + H^2)m + R^2]\end{aligned}$$

e, igualando-o a 0, temos que

$$m^2R^2 - (2R^2 + H^2)m + R^2 = 0,$$

onde segue que

$$m = \frac{2R^2 + H - H\sqrt{4R^2 + H^2}}{2R^2},$$

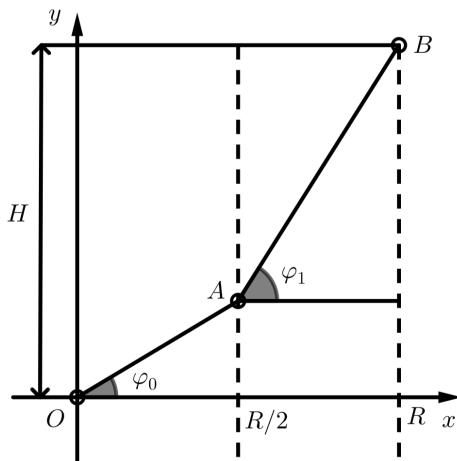
em que a outra raiz  $\frac{2R^2 + H^2 + H\sqrt{4R^2 + H^2}}{2R^2}$  foi descartada porque é menor que 1. Ademais, no nosso caso temos

$$z_* = \frac{H}{1-m} = \frac{2R^2}{-H + \sqrt{4R^2 + H^2}} = \frac{H + \sqrt{4R^2 + H^2}}{2} > H.$$

Isso resolve o problema do tronco de cone.

## 7.2 O problema de Newton para uma linha dividida em duas

O próximo passo para resolver o problema de Newton é considerar o caso especial do problema em que temos uma “linha dividida em duas”, onde o ponto de “quebra” se localiza sobre a reta  $x = R/2$ , como ilustrado na Figura 7.5.



**Figura 7.5:** Ilustração da linha dividida em duas.

Mais especificamente, queremos encontrar o ponto  $A$  sobre a reta  $x = R/2$  tal que a superfície de revolução obtida rotacionando-se a linha quebrada  $OAB$  (com  $B = (R, H)$ ) em torno do eixo  $y$  está sujeita à menor resistência no meio raro de Newton.

Passemos então à solução desse problema. Suponha que o segmento  $OA$  faz um ângulo  $\varphi_0$  com o eixo  $x$  e  $AB$  faz um ângulo  $\varphi_1$  com o eixo  $x$ . Denote por  $y$  a ordenada de  $A$ . Usando (7.4), temos que o sólido de revolução gerado por  $OAB$  é sujeito a uma força

$$\begin{aligned} F &= K[(R/2)^2 - 0^2] \cos^2 \varphi_0 + [R^2 - (R/2)^2] \cos^2 \varphi_1 \\ &= K \left[ (R/2)^2 \cos^2 \varphi_0 + 3(R/2)^2 \cos^2 \varphi_1 \right], \end{aligned}$$

com  $K = 2\pi\rho v^2$  e

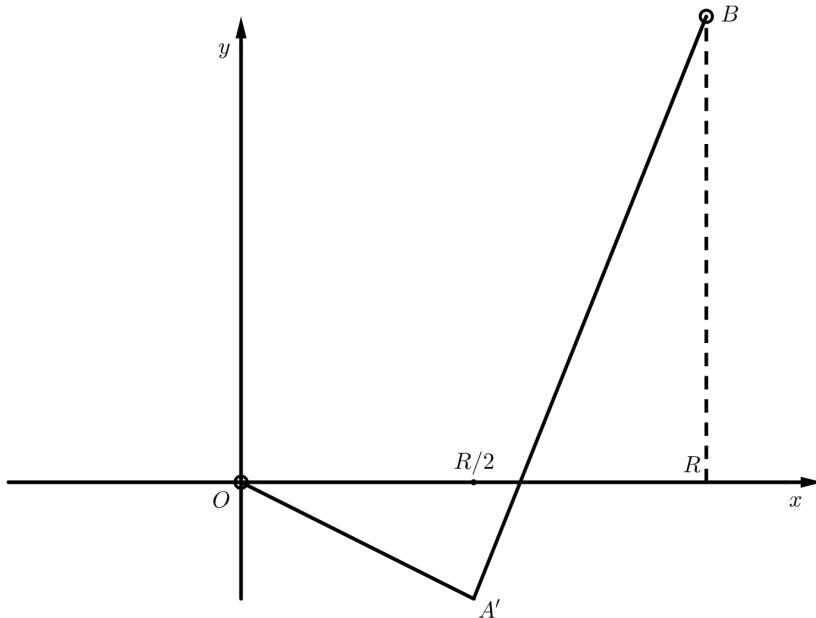
$$\cos \varphi_0 = \frac{R}{2\sqrt{y^2 + (\frac{R}{2})^2}}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{R}{2\sqrt{(H-y)^2 + (\frac{R}{2})^2}}.$$

Substituindo as expressões para os cossenos, obtemos a seguinte expressão para a força em termos de  $y$ , onde fizemos  $a = R/2$ :

$$\begin{aligned} F(y) &= K \left[ \frac{R^2}{4} \cdot \frac{R^2}{4y^2 + R^2} + 3 \frac{R^2}{4} \cdot \frac{R^2}{4(H-y)^2 + R^2} \right] \\ &= Ka^2 \left[ \frac{4a^2}{4y^2 + 4a^2} + 3 \frac{4a^2}{4(H-y)^2 + 4a^2} \right] \\ &= Ka^2 \left[ \frac{1}{y^2 + a^2} + \frac{3}{a^2 + (H-y)^2} \right] \\ &= Ka^2 g(z). \end{aligned}$$

Portanto, para minimizar  $F$  devemos minimizar  $g$ . Aqui, precisamos fazer alguns comentários para entender o intervalo no qual vamos considerar  $y$ .

Observe que se  $|y| \rightarrow \infty$ , então  $g$  vai para 0 por valores positivos. Isso significa que o ínfimo de  $g$  é 0, mas esse ínfimo nunca é alcançado (ou seja, é uma assíntota para  $g$ ). À primeira vista, pode parecer que isso torna o problema sem sentido, mas observemos o seguinte: se  $y < 0$ , a nossa linha “quebrada” tem a forma mostrada abaixo.



**Figura 7.6:** Linha quebrada no caso  $y < 0$ .

Essa linha dá origem a um sólido de revolução com uma cratera no meio, de modo que algumas das partículas que formam o meio raro seriam refletidas várias vezes na superfície dessa cratera. Esse sólido ofereceria uma resistência muito grande, que seria governada por uma lei diferente da que deduzimos. De maneira análoga, valores de  $y$  maiores que  $H$  também são descartados. Portanto, temos  $y \in [0, H]$ , ou seja, estamos assumindo que a curva que origina o sólido de revolução é uma função monotônica.

Recapitulando, o nosso problema agora é minimizar

$$g(y) = \frac{1}{y^2 + a^2} + \frac{3}{a^2 + (H-y)^2}, \quad y \in [0, H].$$

A solução desse problema pode ser enunciada em dois pontos:

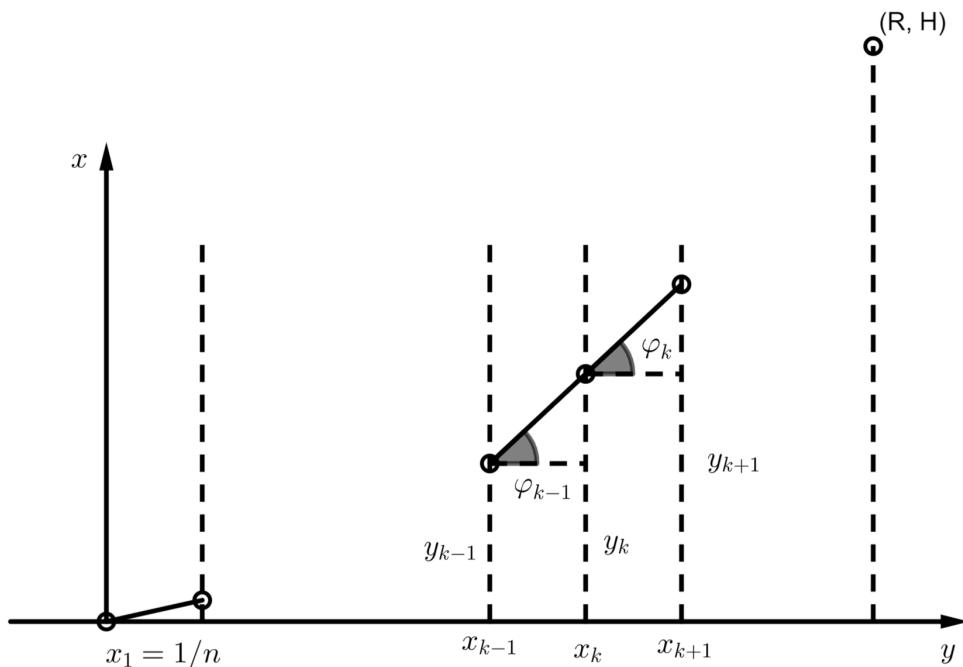
- (a) existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 \leq H \leq \delta$ , o mínimo é alcançado no 0;
- (b) se  $H > \delta$ , então o mínimo é alcançado num ponto interior a  $[0, H]$  e

$$\frac{R}{4} \tan \varphi_0 \cos^4 \varphi_0 = 3 \frac{R}{4} \tan \varphi_1 \cos^4 \varphi_1.$$

Isso significa que para valores suficientemente pequenos de  $H$  o sólido de revolução gerado pela linha quebrada é um tronco de cone e, para valores de  $H$  grandes, é um cone.

### 7.3 O problema de Newton para uma linha dividida em $n$ partes

Agora, o último passo para resolver o problema de Newton é considerar uma generalização do problema da seção anterior, agora com  $n$  divisões. Considere então as retas verticais  $l_1, l_2, \dots$ , cujas equações são  $x = 1/n, x = 2/n, \dots$ , respectivamente, como ilustrado abaixo, juntamente com a reta  $x = R$ , no caso de  $R \neq k/n$  para algum  $k$ .



**Figura 7.7:** Linha quebrada em  $n$  partes.

Consideramos a totalidade dos segmentos monotônicos crescentes com divisões nas retas  $l_k$  ligando  $(0, 0)$  a  $(R, H)$ . Sejam  $y_k$  a ordenada do vértice sobre a reta  $l_k$  e  $\varphi_k$  o ângulo entre o eixo  $x$  e o segmento ligando os vértices sobre  $l_k$  e  $l_{k+1}$ . Assumimos, por simplicidade, que  $R = N/n$ . Por (7.4), o corpo gerado pela revolução da curva em torno do eixo  $y$  é sujeito, em um meio raro, à força de resistência

$$\begin{aligned} F &= K \left\{ \frac{\cos^2 \varphi_0}{n^2} + \left[ \left( \frac{2}{n} \right)^2 - \left( \frac{1}{n} \right)^2 \right] \cos^2 \varphi_1 + \cdots + \left[ \left( \frac{N}{n} \right)^2 - \left( \frac{N-1}{n} \right)^2 \right] \cos^2 \varphi_{N-1} \right\} \\ &= \frac{K}{n^2} [\cos^2 \varphi_0 + 3 \cos^2 \varphi_1 + \cdots + (2N-1) \cos^2 \varphi_{N-1},] \end{aligned} \quad (7.5)$$

com  $K = 2\pi\rho v^2$  e

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1/n^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}}.$$

Portanto, o problema de Newton para essa linha dividida em  $n$  partes é o problema de minimizar  $F$  para todas as escolhas das  $(N-1)$ -tuplas  $(y_1, \dots, y_{N-1})$ , com a condição de que  $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_{N-1} \leq H$ . Para resolvê-lo, vamos utilizar o que encontramos no problema anterior já que podemos enxergar o problema com  $N$  partes como sendo composto de  $N-1$  problemas do tipo anterior.

De fato, suponha que resolvemos o problema para uma linha dividida em  $N$  partes e que  $(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{N-1})$  são as ordenadas dos vértices da linha “quebrada” que minimiza  $F$ . Fixe todos os vértices com exceção do  $k$ -ésimo, e escolha o seu valor de modo a minimizar o valor da resistência. Isso é equivalente a resolver uma variante do problema na seção anterior, onde queremos encontrar o mínimo de

$$\begin{aligned} g_k(y) &= \frac{1}{n^2} [(2k-1) \cos^2 \varphi_{k-1} + (2k+1) \cos^2 \varphi_k] \\ &= \frac{1}{n^4} \left[ \frac{2k-1}{1/n^2 + (y - \hat{y}_{k-1})^2} + \frac{2k+1}{1/n^2 + (\hat{y}_{k+1} - y)^2}, \right] \end{aligned}$$

para  $\hat{y}_{k-1} \leq y \leq \hat{y}_{k+1}$ . Observe que  $g_k$  é composta do  $(k-1)$ -ésimo e do  $k$ -ésimo termo da soma em (7.5), exceto que a ordenada do  $k$ -ésimo vértice não está fixada e é denotada por  $y$  (omitimos a constante  $K$ ). É evidente que a solução desse problema é  $\hat{y}_k$ .

A solução do problema de minimizar  $g_k$  é análoga à solução dada na seção anterior. Mais especificamente,

- (a) existe  $\delta_k > 0$  tal que para  $\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_{k-1} \leq \delta_k$  o mínimo é alcançado para  $\hat{y}_k = \hat{y}_{k-1}$ ;
- (b) para  $\hat{y}_{k+1} - \hat{y}_{k-1} > \delta_k$ , vale

$$\left( k - \frac{1}{2} \right) \tan \varphi_{k-1} = \cos^4 \varphi_{k-1} = \left( k + \frac{1}{2} \right) \tan \varphi_k = \cos^4 \varphi_k. \quad (7.6)$$

Juntas, essas duas condições nos dizem que a linha “quebrada” que minimiza a força acompanha o eixo  $x$  por um tempo e depois sobre de acordo com a lei em (b), isto é,  $\hat{y}_1 = \cdots = \hat{y}_s$  e para  $\hat{y}_j$  com  $j > s$  vale (b).

A força de resistência para a linha quebrada em  $N$  partes pode ser escrita diretamente em termos das ordenadas dos vértices das quebras. De fato, reescrevendo

$$\cos \varphi_k = \frac{n^{-1}}{\sqrt{1/n^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}},$$

temos que

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{K}{n^2} \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \cos^2 \varphi_k \\
 &= \frac{K}{n^2} \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1) \frac{n^{-2}}{1/n^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} \\
 &= 2K \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k+1/2}{n} \cdot \frac{1}{1+n^2(y_{k+1}-y_k)^2} \cdot \frac{1}{n} \\
 &= 2K \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k+1/2}{n} \cdot \frac{1}{1+(\Delta y_k/\Delta x)^2} \cdot \Delta x,
 \end{aligned}$$

sendo  $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$  e  $\Delta x = 1/n$ . Recordando das somas de Riemann e a forma aproximada  $\Delta y_k/\Delta x_k \approx f'(x_k)$ , temos que quando  $N \rightarrow \infty$ ,  $F$  se torna

$$F = 2K \int_0^R \frac{x}{1+(f'(x))^2} dx.$$

## 7.4 Solução do problema de Newton

Pode-se mostrar que quando  $N$  cresce, a linha quebrada minimal com  $N$  partes tende à curva minimal que é solução do problema de Newton. Segue, então, que a curva minimal pode ser construída como segue: primeiro, a função extrema  $f(x)$  coincide com o eixo  $x$ , ou seja,  $f(x) = 0$  para  $0 \leq x < a$  e, a partir daí, o seu valor cresce ao longo de uma curva (de Newton), sujeita à condição

$$x \tan \varphi(x) \cos^4 \varphi(x) = \text{constante.}$$

Aqui,  $\varphi(x)$  denota o ângulo entre a tangente ao gráfico de  $y = f(x)$  no ponto  $(x, f(x))$  e o eixo  $x$ . A igualdade acima é a forma limitante das igualdades em (7.6) associadas à solução do problema da seção anterior.

Ora, note que  $\tan \varphi(x) = f'(x)$ , de modo que  $\cos \varphi(x) = [1 + (f'(x))^2]^{-1/2}$ . Então

$$\frac{xf'(x)}{[1+(f'(x))^2]^2} = \text{constante.} \quad (7.7)$$

Essa equação é a **equação diferencial da curva de Newton**.

