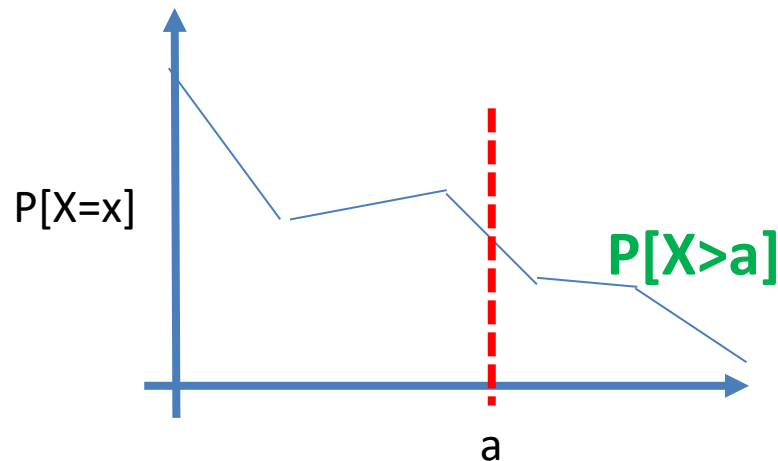


Variáveis Aleatórias em Situações Limite

Soma de Variáveis Aleatórias
Desigualdades de Markov e Chebyshev
Lei dos Grandes Números
Teorema do Limite Central

Motivação

- Vimos que $E[X]$ dá informação sobre o valor médio de uma variável aleatória X
 - Muito útil para muitos problemas
- No entanto, em diversas situações interessa-nos saber a probabilidade para valores distantes de $E[X]$
 - Ou seja, o que acontece na “cauda” (tail) da distribuição



Motivação

- Também nos interessam situações limite
- Por exemplo, saber **o que acontece quando n tende para infinito** ao valor esperado e variância da Média de n medições
- Outro exemplo, muito importante:
 - Ao fazermos centenas de milhar ou milhões de experiências **nas nossas simulações** (teoria frequencista) **estamos de facto a garantir boas estimativas das probabilidades ?**

Motivação

- Se somarmos duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 **quais as características** da variável aleatória $S = X_1 + X_2$?
 - Em termos de momentos ?
 - Em especial média e variância
 - Em termos de função de distribuição ?
- E no caso geral $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$?

Média da soma de n variáveis

- Sejam X_1, X_2, \dots, X_n , n variáveis aleatórias e $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ a sua soma
- Teorema: **A média da soma de n variáveis é igual à soma das médias**
- Demonstração

$$\begin{aligned} E[S_n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_j f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} x_j f_{X_j}(x_j) dx_j = \sum_{j=1}^n E[X_j] \end{aligned}$$



Variância da soma de n variáveis

- Considerando da mesma forma $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$:
- Teorema: **A variância da soma de n variáveis aleatórias é dada pela soma de todas as variâncias e covariâncias**

$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^n Cov(X_j, X_k)$$

- Demonstração:

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= E \left[\sum_{j=1}^n (X_j - E[X_j]) \sum_{k=1}^n (X_k - E[X_k]) \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E[(X_j - E[X_j]) (X_k - E[X_k])] \end{aligned}$$



Variância da soma de n variáveis

- Se as variáveis **são independentes**,
 $Cov(X_j, X_k) = 0$, para todo o $j \neq k$, pelo que:
- **$Var(S_n) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$**
– **Variância da soma igual a soma das variâncias**
- Se para além de independentes forem **identicamente distribuídas (IID)**
e tivermos $E[X_i] = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n$
a média e variância da soma são dadas por:
- $E[S_n] = n \mu$ e $Var(S_n) = n \sigma^2$



