

Licenciatura em Engenharia Informática

# Sistemas Multimédia

## Amostragem de Sinais

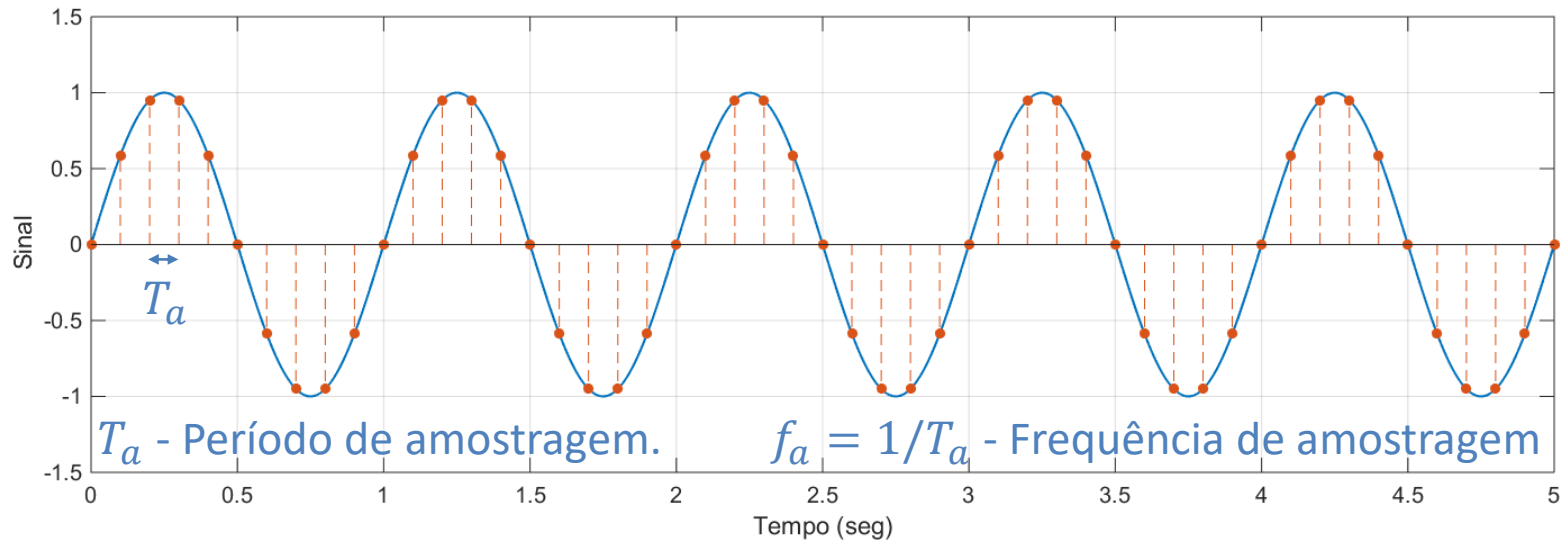
Telmo Reis Cunha

Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática

Universidade de Aveiro – 2020/2021

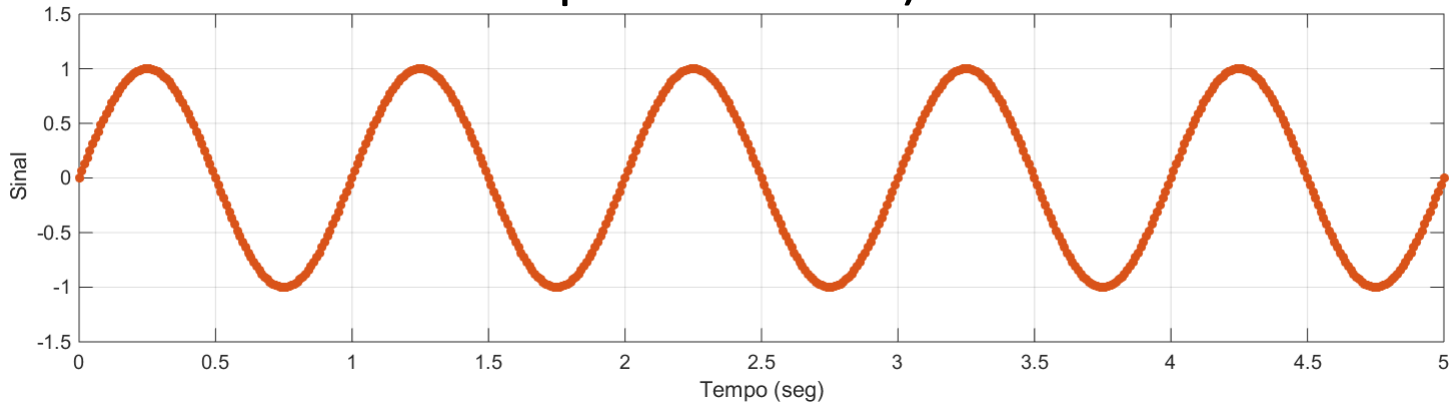
# 1. Fundamentos da Amostragem de Sinais

- O tratamento e análise de sinais com recurso a processadores digitais é efetuado no domínio de tempo discreto.
- Tal requer, naturalmente, que os sinais que evoluem continuamente ao longo do tempo sejam **amostrados**.
- O processo de amostragem consiste em adquirir amostras do sinal (tipicamente a um ritmo periódico).

