Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

2ª aula Prática

Sumário:

Resolução de problemas sobre o cap. 1

Bibliografia:

Garcia, cap.5.

John V. Guttag, Introduction to Computation and Programming Using Python, 2013, 2ª edição, MIT Press, cap. 15.

Problema cap 1.5 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Quando se tem um conjunto x, y de N medições, o método dos mínimos quadráticos oferece o ajuste linear que apresenta a menor diferença entre os valores medidos e os estimados por uma reta $y = m\,x + b$. Se se considerar que os erros que afetam os valores de y são iguais, as expressões que o método fornece são:

$$m = \frac{N\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2\ \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$r^2 = \frac{\left(N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2}{\left[N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]\ \left[N \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2\right]}$$

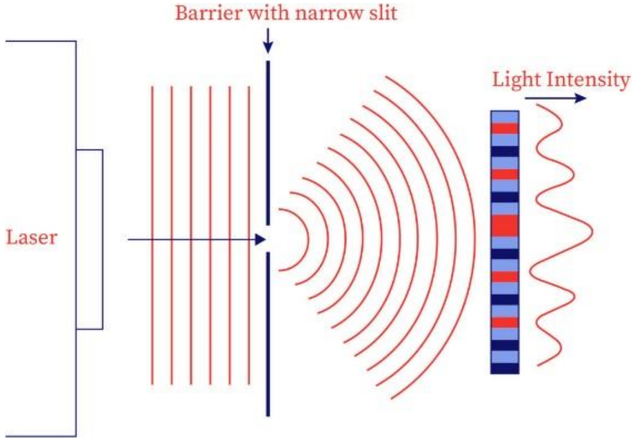
O coeficiente de determinação r^2 é tal que quando ~1 indica um ótimo ajuste, enquanto que ~ 0 indica que não o modelo não é linear.

$$\Delta m = |m| \sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}} \quad \text{e} \quad \Delta b = \Delta m \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}$$

Escreva um programa em python que calcule as quantidades anteriores.

Problema cap 1.5 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Numa experiência de difração de um feixe de luz por uma fenda única foram medidos 7 pares de valores (na tabela) da distância da fonte de luz ao alvo, L, e a distância entre máximos luminosos consecutivos (entre a mancha vermelha central e as outras manchas vermelhas) da figura de difração, X,



L (cm)	X (cm)
222.0	2.3
207.5	2.2
194.0	2.0
171.5	1.8
153.0	1.6
133.0	1.4
113.0	1.2
92.0	1.0

Escreva um programa em python que calcule as quantidades anteriores. Como teste ao programa escrito, compare os seus resultados intermédios com os valores

$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 2322.4; \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1286.0\,; \sum_{i=1}^{N} y_i = \ 13.5;$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 221719.5; \sum_{i=1}^{N} y_i^2 = 24.33;$$

$$m = 0.01015505\,;\ \Delta m = \ 0.000162973$$

$$b = 0.05507544;\ \Delta b = 0.02713077$$

$$r^2 = 0.99845714$$

Problema cap 1.5 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

a) Comece por representar os dados experimentais num gráfico.
b) Calcular as somas das expressões acima.
c) De seguida calcule o declive, a ordenada na origem e o coeficiente de determinação ou de correlação r^2.
d) faça um gráfico com os pontos experimentais e a reta cujos parâmetros *m* e *b* calculou anteriormente.
e) Encontre o valor de X, quando $L = 165.0$ cm. Use a reta determinada pela regressão linear.
f) Afaste da reta encontrada um dos valores medidos de y. Compare o coeficiente de determinação com o valor anterior. Faça um gráfico com os novos pontos experimentais e a nova reta.
Nota: os valores da tabela acima são as medições realizadas numa experiência de difração por uma fenda única de um feixe de luz, em que L é a distância da dupla fenda ao alvo e X a distância entre máximos luminosos consecutivos da figura de difração.