Função de distribuição da soma de 2 variáveis aleatórias independentes

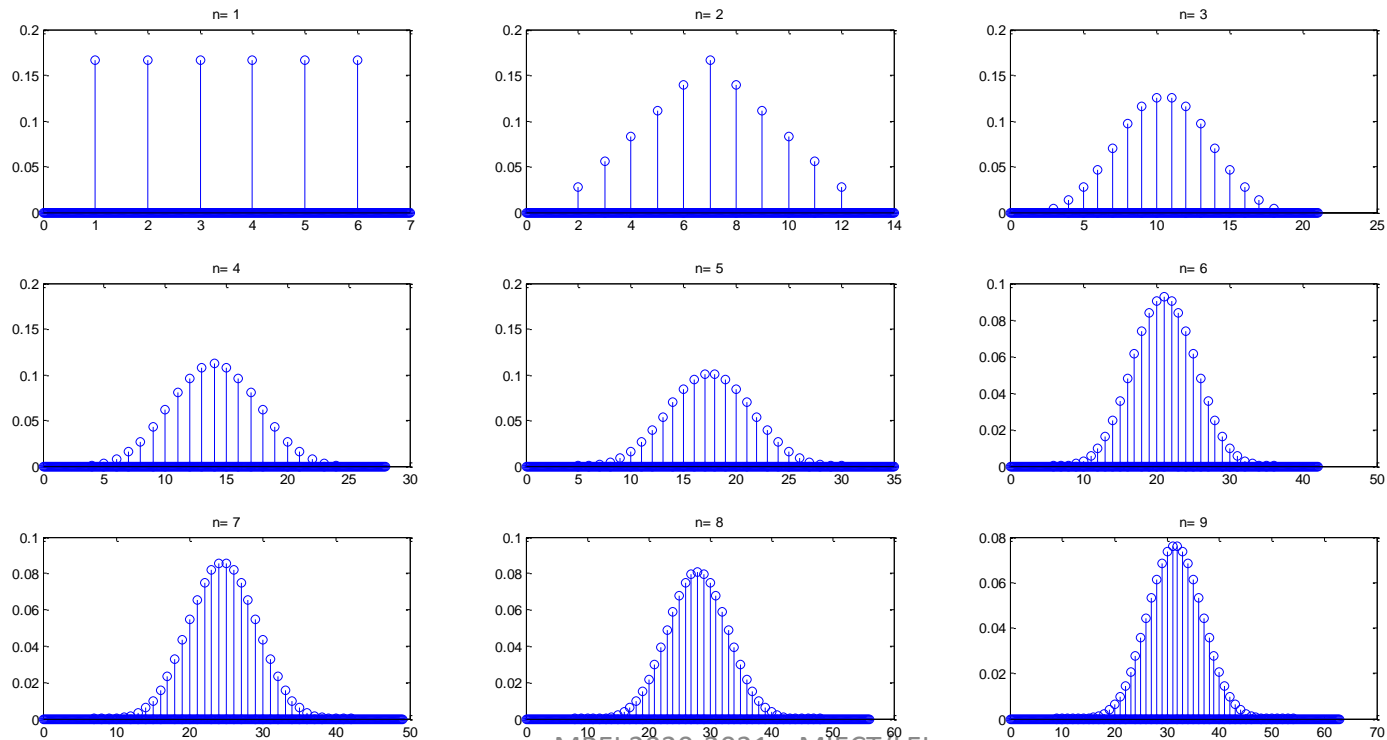
- Caso discreto (2 v.a. Discretas X e Y)
- Fazendo $Z = X + Y$
- $p_Z(z) = P(X + Y = z)$
 $= \sum_{\{(x,y)|x+y=z\}} P(X = x, Y = y)$
 $= \sum_x P(X = x, Y = z - x)$
 $= \sum_x p_X(x) p_Y(z - x)$; devido à indep.
 $= p_X(x) * p_Y(z)$
- Que é a **convolução** discreta de p_X e p_Y



demoConvolucao.m

Exemplo (em Matlab)

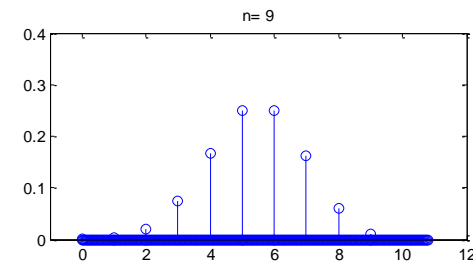
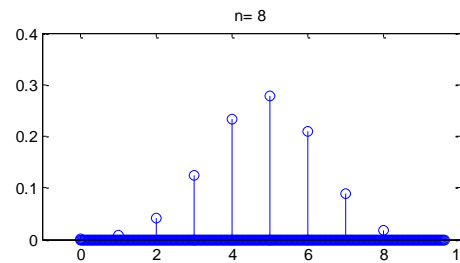
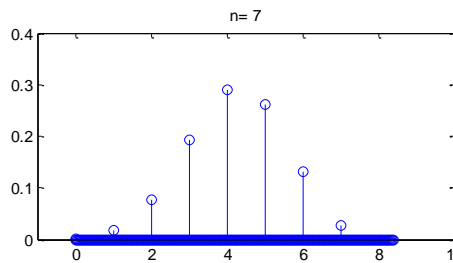
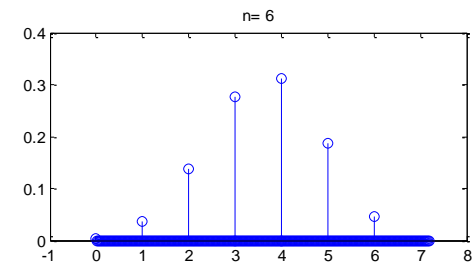
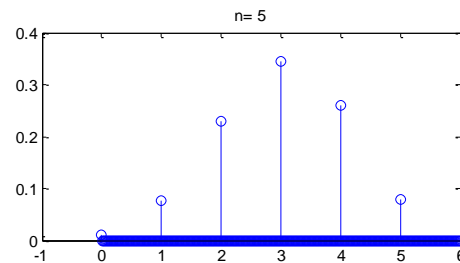
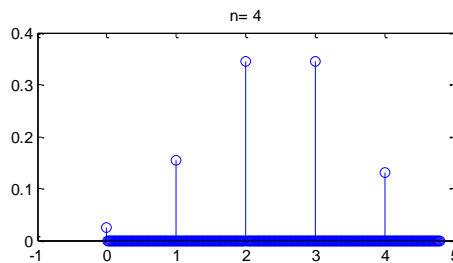
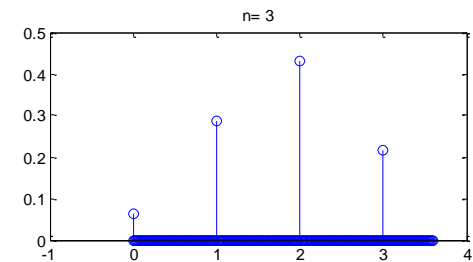
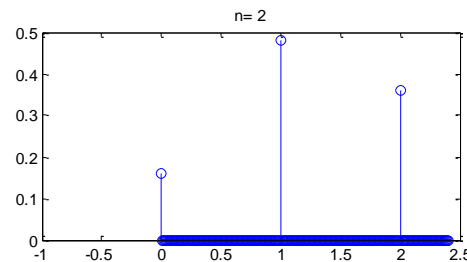
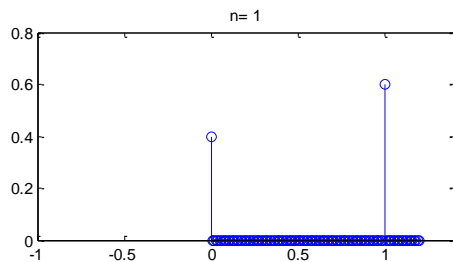
- Usando `conv()` e a pmf relativa à variável X correspondente ao lançamento de um dado honesto ($n=1, 2, \dots, 9$)