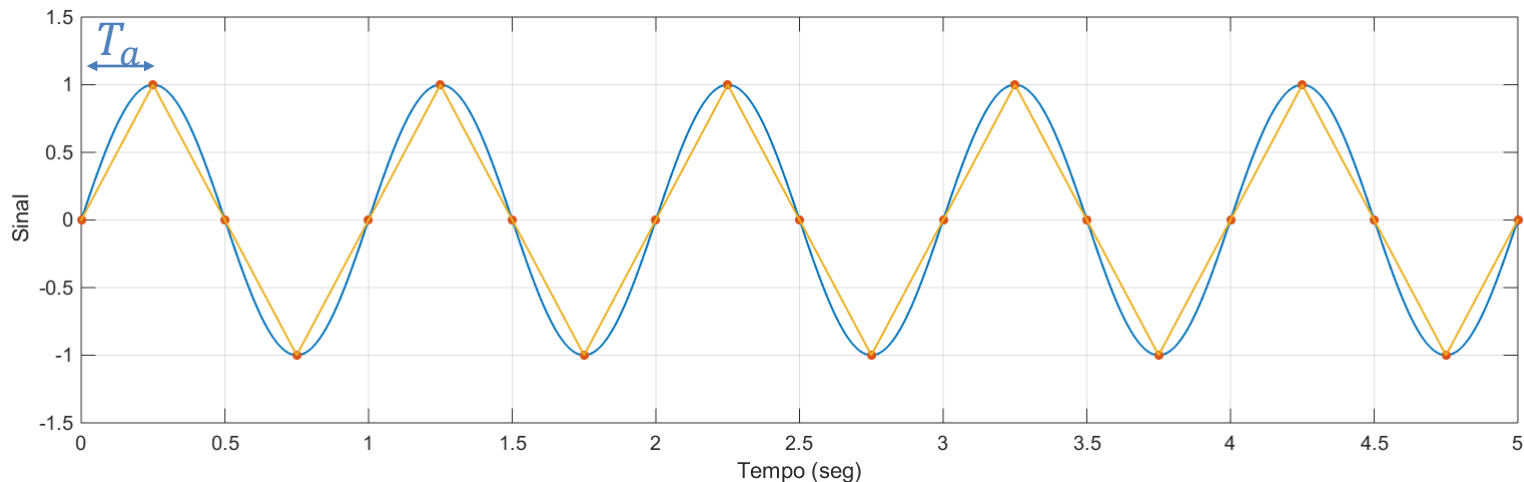


# 1. Fundamentos da Amostragem de Sinais

- Muitas amostras requerem muita memória (e há pouca “novidade” de amostra para amostra).

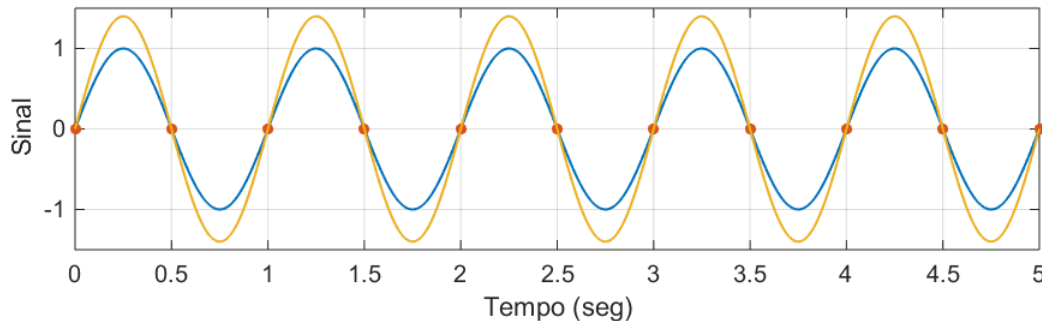


- Poucas amostras podem não ser suficientemente representativas.

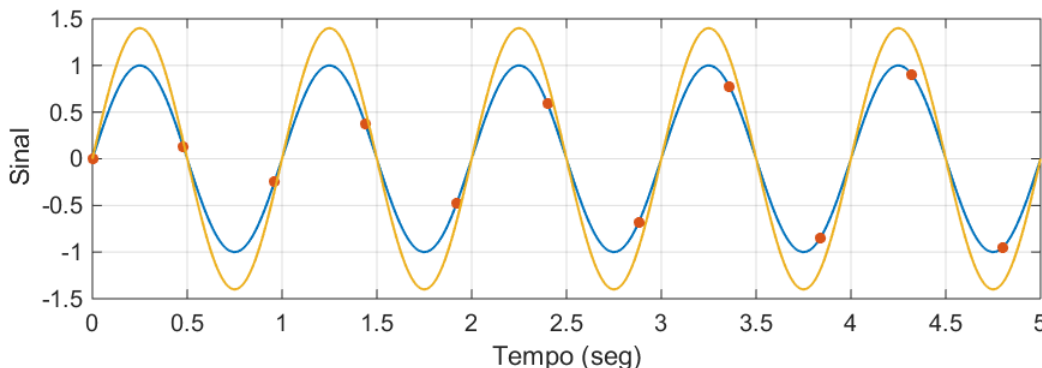


# 1. Fundamentos da Amostragem de Sinais

- A teoria da amostragem refere que para que um sinal seja amostrado **sem perda de informação** (i.e., podendo ser integralmente reconstruído a partir das suas amostras), terá que considerar uma frequência de amostragem superior ao dobro da frequência mais elevada do sinal – **Critério de Nyquist**.



