



DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

## Modelação de Sistemas Físicos

Ano Académico 2020/2021 - 2º Semestre

# Prova de Recurso - Resolução

## Parte Cálculo Computacional-Numérica

**Data:** 14 Julho 2021

**Hora:** 10H30

**Duração:** 2 horas

**Disciplina:** 41769

**Salas:** 11.2.7, 11.2.8, 11.2.22,  
10.3.14

**Cotação:** 1)  $1 + 2 + 2 = 5$  valores

2)  $2 + 1.5 + 1.5 = 5$  valores

3)  $2 + 2 = 4$  valores

4)  $2 + 2 + 2 = 6$  valores

### NOTE: De consulta, sem acesso à Internet

- Responda às perguntas, **justificando-as, na vossa folha de prova**
- Indique claramente o sistema de eixos usado.
- Esboce os gráficos, indicando univocamente os pontos importantes. Se gravar as figuras, salve-as em formato png.
- Na vossa folha de prova indique os métodos, os algoritmos, passos, ... usados.
- Os ficheiros, com a identificação da pergunta e da alínea, devem ser copiados para a caneta de memória do docente presente na sala com o nome e número do aluno (para poderem ser consultados quando o docente tiver dúvidas durante a correção).
- Tem de usar o seu computador portátil. Pode (e deve) usar os seus programas, assim como outros programas que tenha obtido.

*As respostas não podem ser escritas a lápis*

## *Justifique todas as respostas*

1. Com o objetivo de estudar o movimento de um carro a descer um plano inclinado, foi realizada uma experiência em que se larga o carro de uma certa altura, e foram registados os seguintes valores sobre o percurso percorrido e o tempo gasto:

$t$ (s)	$s$ (m)
0.5	0.121
1.5	0.997
2.5	2.55
3.5	6.09
4.5	9.31
5.5	15.8
6.5	17.1
7.5	25.5
8.5	26.5
9.5	38.8
10.5	41.9

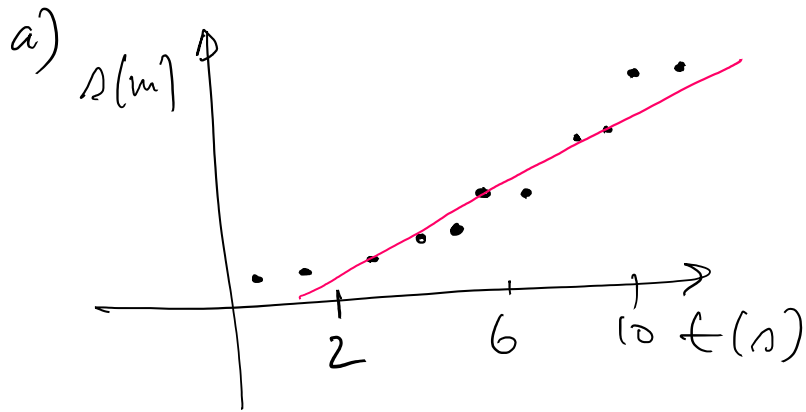
A experiência foi efetuada em condições em que a resistência do ar é negligível (grandeza desprezável).

- Trace o gráfico  $s$  em função de  $t$ , usando os dados da tabela, e faça um ajuste linear. Indique os valores do declive, e o seu erro, a ordenada na origem, e o seu erro, e o coeficiente de determinação  $r^2$ .

b) Trace o gráfico  $\log(s)$  em função de  $\log(t)$ . Indique os valores do declive, e o seu erro, e o coeficiente de determinação  $r^2$ .

c) Pelos resultados obtidos nas alíneas anteriores, que conclui acerca da relação entre a distância percorrida no plano inclinado ( $s$ ) e o tempo gasto no percurso ( $t$ ). Justifique. Faça um outro gráfico que mostre essa relação.