Outro exemplo

demoConvolucaoMoeda.m

- Sendo X relativa ao número de caras num lançamento de moeda não honesta
– com probabilidade de cara = 0,6



Caso contínuo

- Sendo X e Y independentes e contínuas
- Fazendo novamente $Z = X + Y$
- Para obter a função densidade prob. de Z , primeiro obtém-se a f. densidade conjunta de X e Z e depois integra-se

$$\begin{aligned} F_{Z|X}(z|x) &= \mathbf{P}(Z \leq z | X = x) = \mathbf{P}(X + Y \leq z | X = x) = \mathbf{P}(x + Y \leq z | X = x) = \mathbf{P}(Y \leq z - x | X = x) \\ &= \mathbf{P}(Y \leq z - x) \quad \text{using the independence of } X \text{ and } Y \\ &= F_Y(z - x) \end{aligned}$$

$$f_{Z|X}(z|x) = \frac{d}{dz} F_{Z|X}(z|x) = \frac{d}{dz} F_Y(z - x) = f_Y(z - x)$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Z}(x,z) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_{Z|X}(z|x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx \equiv f_X * f_Y(z) \end{aligned}$$

Obtém-se através da
convolução, agora contínua

Média e variância da Média

- Se criarmos a v.a. relativa à média de n variáveis IID X_i ,
 $M_n = \frac{S_n}{n}$
- assumindo $E[X_i] = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$, teremos :

$$E[M_n] = E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{\sum_i E[X_i]}{n} = E[X_i] = \mu$$

- $Var[M_n] = Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \frac{\sum_i Var[X_i]}{1} = \frac{Var(X_i)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$
- À medida que se aumenta o número de experiências vai diminuindo a variância da estimativa da média

Questões

- Quanto provável é termos a média das amostras superior a um determinado valor?
 - Exemplo: o dobro do valor esperado
- Quanto próxima a média obtida com as amostras fica do valor médio ?
- Qual a distribuição da média para valores de n muito grandes ?

Desigualdades de Markov e Chebyshev

- Os dois teoremas que apresentaremos de seguida, sem muita preocupação com demonstrações, **permitem estabelecer facilmente majorantes** para probabilidades de certas classes de acontecimentos
 - partindo apenas do conhecimento da média e variância de uma variável aleatória
 - Mais informação, por exemplo, na secção 4.6 do livro de F. Vaz e A. Teixeira (Bibliografia)

Questão 1

- Probabilidade de termos valores superiores a um determinado valor ?
- Exemplo:
- A média das classificações numa turma é 15,2.
- Será que conseguimos determinar um limite superior para probabilidade de um dos alunos ter nota igual ou superior a 17 ?

Desigualdade de Markov

- Seja X uma variável aleatória **não negativa**
- Pela Desigualdade de Markov:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}, \quad \forall a > 0$$

- Esta desigualdade dá-nos um limite superior para a probabilidade de a função X ser maior ou igual a um determinado valor
- Qual o valor de P com $a = E[X]$?
 - $E a < E(X)$?
 - $E a > E(X)$?

Desigualdade de Markov

- Demonstração:

- $E[X] = ?$

- $= \int_0^a x f_X(x) dx + \int_a^\infty x f_X(x) dx \geq$

- $\geq \int_a^\infty x f_X(x) dx \geq \int_a^\infty a f_X(x) dx =$

- $\geq a P[X \geq a]$

- Logo: $P[X \geq a] \leq \frac{E[X]}{a}$

Exemplo

- A média da altura de uma população é 1,65 m.
- Qual o limite superior de probabilidade de um indivíduo ultrapassar os 2 metros ?
- $P(X \geq 2) \leq \frac{1,65}{2} = 0,825$
- (Nota: Limite não muito útil ou significativo !)

Exemplo 2

- A média das classificações numa turma é 15,2.
- Qual o limite superior de probabilidade de um dos alunos ter nota igual ou superior a 17 ?
- $P(X \geq 17) \leq \frac{15,2}{17} = 0.8941$
- E superior a 19?
- $P(X \geq 19) \leq \frac{15,2}{19} = 0.8$

Questão 2

- Quão provável é a **diferença entre a variável e o seu valor esperado** ser superior/inferior a um determinado valor ?

- Isto é $P(|X - E[X]| \geq a) = ?$

Ou $P(|X - E[X]| < a) = ?$

- Exemplo: Probabilidade de os valores diferirem da média mais que 2 desvios padrão ?