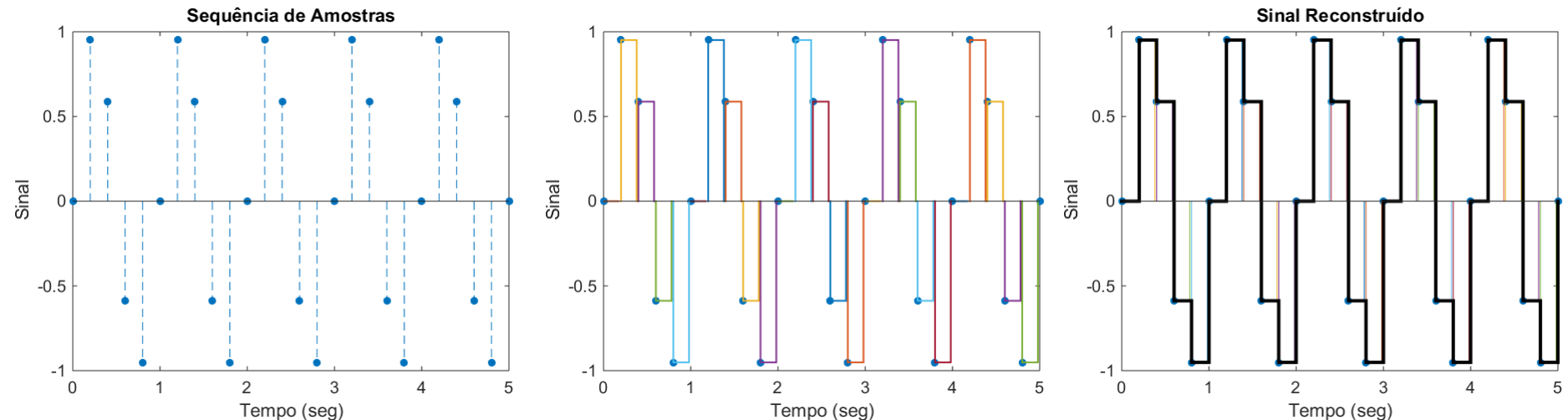
$f_a = 2f_{max}$  - As amostras não distinguem as duas sinusoides (nem outra da mesma frequência; nem o sinal constante igual a 0).



$f_a$  ligeiramente superior a  $2f_{max}$  - Ao fim de algum tempo (algumas amostras), a informação do sinal representado está completamente identificada.

## 2. Reconstrução de Sinais Amostrados

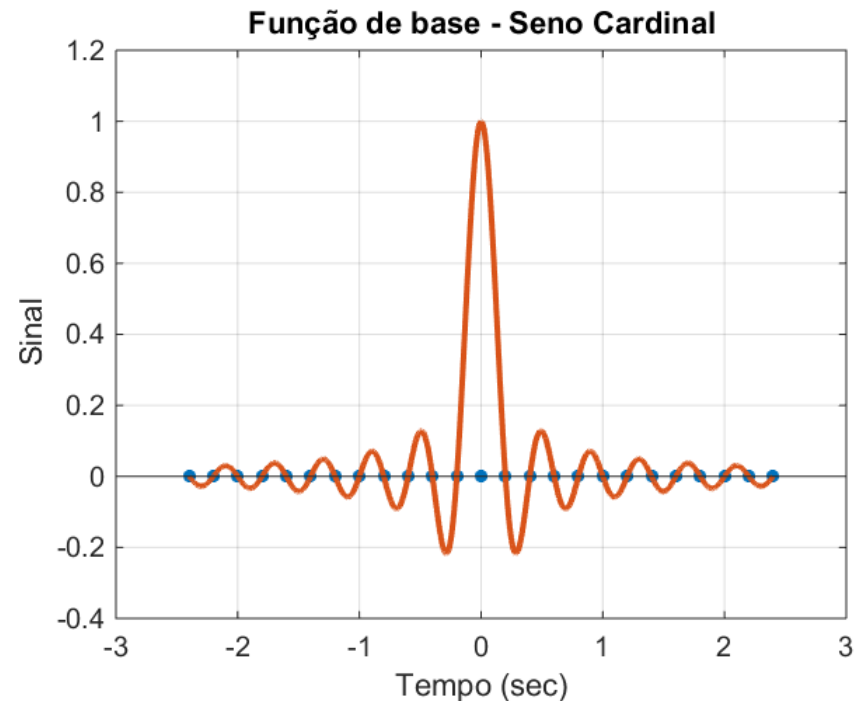
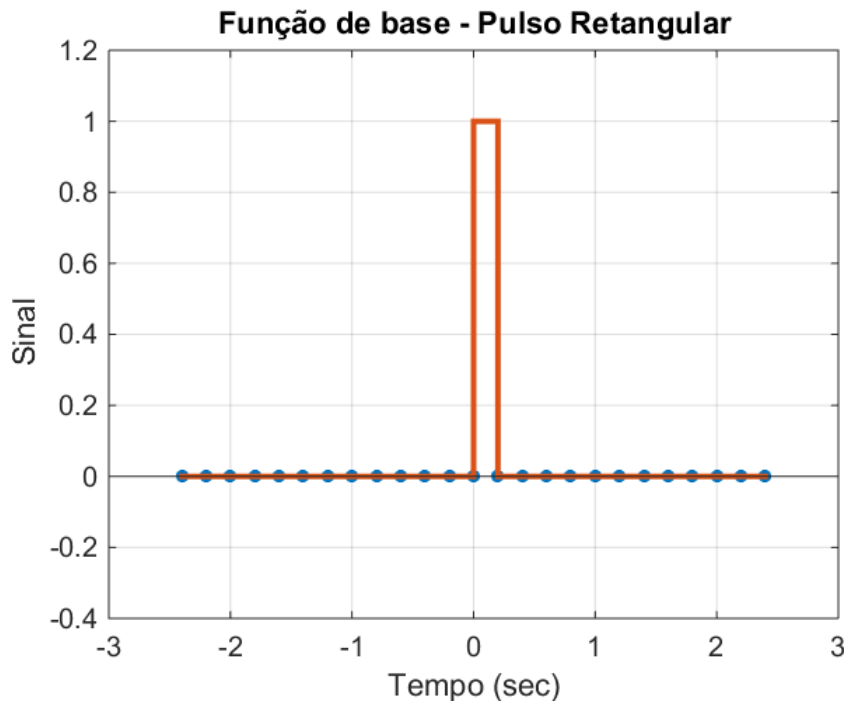
- Seja  $x(n), n = 1, \dots, N$ , a sequência de amostras de um sinal, com período de amostragem  $T_a$ . Como se pode reconstruir de novo o sinal de tempo contínuo, que fora alvo da amostragem?
- É fácil verificar que tal não pode ser feito usando um pulso (pedestal) para cada amostra:



- O sinal resultante tem claramente uma frequência máxima superior a metade da frequência de amostragem.