**Resolução resumida:**



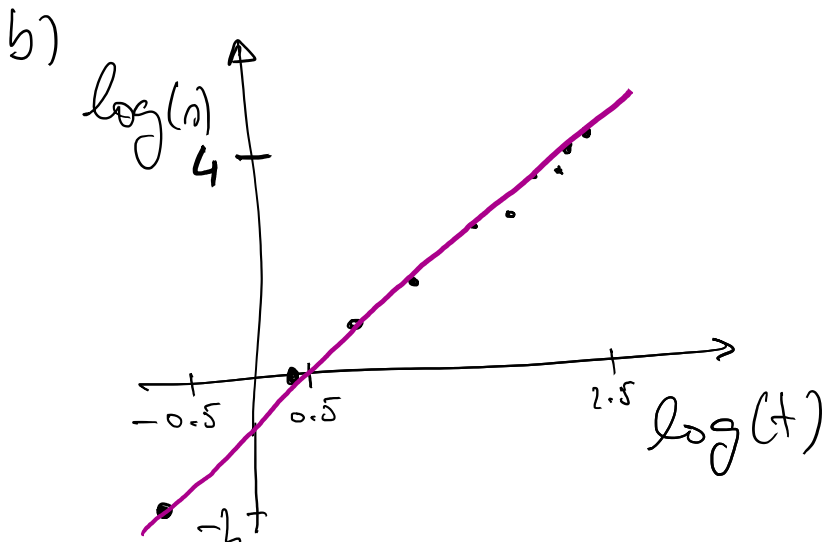
$$m = 4.35 \text{ m/s}$$

$$\Delta m = 0.33 \text{ m/s}$$

$$b = -7.140 \text{ m}$$

$$\Delta b = 2.06 \text{ m}$$

$$r^2 = 0.95$$



$$m = 1.948$$

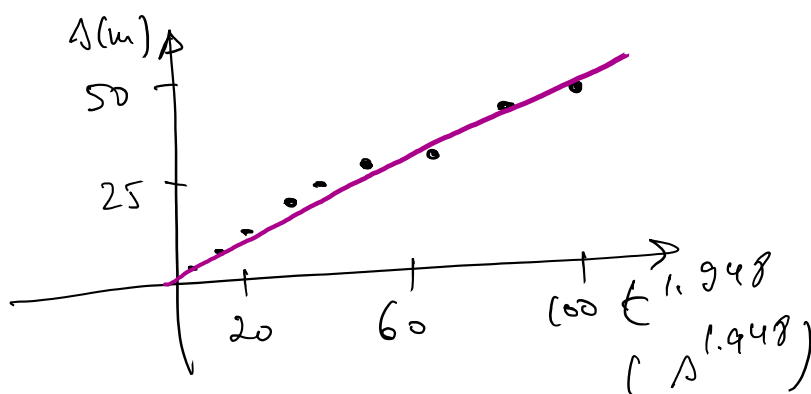
$$\Delta m = 0.036$$

$$r^2 = 0.997$$

$$s = C t^{1.948}$$

c)

$$t \rightarrow t^{1.948}$$



$$m = 0.4407 \text{ m/s}^{1.948}$$

$$\Delta m = 0.0185 \text{ m/s}^{1.948}$$

$$b = 0.851 \text{ m}$$

$$\Delta b = 0.890 \text{ m}$$

$$r^2 = 0.984$$

Relação  $s = (0.44 \pm 0.02) t^{1.948} + (1 \pm 1) \text{ m}$

$r^2 \approx 1$  modelo muito fiel às medições

2. Uma bola de basquetebol é lançada à altura de 2.5 m com uma velocidade 10 m/s, a fazer um ângulo de 45° com a horizontal. Considerando que a velocidade terminal desta bola é 72 km/h (e a resistência do ar)

a) Faça o gráfico da trajetória (altura em função da distância percorrida na horizontal).

b) Em que ponto cai no chão e quanto demorou?

c) Se o jogador imprimir rotação à bola, em que ponto cai no chão? Considere a força de Magnus