Para finalizar, fazemos uma última observação. Note que no ponto em que a curva horizontal passa a crescer, a curva de Newton tem derivada 1. A equação diferencial acima, juntamente com a condição de que a derivada da curva na quebra é 1, torna possível encontrar a equação explícita para a curva de Newton. No último capítulo, vamos integrar essa equação; agora, apenas exibimos as coordenadas  $(x, y)$  da curva de Newton  $y = f(x, c)$  em função do parâmetro  $u$ :

$$x = c \left( \frac{1}{u} + 2u + u^3 \right), \quad y = c \left( \log \frac{1}{u} + u^2 + \frac{3}{4}u^4 \right) - \frac{7c}{4}.$$

Aqui,  $c$  é a constante da equação diferencial, determinada por  $f(c) = H$ . Isso termina a nossa discussão sobre o problema aerodinâmico de Newton.



# CAPÍTULO 8

---

## O desenvolvimento da definição de função

Caio Tomás, Davi Nunes e Isadora Silva

---

### 8.1 O início do conceito de função

Neste capítulo, discorremos acerca da história do conceito de função. Surpreendentemente, o conceito de função não foi formulado de uma vez. No começo, ele era vago e impreciso (e talvez estejamos caminhando de volta a esse ponto – leia até o final).

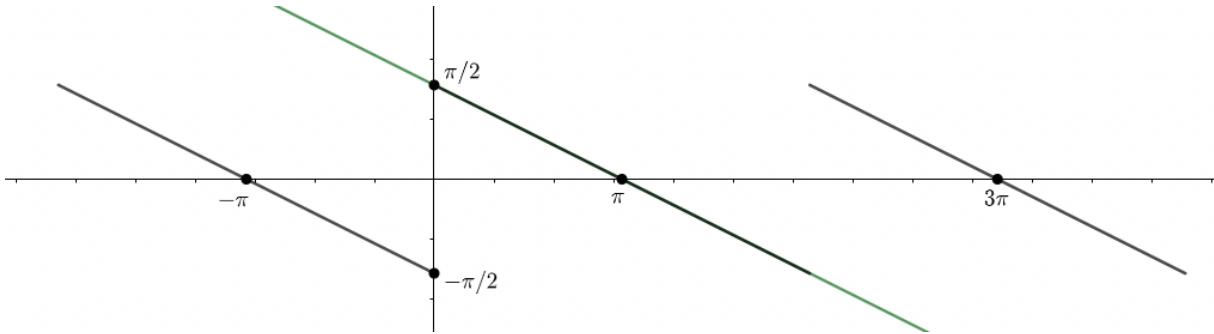
As primeiras tentativas de formulação desse conceito foram feitas no final do século 17 por Leibniz e Johann Bernoulli. Leibniz introduziu o termo “função” e Bernoulli associou a esse termo a noção de “uma expressão feita de alguma forma a partir de uma magnitude variável e constantes.”

Euler, depois, tornou mais concreta a ideia de Bernoulli, definindo, em seu livro, uma função como uma “expressão analítica” composta por uma magnitude variável e constantes e introduzindo a notação  $f(x)$ . Euler também admitiu a possibilidade de chamar uma função de “qualquer curva desenhada à mão livre” e que, para alguns casos de funções, ela pode ser descrita verbalmente.

Na época de Euler, era senso comum que *se duas expressões analíticas concordam em um intervalo, elas concordam em geral*. Entretanto, em uma carta a Goldbach em 1744, Euler dá um contraexemplo a essa “regra”:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \iff x \in (0, 2\pi).$$

que ilustramos abaixo.



**Figura 8.1:** Ilustração do contraexemplo de Euler: em verde a reta  $(\pi - x)/2$  e, em preto, parte do gráfico da série acima.

**Exemplo 8.1.** Vamos considerar o exemplo de uma função que admite diferentes descrições  $y = |x| = \sqrt{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{2}}$ . Isso é, sem dúvidas, uma expressão analítica formada por uma magnitude variável  $x$  e constantes, portanto é uma função definida por Euler e Bernoulli. Mas ela também pode ser representada pelo desenho de uma curva e também pode ser descrita verbalmente (é a função que é igual a zero para  $x = 0$ , é  $x$  para  $x$  positivo e  $-x$  para  $x$  negativo).

A pergunta que fica é: qual descrição é a melhor? Essa questão levou a diversas discordâncias. Euler pensou que a classe de funções que são “curvas desenhadas à mão livre” é maior que a classe de funções dadas por “expressões analíticas”. D'Alembert se opôs a essa visão e afirmou que essas duas classes são as mesmas.

Com o debate entre Euler, d'Alembert e Bernoulli, o conceito de função se estendeu para englobar também funções definidas por partes (como a função módulo acima) e funções desenhadas à mão livre que poderiam, possivelmente, não ser dadas por expressões analíticas.

O trabalho de Fourier na condução de calor foi um passo importantíssimo para a evolução do conceito de função. Em seu *Teoria Analítica do Calor*, Fourier enunciou o resultado principal como

**Teorema 8.1.** Qualquer função  $f(x)$  definida em  $(-l, l)$  pode ser representada nesse intervalo por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right],$$

sendo

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt.$$

O trabalho de Fourier colocou a expressão (algébrica) analítica de uma função e sua representação geométrica (como curva) em um mesmo patamar e, além disso, impactou profundamente desenvolvimentos futuros. Por exemplo, a série de Fourier forçou os matemáticos a reverem a noção de integral e foi o ponto inicial das pesquisas que levaram Cantor a criar sua teoria de conjuntos. Em relação ao impacto no conceito de função, o trabalho de Fourier eliminou o senso comum da época de Euler: agora era claro que duas funções dadas por diferentes expressões analíticas podem concordar em um intervalo sem

necessariamente concordar fora desse intervalo. Começava a surgir a Análise, que seria muito desenvolvida a partir daí.

Mesmo muito influente, o trabalho de Fourier não foi dos mais rigorosos. Dirichlet foi um dos responsáveis por analisar cuidadosamente e tornar esse trabalho matematicamente respeitável, o que não foi tarefa simples. De fato, o teorema enunciado acima estava, na verdade, incorreto. Em 1829, Dirichlet deu condições suficientes para tal representação:

**Teorema 8.2.** Se uma função  $f$  tem uma quantidade finita de descontinuidades e uma quantidade finita de máximos e mínimos em  $(-l, l)$ , então  $f$  pode ser representada por sua série de Fourier em  $(-l, l)$ . (A série de Fourier converge ponto a ponto para  $f$  onde  $f$  é contínua e para  $[f(x^+) + f(x^-)]/2$  em cada ponto  $x$  onde  $f$  é descontínua.)

Para uma demonstração rigorosa desse teorema é necessário, além do entendimento do conceito de função, noções claras de continuidade, convergência e da integral definida. É aqui que Cauchy entra na nossa história.

O conceito de função de Cauchy era similar ao de seus predecessores, pensando em termos de variável dependente e variável independente e variações de magnitude. A definição de função dada por Dirichlet, por outro lado, traz

“*y é função de uma variável x, definida no intervalo  $a < x < b$ , se para cada valor da variável x nesse intervalo corresponde um valor definido da variável y. Além disso, a maneira pela qual essa correspondência é estabelecida é irrelevante.*”

cuja novidade é, claramente, a concepção de função como uma correspondência e não como uma aplicação. De fato, Dirichlet deu a correspondência

$$D(x) = \begin{cases} c, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ d, & x \in \mathbb{Q} \end{cases},$$

hoje chamada *função de Dirichlet*, como contraexemplo para a representação de qualquer função em série de Fourier. Essa correspondência foi:

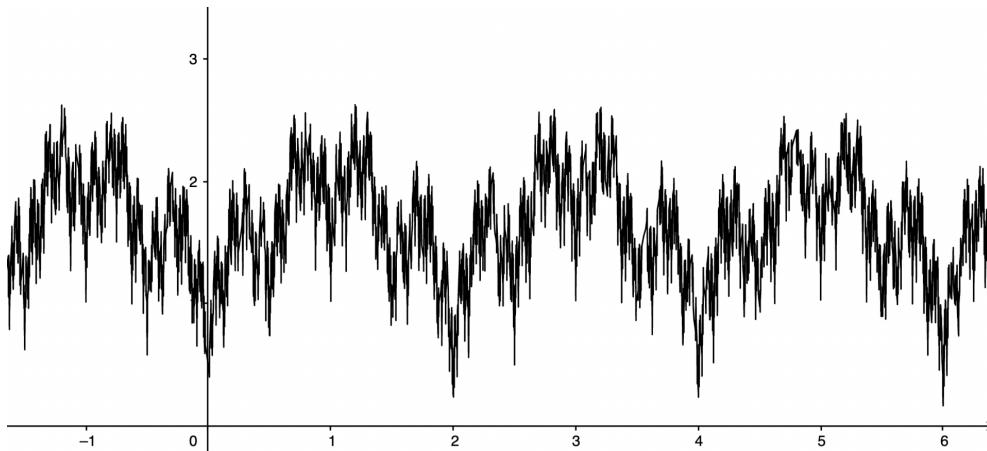
- o primeiro exemplo explícito de uma função que não era nem uma expressão analítica nem uma curva desenhada à mão livre;
- o primeiro exemplo de função descontínua *em todo ponto*;
- a primeira ilustração de uma função como um pareamento arbitrário.

## 8.2 Desenvolvimentos “recentes”

Revolucionário! E com a função de Dirichlet as coisas começam a ficar interessantes porque surgiu, a partir daí, uma enxurrada de funções e classes de funções “patológicas”. Com isso, a Análise começou a mudar: seus processos, antes considerados aplicáveis a *todas* as funções, agora estavam restritos a *classes* de funções. A partir daí, o estudo e criação de diferentes classes de funções passam a ser o foco das pesquisas. Um exemplo clássico é a função  $f$ , definida por Weierstrass, dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \text{ } a \text{ ímpar inteiro, } b \in (0, 1) \text{ e } ab > 1 + 3\pi/2,$$

que é contínua mas não derivável em toda a reta\*. Essa função totalmente patológica produzida por Weierstrass foi o estopim para a separação entre o que é contínuo e o que é diferenciável na Análise, levando à *aritmetização da Análise*.



**Figura 8.2:** Parte do gráfico da função de Weierstrass.

Resumindo até aqui: estimulado pela concepção de função de Dirichlet e seu exemplo  $D(x)$ , a noção de função como uma correspondência arbitrária ganhou força e aceitação geral; à visão geométrica de uma função é dada pouca consideração. Após o trabalho de Dirichlet, o termo “função” adquiriu um significado claro independente do termo “expressão analítica” e, durante o meio século que se seguiu, matemáticos apresentaram um grande número de exemplos de funções no espírito da definição de Dirichlet, e o tempo era propício para determinar quais funções eram de fato descritas por meio de “expressões analíticas”, termo bastante vago até então.

Dois grandes nomes na classificação de funções em classes são Baire e Lebesgue. O primeiro definiu

- classe das funções contínuas – classe 0;
- classe das funções que não são de classe 0 mas são limites (ponto a ponto) de funções de classe 0;
- e assim por diante.

Essa classificação recebeu o sugestivo nome de *classificação de Baire*, e as funções na união de todas as classes de Baire são chamadas *funções de Baire*. Ademais, Baire definiu que uma função é representável analiticamente se pertence a uma de suas classes. Dito de outro modo, uma função é analiticamente representável (no sentido de Baire) se pode ser construída a partir de uma variável e constantes por um número finito ou enumerável de adições, multiplicações e limites (ponto a ponto).

O conjunto de funções de Baire é bastante amplo:  $D(x)$  está lá, toda função obtida a partir de uma variável e constantes por uma aplicação das quatro operações algébricas e operações da Análise (diferenciação, integração, expansão em série, ...) – as funções com “expressões analíticas” do passado – também está lá.

Entra na história o nosso querido Lebesgue. Ele deu continuidade ao estudo das funções de Baire, mostrando que cada uma das classes de Baire é não vazia e que as

---

\*Hardy depois estendeu o resultado para  $ab \geq 1$ .

classes de Baire não exaurem todas as funções.<sup>†</sup> Dito de outro modo, Lebesgue mostrou que há funções que não são analiticamente representáveis (no sentido de Baire); e ele fez isso exibindo uma função fora da classificação de Baire.

A construção desse “contraexemplo” de Lebesgue se deu “usando um profundo mas extremamente complicado método”. Isso levantou a seguinte discussão: nem todas as funções – no sentido da concepção de Dirichlet – são representáveis analiticamente (no sentido de Baire), mas é (aparentemente) extremamente complicado produzir uma função específica que não seja; essas funções não representáveis analiticamente “realmente” existem?

Essa discussão é longa e pode ser bastante profunda, indo até o cerne da Matemática e suas fundações. Mencionamos aqui apenas uma curiosidade e alguns desenvolvimentos mais recentes relacionados.

A pergunta acima foi motivo de uma troca de cartas entre Baire, Borel, Hadamard e Lebesgue acerca do estado lógico da Matemática à época: a discussão versou sobre se a definição de um objeto matemático (digamos um número ou função), qualquer que seja, legitimiza a existência desse objeto. Em particular, o axioma da escolha é uma ferramenta matemática legítima para a definição e construção de funções?

Para finalizar, em desenvolvimentos recentes em Teoria da Medida, Distribuições e Teoria das Categorias, o conceito de função é, respectivamente, modificado (funções  $L_2$ ) e generalizado (distribuições). Será que voltamos ao começo, sem ter uma noção precisa do que é uma função?

No começo do século 19, começou a surgir a ideia de uma função como uma correspondência, uma lei que transforma a variável independente  $x$  em  $y$ , sem considerar a natureza de tal correspondência. Lobacevskii foi um dos primeiros estudiosos a apoiar essa visão.

Por volta do mesmo período, visões similares surgiram nas escolas matemáticas francesas e alemãs. E os livros de análise começaram a definir funções da seguinte forma:

1. Sejam  $x$  e  $y$  duas variáveis aleatórias cujos valores possuem certa dependência. No geral, uma das variáveis, digamos  $x$ , é considerada independente da outra. O valor de  $x$  pode ser escolhido arbitrariamente, mas para cada valor de  $x$ , o valor de  $y$  não é arbitrário. Então, dizemos que  $y$  é uma função de  $x$ .
2. Uma magnitude variável  $y$  é chamada de uma função da magnitude variável  $x$  se, para cada valor de  $x$ , existe um único valor correspondente de  $y$ .

Essas definições não satisfazem aqueles que exigem um rigor lógico, pois “função” está definida a partir de termos vagos como “dependência”, “lei” e “correspondência”.

Tudo começou a fazer sentido com a criação da teoria de conjuntos por Georg Cantor no fim do século 19. Com isso, foi possível definir uma função da seguinte forma: *Sejam  $X$  e  $Y$  dois conjuntos. O conjunto  $F$  dos pares  $(x, y)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  é chamado de uma função se para todo  $x \in X$ , existe exatamente um  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in F$  e escrevemos  $y = f(x)$ .*

Voltando para o nosso questionamento original: o que é um função? Qual descrição é melhor? Algumas descrições são suficientes para um uso geral, como em problemas do dia a dia, física e economia. Portanto, pensaremos em função como Bernoulli, ou

---

<sup>†</sup>De fato, há funções (Lebesgue) mensuráveis que não são funções de Baire. Por outro lado, Lebesgue mostrou que a toda função mensurável  $f$  corresponde uma função de Baire que difere de  $f$  apenas em um conjunto de medida nula.

seja como “uma expressão feita de alguma forma a partir de uma magnitude variáveis e constantes.”

# CAPÍTULO 9

---

## Formalização e problemas de extremo

Ayrton Anjos e João Vítor

---

Neste capítulo, falaremos sobre problemas de máximo e mínimo, além de procurar a melhor maneira de solucioná-los. Sabemos que não há uma regra que permita a solução de todos os problemas que existam. Entretanto, há um método que tenta alcançar essa condição, que será abordado posteriormente.

Nos primeiros capítulos, resolvemos vários problemas de máximo e mínimo, sendo que a sua grande maioria foi investigada e/ou proposta por alguns dos melhores matemáticos que já existiram – Euclides, Arquimedes, Kepler, Fermat, Bernoulli, Leibniz e Newton. Essas investigações, contudo, usavam métodos específicos para cada problema e, além disso, só chegavam em resultados satisfatórios após um bom trabalho.

Procurando “solucionar esse problema”, um método foi sendo criado e aperfeiçoado ao longo do tempo. Contudo, para entendermos o método, precisamos encontrar uma maneira única de escrever as condições e os problemas, por mais diversos que sejam. Usaremos dois problemas que já foram resolvidos para chegarmos ao destino desejado:

**Problema 9.1** (Heron). Dados dois pontos no mesmo lado de uma reta, ache o ponto nessa reta tal que a soma de suas distâncias até os pontos dados é mínima.