## 2. Reconstrução de Sinais Amostrados

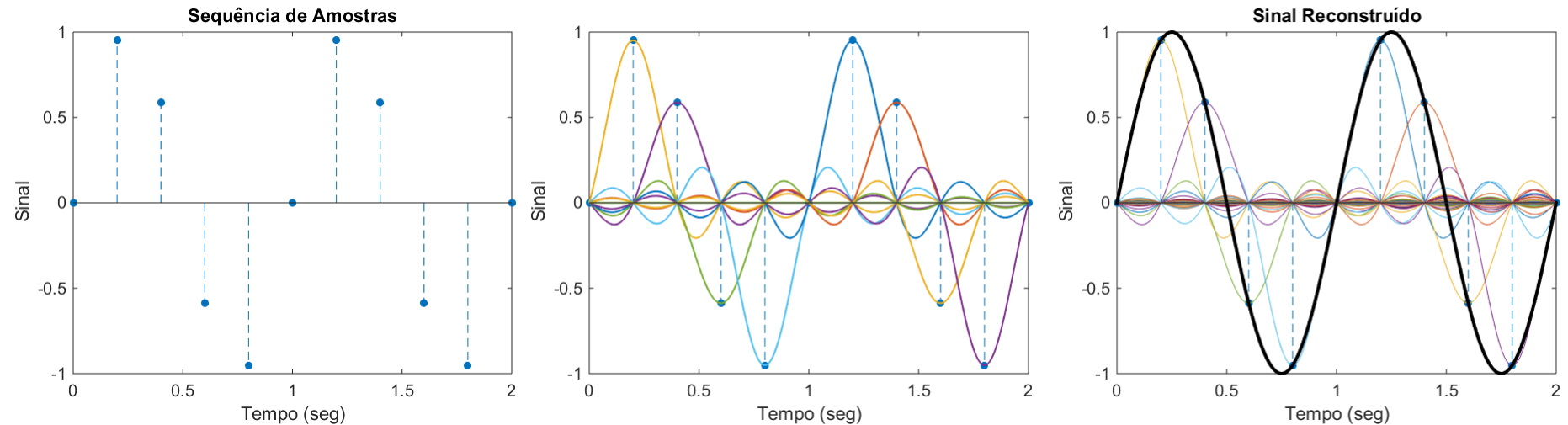
- A reconstrução ideal deve considerar a função **seno cardinal** como função de base, em vez de pulsos retangulares.



$$h(t) = \frac{\sin\left(2\pi\left(\frac{f_a}{2}\right)t\right)}{2\pi\left(\frac{f_a}{2}\right)t} = \frac{\sin(\pi f_a t)}{\pi f_a t}$$

## 2. Reconstrução de Sinais Amostrados

- A reconstrução ideal deve considerar a função **seno cardinal** como função de base, em vez de pulsos retangulares.



- O sinal original considerado neste teste foi:  $x(t) = \sin(2\pi t)$ .

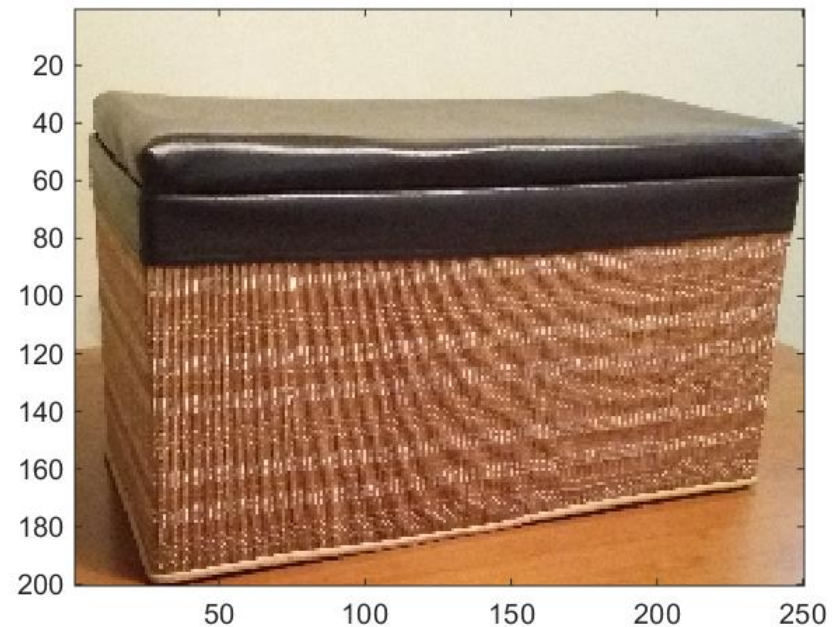
### 3. Aliasing

- O que sucede, então, quando a amostragem não obedece ao Critério de Nyquist? Qual o resultado da reconstrução do sinal neste caso?
- Exemplo de uma imagem submetida a sub-amostragem:

Imagem original



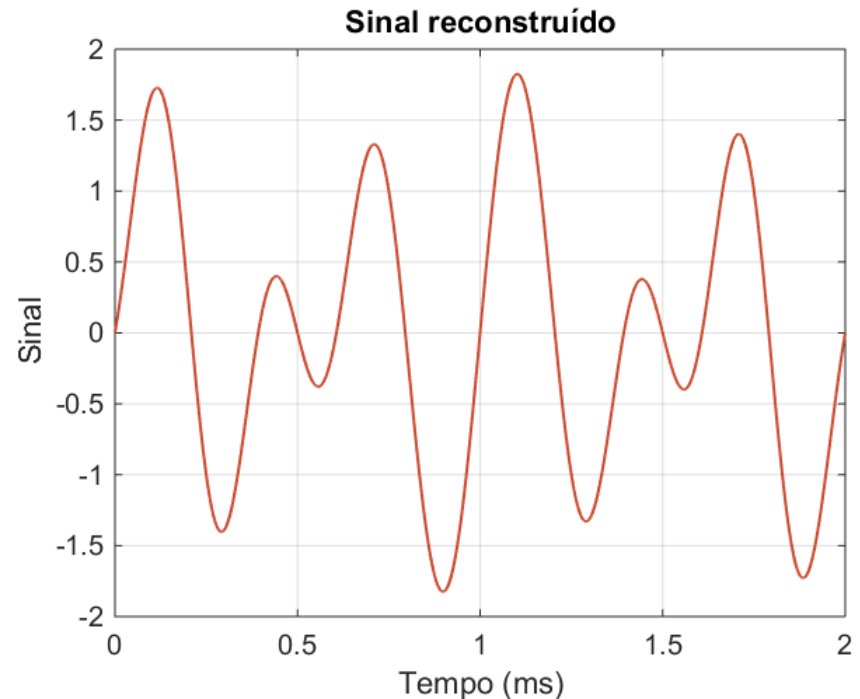
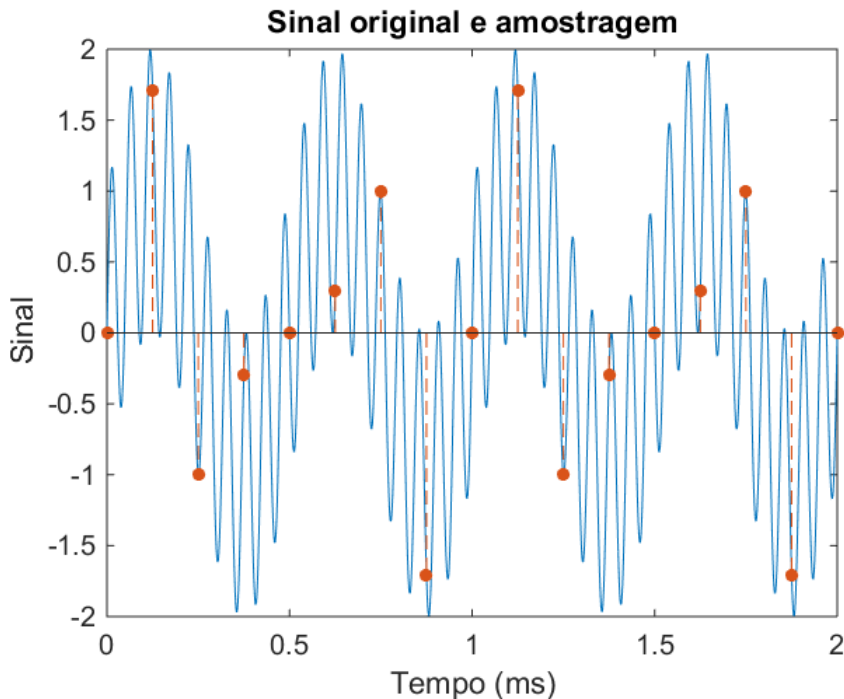
Imagem sub-amostrada (8x8 vezes)