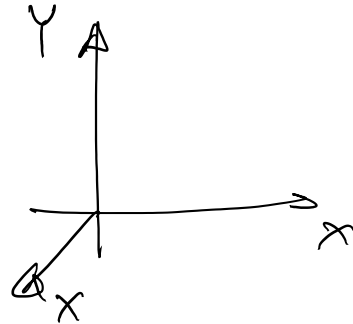
$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$$

e a rotação inicial se mantém durante toda a trajetória  $\vec{\omega} = (0,0,100)$  rad/s, o raio é 15 cm,  $\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$  e a massa é 625 g. Considerou-se o sistema de eixos o eixo OX a horizontal e OY a vertical do movimento.

**Resolução resumida:**

a)  $\vec{r}_0 = (0, 2.5, 0) \text{ m}$

$$\vec{v}_0 = (10 \cos 45^\circ, 10 \sin 45^\circ, 0)$$



$$\vec{F}^{ls} = \left( -\frac{g}{v_T^2} |\vec{v}| v_x, -\frac{g}{v_T^2} |\vec{v}| v_y, -\frac{g}{v_T^2} |\vec{v}| v_z \right)$$

$$\vec{p} = (0, -mg, 0)$$

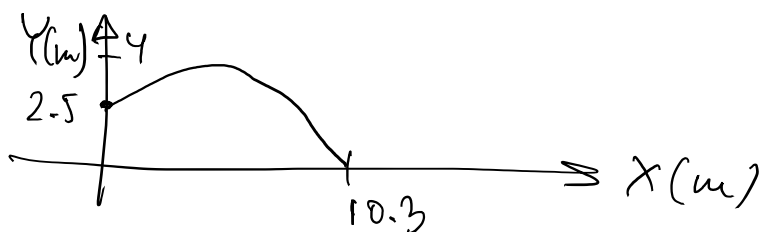
$$\vec{F}^{Magnus} = \frac{1}{2} A r \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{Ar}{2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 100 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{Ar}{2} (100 v_x \hat{j} - 100 v_y \hat{i})$$

↑ não possui componente ao longo do z!

$\vec{v}_0$  e nenhuma força têm componente ao longo do z!

Método de Euler,  $\Delta t = 0.0001 \text{ s}$ ,  $\vec{a} = \vec{F}/m$



b) Usando a indicação de zero,  $y(i) \neq y(i+1) < 0$   
e a função zero

$$\begin{array}{lll} \text{Cai no chão em} & x = 90.30 \text{ m} & \delta t = 0.0001 \text{ s} \\ & = 90.30 \text{ m} & \delta t = 0.00001 \text{ s} \\ & \text{e demora} & t = 1.70 \text{ s} \\ & & = 1.70 \text{ s} \end{array}$$

$$R: \quad x = 10.30 \text{ m} \\ t = 1.70 \text{ s}$$

c)  $\vec{F}_{\text{magnus}} = \frac{1}{2} A \rho_{\text{ar}} \vec{\omega} \times \vec{v}$

$$r = 0.15 \text{ m}$$

$$A = \pi r^2$$

$$\rho_{\text{ar}} = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 100 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 100 v_x \hat{j} \\ -100 v_y \hat{i} \end{matrix}$$

$$a_x = \dots \quad \neq \quad \frac{F_{\text{magnus}, x}}{m}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Bola cai no chão em} & x = 10.58 \text{ m} & \delta t = 0.0001 \text{ s} \\ & = 10.58 \text{ m} & \delta t = 0.00001 \text{ s} \end{array}$$