Desigualdade de Chebyshev

- Pela Desigualdade de Chebyshev temos:

- $P(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$

- Ou, em alternativa:

- $P(|X - E[X]| < a) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$

Desigualdade de Chebyshev

- Demonstração:
- Define-se $D^2 = (X - E[X])^2$
- É óbvio que $D^2 \geq 0$ e $D^2 \geq a^2 \Leftrightarrow |D| \geq a$
- Aplicando a Desigualdade de Markov
- $P(|D| \geq a) = P(D^2 \geq a^2)$
- $P(D^2 \geq a^2) \leq \frac{E[(X - E[X])^2]}{a^2}$
- $P(D^2 \geq a^2) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2} ; P((X - E[X])^2 \geq a^2) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$
- Assume-se $E[X]$ e $\text{Var}(X)$ finitos

Desigualdade de Chebyshev

- Se expressarmos a em função do desvio padrão, fazendo $a = h\sigma$, teremos:
- $P(|X - E[X]| \geq h\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(h\sigma)^2} = \frac{1}{h^2}$
- Ou seja: a probabilidade de obter um valor que dista da média de h desvios padrão ou mais é menor ou igual a $\frac{1}{h^2}$
 - Exemplos:
 - $h=1 \Rightarrow P \leq 1$
 - $h=2 \Rightarrow P \leq \frac{1}{4}$

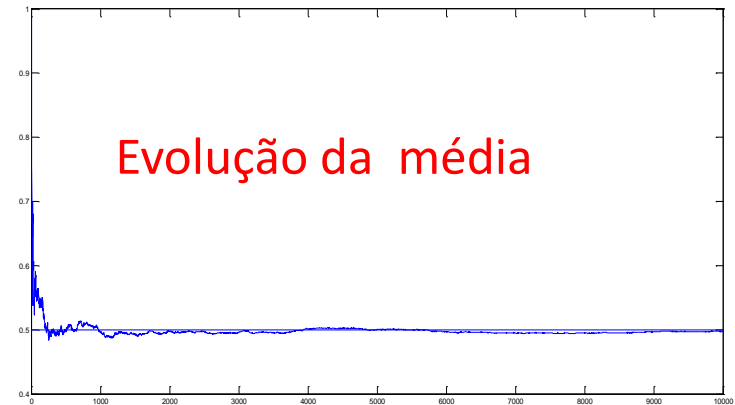
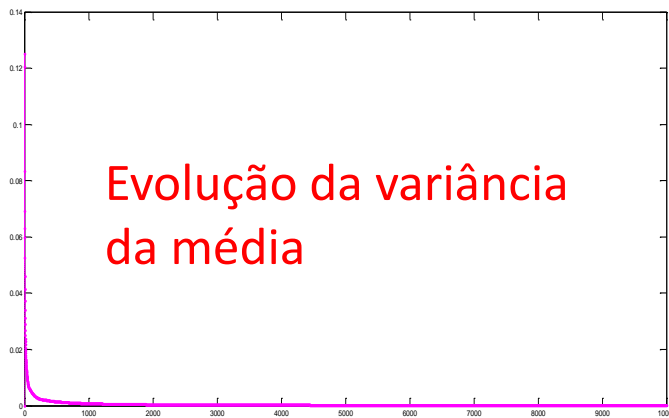
Valores com pouco precisão

Questão 3

- Ao fazermos centenas de milhar ou milhões de experiências nas nossas simulações (teoria frequencista) estamos de facto a garantir boas estimativas das probabilidades ?

Voltando à média de n variáveis aleatórias ...

- Como vimos, a **variância da média das estimativas** tende para 0 à medida que n aumenta



- O que se pode interpretar como a probabilidade da média das amostras se aproximar do valor médio ser cada vez maior, aproximando-se de 1

Voltando à média de n variáveis aleatórias ...

- Qual a **probabilidade da média das amostras se aproximar do valor médio** (a menos de ϵ) ?
 - Ou seja: $P(|M_n - E[M_n]| < \epsilon)$
- Recorrendo à Desigualdade de Chebyshev temos:
- $$P(|M_n - E[M_n]| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(M_n)}{\epsilon^2}$$
- $$P(|M_n - E[M_n]| \geq \epsilon) \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\epsilon^2}$$
- $$P(|M_n - E[M_n]| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n \epsilon^2}$$

Lei fraca dos grandes números

- Passando ao limite a última expressão teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|M_n - E[M_n]| < \epsilon) = 1$$

- Resultado que é conhecido por **Lei Fraca dos Grandes Números**

Leis dos grandes números (LGN)

- Existe um segundo enunciado (fora dos objectivos de MPEI), a **lei forte dos grandes números**, que afirma:

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \mu) = 1$$

- A **Lei Fraca dos Grandes Números** afirma que para um valor de n suficientemente elevado a média das amostras estará muito próxima do valor esperado

- Enquanto que a lei forte garante que é certo que o limite para que tende a média (das amostras) é o valor esperado

L. G. N. e definição frequencista

- Consideremos uma **sequência de experiências aleatórias independentes e repetidas**
- e seja I_j uma variável aleatória indicadora da ocorrência do evento A na experiência de ordem j

[1 significa que A ocorreu]

- O número total de ocorrências de A nas n experiências será:

$$N_n = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

L. G. N. e definição frequencista

- Como a frequência relativa de A é

$$f_A(n) = \frac{(I_1 + I_2 + \dots + I_n)}{n}$$

- f_A é a média das amostras das variáveis aleatórias I_i

- Então (pelas duas leis dos grandes números):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f_A(n) - p(A)| < \epsilon) = 1$$

e

$$P[\lim_{n \rightarrow \infty} f_A(n) = p(A)] = 1$$

- Permitindo-nos dizer que **a frequência relativa é uma boa estimativa da probabilidade**



Um pouco de História (para terminar esta parte)

- 1713: Lei fraca descrita por Jacob **Bernoulli**
- 1835: **Poisson** chama-lhe “La Loi des Grands Nombres”
 - Lei dos Grandes Números em Francês
- 1909: Émile Borel desenvolve a Lei forte para variáveis de Bernoulli
- 1928: Andrei Nikolaevich **Kolmogorov** prova a Lei forte no caso geral

Qual a distribuição de M_n para valores de n muito grandes ?