**Problema 9.2** (Kepler no plano\*). Inscreva um retângulo de área máxima em um círculo de raio unitário.

A teoria acerca de problemas que buscam os extremos é chamada de *teoria dos problemas extremais* ou *teoria de otimização*. Se o problema envolve alguma condição, algo que possa limitar o resultado, nós a incluímos na seção da teoria chamada *controle ideal*. Ambos os problemas acima foram enunciados com palavras ao invés de fórmulas, por ser a maneira mais adequada de propô-los. Para concentrá-los em uma teoria geral, devemos traduzi-los para a linguagem matemática por meio de um processo chamado de **formalização**.

Vamos utilizar os dois problemas mencionados para ilustrar o processo de formalização, começando pelo problema de Heron (vide Figura 9.1).

---

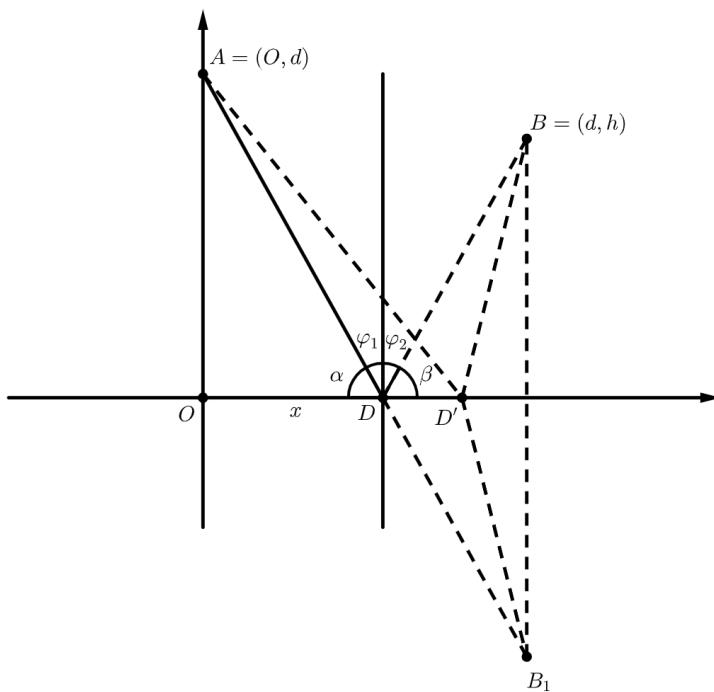
\*Do inglês *Kepler's planimetric problem*

Usamos a reta dada como o eixo  $x$  e traçamos o eixo  $y$  pelo ponto  $A$  perpendicular ao eixo  $x$ . Sejam as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$   $(0, a)$  e  $(d, b)$ , respectivamente. No eixo  $x$ , tomamos um ponto  $D$  com coordenadas  $(x, 0)$ . Dessa forma, a soma das distâncias de  $A$  a  $D$  e de  $B$  a  $D$  é  $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$ , resultando na seguinte formalização:

**Problema 9.3** (Heron formalizado). Encontre o menor valor da função

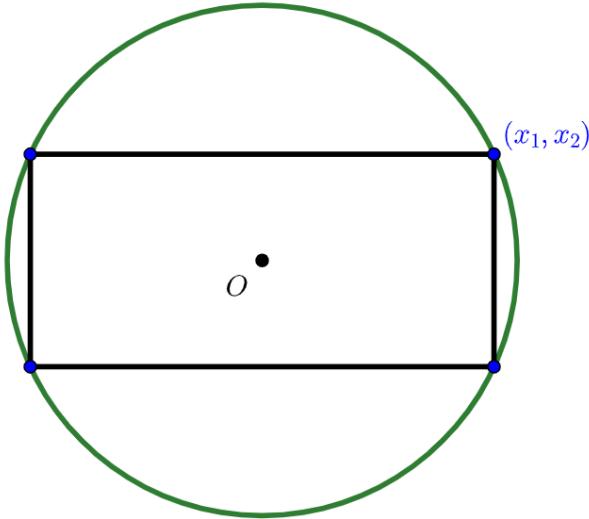
$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2},$$

definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ .



**Figura 9.1:** Problema de Heron.

Essa formalização é natural e praticamente intuitiva. Entretanto, em geral um mesmo problema pode ter várias formalizações, e isso será ilustrado com o problema de Kepler no plano. Observa a Figura 9.2.



**Figura 9.2:** Ilustração do problema de Kepler.

Considere os eixos  $x_1$  e  $x_2$  paralelos aos lados do retângulo. Seja  $(x_1, x_2)$  a coordenada do vértice do retângulo no primeiro quadrante. Dessa forma, a área do retângulo é dada por  $4x_1x_2$ , resultando na seguinte formalização:

**Problema 9.4** (Kepler formalizado – versão 1). Encontre o maior valor da função de duas variáveis

$$f_0(x_1, x_2) = 4x_1x_2,$$

sujeita à condição

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

Note que se utilizarmos a equação  $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$  para diminuirmos o número de variáveis de  $f_0$  de duas para uma, expressando  $x_2$  em termos de  $x_1$ , chegamos em outra formalização:

**Problema 9.5** (Kepler formalizado – versão 2). Encontre o maior valor da função

$$\phi(x) = 4x\sqrt{1-x^2},$$

sujeita à condição

$$0 \leq x \leq 1.$$

Vemos, então, que podem existir diferentes formalizações para o mesmo problema. A praticidade da solução de um problema depende da sua formalização bem feita. A formalização é uma arte, que é aprendida da melhor forma resolvendo problemas práticos.

Um terceiro problema que discutimos anteriormente foi o de inscrever um cilindro e um paralelepípedo reto retângulo de volume máximo em uma esfera unitária. A formalização para o caso do paralelepípedo é semelhante às anteriores, considerando  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  como metade das dimensões do paralelepípedo:

**Problema 9.6** (Paralelepípedo inscrito na esfera – formalizado). Ache o maior valor da função de três variáveis

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = 8x_1x_2x_3,$$

sujeita à condição

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0.$$

A seguir fornecemos uma lista de funções que fazem parte das formalizações de problemas que já vimos:

$$f_1(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2} \quad \text{Problema de Heron}$$

$$f_2(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2} \quad \text{Problema da reflexão da luz}$$

$$f_3(x) = \frac{H}{b}x(b - x) \quad \text{Problema de Euclides}$$

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &= 4x_1x_2, \\ g_2(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{aligned} \quad \text{Problema de Kepler no plano}$$

$$\begin{aligned} h_1(x_1, x_2, x_3) &= 8x_1x_2x_3 \\ h_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{aligned} \quad \text{Problema do paralelepípedo inscrito na esfera}$$

Portanto, formalizar um problema extremal consiste em duas coisas: descrever precisamente a função, denotada por  $f_0$ , a ser minimizada ou maximizada e fornecer uma condição, denotada por  $C$ , geralmente dada por igualdades e desigualdades. Usaremos a notação

$$f_0(x) \rightarrow \min(\max), \quad x \in C$$

para descrever o problema de encontrar o mínimo (máximo) de uma função  $f_0(x)$  sujeita à condição  $x \in C$ . Os pontos em  $C$  são chamados de *admissíveis*. Se não há condições, diremos que o problema é sem restrições. Por exemplo, para o problema de Kepler temos

$$f_0(x_1, x_2) = 4x_1x_2 \rightarrow \max \quad f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

e, para o problema de Heron,

$$f_0(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2} \rightarrow \min.$$

O primeiro é um problema com uma restrição envolvendo uma igualdade, enquanto que o segundo é um problema sem restrições.

Um ponto admissível  $\hat{x}$  é um mínimo absoluto de um problema se  $f(x) \geq f(\hat{x})$  para todo  $x \in C$  (analogamente, é máximo absoluto se  $f(x) \leq f(\hat{x})$  para todo  $x \in C$ ). Um mínimo (máximo) absoluto de um problema é uma solução. O nosso objetivo nada mais é do que encontrar as soluções.

Para encontrarmos uma solução, devemos procurar um extremo local. Dizemos que um ponto  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$  é um mínimo (máximo) local de um problema se existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todos os pontos  $x = (x_1, \dots, x_n) \in C$  tais que

$$\sqrt{(x_1 - \hat{x}_1)^2 + \dots + (x_n - \hat{x}_n)^2} < \varepsilon$$

vale a desigualdade

$$f_0(x) \geq f_0(\hat{x})$$

para o caso de mínimo e

$$f_0(x_0) \leq f_0(\hat{x}_0)$$

para o caso de máximo, ou seja, se o valor da função num ponto admissível “próximo”  $\hat{x}$  não excede ou não é menor que  $f_0(\hat{x})$ . No capítulo que segue, vamos discorrer acerca de extremos de funções de uma variável e, no seguinte, sobre extremos de funções de várias variáveis.

# CAPÍTULO 10

---

## Mínimos de funções de uma variável

Matheus Freitas e Railandi Assunção

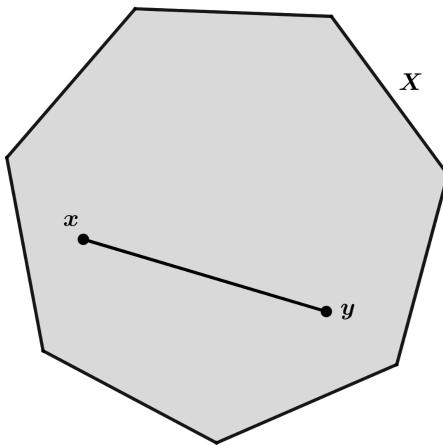
---

Neste capítulo buscaremos desenvolver um método para solucionar problemas de mínimo de funções de uma variável. A diferenciabilidade e a continuidade de uma função dizem muito sobre como proceder para resolver o problema. Veremos que há estratégias e critérios obtidos do conceito de função convexa que podem ser bastante úteis. Além disso, os conceitos de função convexa e de diferenciabilidade podem ser unidos para dar origem a um critério simples para determinar quando uma função é convexa ou não.

O tratamento dado aqui terá foco nos problemas de mínimo, já que tudo pode ser adaptado de maneira simples para os problemas de máximo. Do mesmo modo que a *convexidade de uma função* tem um papel de destaque nos problemas de mínimo, as funções *côncavas* têm propriedades análogas relacionadas a problemas de máximo.

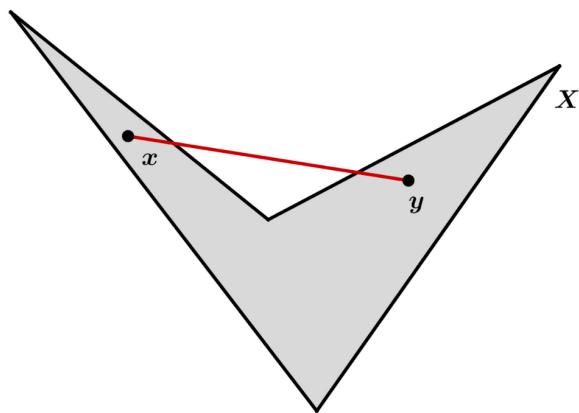
Convexidade é um conceito originalmente de geometria. Estender esta definição para funções nos permitirá trabalhar com os problemas de forma bastante geométrica. Fazemos a definição a seguir que se aplica a qualquer contexto em que os termos indefinidos da sentença façam sentido.

**Definição 10.1.** Um conjunto é convexo se quaisquer dois de seus pontos podem ser conectados por um caminho inteiramente contido no conjunto.



**Figura 10.1:** Exemplo de conjunto convexo.

Segue abaixo um exemplo de conjunto não convexo.



**Figura 10.2:** Exemplo de conjunto não convexo.

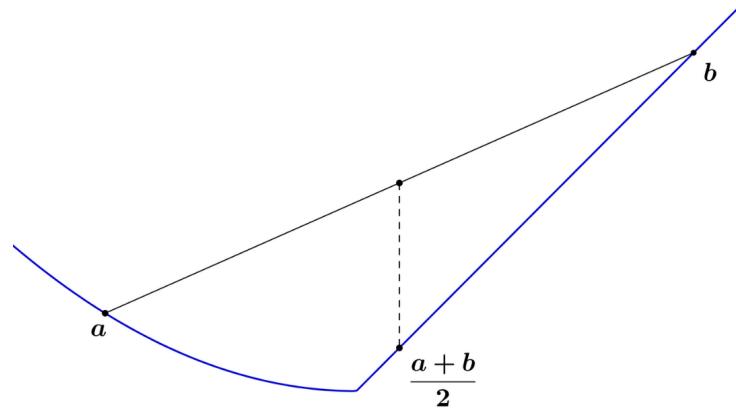
Antes de definir o que é uma função convexa, começamos definindo uma propriedade um pouco mais “fraca” que a convexidade em si. Esta formulação aparece em 1905 com Jensen.

**Definição 10.2.** Uma função  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa em pontos médios se

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

para todos  $a, b$  no conjunto convexo  $I$ .

Estas funções também são comumente chamadas de *Jensen convexas*. O significado desta definição diz está ilustrado na figura abaixo. O valor da função no ponto médio de  $a$  e  $b$  deve ser sempre menor ou igual à media dos valores da função em  $a$  e em  $b$ .

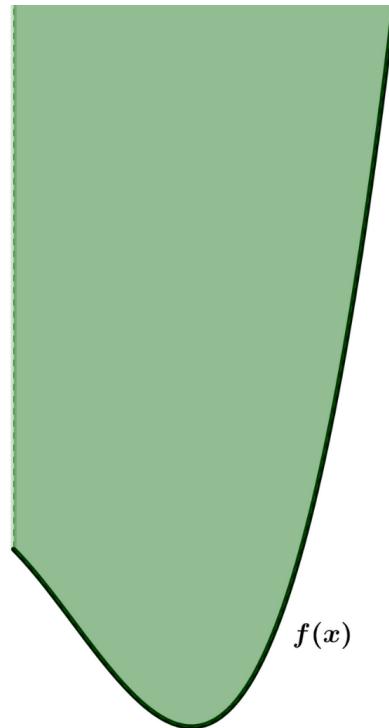


**Figura 10.3:** Interpretação geométrica da convexidade em pontos médios.

Agora, tratamos da propriedade “mais forte”. Há varia formas equivalentes de definir o que seria uma função convexa. Podemos dizer que uma função é convexa se a parte acima do seu gráfico é convexa no sentido que definimos antes, ou seja, uma função  $f$  é convexa se o conjunto

$$\{(x, y) : y \geq f(x)\}$$

é convexo, ilustrado abaixo em verde.

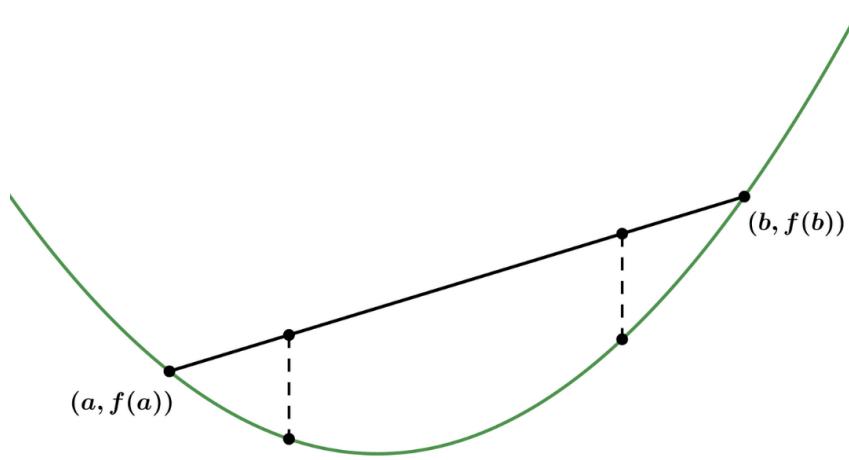


**Figura 10.4:** Em verde, o conjunto acima do gráfico de  $f$ .

No entanto, utilizamos a seguinte definição, que nos será mais adequada:

**Definição 10.3** (Desigualdade de Jensen). Uma função  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I$  é convexo, é dita convexa se

$$f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b), \quad \forall a, b \in I, \quad \forall t \in (0, 1).$$



**Figura 10.5:** Exemplo de função convexa.

Esta desigualdade será deduzida mais adiante. Se a desigualdade da definição for estrita, dizemos que  $f$  é estritamente convexa. Há uma outra forma de se pensar em convexidade, utilizando a equação cartesiana de secante ao gráfico de  $f$  pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  através da desigualdade

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \forall a < x < b \text{ em } I.$$

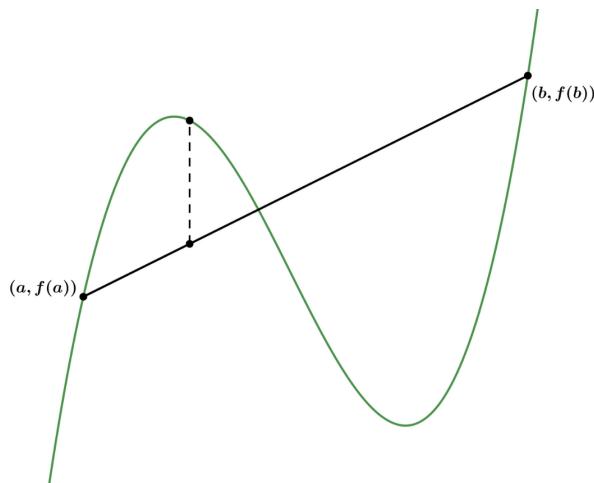
Se trocarmos, na expressão acima,  $(x - a)$  por  $(x - b)$  e  $f(a)$  por  $f(b)$  temos a equação da mesma reta, logo uma definição equivalente. Trabalhando essas desigualdades, podemos dizer que uma função é convexa se

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Estas duas formulações são equivalentes pois a secante tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = ta + (1 - t)b \\ y(t) = tf(a) + (1 - t)f(b). \end{cases}$$

Segue abaixo um exemplo de função não convexa. Observe que há um ponto do gráfico da função que fica acima da reta secante.