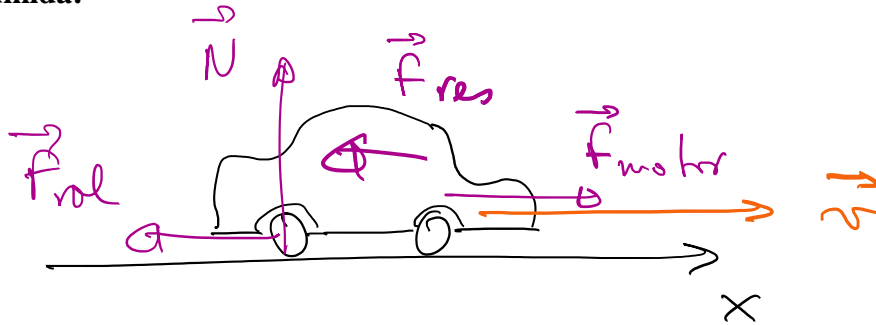
3. Considere um carro de massa 1200 kg a deslocar-se na horizontal.

a) Determine a evolução temporal da velocidade do carro, se este produzir continuamente a potência 60 cv e partir com um empurrão de 1 m/s? Qual a sua velocidade terminal?

b) Qual a potência desenvolvida pelo motor de um carro de massa 1200 kg, para manter a velocidade uniforme, na horizontal, de i) a 90 km/h? ii) a 130 km/h?

Dados: O coeficiente de resistência  $\mu$  de um piso liso de alcatrão é de 0.004, o coeficiente de resistência do ar é  $C_{res} = 0.9$ , a área frontal do carro  $3.0 \text{ m}^2$  e densidade do ar  $\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$

**Resolução resumida:**



$$f_{motor, x} = \frac{P_0}{v_x} ; P_0 = 60 \text{ cv}$$

$$f_{res, x} = - \frac{1}{2} C_{res} A \rho_{ar} |v_x| v_x ; C_{res} = 0.9$$

$$A = 3.0 \text{ m}^2$$

$$f_{rol, x} = - \mu |\vec{N}|$$

$$\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 0.004$$

$$|\vec{N}| = |\vec{P}| = 1200 \times 9.8 \text{ N}$$

a)

$$F_x = f_{motor, x} + f_{res, x} + f_{rol, x}$$

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

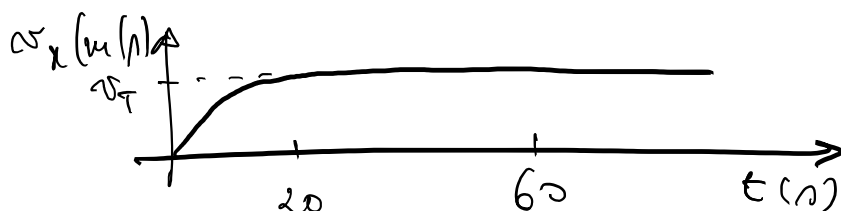
Método de Euler

$$\Delta t = 0.001 \text{ s} \quad v_T = 29.565 \text{ m/s}$$

$$v_{x0} = 1 \text{ m/s}$$

$$\Delta t = 0.0001 \text{ s} \quad v_T = 29.565 \text{ m/s}$$

$$= 106.4 \text{ cv}$$



$$b) \quad \vec{v} \text{ constante} \Rightarrow F_x = 0$$

$$= v$$

$$F_{\text{motor},x} + F_{\text{res},x} + F_{\text{rol},x} = 0$$

$$\frac{P_0}{v} - \frac{1}{2} C_{\text{res}} A_{\text{par}} v \cdot v - \mu |\vec{N}| = 0$$

$$P_0 = v \left[ \frac{1}{2} C_{\text{res}} A_{\text{par}} v^2 + \mu |\vec{N}| \right]$$

$$v = 90 \text{ km/h}$$

$$v = 130 \text{ km/h}$$

$$P_0 = 27015 \text{ W} = 36.7 \text{ CV}$$

$$P_0 = 79573 \text{ W} = 108 \text{ CV}$$

4. Um corpo de massa 0.5 kg move-se num oscilador quártico. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo  $x_{eq} = 0$  m, o oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k x^2 + \beta x^4$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k x - 4 \beta x^3$$