Questão

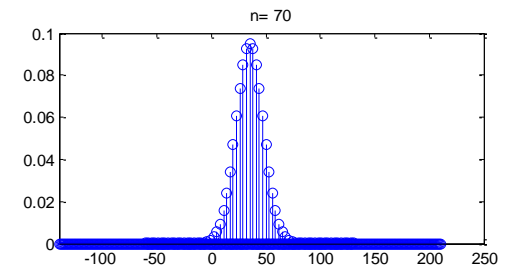
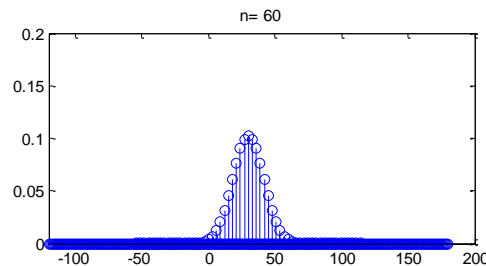
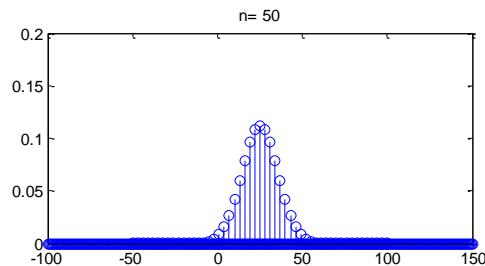
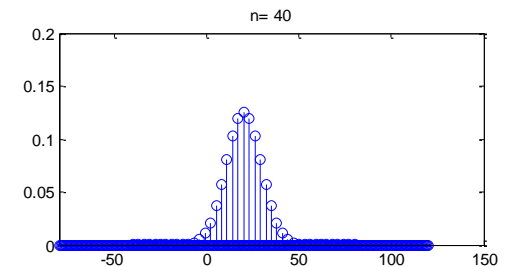
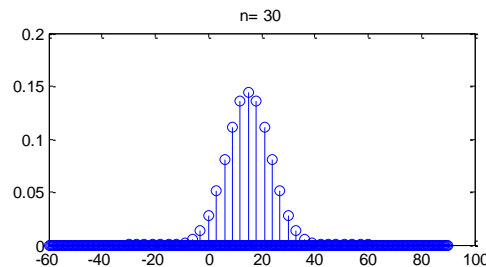
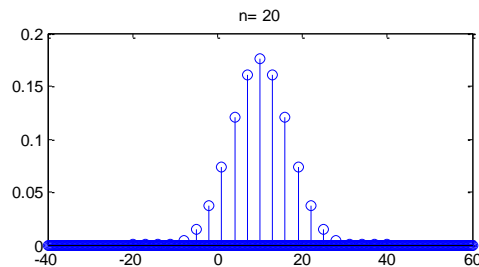
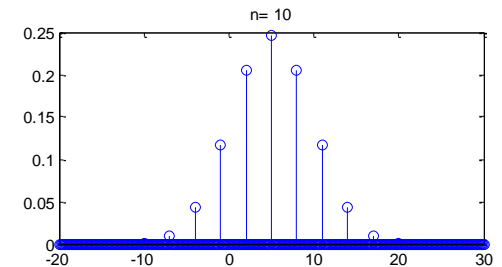
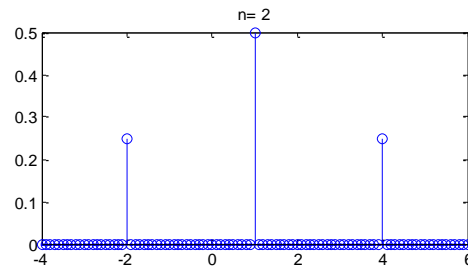
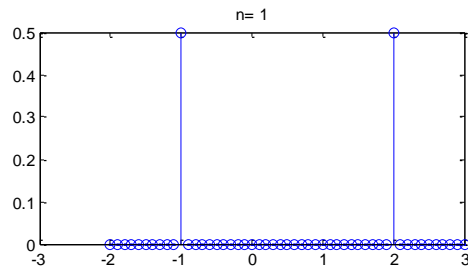
- Já vimos o comportamento limite da média de uma sequência de variáveis aleatórias
- Conseguimos avançar mais e dizer alguma coisa quanto à distribuição ?
- Começemos com alguns exemplos ...

Exemplo 1

- Consideremos um jogo em lançamos uma moeda ao ar e **perdemos 1 Euro se sair CARA** e **ganhamos 2 Euros se sair COROA**
- A moeda é honesta e existe independência entre as jogadas
- Como se comporta a distribuição com as jogadas ?