**Figura 10.6:** Exemplo de função não convexa.

Uma propriedade interessante é que todas as normas são convexas. Esta é uma simples consequência da desigualdade triangular:

$$|tu + (1-t)v| \leq |tu| + |(1-t)v| = t|u| + (1-t)|v|,$$

para  $u$  e  $v$  em um espaço com produto interno. Também são convexos os polinômios de grau 2 da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Para mostrar isso, vemos primeiro que, sendo  $h(x) = bx + c$ , temos

$$\begin{aligned} h(tx + (1-t)y) &= b(tx + (1-t)y) + c \\ &= t \cdot bx + t \cdot c + (1-t) \cdot y + (1-t) \cdot c \\ &= tf(x) + (1-t)f(y), \end{aligned}$$

ou seja, funções afins são convexas. Basta então mostrar que  $x^2$  é convexa; observe que

$$\frac{(x-y)^2}{4} \geq 0 \implies \frac{x^2 + y^2}{4} \geq \frac{2xy}{4}$$

e concluímos que

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Nesse caso, não mostramos a desigualdade de Jensen, mas veremos no próximo teorema que como  $x^2$  é uma função contínua, basta mostrar que ela é convexa em pontos médios. Note também que usamos o fato de que a soma de funções convexas é convexa. Isso é consequência das propriedades de desigualdades. No entanto, o produto dessas funções não é necessariamente convexo. As funções  $x$  e  $x^2$  são ambas convexas em  $\mathbb{R}$ , mas seu produto  $x^3$  não é.

**Teorema 10.1.** Uma função contínua convexa em pontos médios é convexa.

Observamos que nem toda função convexa em pontos médios é convexa, embora seja difícil encontrar um contra-exemplo.

*Demonstração.* Seja  $f$  contínua e convexa em pontos médios. O objetivo é mostrar a desigualdade de Jensen. Começamos mostrando, para todo  $k = 2^n \in \mathbb{N}$ , que

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^n}}{2^n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_{2^n})}{2^n}.$$

Para  $k = 2 = 2^1$ , temos, por hipótese,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Para  $k = 4 = 2^2$ , aplicando o caso anterior duas vezes temos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}\right]\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)\right) \\ &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4}. \end{aligned}$$

Suponha, então, que vale a desigualdade para um natural qualquer  $k = 2^n$ . Aplicando a definição e a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left[\frac{x_1 + \cdots + x_{2^n}}{2^n} + \frac{x_{2^n+1} + \cdots + x_{2^{n+1}}}{2^n}\right]\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^n}}{2^n}\right) + f\left(\frac{x_{2^n+1} + \cdots + x_{2^{n+1}}}{2^n}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_{2^n})}{2^n} + \frac{f(x_{2^n+1}) + \cdots + f(x_{2^{n+1}})}{2^n}\right) \\ &= \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_{2^{n+1}})}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Logo, vale para toda potência de 2 natural.

Vamos mostrar agora que vale para um  $n$  qualquer natural. Escolha  $n$  pontos  $x_1, \dots, x_n$  e defina

$$x_{n+1} = \cdots = x_{2^m} = x_0 = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

onde  $2^m \geq n$ . Pelo que mostramos antes, temos

$$2^m f\left(\frac{1}{2^m} [x_1 + \cdots + x_n + (2^m - n)x_0]\right) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) + (2^m - n)f(x_0).$$

Olhando para o argumento da função à esquerda de desigualdade, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^m} [x_1 + \cdots + x_n + (2^m - n)x_0] &= \frac{x_1 + \cdots + x_n}{2^m} + x_0 - \frac{n}{2^m}x_0 \\ &= x_0. \end{aligned}$$

Segue, então, que

$$2^m f(x_0) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) + (2^m - n)f(x_0),$$

ou seja,

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Generalizamos a equação que define funções convexas em pontos médios para uma quantidade arbitrária  $n$  de pontos. Uma consequência direta disso é que a desigualdade de Jensen vale para valores de parâmetro  $t$  racionais no intervalo  $(0, 1)$ . Seja  $m < n$  e defina  $x_i = x$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $x_j = y$ ,  $j \in \{m + 1, \dots, n\}$ , então

$$f\left(\frac{m}{n}x + \frac{n-m}{n}y\right) \leq \frac{m}{n}f(x) + \frac{n-m}{n}f(y).$$

Para mostrar a desigualdade de Jensen, tomamos  $\mathbb{R} \ni a = a_1 + a_2$  e  $\mathbb{N} \ni n = (n-m) + m$ , com  $n > m$ . Lembre-se, agora, que os racionais são densos em  $\mathbb{R}$ , ou seja, dados  $u < v$  em  $\mathbb{R}$ , existe  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $u < q < v$ . Usando este fato, podemos variar  $m$  e  $n$  de modo que

$$\lim \frac{m}{n} = \frac{a_1}{a}$$

e fica determinado

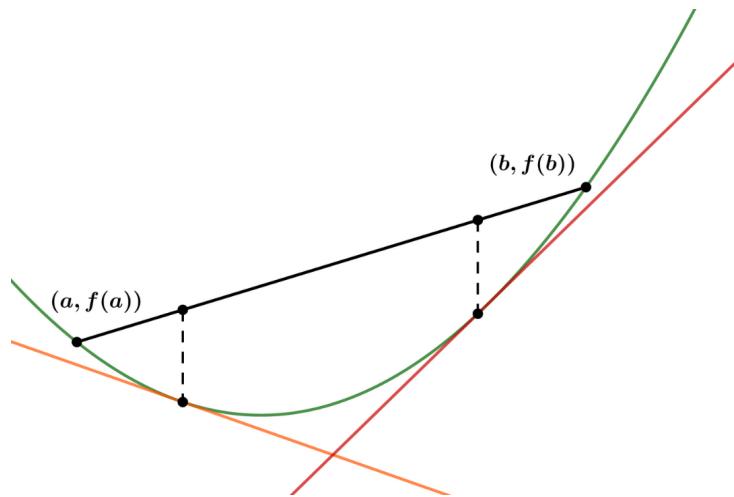
$$\lim \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{a_1}{a} = \frac{a_2}{a}.$$

Usando agora que  $f$  é contínua e aplicando os limites na desigualdade que deduzimos acima para  $f$ , vemos que

$$f\left(\frac{a_1}{a}x + \frac{a_2}{a}y\right) \leq \frac{a_1}{a}f(x) + \frac{a_2}{a}f(y),$$

com  $a_i/a \in \mathbb{R}$  valores entre 0 e 1. Portanto, está demonstrado que  $f$  é convexa. Observe que a hipótese da continuidade de  $f$  foi fundamental para podermos “passar o limite para dentro” e chegar à conclusão que queríamos.  $\square$

Utilizando conceitos de cálculo, vamos caracterizar as funções convexas. O critério estabelecido para determinar quando uma função é convexa é bastante útil, pois utiliza apenas derivação.



**Teorema 10.2.** Uma função duas vezes diferenciável é convexa se, e somente se, sua segunda derivada é não negativa.

*Demonstração.* Denotaremos aqui a equação da secante ao gráfico por  $L(x)$ . Seja  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes derivável em  $I$  (conjunto convexo). Suponha primeiro que  $f''(x) \geq 0 \forall x \in I$ . Sejam  $a < x < b$  em  $I$ . Reescrevemos a equação da secante como

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)(f(b)-f(a)) \\ &= \left[1 - \frac{x-a}{b-a}\right]f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)f(b) \\ &= \left(\frac{b-x}{b-a}\right)f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)f(b). \end{aligned}$$

Observe que

$$1 = \frac{b-a}{b-a} = \left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

então

$$f(x) = \left(\frac{b-x}{b-a}\right)f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)f(b).$$

Devemos mostrar que

$$L(x) - f(x) \geq 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} L(x) - f(x) &= \left( \frac{b-x}{b-a} \right) f(a) + \left( \frac{x-a}{b-a} \right) f(b) - \left( \frac{b-x}{b-a} \right) f(x) - \left( \frac{x-a}{b-a} \right) f(x) \\ &= \left( \frac{x-a}{b-a} \right) (f(b) - f(x)) - \left( \frac{b-x}{b-a} \right) (f(x) - f(a)) \\ &= \left( \frac{(x-a)(b-x)}{b-a} \right) \left( \frac{f(b) - f(x)}{b-x} \right) - \left( \frac{(x-a)(b-x)}{b-a} \right) \left( \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right). \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existem  $c_1 \in (a, x)$  e  $c_2 \in (x, b)$  tais que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(c_1)$$

e

$$\frac{f(b) - f(x)}{b-x} = f'(c_2).$$

Então,

$$\begin{aligned} L(x) - f(x) &= \left( \frac{(x-a)(b-x)}{b-a} \right) (f'(c_2) - f'(c_1)) \\ &= \left( \frac{(x-a)(b-x)(c_2 - c_1)}{b-a} \right) \left( \frac{f'(c_2) - f'(c_1)}{c_2 - c_1} \right). \end{aligned}$$

Usando, novamente, o TVM, existe  $d \in (c_1, c_2)$  tal que

$$\frac{f'(c_2) - f'(c_1)}{c_2 - c_1} = f''(d).$$

Logo, de acordo com nossa hipótese,

$$L(x) - f(x) = \left( \frac{(x-a)(b-x)(c_2 - c_1)}{b-a} \right) f''(d) \geq 0.$$

Portanto,  $f$  é convexa.

Suponha agora que  $f$  seja convexa. Por definição,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x}.$$

Tomando os limites  $x \rightarrow a$  à esquerda e  $x \rightarrow b$  à direita, vemos que

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f'(b),$$

ou seja,  $f'$  é não decrescente, i.e.,  $f''(x) \geq 0$  em  $I$ , já que  $a$  e  $b$  são arbitrários.  $\square$

**Corolário 10.2.1.** Seja  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes derivável. Se  $f''(x) > 0$ ,  $\forall x \in I$ , então  $f$  é estritamente convexa.

Conhecendo esses resultados, fica fácil ver que  $e^x$  é uma função estritamente convexa em  $\mathbb{R}$  e  $\arctan x$  é convexa em  $(-\infty, 0]$ , já que sua segunda derivada é  $-2x/(1+x^2)^2$ , que se anula em  $x = 0$ . Se tirássemos o 0 de seu domínio, ela seria estritamente convexa.

O corolário acima pode ser demonstrado trocando a desigualdade  $\leq$  na demonstração do teorema anterior por uma desigualdade estrita  $<$ . Vamos ver agora algumas consequências da convexidade com relação a problemas de mínimo.

Definimos um ponto  $a$  como sendo mínimo local de uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se existe uma vizinhança  $N \subseteq I$  de  $a$  tal que

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in N.$$

Analogamente,  $a$  é um mínimo global se

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in I.$$

**Teorema 10.3.** Seja  $f$  convexa. Todo mínimo local de  $f$  é um mínimo global.

*Demonstração.* Seja  $x^*$  um mínimo local de  $f$ . Existe um intervalo  $N \subseteq I$  tal que

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in N.$$

Suponha por contradição que existe  $x_0 \in I$  tal que  $f(x_0) < f(x^*)$ . Considere segmento parametrizado

$$x(t) = tx^* + (1-t)x_0, \quad t \in [0, 1]$$

contido em  $I$ , já que assumimos o domínio de  $f$  sendo convexo. Pela convexidade de  $f$ ,

$$f(x(t)) \leq tf(x^*) + (1-t)f(x_0) < tf(x^*) + (1-t)f(x^*) = f(x^*),$$

i.e.,

$$f(x(t)) < f(x^*), \quad t \in (0, 1),$$

já que  $f(x_0) < f(x^*)$ . Podemos, no entanto, escolher  $t$  tão próximo de 1 tal que  $x(t) \in N$ , de modo que

$$f(x(t)) < f(x^*), \quad x(t) \in N,$$

o que é um absurdo, já que  $x^*$  é mínimo local.  $\square$

A função

$$f(x) = \cosh x - \frac{x^2}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{x^2}{2}$$

definida em  $\mathbb{R}$  é convexa pois tem segunda derivada  $f''(x) = \cosh x - 1$ , que se anula em  $x = 0$  e é positiva no restante do domínio. Ela tem um ponto de mínimo em  $x = 0$ , então este ponto deve ser um mínimo global da função. O próximo teorema é uma simples consequência do teorema anterior e da definição de convexidade estrita.

**Teorema 10.4.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  estritamente convexa. Existe, no máximo, um mínimo local de  $f$  em  $I$ . Consequentemente, se existe um mínimo, ele é o único mínimo global.

*Demonstração.* Suponha que  $f$  tem um mínimo local  $x^* \in I$ . Se  $x_0 \in I$  for um outro mínimo local, temos  $f(x^*) = f(x_0)$ , pois são ambos mínimos globais (teorema anterior). Considere o intervalo parametrizado

$$x(t) = tx^* + (1-t)x_0, \quad t \in [0, 1].$$

Temos

$$f(x(t)) < tf(x^*) + (1 - t)f(x_0) = tf(x^*) + (1 - t)f(x^*) = f(x^*),$$

i.e.,

$$f(x(t)) < f(x^*),$$

o que é um absurdo pois  $x^*$  é mínimo global.  $\square$

Mencionamos anteriormente as funções côncavas sem dar muitos detalhes. Uma função é côncava se

$$f(ta + (1 - t)b) \geq tf(a) + (1 - t)f(b), \forall a, b \in I, \forall t \in (0, 1).$$

Apenas mudamos a orientação da desigualdade. Todas as considerações que foram feitas sobre funções convexas (e problemas de mínimo) podem ser adaptadas para funções côncavas (e problemas de máximo). Observe que, se  $f$  é convexa, então  $-f$  é côncava.

A seguir, demonstramos teoremas que são importantes para a solução de problemas de otimização (máximos e mínimos). O Teorema de Fermat estabelece uma condição necessária para que um ponto num aberto seja um extremo de uma função. Um ponto é dito um extremo local de uma função se é um máximo ou mínimo local. Com esta condição, podemos desenvolver os algoritmos vistos em Cálculo para solucionar problemas de otimização. O Teorema de Weierstrass nos permitirá dizer, em alguns casos, se o problema terá solução.