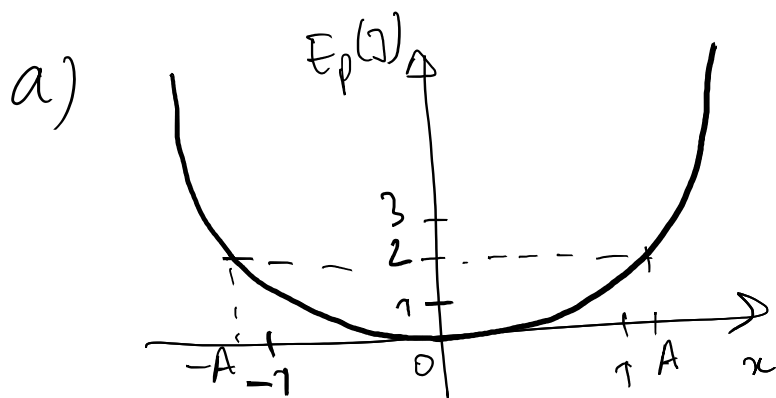
Considere  $k = 1.8$  N/m e  $\beta = 0.9$  N/m<sup>3</sup>.

a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial. Qual o movimento quando a energia total for menor que 4 J?

b) Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 2.5 m e a velocidade inicial 3.0 m/s? Quanto é a energia mecânica? Entre que limites se efetua o movimento e a frequência e o período do movimento? Apresente os resultados com a precisão de 4 algarismos.

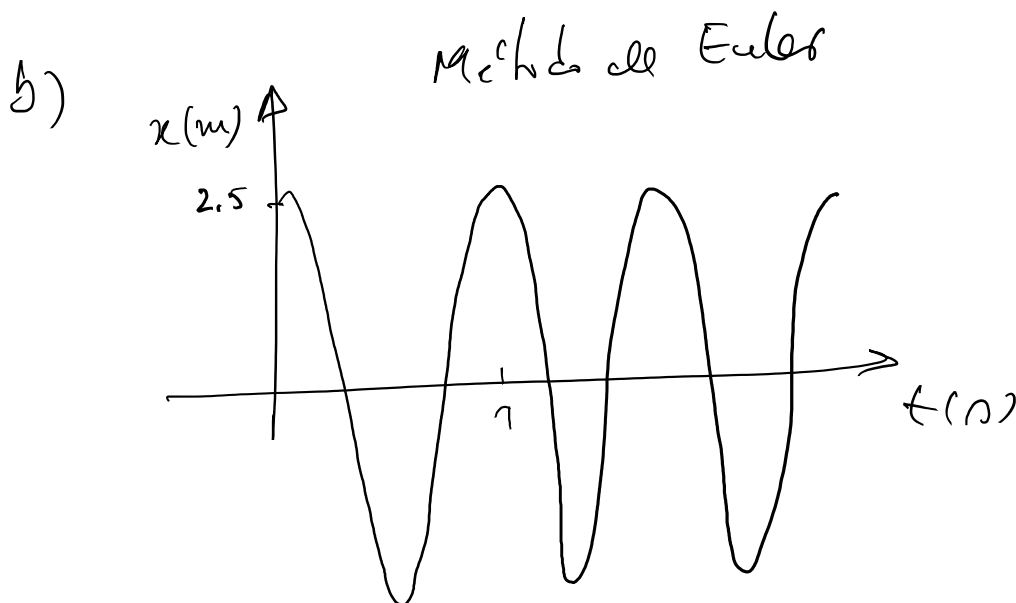
c) Faça a análise de Fourier da solução encontrada. Apresente o resultado como  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ , sendo  $a_n$  e  $b_n$  os coeficientes de Fourier.