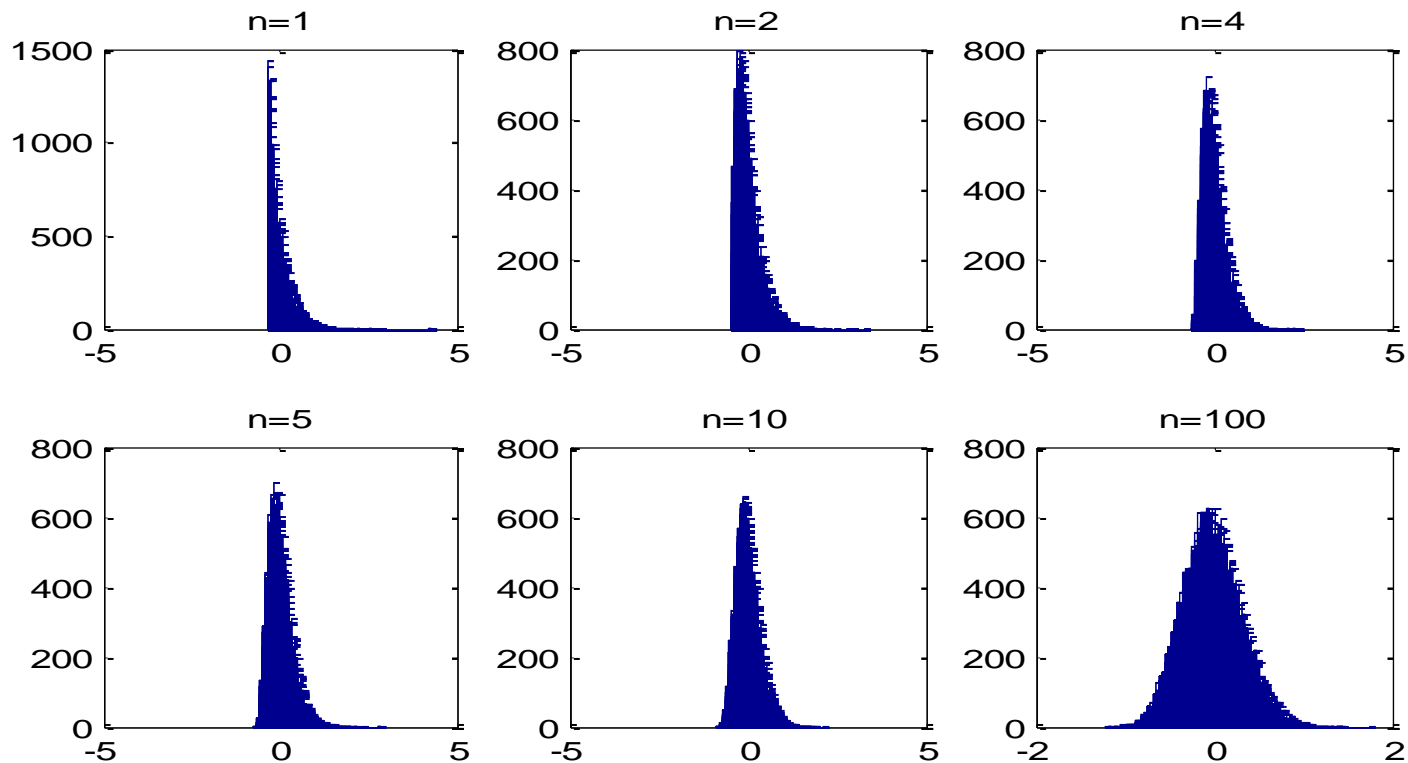
Continuando o jogo

- Recorrendo a simulação em Matlab...



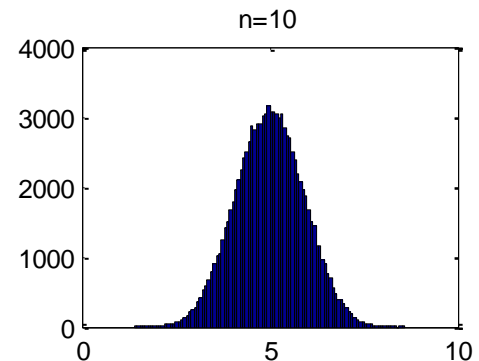
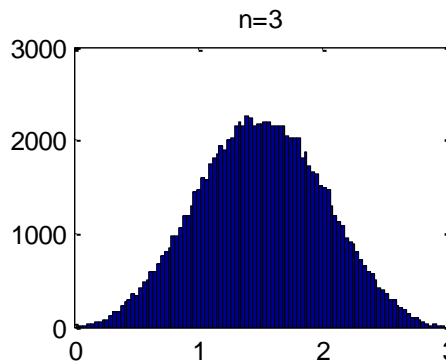
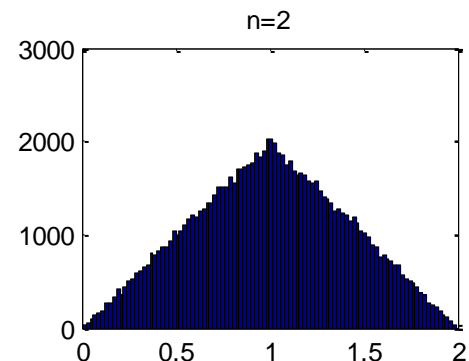
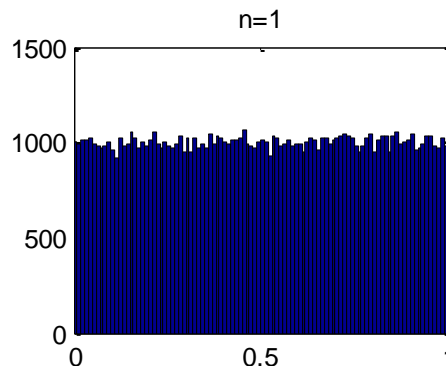
E se tivermos outras distribuições iniciais ?