### 3. Aliasing

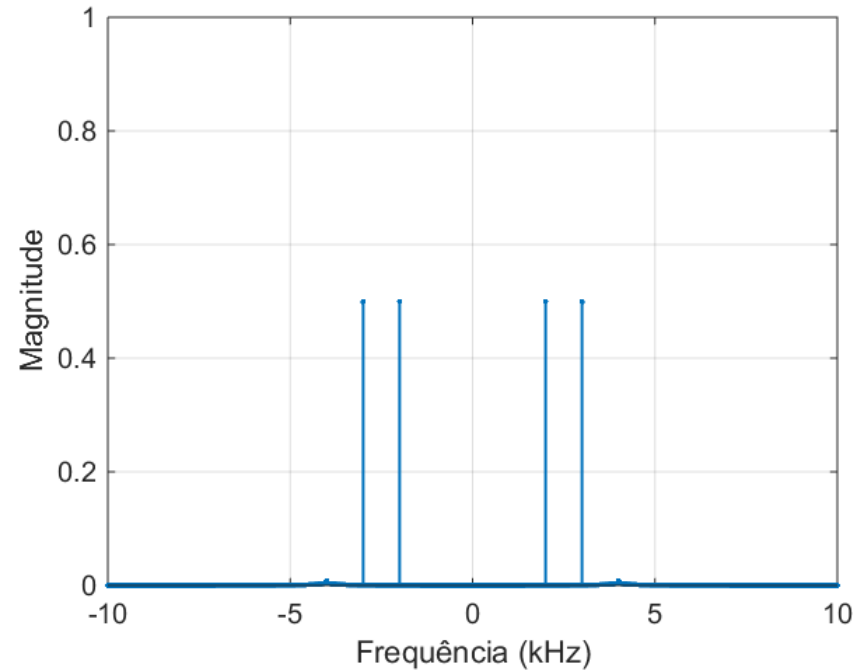
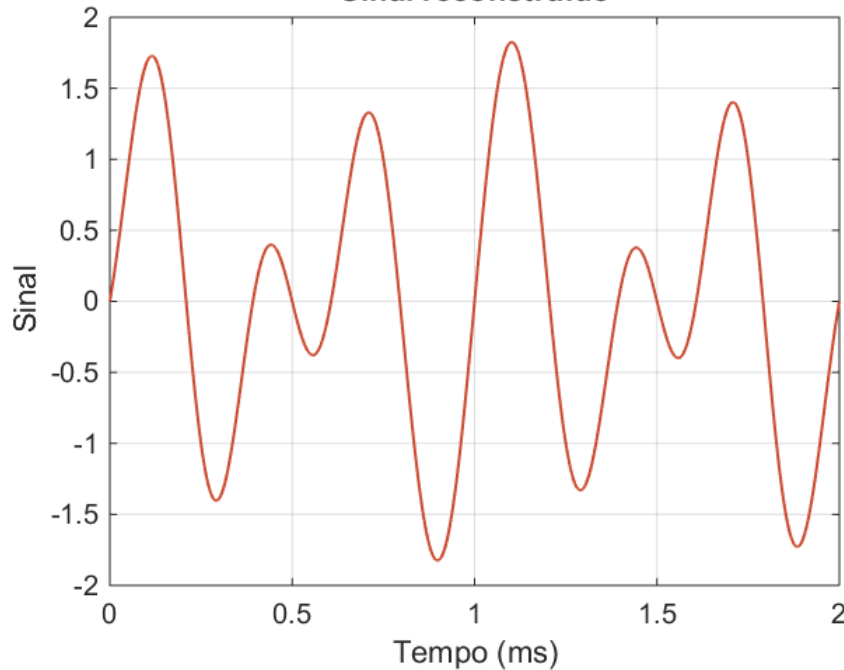
- Como exemplo, considere-se o caso de um sinal composto por dois tons, um correspondente a um som audível ( $f_1 = 2kHz$ ) e outro a um som inaudível ( $f_2 = 19kHz$ ), tendo ambos a mesma potência.
- A frequência de amostragem foi considerada para o sinal audível, tendo sido escolhida  $f_a = 8kHz$ .



### 3. Aliasing

- Neste exemplo, o sinal amostrado e reconstruído tem dois tons audíveis:

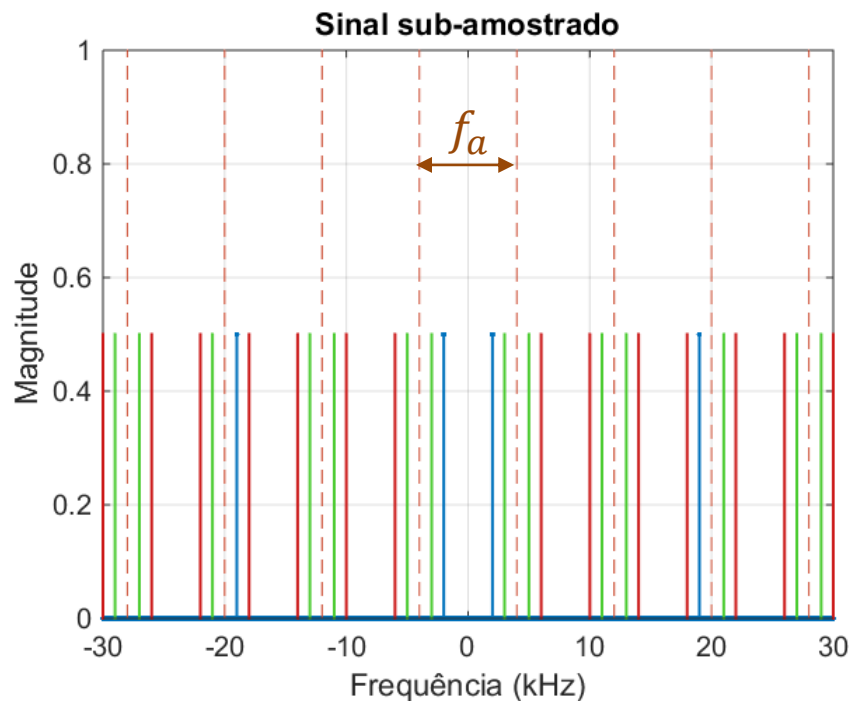
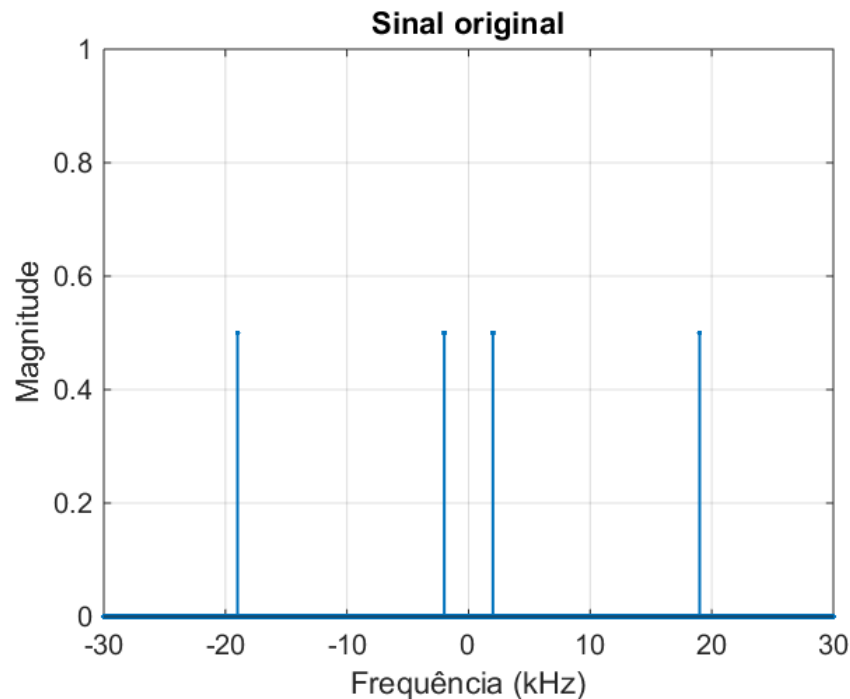
Sinal reconstruído