**Definição 10.4.** Uma função  $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $x_0 \in (a, b)$  se existe uma função linear  $y = kx$  tal que

$$f(x_0 + x) - f(x_0) = kx + r(x)$$

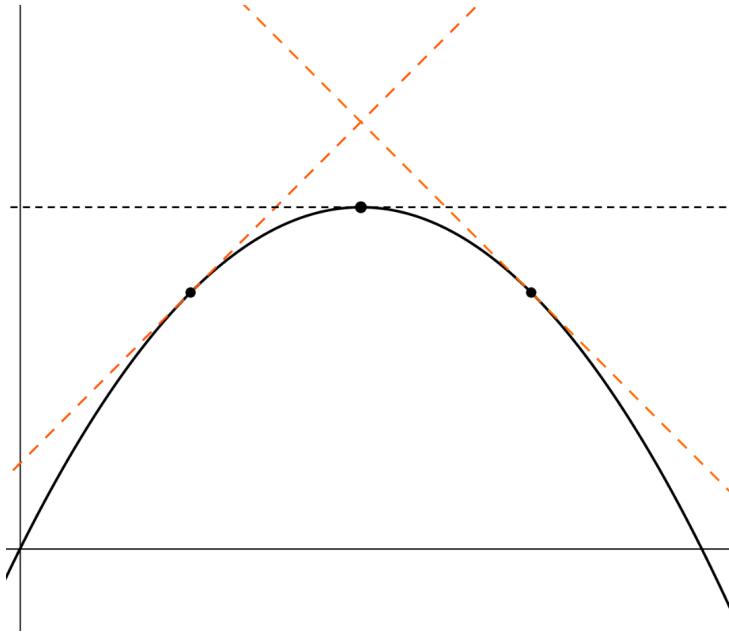
e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|r(x)|}{|x|} = 0.$$

Esta definição traz à tona a ideia de que podemos aproximar, localmente, uma função por sua reta tangente.

**Teorema 10.5** (Teorema de Fermat). Seja  $f$  uma função real definida num intervalo  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  e diferenciável em  $x_0 \in (a, b)$ . Se  $x_0$  é um extremo local de  $f$  (máximo ou mínimo), então  $f'(x_0) = 0$ .

A demonstração consiste em determinar o que ocorre se  $f'(x_0) \neq 0$ .



**Figura 10.7:** Ilustração da prova.

*Demonstração.* Suponha  $f'(x_0) = k > 0$ . Temos

$$r(x) = f(x_0 + x) - f(x_0) - kx$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|r(x)|}{|x|} = 0.$$

Então existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x| < \delta \implies |r(x)| < \frac{k}{2}|x|.$$

Se o incremento  $x$  é positivo, temos  $r(x) \geq -\frac{k}{2}x$  e segue que

$$\begin{aligned} f(x_0 + x) &= f(x_0) + kx + r(x) \\ &\geq f(x_0) + kx - \frac{k}{2}x \\ &= f(x_0) + \frac{k}{2}x > f(x_0) \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $x < 0$ , temos  $r(x) \leq -\frac{k}{2}x$  e segue que

$$\begin{aligned} f(x_0 + x) &= f(x_0) + kx + r(x) \\ &\leq f(x_0) + kx - \frac{k}{2}x \\ &= f(x_0) + \frac{k}{2}x < f(x_0), \end{aligned}$$

ou seja,

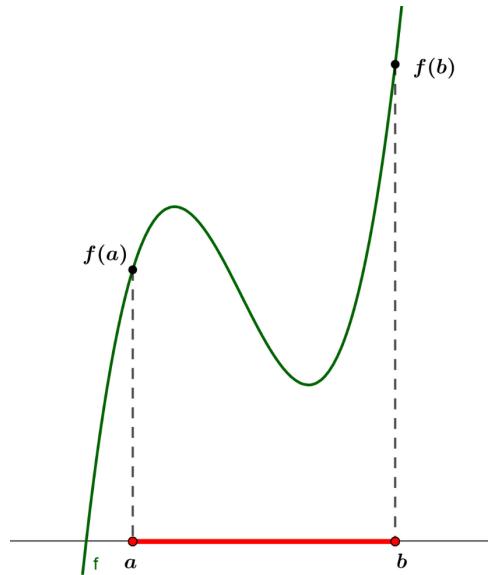
$$f(y) > f(x_0), \quad y > x_0$$

e

$$f(y) < f(x_0), \quad y < x_0,$$

para um  $y$  suficiente próximo de  $x_0$ . Com um raciocínio similar, chegamos ao mesmo resultado se  $f'(x_0) < 0$ . Portanto, para que  $x_0$  seja um extremo local, devemos ter  $f'(x_0) = 0$ .  $\square$

Como consequência deste Teorema, o método para encontrar máximos e mínimos de uma função é o bem conhecido “derivar e igualar a zero”.



**Teorema 10.6.** Uma função contínua definida num intervalo fechado atinge um máximo e um mínimo.

O teorema de Weierstrass mostra que um ponto pode ser extremo de uma função sem que exijamos que a derivada seja nula no ponto.

Antes de demonstrarmos o teorema, vamos demonstrar o seguinte lema, que pode ser estendido do intervalo fechado  $[0, 1]$  para os outros conjuntos compactos da reta real.

**Lema 10.6.1.** Toda sequência monótona de números no intervalo  $[0, 1]$  tem um limite neste intervalo.

*Demonstração.* Seja  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  uma sequência em  $[0, 1]$ . Suponha que seja não decrescente (os outros casos são análogos):

$$x_n \leq x_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Podemos representar qualquer número em  $[0, 1]$  como um decimal

$$0.n_1n_2\dots, \quad n_i \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Como é uma sequência não decrescente num intervalo limitado, deve haver um primeiro dígito  $n_1$  que se repete infinitamente. Seja  $x_{N_1}$  o primeiro com  $n_1$  sendo o primeiro dígito após o 0. Considerando a subsequência  $\{x_{N_1}, \dots\}$  dos números com  $n_1$  sendo o primeiro dígito após o 0, deve existir um dígito  $n_2$  que aparece infinitas vezes. Seja  $x_{N_2}$  o primeiro em  $\{x_{N_1}, \dots\}$  com  $n_2$  como segundo dígito.

Procedendo assim continuamente, chegamos num decimal

$$0.n_1n_2\dots$$

que representa um número  $x_0 \in [0, 1]$ . Começando com  $x_{N_1}$ , todos os números são da forma  $0.n_1\dots$ . Começando com  $x_{N_2}$ , todos são da forma  $0.n_1n_2\dots$  e assim por diante. Segue que, para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_n \leq x_0$$

por construção. Para um  $n > N_s$ , temos

$$x_0 - x_n \leq 10^{-s}$$

e temos

$$\lim x_n = x_0.$$

□

Vamos agora à demonstração do Teorema. Primeiro, lembramos que  $f$  é contínua em  $x_0$  se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Uma das consequências da continuidade é que, se  $(x_n)$  é uma sequência que converge para  $x_0$ , então  $(f(x_n))$  é uma sequência que converge para  $f(x_0)$ .

Seja  $f$  definida e contínua no intervalo  $[0, 1]$ , vamos mostrar que ela atinge um máximo. Dizemos que um intervalo  $\Delta_1 = [a_1, b_1]$  é melhor que um intervalo  $\Delta_2 = [a_2, b_2]$  se existe  $x^* \in \Delta_1$  tal que

$$f(x^*) > f(x), \forall x \in \Delta_2.$$

Seja  $\Delta^0 = [0, 1]$ . Dividimos ele em  $\Delta_1^1 = [0, 1/2]$  e  $\Delta_2^1 = [1/2, 1]$ . Denote por  $\Delta^1$  o melhor desses intervalos. Caso nenhum seja melhor, escolha qualquer um. Seja  $x_1$  a extremidade esquerda do intervalo. Para cada  $x \notin \Delta^1$ , deve existir um  $x^* \in \Delta^1$  tal que

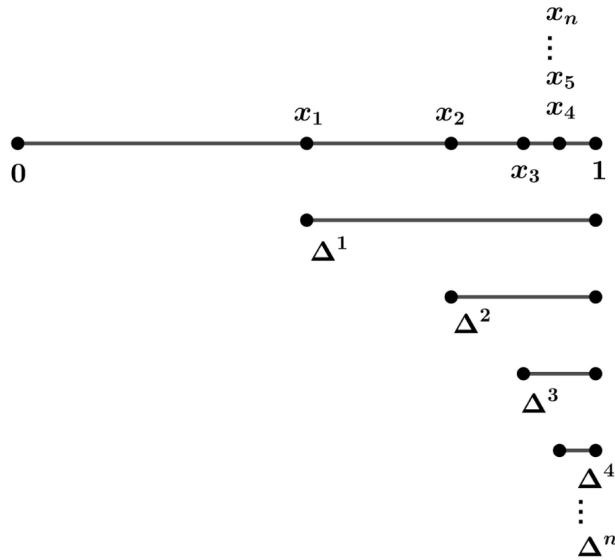
$$f(x^*) \geq f(x).$$

Se  $\Delta^1$  é o melhor isso vale. Se  $\Delta^1$  não é o melhor e não existe tais  $x^*$ , então  $[0, 1] - \Delta^1$  deve ser o melhor. O que é contraditório, por nossa escolha de  $\Delta^1$ . Dividimos  $\Delta^1$  em dois intervalos  $\Delta_1^2$  e  $\Delta_2^2$  e escolhemos o melhor entre eles  $\Delta^2$  como anteriormente, sendo  $x_2$  seu extremo esquerdo. Analogamente, existe  $x^* \in \Delta^2$  tal que

$$f(x^*) \geq f(x)$$

para cada  $x \notin \Delta^2$ .

Procedendo desta forma chegamos numa sequência  $(x_n)$  não decrescente em  $[0, 1]$ , que está ilustrada abaixo.



**Figura 10.8:** Construção da sequência  $(x_n)$  que é não decrescente em  $[0, 1]$ .

Seja  $x_0 = \lim x_n$ . Vamos mostrar que

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Suponha, por contradição, que existe um  $x' \in [0, 1]$  tal que  $f(x') > f(x_0)$ . Escolha  $\delta > 0$  tão pequeno de modo que

$$|x_0 - x'| > \delta \text{ e } |x_0 - x| < \delta,$$

com  $0 \leq x \leq 1$ . Isso implica que

$$f(x) \leq f(x_0) < f(x').$$

O tamanho dos intervalos  $\Delta^n$  é  $2^{-n}$ . Escolhemos  $n$  tão grande tal que  $\Delta^n \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Note que, pela escolha de  $\delta$ ,

$$x' \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

então existe  $y \in \Delta^n$  tal que

$$f(y) \geq f(x').$$

Por outro lado,  $|y - x_0| < \delta$  implica que

$$f(y) \leq f(x_0) < f(x'),$$

o que é um absurdo. Logo, chegamos à conclusão que queríamos.

# CAPÍTULO 11

---

## O princípio de Lagrange

Rafael Almeida e Thais Marçal

---

### 11.1 Funções de várias variáveis

Neste capítulo, vamos discutir meios de se resolver problemas de extremos para funções de várias variáveis, isto é, funções reais do tipo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . É recomendável que o leitor esteja familiarizado com o conceito de continuidade para funções de várias variáveis e com o que foi discutido no capítulo anterior.

Sejam  $f_0, f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções de  $n$  variáveis  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . A princípio, nós vamos considerar problemas para os quais as restrições podem ser tanto igualdades quanto desigualdades:

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min(\max), & f_i(x) &= 0, & i &= 1, \dots, m', \\ && f_i(x) &\leq 0, & i &= m' + 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{p}$$

Entretanto, em geral vamos lidar com problemas para os quais as restrições são somente igualdades, como por exemplo

$$\begin{aligned} f_0(x) &= (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \\ &\quad + (x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 \\ &\quad + (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 \rightarrow \min, & x &= (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{p_1}$$

e também

$$f_0(x) = x_1 \cdots x_n \rightarrow \max, \quad f_1(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0. \tag{p_2}$$

Note que para  $n = 2$ , (p<sub>2</sub>) é o problema planimétrico de Kepler e, para  $n = 3$ , é o problema clássico de Kepler do volume máximo de um paralelepípedo inscrito em uma esfera. Já (p<sub>1</sub>) é a formalização do problema de encontrar um ponto do plano tal que a soma dos quadrados das distâncias a três pontos dados é mínimo.

Obviamente, nem todo problema do tipo (p) tem uma solução. Entretanto, como no caso de uma função de uma variável, é possível formular um teorema, provado por Weierstrass, que garante a existência de uma solução para vários casos.

Seja  $C$  o conjunto dos pontos que satisfazem (p), isto é, o conjunto dos pontos  $x$  tais que

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m'$$

e

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = m' + 1, \dots, m.$$

O conjunto  $C$  é dito limitado se existe uma constante  $A > 0$  tal que  $|x_i| \leq A, i = 1, \dots, n$ , para todo  $x = (x_1, \dots, x_n)$  em  $C$ . Por exemplo, o conjunto  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$  é limitado e o conjunto  $x_1 = x_2^2$  (uma parábola) é ilimitado. Ademais, no nosso contexto diremos que  $C$  é um conjunto fechado\* se dada uma sequência de pontos  $c_n \in C$  que converge para  $c$ , temos  $c \in C$ . Um conjunto fechado e limitado é dito compacto.

**Teorema 11.1** (Weierstrass). Assuma que as funções  $f_0, \dots, f_m$  no problema (p) são contínuas e que o conjunto  $C$  de pontos admissíveis em (p) é compacto. Então os problemas

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min, & f_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m', \\ & & f_i(x) &\leq 0, \quad i = m' + 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{p}_{\min}$$

e

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \max, & f_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m', \\ & & f_i(x) &\geq 0, \quad i = m' + 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{p}_{\max}$$

são solucionáveis.

Esse teorema tem o seguinte importante corolário.

**Corolário 11.1.1.** Se a função  $f_0(x)$  é contínua para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_0(x) = \infty$$

quando  $x_1^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow \infty$  então o problema irrestrito

$$f_0(x) \rightarrow \min$$

tem solução.

**Definição 11.1.** Um ponto  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$  é dito ter um mínimo (máximo) local do problema (p) se existe  $\varepsilon > 0$  de modo que para todos os pontos admissíveis  $x = (x_1, \dots, x_n)$  tais que

$$|x_i - \hat{x}_i| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

a desigualdade  $f_0(x) \geq f_0(\hat{x})$  ( $f_0(x) \leq f_0(\hat{x})$ ) é válida.

Se  $\hat{x}$  produz um extremo local para o problema irrestrito (p), então nós também podemos dizer que  $\hat{x}$  produz um extremo local da função  $f_0$ .

Antes que possamos formular a regra fundamental para a solução de problemas do tipo (p), é necessário apresentar mais um conceito.

Seja  $f$  uma função definida para todo  $x = (x_1, \dots, x_n)$  satisfazendo as desigualdades

$$a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

---

\*Na verdade, essa é a definição de conjunto sequencialmente fechado. Entretanto, como o domínio das nossas funções é  $\mathbb{R}^n$ , que é um espaço métrico, sequencialmente fechado é equivalente a fechado.

(o conjunto de tais pontos é chamado paralelepípedo e denotado por  $\prod(a_1, b_1; \dots; a_n, b_n)$ ), e seja  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$  um ponto que satisfaça as desigualdades estritas

$$a_j < x_j < b_j, j = 1, \dots, n.$$

Considere a seguinte função de uma variável

$$g_j(x) = f(x_{01}, \dots, x_{0,j-1}, x_{0j} + x, x_{0,j+1}, \dots, x_{0n}).$$

Dito de outro modo, fixamos todas as coordenadas de  $x_0$  com exceção da  $j$ -ésima e acrescentamos  $x$  à  $j$ -ésima coordenada. Agora, vamos assumir que  $g_j$  é diferenciável no ponto 0, de modo que faz sentido a seguinte definição.

**Definição 11.2.** A derivada em 0 da função  $g_j$  é chamada de  $j$ -ésima derivada parcial da função  $f$  no ponto  $x_0$  e é denotada por  $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j}$ .

Agora, formulamos dois teoremas que nos permitirão estabelecer uma regra para a solução dos problemas do tipo (p). Vamos considerar primeiro o problema irrestrito (p).

**Teorema 11.2** (Fermat). Suponha que todos as derivadas parciais da função  $f_0$  existem no ponto  $\hat{x}$ . Se  $\hat{x}$  produz um extremo local (mínimo ou máximo) de  $f_0$  então

$$\frac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_j} = 0, j = 1, \dots, n \quad (11.1)$$

Note que esse teorema é a generalização natural do caso unidimensional, isto é, das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Os pontos em que todas as derivadas parciais se anulam são chamados de estacionários. Assim como no caso de dimensão 1, a igualdade (11.1) é uma condição necessária, mas não suficiente. A fim de ilustrar o uso deste teorema, vamos resolver o problema (p<sub>1</sub>). O Corolário 11.1.1 garante a existência de uma solução, digamos  $(\hat{x}, \hat{y})$ , que deve satisfazer

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f_0(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_1} = 2[(\hat{x} - a_1) + (\hat{x} - b_1) + (\hat{x} - c_1)] \implies \hat{x} = (a_1 + b_1 + c_1)/3 \\ 0 &= \frac{\partial f_0(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x_2} = 2[(\hat{y} - a_2) + (\hat{y} - b_2) + (\hat{y} - c_2)] \implies \hat{y} = (a_2 + b_2 + c_2)/3. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, a solução  $(\hat{x}, \hat{y})$  é o centro de gravidade do triângulo de vértices  $(a_1, a_2)$ ,  $(b_1, b_2)$ ,  $(c_1, c_2)$ .