- Exponencial: $y = -\log(\text{rand}(1, \text{len}))./\text{lambda}$



Outro exemplo

- **Usando geração** de números aleatórios:
- Geradas 10 sequências de números aleatórios com distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$ e somadas ...



Teorema do Limite Central

- Nos exemplos, para valores grandes de n , temos sempre uma distribuição com a forma da Gaussiana
- De facto **demonstra-se que a soma de variáveis i.i.d. tende para uma distribuição normal quando o número de variáveis é grande**
 - Teorema do Limite Central
- A média é, como já vimos, igual à das variáveis originais

De uma forma mais formal

- Sendo:
 - X_1, X_2, \dots **variáveis aleatórias I.I.D.**
 - X_i com distribuição F , $E[X_i] = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$
 - μ e σ^2 finitos
 - S_n a soma das n primeiras **variáveis**
 - $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ v.a. de média nula e variância unitária

- O Teorema do Limite Central afirma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

- Isto é, a função de distribuição de **Z_n tende para a distribuição de uma variável Normal normalizada $N(0, 1)$**

Aplicando à média (M_n)

- Fazendo $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
- Pelo TLC temos

$$M_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

A distribuição da **média de n variáveis i.i.d. tende para a distribuição normal com parâmetros μ e $\frac{\sigma^2}{n}$**

Teorema do Limite Central

- O Teorema do Limite Central é a **razão da importância da distribuição Normal/Gaussiana**

- É um **resultado extremamente importante e abre caminho a muitas aplicações**

- “Formulação qualitativa”:

Coisas que são o resultado da soma de muitos pequenos efeitos tendem a ser Gaussianas

Demos online

- Wolfram Demonstrations Project : **The Central Limit Theorem**

The central limit theorem states that the sampling **distribution of the sample mean approaches a normal distribution as the size of the sample grows**.

This means that the histogram of the means of many samples should approach a bell-shaped curve.

Each sample consists of 200 pseudorandom numbers between 0 and 100, inclusive.

- <http://demonstrations.wolfram.com/TheCentralLimitTheorem/>

Demos

- **Central Limit Theorem Applied to Samples of Different Sizes and Ranges**
- <http://demonstrations.wolfram.com/CentralLimitTheoremAppliedToSamplesOfDifferentSizesAndRanges/>
- This Demonstration shows the applicability of the central limit theorem (CLT) to the means of samples of random integer or real numbers having random ranges.
- It allows the user to generate such datasets and plot the histogram of their means.
- Superimposed on the histogram is the normal (Gaussian) distribution function that gives the theoretical distribution of these sample means.
- Also shown for comparison are the numeric values of the mean and standard deviation, both of the theoretical distribution and of the generated data.

Exemplo de aplicação do TLC

- Suponha que as despesas feitas por cada cliente de um restaurante são variáveis aleatórias I.I.D. com média 6.5 Euros e desvio padrão 2.5 Euros.
- Estime a probabilidade de os primeiros 100 clientes gastarem um total superior a 600 Euros

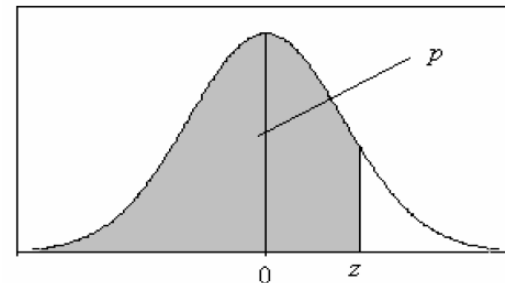
Resolução

- Consideremos $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$
- Como $E[S_{100}] = 100\mu = 650$
- e $n\sigma^2 = 625$
- Teremos $Z_{100} = \frac{S_{100} - 650}{25}$
- Como pelo TLC Z_{100} segue um lei $N(0,1)$:
- $P(S_{100} > 600) = P\left(Z_{100} > \frac{600 - 650}{25}\right)$
- $= P\left(Z_{100} > \frac{600 - 650}{25}\right) = \mathbf{P(Z_{100} > -2)}$

Calc. probabilidades na $N(0,1)$

- $P(Z_{100} > -2)$?
- Como se obtém ?
- Existem valores tabelados de

$$P(Z \leq z) = \Phi(z)$$



– Exemplo:

<http://www.professores.uff.br/patricia/images/stories/arquivos/TabelaNormal.pdf>

- $P(Z_{100} > -2) = 1 - \Phi(-2)$
- $= 1 - (1 - \Phi(2)) = \Phi(2) =$

1,7	0,96445	0,96485
1,8	0,96407	0,96485
1,9	0,97128	0,97193
2,0	0,97725	0,97778
2,1	0,98214	0,98257
2,2	0,98610	0,98645
2,3	0,98996	0,99036

$=0,97725$

Em Matlab

- Obter $\Phi(2)$

z=2

m=0

sigma=1

p = cdf('Normal',z,m,sigma)