- Para se evitar este fenómeno, o processo de amostragem deve ser precedido de um **filtro anti-aliasing** (elimina as componentes de frequência superiores a  $f_a/2$ ).

### 3. Aliasing

- O *aliasing* deve-se ao facto de o espectro do sinal se repetir em cada intervalo de largura  $f_a$ .
- No exemplo anterior do sinal de dois tons:



### 3. Aliasing

---

- Exemplos de *aliasing* associados a vídeo:
- <https://www.youtube.com/watch?v=ByTsISFXUoY>
- [https://youtu.be/Ce\\_jRfM9b4k](https://youtu.be/Ce_jRfM9b4k)

## 4. Quantização da Amplitude dos Sinais

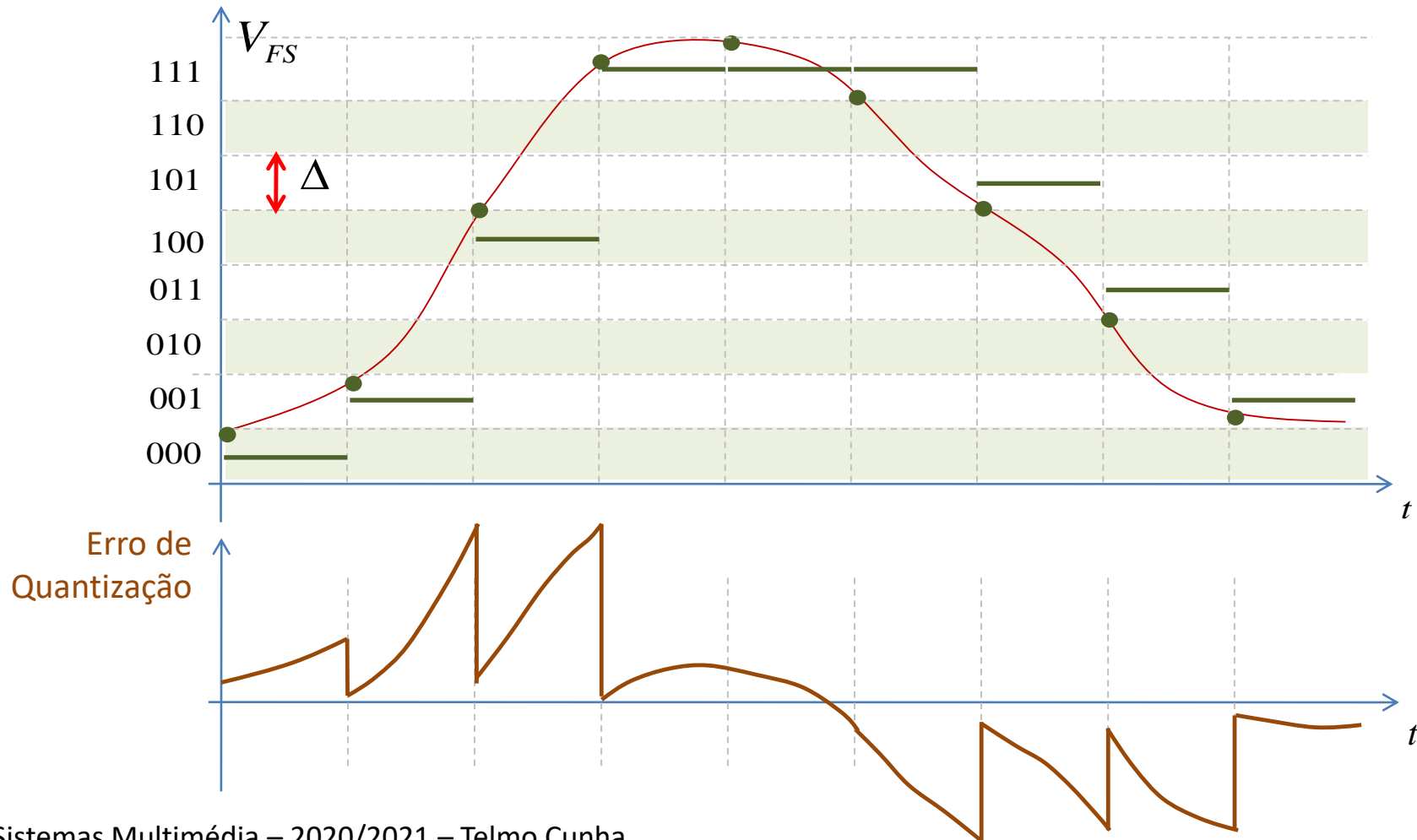
---

- Nos sistemas de aquisição de sinais, não é só o tempo que é discretizado – também a amplitude dos sinais é discreta.
- Cada amostra do sinal é adquirida, e armazenada, numa palavra digital que apresenta um limite de número de bits.
- Logo, cada amostra adquire um valor de um conjunto (finito) de códigos possíveis.