Agora considere o problema (p) apenas com as igualdades e defina

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x),$$

onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ .  $\mathcal{L}(x, \lambda)$  é chamada função de Lagrange e os números  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  são os multiplicadores de Lagrange.

A seguir temos uma versão abreviada de um princípio geral de Lagrange: para resolver o problema (p) (considerando apenas igualdades), podemos construir a função de Lagrange e aplicar o Teorema 11.2. Daí, basta resolver as equações resultantes

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x_j} = 0, j = 1, \dots, n, \quad (11.2)$$

sob as restrições

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (11.3)$$

com respeito às variáveis  $x_1, \dots, x_n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  e toma, entre as soluções, a desejada. Essa regra é baseada no seguinte teorema, talvez familiar àqueles que já fizeram um curso de cálculo em várias variáveis.

**Teorema 11.3** (A regra do multiplicador de Lagrange). Sejam  $f_0, \dots, f_m$  funções definidas em um paralelepípedo  $\prod(a_1, b_1; \dots; a_n, b_n)$  que contém no seu interior o ponto  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ ,  $a_i < \hat{x}_i < b_i, i = 1, \dots, n$ . Suponha que todas as funções  $f_i, i = 0, 1, \dots, m$  e todas as derivadas parciais  $\partial f_i / \partial x_j, i = 0, 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  são contínuas neste paralelepípedo. Se o ponto admissível  $\hat{x}$  produz um extremo local (mínimo ou máximo), então existem  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  não todos nulos tais que

$$\frac{\mathcal{L}(\hat{x}, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

sendo  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$  e  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ .

Duas observações são necessárias. Primeiro, o sistema (11.2)-(11.3) contém  $n + m$  equações e  $n + m + 1$  incógnitas, devemos ter sempre em mente que os multiplicadores de Lagrange podem ser multiplicados por qualquer constante não nula. Daí, podemos assumir a menos de multiplicação por constante que um dos multiplicadores de Lagrange é 1, o que nos permite dizer que o sistema (11.2)-(11.3) tem o mesmo número de equações e incógnitas.

Uma segunda observação é que as equações em (11.2) trazem mais informação quando  $\lambda_0 \neq 0$ . De fato, se  $\lambda_0 = 0$  então as equações em (11.2) simplesmente refletem a degenerescência das restrições e não estão relacionadas à função cujo extremo estamos procurando. Normalmente, impõe-se restrições adicionais para garantir que  $\lambda_0 \neq 0$ ; no caso  $m = 2$  para o teorema que acabamos de enunciar, uma condição suficiente é que os vetores  $(\partial f_1(\hat{x}) / \partial x_1, \dots, \partial f_1(\hat{x}) / \partial x_n)$  e  $(\partial f_2(\hat{x}) / \partial x_1, \dots, \partial f_2(\hat{x}) / \partial x_n)$  não sejam proporcionais. Entretanto, não se deve presumir, a priori, que  $\lambda_0 \neq 0$ . O exemplo a seguir mostra que a regra do multiplicador de Lagrange pode falhar se fizermos essa suposição adicional.

**Exemplo 11.1.** Considere o problema

$$x_1 \rightarrow \min, \quad x_2^2 - x_1^3 = 0.$$

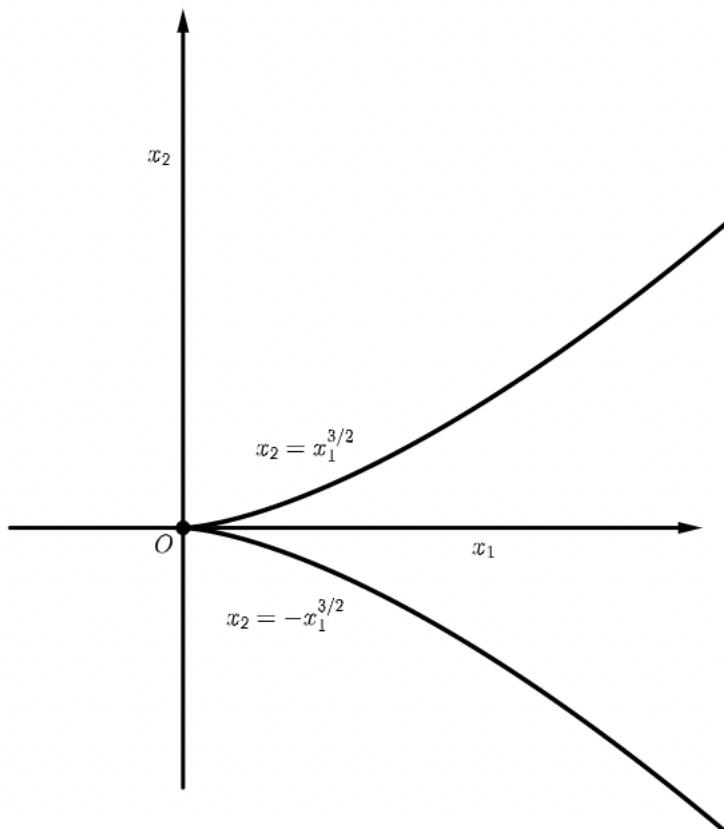
A Figura 11.1 mostra que a única solução do problema é o ponto  $\hat{x} = (0, 0)$ . Porém, ao tentarmos formar a função de Lagrange com  $\lambda_0 = 1$  e aplicar o algoritmo de Lagrange, temos

$$\mathcal{L} = x_1 + \lambda(x_2^2 - x_1^3),$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \implies -3\lambda x_1^2 + 1 = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \implies 2\lambda x_2 = 0.$$

Obtemos um sistema impossível.



**Figura 11.1:** Ilustração do exemplo.

A regra do multiplicador de Lagrange nos dá um método para procurar soluções do problema (p) com igualdades, dividido em 4 etapas, e chamado **princípio de Lagrange**.

1. A primeira etapa é a formalização do problema. Aqui tentamos, se possível, reduzir o problema à forma (p) sem desigualdades.
2. A segunda etapa é aplicar a regra dos multiplicadores de Lagrange, ou seja, montar o sistema de equações

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ f_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

3. A terceira etapa é encontrar todos os pontos estacionários. Aqui pode ser útil analisar primeiro quando que \$\lambda\_0\$ pode ser igual a zero.
4. A quarta etapa é selecionar, entre os pontos estacionários, os pontos onde a função \$f\_0\$ assume seu menor (ou maior) valor.

Os teoremas formulados acima implicam que (no problema sem desigualdades) se o conjunto de pontos admissíveis é compacto e são contínuas todas as funções \$f\_0, \dots, f\_m\$ juntamente com as derivadas parciais \$\partial f\_i / \partial x\_j\$, \$i = 0, \dots, m\$ e \$j = 1, \dots, n\$, então o método dado acima nos fornece uma solução para o problema. Para finalizar o capítulo, vamos elucidar alguns pontos discutidos acima. Observamos também que as demonstrações dos Teoremas 11.1, 11.2 e 11.3 estão além do escopo deste texto e, portanto, não serão apresentadas aqui.

## 11.2 Uma aplicação inusitada

Considere o problema

$$f_0(x_1, x_2) \rightarrow \max, \quad f_1(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 - b = 0,$$

ou seja,  $n = 2$ ,  $m = 1$  e a restrição é uma relação linear. O gráfico de  $y = f_0(x_1, x_2)$  pode ser pensado como a superfície de uma região montanhosa, de modo que a relação  $f_1(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 - b = 0$  define uma reta em um plano. Podemos visualizar essa situação como uma linha de transmissão de eletricidade sendo construída em uma região montanhosa ao longo de um caminho cuja representação, no mapa, é uma reta. Com isso, perguntamos: onde está o ponto mais alto da rota da linha de transmissão?

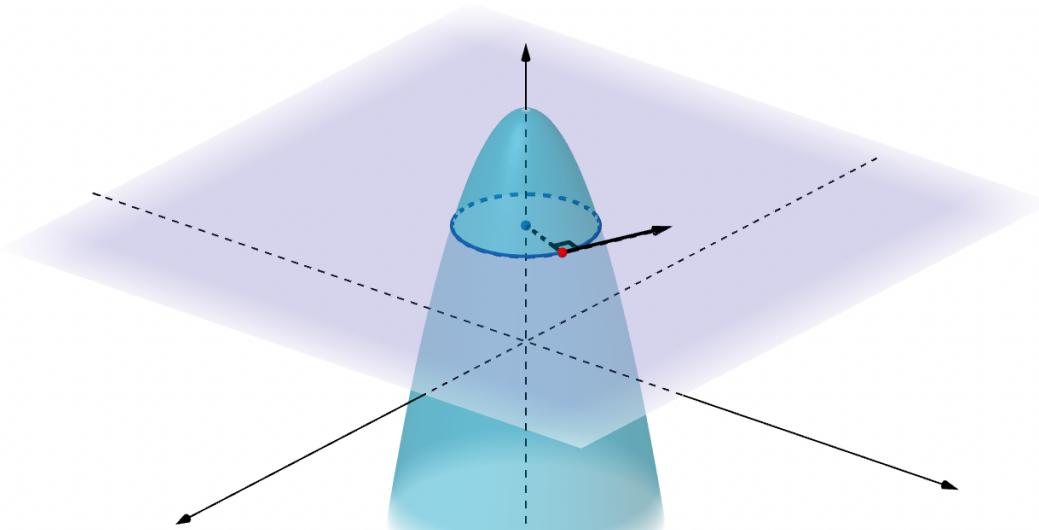
Para responder à pergunta, precisamos ter em mente que as montanhas são representadas como curvas de nível nos mapas, ou seja, curvas que ligam pontos à mesma altitude. Agora, pense na disposição da rota da linha de transmissão (no mapa) e da curva de nível da montanha no ponto mais alto da rota.

Observe que, no ponto que estamos interessados, a rota não pode interceptar a curva de nível. De fato, se isso ocorresse então a rota estaria passando de uma região mais alta para uma região mais baixa. Isso nos permite concluir que, no seu ponto mais alto, a rota deve ser tangente à curva de nível.

Voltando à função  $f_1$ , temos que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = a_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = a_2.$$

Interpretando geometricamente a equação  $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ , temos que o vetor  $(a_1, a_2)$  é perpendicular à rota e a cada uma das curvas de nível da função  $f_1(x_1, x_2)$ . Surpreendentemente, esse fato é geral: se  $f_1(x_1, x_2)$  é contínua com derivadas parciais contínuas, então o vetor  $(\partial f_1(\bar{x})/\partial x_1, \partial f_1(\bar{x})/\partial x_2)$  é perpendicular à tangente à curva de nível  $f(x) = f(\bar{x})$  em  $\bar{x}$ .



**Figura 11.2:** Ilustração do argumento.

Juntando os dois parágrafos anteriores, temos que  $(\partial f_0(\hat{x})/\partial x_1, \partial f_0(\hat{x})/\partial x_2)$  e  $(a_1, a_2)$  são ambos perpendiculares à rota e, portanto, múltiplos um do outro, isto é,

$$\frac{\partial f_0(\hat{x})}{x_1} + \lambda a_1 = 0, \quad \frac{\partial f_0(\hat{x})}{x_2} + \lambda a_2 = 0$$

ou

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\hat{x}, 1, \lambda)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\hat{x}, 1, \lambda)}{\partial x_2} = 0,$$

sendo

$$\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda f_1(x).$$

Nesse caso especial, recuperamos a regra do multiplicador de Lagrange e podemos, com argumentos similares, mostrar que esse é o caso sempre que  $f_1$  tenha derivadas parciais contínuas, ainda que não seja afim.

### 11.3 Uma observação sobre funções convexas

No capítulo anterior, falamos de funções convexas de uma variável. Funções convexas de várias variáveis são definidas de maneira inteiramente análoga: vamos dizer que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se dados  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  quaisquer e  $0 \leq \alpha \leq 1$ , vale a desigualdade de Jensen

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)x') \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x').$$

Alguns exemplos de funções convexas são funções lineares, funções afins e a função distância

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Diremos que  $y = f(x)$  é estritamente convexa se vale a desigualdade estrita acima, com  $0 < \alpha < 1$ . Alguns exemplos são  $y = x^2$  e  $y = x_1^2 + x_2^2$ . Não é muito difícil ver que se uma função estritamente convexa atinge um mínimo em  $\hat{x}$ , então esse mínimo é único. Ademais, se uma função convexa é diferenciável e suas derivadas se anulam em um certo ponto, então a função atinge um máximo ou mínimo absoluto nesse ponto.

Também é verdade que o gráfico de uma função convexa de mais de uma variável fica acima de qualquer um de seus planos tangentes. Isso nos permite concluir que, para funções convexas diferenciáveis, o teorema de Fermat nos dá uma condição suficiente para que um ponto seja extremo. Usaremos esta consequência no próximo capítulo.



# CAPÍTULO 12

---

## Resolução de problemas

Jorge Lucas e Thailany Machado

---

Neste capítulo, vamos resolver alguns problemas vistos nos primeiros capítulos do livro usando o princípio de Lagrange ou, em alguns casos especiais, o teorema de Fermat. Não resolvemos o problema isoperimétrico clássico, nem o problema da braquistócrona e nem o problema de Newton utilizando essa abordagem, por motivos que serão discutidos no próximo capítulo. Além disso, vamos assumir que o leitor se recorde das formulações dos problemas.

Seguiremos uma abordagem padrão, dividida em 4 etapas:

1. formalizar o problema;
2. usar o princípio de Lagrange ou o teorema de Fermat;
3. resolver as equações correspondentes;
4. escolher os pontos desejados e discutir a resposta.

Vamos começar com os problemas que se reduzem a encontrar extremos de funções de uma variável.

### 12.1 O problema de Snell sobre a refração da luz

Aqui, apresentamos a solução “padrão” do problema, como Leibniz foi o primeiro a fazer.

Para formalizar o problema, tomamos a reta que separa os dois meios como sendo o eixo  $x$  e a reta perpendicular a esse eixo por  $A$  como sendo o eixo  $y$ . Suponha que  $A = (0, a)$  e  $B = (d, -b)$ . Seja  $D' = (x, 0)$ . O tempo necessário para que a luz percorra o caminho  $AD'B$  é dado por

$$\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}.$$

Isso leva ao seguinte problema irrestrito

$$f_0(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2} \rightarrow \min.$$

Aplicando o princípio de Lagrange, devemos ter  $f'_0(x) = 0$ , o que suscita a seguinte equação

$$f'_0(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0.$$

Como cada uma das parcelas é monotônica (em  $x$ ), vemos que a equação  $f'_0(x) = 0$  tem uma única solução, digamos  $\hat{x}$ . Além disso, a convexidade de  $f_0$  nos garante que o teorema de Fermat nos dá uma condição suficiente para que um ponto seja extremo. Portanto,  $\hat{x}$  é uma solução e, ademais, a convexidade estrita de  $f_0$  garante que ela é única. A equação acima juntamente com a Figura 2.1 implicam na igualdade

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2},$$

que expressa a lei de Snell, em concordância com o que vimos anteriormente.

**Observação.** Note que não fizemos nada de muito diferente em relação ao que foi feito na Seção 2.1.

## 12.2 O problema de Tartaglia

Seja  $x$  o menor número. Então  $0 \leq x \leq 4$  e o maior número é  $8 - x$ . A diferença entre maior e menor é  $8 - 2x$ , de modo que temos a seguinte formalização para o problema

$$f_0(x) = x(8-x)(8-2x) \rightarrow \max, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

Novamente, a condição que deve ser satisfeita é  $f'_0(x) = 0$ . Considerando a expressão de  $f_0$ , os pontos estacionários são

$$f'_0(x) = (2x^3 - 24x^2 + 64x)' = 6x^2 - 48x + 64 = 0 \iff x_1 = 4 - \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = 4 + \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Como  $x_2 > 4$ , vamos descartá-la. Portanto, temos três pontos críticos: 0, 4 e  $x_1$ . Como  $f_0$  é contínua e diferenciável em todo ponto e está sendo considerada em um intervalo finito, a solução deve estar entre os pontos críticos. Ora, mas  $f_0(0) = 0 = f_0(4)$  e  $f_0(x_1) > 0$ , de modo que  $x_1$  é a solução do problema.