**Resolução resumida:**



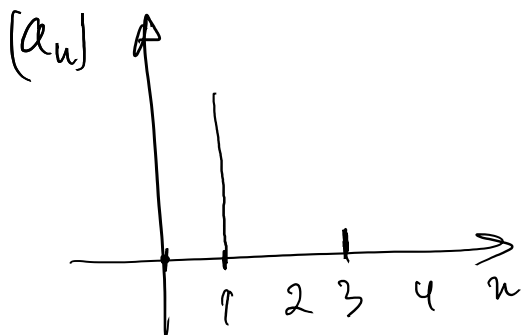
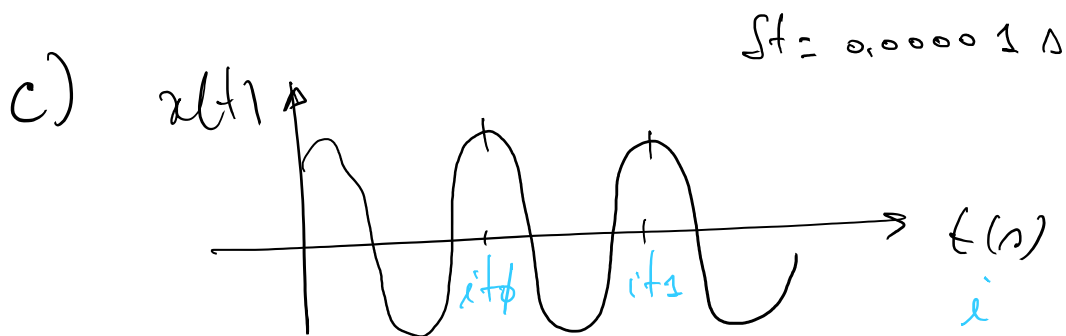
$$E < 3 \text{ J}$$

Movimento periódico entre limites simétricos,  $A$  e  $-A$ , porque a energia potencial é simétrica.

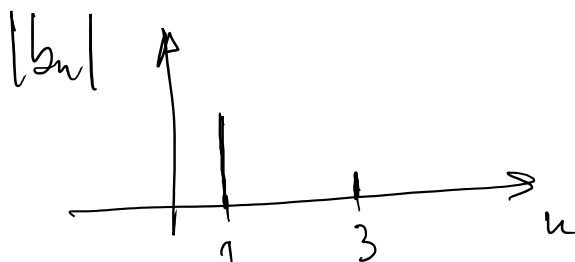


$\delta t(n)$	Energia (J)	$A(\mu V)$	$T(n)$	$f(Hz)$
0.001	$[42.75; 43.10]$	2.53483	1.03300	
0.0001	$[43.00; 43.04]$	2.53614	1.03300	
0.00001	$[43.03; 43.03]$	2.53626	1.03306	
0.000001	43.031	2.53627	1.03306	0.9681

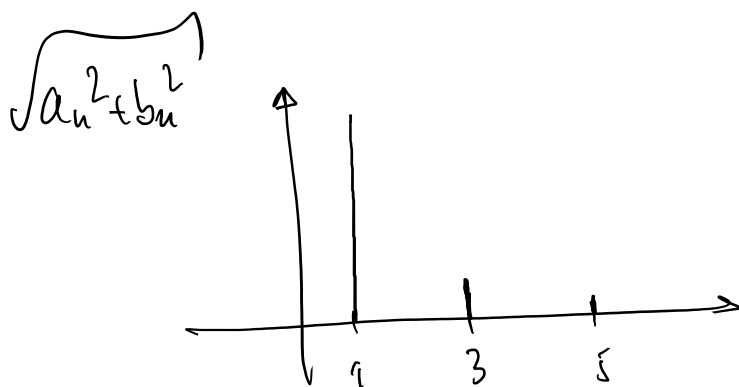
$\nearrow$  respund Crenetadu convergiram



$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 a_1 &= 2.408 \\
 a_2 &= 0 \\
 a_3 &= 0.0890 \\
 a_4 &= 0 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 b_1 &= 0.3544 \\
 b_2 &= 0 \\
 b_3 &= 0.0417 \\
 b_4 &= 0
 \end{aligned}$$



$n$	$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
0	0
1	2.434
2	0
3	0.0983
4	0.00382