Problema cap 1.6 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Um ciclista tenta percorrer a velocidade constante (uniforme) uma distância de 10 km.
O seu treinador nos primeiros 9 minutos e a cada minuto mede a distância percorrida, e regista os valores em km:

0.00 0.735 1.363 1.739 2.805 3.814 4.458 4.955 5.666 6.329

a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre o tempo e a distância percorrida é linear?
b) Encontre o declive, a ordenada na origem, os erros respetivos e o coeficiente de determinação.
É uma relação linear bem aproximada? O ciclista conseguiu manter a mesma velocidade uniforme durante o percurso?
c) Qual a velocidade média do ciclista?
d) Use a função *polyfit* dos pacote *numpy* ou do pacote *pylab* para encontrar a reta que mais se aproxima das medições.
O declive e a ordenada na origem concordam com os valores calculados na alínea b)?
e) Apresente a velocidade em km/hora.

$$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$$

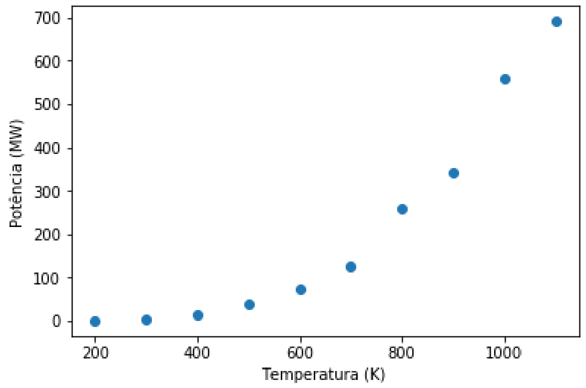
$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

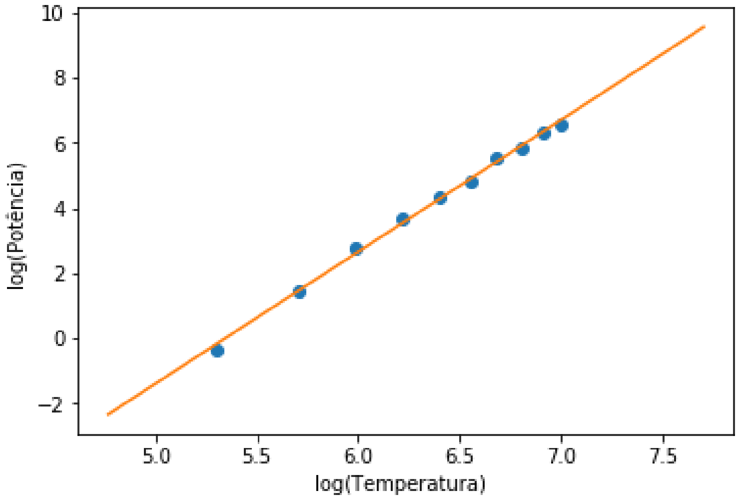
$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

Leis de potência $y = cx^n$

$$\log_b y = \log_b c + \underbrace{n}_{\text{declive}} \cdot \log_b x$$: RETA





Problema cap 1.8 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Foi medida a energia por segundo (potência) emitida por um corpo negro (corpo que absorve toda a energia que incide nele) de área 100 cm^2 em função da temperatura absoluta, T, e registada na seguinte tabela

T (K)	200.	300.	400.	500.	600.	700.	800.	900.	1000.	1100.
E (J)	0.6950	4.363	15.53	38.74	75.08	125.2	257.9	344.1	557.4	690.7

a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre a energia emitida e a temperatura é linear?
b) Apresente as medições num gráfico log-log. Qual a dependência entre as quantidade energia emitida e a temperatura?

Problema cap 1.9 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Foi medida a atividade de uma amostra do isótopo radioativo ^{131}I tem de 5 em 5 dias. Os valores medidos da atividade com o tempo são, em mCi:

9.676 , 6.355, 4.261, 2.729, 1.862, 1.184, 0.7680, 0.4883, 0.3461, 0.2119

a) Apresente estas medições num gráfico. A analisar o gráfico, a relação entre a atividade e o tempo é linear?

b) Apresente as medições num gráfico semilog. Como depende a atividade com o tempo?

A unidade curie indica $3{,}7 \times 10^{10}$ desintegrações nucleares/s