## 12.3 A desigualdade aritmético-geométrica

Para provar a desigualdade usando o princípio de Lagrange, vamos primeiro considerar um problema auxiliar:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \rightarrow \max \\ f_1(x) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ f_i(x) &= x_{i-1} \geq 0, \quad i = 2, 3, \dots, n+1, \end{aligned}$$

com  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . As funções  $f_i$  e suas derivadas parciais são contínuas. Como  $0 \leq x_k \leq 1$  para todo  $k$ , segue que o conjunto de pontos admissíveis é limitado. Pelo teorema de Weierstrass, segue que existe uma solução  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$  e é claro que  $\hat{x}_k \neq 0$  para todo  $k$  pois, do contrário, teríamos  $f_0(\hat{x}) = 0$  sendo que há pontos admissíveis tais que  $f_0(x) > 0$  (por exemplo,  $x_i = 1/n$  para todo  $i$ ). Note ainda que  $\hat{x}$  é um máximo local do problema acima e, como mostramos que  $\hat{x}_k > 0$ , segue que esse ponto também será um máximo local para o problema sem desigualdades.

Começando com o nosso passo a passo, temos a seguinte formalização

$$f_0(x) \rightarrow \max, f_1(x) = 1.$$

A função de Lagrange para esse problema é  $\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x)$ . Daí, a condição que deve ser satisfeita é a regra do multiplicador de Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = 0, k = 1, \dots, n.$$

Para encontrar os pontos estacionários, denotamos  $A = \hat{x}_1 \cdots \hat{x}_n$  e obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k}(\hat{x}, \lambda_0, \lambda_1) = 0 \implies \frac{\lambda_0 A}{\hat{x}_k} + \lambda_1 = 0.$$

Se tivéssemos  $\lambda_1 = 0$ , então  $\lambda_0 = 0$ , o que é um absurdo. Logo,  $\hat{x}_k = -\lambda_0 A / \lambda_1$ , ou seja,  $\hat{x}_1 = \dots = \hat{x}_n = 1/n$ , já que  $\hat{x}_1 + \dots + \hat{x}_n = 1$ . Como o ponto estacionário é único, segue que ele resolve o problema.

Podemos, agora, provar a desigualdade: sejam  $a_1, \dots, a_n$  números reais não negativos quaisquer. Sejam  $S = a_1 + \dots + a_n$  e  $x_j = a_j/S$ . Então a soma dos  $x_j$  é igual a 1 e, pelo que acabamos de mostrar, segue que

$$\frac{a_1 \cdots a_n}{S^n} = x_1 \cdots x_n \leq \frac{1}{n^n} \implies a_1 \cdots a_n \leq \left( \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right)^n,$$

demonstrando a desigualdade.

## 12.4 A desigualdade aritmético-quadrática

Procedemos analogamente à seção anterior e consideramos o problema auxiliar

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x_1 + \cdots + x_n \rightarrow \max \\ f_1(x) &= x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1, \end{aligned}$$

sendo  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Novamente, as funções  $f_0, f_1$  e suas derivadas parciais são contínuas. Como  $-1 \leq x_k \leq 1, k = 1, \dots, n$ , segue que o conjunto de pontos admissíveis é limitado. Portanto, existe uma solução para o problema e podemos aplicar o princípio de Lagrange. A função de Lagrange para esse caso é

$$\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x).$$

Identicamente à seção anterior, aqui a condição que deve ser satisfeita pela solução  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$  é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0, j = 1, \dots, n.$$

Calculando essa derivada em  $(\hat{x}, \lambda_0, \lambda_1)$ , temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}(\hat{x}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 + 2\lambda_1 \hat{x}_j = 0.$$

Como  $\lambda_1 = 0$  implica  $\lambda_0 = 0$ , segue que  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\hat{x}_j = -\lambda_0/2\lambda_1$ , ou seja,  $\hat{x}_1 = \dots = \hat{x}_n = 1/\sqrt{n}$ , já que  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Como o ponto estacionário é único, segue que ele é a solução para o problema.

Para provar a desigualdade desejada, sejam  $a_1, \dots, a_n$  números reais quaisquer,  $S = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}$  e  $x_j = a_j/S$ . Então  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Pelo problema que acabamos de resolver, temos que

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{S} = x_1 + \dots + x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

donde segue que

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \frac{S}{\sqrt{n}} = \left( \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \right)^{1/2}$$

e fica demonstrada a desigualdade. Juntando essa desigualdade com a desigualdade aritmético-geométrica, obtemos a terceira desigualdade

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \left( \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Podemos ainda utilizar o mesmo argumento para mostrar que se  $a_1, \dots, a_n$  são números não negativos quaisquer e

$$S_p = \left( \frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{1/p}, \quad \sum_p = a_1^p + \dots + a_n^p,$$

então

$$\begin{aligned} S_p &\leq S_q \text{ se } p \leq q \\ \sum_p &\leq \sum_q \text{ se } p \geq q. \end{aligned}$$

## 12.5 As desigualdades de Cauchy-Bunyakovski e de Hölder

Para terminar o capítulo, vamos demonstrar novamente as desigualdades de Cauchy e de Hölder, começando pela de Cauchy.

Sejam  $a_1, \dots, a_n$  números reais fixados, não todos nulos. Considere o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \rightarrow \max \\ f_1(x) &= x_1^2 + \dots + x_n^2 = B^2, \end{aligned}$$

com  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . As funções  $f_0, f_1$  e suas derivadas parciais são contínuas e, como  $-B \leq x_j \leq B$  para  $j = 1, \dots, n$ , segue que o conjunto de pontos admissíveis é limitado,

ou seja, existe solução (digamos  $\hat{x}$ ) e podemos aplicar o princípio de Lagrange. A função de Lagrange neste caso é  $\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x)$ . Fazendo  $A = (a_1^2 + \cdots + a_n^2)^{1/2}$ , a solução deve ser tal que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Segue então que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}(\hat{x}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 a_j + 2\lambda_1 \hat{x}_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Novamente, não podemos ter  $\lambda_1 = 0$ . Portanto,

$$\hat{x}_j = -\lambda_0 a_j / 2\lambda_1 = C a_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

sendo  $C = \lambda_0 / 2\lambda_1$ . Como  $\hat{x}_1^2 + \cdots + \hat{x}_n^2 = B^2$ , segue que

$$C^2(a_1^2 + \cdots + a_n^2) = B^2 \implies C = \pm B/A.$$

Portanto, temos dois pontos estacionários e a solução corresponde ao ponto com  $\hat{x}_j = Ba_j/A$ . Para aplicar esse resultado à desigualdade de Cauchy, sejam  $b_1, \dots, b_n$  números quaisquer e  $B^2 = b_1^2 + \cdots + b_n^2$ . Pelo que acabamos de ver,

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq a_1 \frac{Ba_1}{A} + \cdots + a_n \frac{Ba_n}{A} = AB = (a_1^2 + \cdots + a_n^2)^{1/2} (b_1^2 + \cdots + b_n^2)^{1/2},$$

que é a desigualdade de Cauchy.

Para mostrar a desigualdade de Hölder, procedemos de maneira inteiramente análoga: consideramos primeiro o problema

$$\begin{aligned} f_0(x) &= a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \rightarrow \max \\ f_1(x) &= |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p = B^p, \end{aligned}$$

sendo  $a_i > 0$  para todo  $i$  e  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . A função de Lagrange é  $\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x)$ . A existência de solução é novamente garantida pelo teorema de Weierstrass. Vamos chamá-la de  $\hat{x}$  e denotar  $A = (a_1^{p'} + \cdots + a_n^{p'})^{1/p'}$ , sendo  $p'$  tal que  $1/p + 1/p' = 1$ . A condição que  $\hat{x}$  deve satisfazer é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

de modo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}(\hat{x}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 a_j \pm p\lambda_1 |\hat{x}_j|^{p-1} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

o que implica que

$$\hat{x}_j = C a_j^{p'-1}, \quad C = \pm B/A^{p'/p},$$

usando o fato de que

$$p - 1 = \frac{1}{p' - 1},$$

já que  $1/p + 1/p' = 1$ .

Novamente, a solução é a com sinal positivo,  $\hat{x}_j = Ba_j^{p'-1}/A^{p'/p}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Para aplicar esse resultado, considere  $b_1, \dots, b_n$  números quaisquer não negativos. Pelo problema que acabamos de resolver,

$$\begin{aligned} a_1b_1 + \dots + a_nb_n &\leq a_1\frac{B}{A^{p'/p}}a_1^{p'-1} + \dots + a_n\frac{B}{A^{p'/p}}a_n^{p'-1} \\ &= \frac{B}{A^{p'/p}}(a_1^{p'} + \dots + a_n^{p'}) \\ &= \frac{B}{A^{p'/p}}A^{p'} \\ &= BA^{p'(1-1/p)} \\ &= BA, \end{aligned}$$

que é a desigualdade de Hölder, lembrando que  $B = (b_1^p + \dots + b_n^p)^{1/p}$  e  $A = (a_1^{p'} + \dots + a_n^{p'})^{1/p'}$ .

# CAPÍTULO 13

---

## Sobre funcionais lineares e o problema de Dido

Anita Boaventura, Herbert Luan e Lívia Nascimento

---

Neste último capítulo, vamos apresentar o conceito de funcional e enunciar um princípio de Lagrange para eles. Com isso, poderemos formalizar o problema de Dido e resolvê-lo de uma maneira diferente da apresentada anteriormente.

O desenvolvimento de métodos para a solução de problemas de máximo e mínimo está intimamente ligado à história da análise matemática, tendo em vista que tais problemas pertencem, por natureza, ao campo da Análise.

Lembre-se de que, a princípio, resolvemos tais problemas de maneira individual, com cada problema tendo uma solução particular. Essa, na verdade, foi a primeira abordagem para a solução de problemas do tipo, mas, no início do século XVII, começou-se a busca por métodos gerais que permitissem investigar problemas de extremo de maneira unificada.

Seria razoável imaginar que, após estudar problemas de extremo para funções de uma variável, seguiríamos para duas variáveis, três variáveis e assim por diante, aumentando a dimensão do domínio uma unidade por vez. Entretanto, não foi isso que aconteceu: começou-se a estudar funções de infinitas variáveis, e passaram-se décadas antes que a atenção dos analistas voltasse aos problemas de dimensão finita.

O problema de Newton, o problema da braquistócrona e o problema isoperimétrico clássico são três exemplos nos quais consideramos “curvas arbitrárias”. Elas não podem ser dadas por um número finito de parâmetros, ou seja, a “regra” que as define envolve um número infinito de variáveis. Esse é o motivo pelo qual não pudemos resolver esse três problemas no capítulo anterior.

A teoria que se desenvolveu para lidar com problemas de extremo de funções de infinitas variáveis veio a se chamar **Cálculo de Variações**. A Análise para funções com um número finito de variáveis se desenvolveu um pouco depois e, mais recentemente, percebeu-se que a análise matemática de funções de infinitas variáveis não é, a princípio, mais complicada do que a análise em dimensão finita.

## 13.1 O que é uma função com um número infinito de variáveis?

Nos capítulos anteriores, estudamos funções de uma variável, que associam, a um número  $x$ , um único número  $y$ ; estudamos algumas funções de duas variáveis, que associam, a um par de números  $(x_1, x_2)$ , um único número  $y$ ; e também estudamos funções de  $n$  variáveis.

Entretanto, também vimos exemplos de funções em que as variáveis eram funções, que são exemplos de funções com infinitas variáveis. Tais tipos de correspondência, funções de funções, são usualmente chamados de **funcionais**, que foram estudados por quase duzentos anos antes que aprendêssemos a lidar com funções de infinitas variáveis com tanta facilidade quanto funções de uma variável.

Considere o conjunto (ou espaço), denotado por  $C([a, b])$ , de todas as funções contínuas definidas em um segmento  $[a, b]$  da reta real. Agora, pense nessas funções como variáveis, e vamos tentar entender a natureza de uma função  $F(y)$  definida no espaço  $C([a, b])$ . Pelo próprio significado de “função”,  $F$  deve ser uma regra que nos permite calcular o número  $F(y)$  para uma dada função contínua  $y(x)$  em  $[a, b]$ . Vamos considerar alguns exemplos, tomando  $a = 0$  e  $b = 1$ .

**Exemplo 13.1.** Considere  $F_1$  dada por

$$F_1(y) = 2y(0).$$

Dito de outro modo, a imagem da função  $y$  por  $F_1$  é a imagem de 0 por  $y$  multiplicada por 2. Então, por exemplo,

$$\begin{aligned} y(x) &= x, \forall x \in \mathbb{R} \implies F_1(y) = 2 \cdot 0 = 0 \\ y(x) &= \sqrt{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R} \implies F_1(y) = 2 \cdot \sqrt{1} = 2 \\ y(x) &= 5 \cdot 2^x, \forall x \in \mathbb{R} \implies F_1(y) = 2 \cdot 5 = 10. \end{aligned}$$

Podemos fazer o mesmo para outras funções, como  $y(x) = 3 \cos(x+2)$ ,  $y(x) = 5 \ln(x+3)$ , e por assim em diante. Nesses casos, é fácil computar  $F_1(y)$ .

**Exemplo 13.2.** Considere agora  $F_2$  dada por

$$F_2(y) = \int_0^1 y(x) dx,$$

que nada mais é do que a área sob o gráfico de  $f$ . Nesse caso, se  $y(x) = x$  então  $F_2(y) = \frac{1}{2}$ ; se  $y(x) = \sin(x)$  então  $F_2(y) = 1 - \cos 1$ , e assim por diante. Esse funcional é importante, e recebe o nome de **funcional área**.

Podemos pensar num exemplo mais elaborado.

**Exemplo 13.3.** Agora, tome  $F_3$  dada por

$$F_3(y) = (2y(0))^3 - \left( \int_0^1 y(x) dx \right)^2.$$

Esse funcional é um pouco mais complexo. Dada uma função  $y(x)$ , precisamos calcular  $y(0)$ , multiplicá-lo por 2 e elevar ao cubo o número resultante; depois, calculamos a

integral de  $y(x)$  em  $[0, 1]$ , elevamos o resultado ao quadrado e subtraímos esse quadrado do cubo encontrado anteriormente.

Por exemplo, suponha que  $y(x) = x$ . Então,  $F_3(y) = -1/4$ . Se  $y(x) = 5 \cdot 2^x$ , então calcular  $F_3(y)$  será um pouco difícil. O que importa, entretanto, é que em princípio podemos realizar essa tarefa e obter  $F_3(y)$  para cada função (bem definida)  $y(x)$  dada.

Comentamos, no capítulo sobre a definição do conceito de função, sobre representações de funções através de gráficos. Entretanto, em geral é complicado “representar” um funcional.

O funcional mais simples que podemos considerar é o funcional constante,  $F(y) \equiv c$ . Ele associa, a cada função contínua  $y$ , o número  $c$ . Subindo um degrau na escada de complexidade, poderíamos pensar em funcionais “lineares”. Por analogia, a definição precisa de funcional linear seria um funcional  $F$  tal que

$$F(\alpha y_1 + y_2) = \alpha F(y_1) + F(y_2),$$

para todo par de funções  $y_1, y_2$  no domínio do funcional e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

As funções nos dois primeiros exemplos acima são lineares, enquanto que a função no terceiro exemplo não é linear. Aqui, no caso de dimensão infinita, temos uma abundância de funções lineares. Num certo sentido, há “mais” funções lineares do que funções contínuas.

A Análise em dimensão infinita estuda funcionais definidos em espaços de dimensão infinita, como  $C([a, b])$ . Outro exemplo de espaço de dimensão infinita com o qual o cálculo de variações operou, basicamente, por 2 séculos  $C^1([a, b])$ , o espaço das funções continuamente diferenciáveis, isto é, o espaço das funções  $y(x)$  que são contínuas e têm derivada contínua no intervalo  $[a, b]$ . De maneira mais geral, diremos que  $y \in C^1$  se  $y$  é continuamente diferenciável em todo  $\mathbb{R}$ .

Vamos definir alguns funcionais importantes em  $C^1$ , com significados geométricos e físicos. Abaixo, damos alguns exemplos.

**Exemplo 13.4.** Começamos com o funcional comprimento,  $L$ , dado por

$$L(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

que associa, a cada função  $y \in C^1$ , o seu comprimento no intervalo  $[a, b]$ .