>> 0.9772

OU

p= normcdf(z,m,sigma)

Nota: usa Statistics Toolbox

Em Matlab

- Com ferramentas como Matlab não é necessário estar a efectuar a normalização
- Aplicando directamente a S_{100} :

```
s=600           % pq queremos  $P(S_{100} > s=600)$   
m=650           % média de  $S_{100}$   
sigma=25        % desvio padrão de  $S_{100}$ 
```

```
p = 1- cdf('Normal',600,m,sigma)  
>>> 0.9772
```

OU

```
p = 1- normcdf(600,m,sigma)
```


Exercício - Inquérito futebolístico

- f : fracção da população que gosta de futebol
- Queremos fazer uma sondagem/inquérito a n pessoas
- Quantas pessoas devemos inquirir para ter uma confiança (probabilidade) de 95% de que **não cometemos um erro superior a 1 %**
- Considere:
 - Resultado de um inquérito à pessoa i :
$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se gosta} \\ 0, & \text{se não gosta} \end{cases}$$
 - $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ fracção de “gosta” na amostras

Resolução

- Sugestões ?
- Uma das formas (veremos outra) é usando a Desigualdade de Chebyshev ...
- O que diz a desigualdade ?
- $$P(|M_n - E[M_n]| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(M_n)}{\epsilon^2}$$

O que sabemos ?

- $\epsilon = ?$
- $\epsilon = 0.01$
- $Var(M_n) = ?$
- $Var(M_n) = \frac{Var(X_i)}{n}$

$$Var(X_i) = ?$$

- Todas as X_i são v. a. de Bernoulli
 - Mas não sabemos p (o inquérito é para estimar isso)
- Para o nosso caso é útil o valor máximo de $Var(X_i)$. Qual esse valor ?
- $Var(X_i) = p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$

Voltando à desigualdade

- Substituindo temos:

- $$P(|M_n - E[M_n]| \geq 0,01) \leq \frac{\frac{1}{4}n}{0,01^2} = \frac{1}{4 n 10^{-4}}$$

- Como queremos $P(\quad) \leq 0,05$

- $$\frac{1}{4 n 10^{-4}} \leq 0,05$$

- $n = ?$

- $n \geq 50\,000$ (valor conservador)

E se $\epsilon = 0,05$?

- $P(|M_n - E[M_n]| \geq 0,05) \leq \frac{1}{4 n (0,05)^2}$
- Obtendo-se n de:
- $\frac{1}{4 n (0,05)^2} \leq 0,05$
- $n \geq 2000$

Discussão

- Problemas com os valores de n que obtivemos:
 1. São muito grandes
 2. Baseiam-se numa desigualdade que apenas pode dar um majorante/minorante
 - E não um valor “exacto”
- Veremos de seguida que se pode fazer melhores estimativas de n
 - Mas para isso precisamos saber mais sobre a distribuição de M_n

Resolução usando TLC

- Pretendemos $P(|M_n - f| \leq 0,05) \geq 0,95$
- O evento que nos interessa calcular a probabilidade é $|M_n - f| \leq 0,05$
- Pretendemos portanto $P\left(\left|\frac{S_n - \textcolor{teal}{n}f}{n}\right| \leq 0,05\right)$
- Como $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ manipulamos para obter $\sqrt{n}\sigma$ no denominador, obtendo
- $P\left(\left|\frac{S_n - nf}{\sqrt{n}\sigma}\right| \leq \frac{0,05\sqrt{n}}{\sigma}\right)$

Resolução usando TLC (cont.)

- Como Z_n tende para $N(0,1)$
- Teremos:
- $P(|M_n - f| \leq 0,05) \approx P(|Z| \leq 0,05 \frac{\sqrt{n}}{\sigma})$
- E usando majorante para a variância
$$p(1 - p) \leq 1/4 \quad (=> \sigma = 1/2)$$
- $P(|M_n - f| \leq 0,05) \leq P(|Z| \leq 0,1\sqrt{n})$

$$P(|Z| \leq 0.1\sqrt{n}) ?$$

- $P(|Z| \leq 0.1\sqrt{n})$
- $= P(-0.1\sqrt{n} \leq Z \leq 0.1\sqrt{n})$
- $= F_{N(0,1)}(0.1\sqrt{n}) - F_{N(0,1)}(-0.1\sqrt{n})$
- Para permitir usar tabelas, coloquemos em função de $Q(z) = 1 - F_{N(0,1)}(z)$
 - Sabe-se também que $F_{N(0,1)}(-z) = Q(z)$
- $= 1 - Q(0.1\sqrt{n}) - Q(0.1\sqrt{n})$
- $= 1 - 2 Q(0.1\sqrt{n})$

Terminando...

- $1 - 2 Q(0,1\sqrt{n})$ terá de ser $\geq 0,95$
- $1 - 2 Q(0,1\sqrt{n}) \geq 0,95$
- $\Rightarrow Q(0,1\sqrt{n}) \geq \mathbf{0,025}$
- $\Rightarrow 0,1\sqrt{n} \geq \mathbf{1,96}$ por consulta a tabela
- Resolvendo em ordem a n temos, finalmente,
- $\sqrt{n} \geq (1,96)^2 \Rightarrow n \geq 384,16$
- $n = \mathbf{385}$ é o número mínimo que procurávamos

Para mais informação

- Capítulo 5, “Somas de variáveis aleatórias”, do livro de F. Vaz