**Exemplo 13.5.** O funcional de Johann Bernoulli,  $T$ , dado por

$$T(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx,$$

sendo  $g$  a aceleração da gravidade. Esse funcional associa, a cada curva  $y$  definida de 0 até  $a$ , o tempo necessário para percorrê-la.

**Exemplo 13.6.** O nosso terceiro exemplo é o funcional de Newton,  $F$ , dado por

$$F(y) = 2K \int_0^R \frac{x}{1 + (y'(x))^2} dx, \quad K = 2\pi\rho v^2,$$

que associa, a cada curva  $y \in C^1$ , a resistência ao seu movimento em um meio raro.

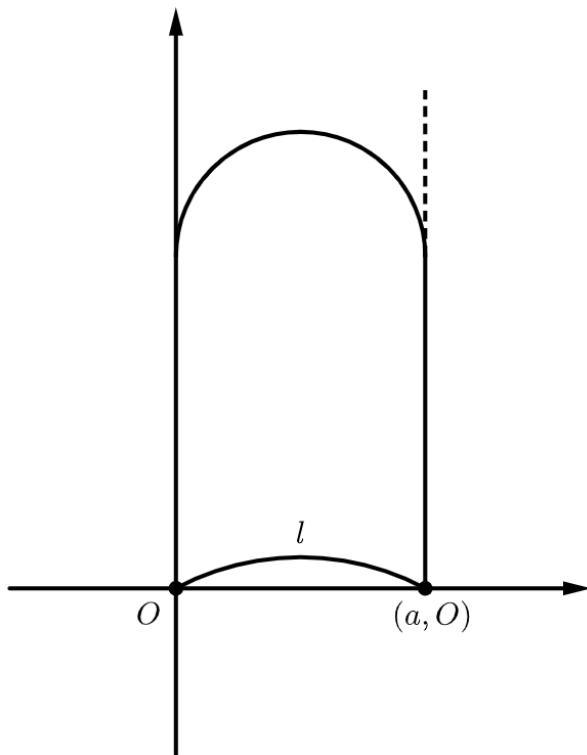
## 13.2 Problemas extremos para funcionais

Daqui em diante, vamos nos concentrar sobre o problema de Dido e uma pequena variação dele, que servirão de guias para os problemas de extremo para funcionais.

**Problema 13.1** (Primeiro problema de Dido). Determinar a forma ideal de um pedaço de terra que, com um perímetro fixo  $l$ , tenha área máxima.

A variação que consideraremos é a seguinte.

**Problema 13.2** (Segundo problema de Dido). Entre todos os arcos de comprimento  $l$  na meia fita  $[0, a] \times [0, +\infty)$  com extremidades  $(0, 0)$  e  $(a, 0)$ , encontrar o arco que, junto com o segmento  $[0, a]$  sobre o eixo  $x$ , limite uma figura de área máxima. Ilustramos a situação na Figura 13.1.



**Figura 13.1:** Ilustração do segundo problema de Dido.

Vamos formalizar o segundo problema e, ao final do capítulo, resolver o primeiro problema. Seja  $y = y(x)$  a equação do arco. Tendo em mente as expressões dos funcionais área e comprimento, obtemos a seguinte formalização

$$S(y) = \int_0^a y(x) dx \implies \max, \quad L(y) = \int_0^a \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = l,$$

com  $y(0) = 0$  e  $y(a) = 0$ , chamadas condições de contorno.

O funcional a ser maximizado é o funcional área,  $S$ . A restrição é dada pela igualdade  $L(y) = l$ , sendo  $L$  o funcional comprimento. As condições de contorno também são dadas pelas equações  $\Gamma_1(y) = 0$  e  $\Gamma_2(y) = 0$ , sendo  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  os funcionais dados por  $\Gamma_1(y) = y(0)$  e  $\Gamma_2(y) = y(a)$ .

Para resolver esses dois problemas, precisaremos enunciar o análogo do princípio de Lagrange para funcionais.

Suponha que  $f$  seja uma função contínua de três variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  e considere o funcional

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Esse funcional pode ser considerado em diferentes espaços, mas vamos considerá-lo no espaço  $C^1$ .

No capítulo anterior, apresentamos o problema de minimização ou maximização de uma função de um certo número de variáveis, sujeita a restrições de igualdade e desigualdade. Na falta de restrições de desigualdades, o problema tomaria a forma

$$F_0(x) \rightarrow \min(\max), F_i(x) = 0, i = 1, \dots, m, \quad (\text{p})$$

sendo  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $F_i(x)$  funções de  $n$  variáveis.

Vamos estudar problemas nos quais  $F_i$  são funcionais. Sejam  $f_0, f_1, \dots, f_m$  funções de  $x$ ,  $y$  e  $z$  e considere seus respectivos funcionais  $F_0(y), F_1(y), \dots, F_m(y)$  e o seguinte problema variacional.

$$F_0(y) \rightarrow \min(\max), F_i(y) = \alpha_i, i = 1, \dots, m. \quad (\text{p}_1)$$

Esse problema é chamado de problema isoperimétrico do cálculo de variações clássico. As funções  $y(x)$  em  $C^1([a, b])$  satisfazendo as condições  $F_1(y) = \alpha_1, i = 1, \dots, m$ ,  $y(a) = y_0$ , e  $y(b) = y_1$ , são ditas admissíveis no problema  $(\text{p}_1)$ . Na falta de restrições do tipo  $F_i(y) = \alpha_i$ , o problema  $(\text{p}_1)$  assume a forma

$$F_0(y) \rightarrow \min \left( \iff \int_a^b f_0(x, y(x), y'(x)) dx \rightarrow \min \right) \quad (\text{p}_2)$$

para todo  $y(x)$  tal que  $y(a) = y_0$  e  $y(b) = y_1$ . O problema  $(\text{p}_2)$  é o problema mais simples do cálculo de variações clássico. O segundo problema de Dido é do tipo  $(\text{p}_1)$ .

Antes de apresentarmos um método para resolver  $(\text{p}_1)$ , precisamos definir a noção de mínimo/máximo locais para funcionais. Essa definição necessariamente passa pela noção de distância entre funções.

Definiremos a norma de  $y \in C^1([a, b])$  como sendo

$$\|y\|_1 = \max_{x \in [a, b]} |y(x)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x)|,$$

de modo que a distância entre  $y_1$  e  $y_2$  é  $\|y_2 - y_1\|_1$ . Para funções  $y \in C([a, b])$ , definimos a norma como

$$\|y\|_0 = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|.$$

Com isso, definimos

**Definição 13.1.** Uma função  $\hat{y}(x)$  é um mínimo (máximo) local no problema  $(\text{p}_1)$  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todas as funções admissíveis em  $(\text{p}_1)$  satisfazendo

$$\|y - \hat{y}\| < \varepsilon$$

temos  $F_0(y) \geq F_0(\hat{y})$  (analogamente,  $F_0(y) \leq F_0(\hat{y})$ ).

Agora, lembre que o princípio de Lagrange para o problema (p) consistia de duas afirmações:

1. para problemas irrestritos, uma condição necessária para um extremo no ponto  $\hat{x}$  é a igualdade

$$F'_0(\hat{x}) = 0.$$

2. para resolver (p), devemos formar a função de Lagrange e tratá-la como se as variáveis fossem independentes, isto é, devemos aplicar o Teorema de Fermat.

A segunda afirmação é o que chamamos de princípio de Lagrange, e essas duas afirmações têm um análogo para o problema (p<sub>2</sub>), contido no seguinte teorema.

**Teorema 13.1** (Euler). Seja  $f_0 \in C^1$  no problema mais simples (p<sub>2</sub>) uma função de três variáveis. Se  $\hat{y}(x)$  é um máximo ou mínimo local em (p<sub>2</sub>), vale

$$\frac{d}{dx} f_{0y}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)) - f_{0v}(x, \hat{v}(x), \hat{y}'(x)) = 0,$$

chamada equação de Euler para (p<sub>2</sub>). Suas soluções são os pontos estacionários do problema.

Com isso, Euler forneceu o seguinte algoritmo para resolver (p<sub>2</sub>):

1. encontrar as soluções da equação de Euler que passam pelos pontos desejados;
2. escolher, entre elas, a que minimiza/maximiza o funcional  $F_0$ .

Para (p<sub>1</sub>), podemos aplicar o método de Lagrange sem alterações. Precisamos formar a função de Lagrange

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^m \lambda_i F_i(y),$$

que também pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

sendo

$$f(x, y, z) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x, y, z).$$

Daí, basta proceder como se quiséssemos encontrar extremos de  $\mathcal{L}$  com as funções  $y$  sendo independentes. Dito de outro modo, devemos lidar com a equação de Euler

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0 \iff \frac{d}{dx} (\lambda_0 f_{0y'} + \cdots + \lambda_m f_{my'}) - (\lambda_0 f_{0y} + \cdots + \lambda_m f_{my}) = 0.$$

Esse passo a passo é baseado no seguinte teorema, que não demonstraremos.

**Teorema 13.2.** Sejam  $f_0, \dots, f_m \in C^1$ . Se  $\hat{y}(x)$  é um extremo de (p<sub>1</sub>), então existem  $\lambda_0, \dots, \lambda_m$  não todos nulos tais que vale a equação de Euler

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (\lambda_0 f_{0y'}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)) + \cdots + \lambda_m f_{my'}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x))) \\ & - (\lambda_0 f_{0y}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)) + \cdots + \lambda_m f_{my}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x))) = 0. \end{aligned} \tag{13.1}$$

As soluções dessa equação são ditas estacionárias.

Esse teorema justifica o seguinte passo a passo para resolver (p1):

1. formalizamos o problema;
2. aplicamos o princípio de Lagrange, isto é, adaptamos a equação de Lagrange junto com as equações  $F_i(y) = \alpha_i$  e as condições  $y(a) = y_0$ ,  $y(b) = y_1$ ;
3. encontramos todas as soluções estacionárias;
4. entre elas, selecionamos as que são solução do problema.

Agora, basta utilizar esse algoritmo para resolver o segundo problema de Dido:

1. a formalização já foi feita, com  $f_0(x, y, z) = y$  e  $f_1(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$ .
2. formamos a soma  $f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1$  e escrevemos a equação de Euler:

$$\frac{d}{dx} \lambda_1 \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - \lambda_0 = 0.$$

3. agora, resolvemos essa equação sob a hipótese de que se  $\lambda_0 = 0$ , então  $\hat{y} = 0$  (deixamos a verificação para o leitor), e isso ocorre só se  $l = a$ . Então, se  $l > a$ , podemos assumir  $\lambda_0 = 1$  e obter

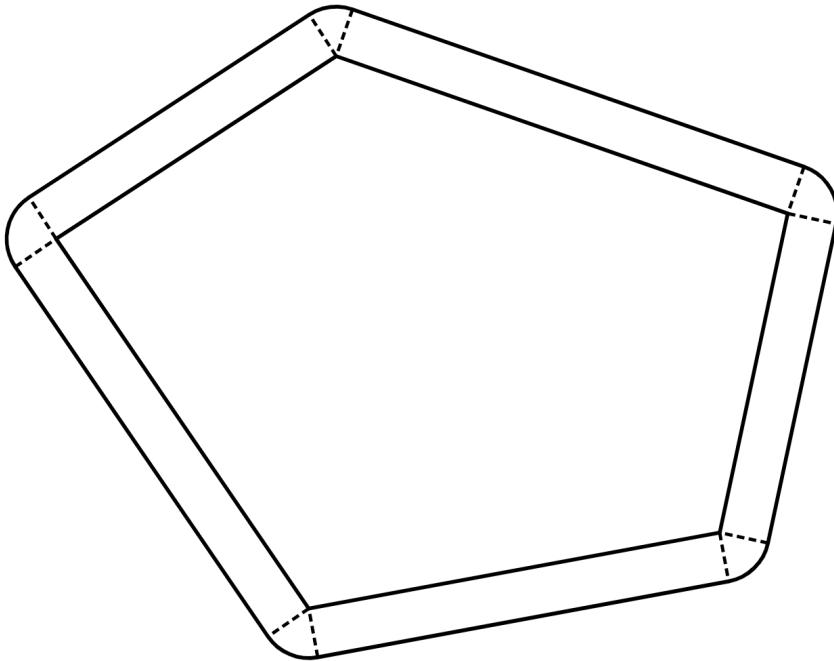
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \lambda_1 \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 1 &\Rightarrow \frac{\lambda_1 y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x + c \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = Cx + D \\ &\Rightarrow \frac{y'^2}{1 + y'^2} = (Cx + D)^2 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\pm(Cx + D)}{\sqrt{1 - (Cx + D)^2}} \\ &\Rightarrow dy = \pm \frac{(Cx + D)dx}{\sqrt{1 - (Cx + D)^2}} \\ &\Rightarrow d \left( y \pm \frac{1}{C} \sqrt{1 - (Cx + D)^2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow (x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2, \end{aligned}$$

que define uma família de circunferências;

4. resta encontrar a solução desejada; se  $a \leq l \leq \pi a/2$ , então nossa família de circunferências contém apenas uma circunferência com perímetro  $l$  e que passa pelos pontos  $(0, 0)$  e  $(a, 0)$ . Se  $l > \pi a/2$ , então a solução será a semicircunferência de centro  $(a/2, l - \pi a/2)$  e raio  $a/2$  “complementado” pelos segmentos  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq l - \pi a/2$ ,  $x = a$ ,  $0 \leq y \leq l - \pi a/2$  (vide Figura 13.1).

Vamos terminar o capítulo resolvendo o primeiro problema de Dido por meio de ferramentas da análise convexa.

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  duas figuras planas convexas. Denotamos por  $\alpha A_1 + \alpha A_2$  a figura plana formada por todos os vetores  $x$  da forma  $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ , com  $x_1 \in A_1$ ,  $x_2 \in A_2$  e  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ . A “soma” de um polígono e uma circunferência é mostrada abaixo.



**Figura 13.2:** Soma de um polígono com uma circunferência.

Seja  $S(A)$  a área de  $A$ . Em meados do século XIX, o geômetra alemão Brunn provou que:

$$\sqrt{S(\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2)} \geq \alpha \sqrt{S(A_1)} + (1 - \alpha) \sqrt{S(A_2)}. \quad (13.2)$$

No final do século XIX, H. Minkowski provou que a igualdade em (13.2) é possível se, e somente se,  $A_1$  e  $A_2$  forem semelhantes.

Agora, seja  $A$  uma figura convexa e  $B$  uma circunferência unitária. Então, temos a seguinte igualdade, que foi provada por Steiner:

$$S(A + \rho B) = S(A) + p(A)\rho + \pi\rho^2, \quad (13.3)$$

sendo  $p(A)$  o perímetro de  $A$ . Para um polígono convexo, (13.3) é óbvia (vide Figura 13.2). No caso geral, isso pode ser comprovado tomando-se o limite.

Mostraremos como (13.2) e (13.3) implicam imediatamente na solução do problema isoperimétrico. A seguir, usamos o fato de que  $p(\alpha A) = \alpha P(A)$  e  $S(\alpha A) = \alpha^2 S(A)$ . Por um lado, usando (13.3), temos

$$\begin{aligned} \sqrt{S(\alpha A + (1 - \alpha)B)} &= \sqrt{S(\alpha A) + p(\alpha A)(1 - \alpha) + \pi(1 - \alpha)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 S(A) + \alpha(1 - \alpha)p(A) + \pi(1 - \alpha)^2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando (13.2), temos

$$\sqrt{S(\alpha A + (1 - \alpha)B)} \geq \alpha \sqrt{S(A)} + (1 - \alpha) \sqrt{\pi}.$$

Juntando ambos os resultados, obtemos

$$\sqrt{\alpha^2 S(A) + \alpha(1 - \alpha)p(A) + \pi(1 - \alpha)^2} \geq \alpha \sqrt{S(A)} + (1 - \alpha) \sqrt{\pi}$$

onde segue, elevando ao quadrado ambos os lados e eliminando termos semelhantes, que

$$p(A) \geq 2\sqrt{\pi S(A)} \iff p^2(A) \geq 4\pi S(A),$$

como desejado. Aqui, a igualdade é válida apenas se  $A$  for uma circunferência.

---

## Bibliografia

---

- [Kleiner, 1989] Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20(4):282–300.
- [Thomas, 2012] Thomas, G. B. (2012). *Cálculo: Volume 1*. Pearson, 12<sup>a</sup> edition.
- [Tikhomirov, 1991] Tikhomirov, V. M. (1991). *Stories about Maxima and Minima*, volume 1 of *Mathematical World*. American Mathematical Society.