Número de Bits	Número de Códigos
3	8
4	16
5	32
...	...
N	$2^N$

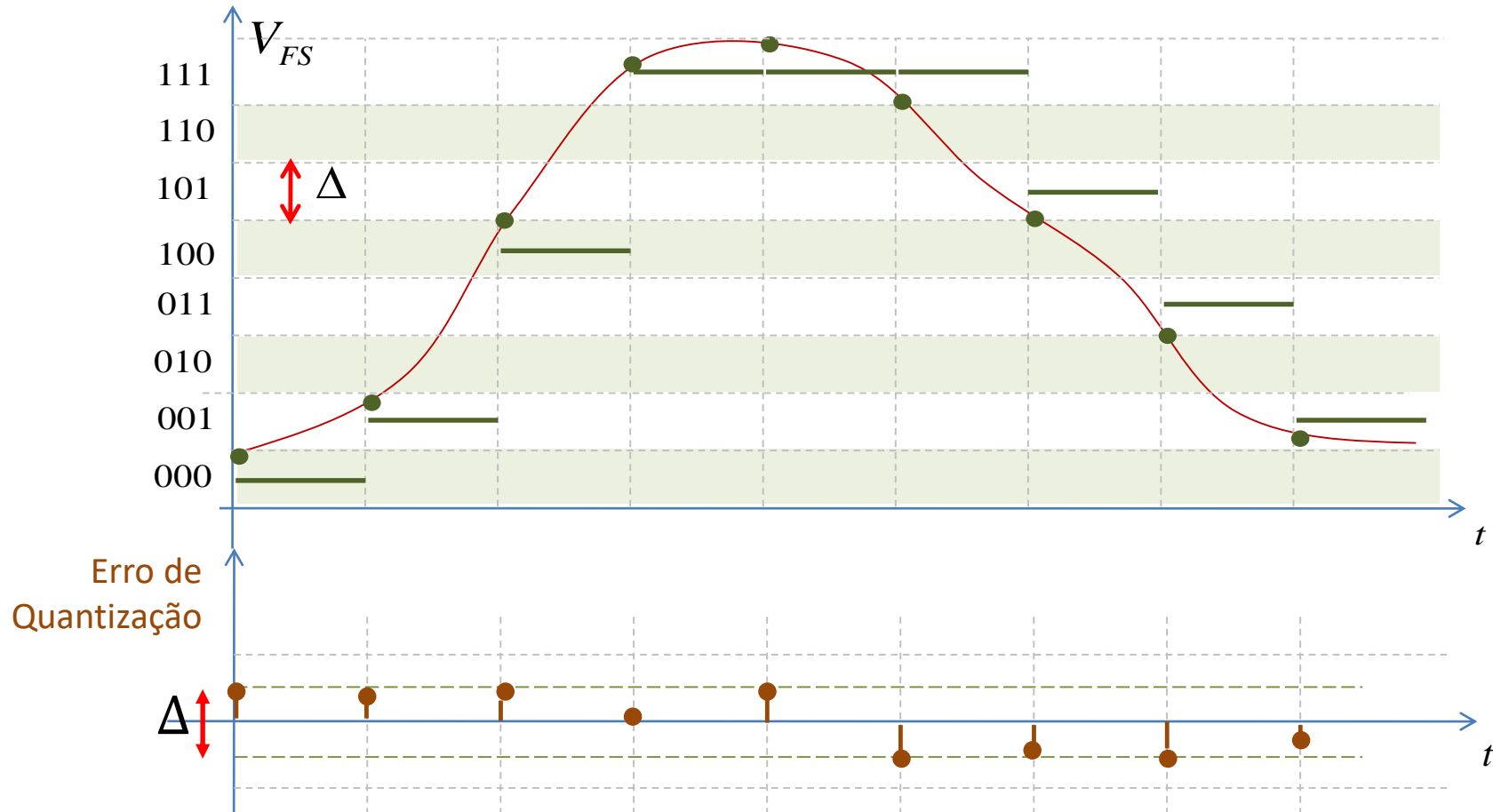
## 4. Quantização da Amplitude dos Sinais

- Para ilustrar o efeito da quantização da amplitude dos sinais, considere-se o caso do armazenamento em código de 3 bits:



## 4. Quantização da Amplitude dos Sinais

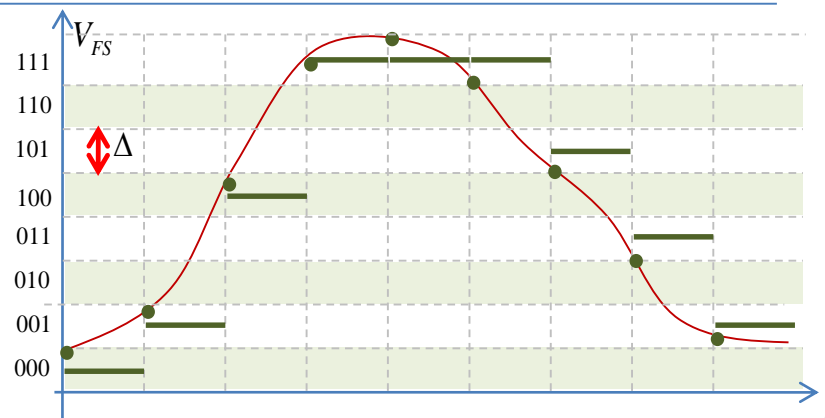
- Para ilustrar o efeito da quantização da amplitude dos sinais, considere-se o caso do armazenamento em código de 3 bits:



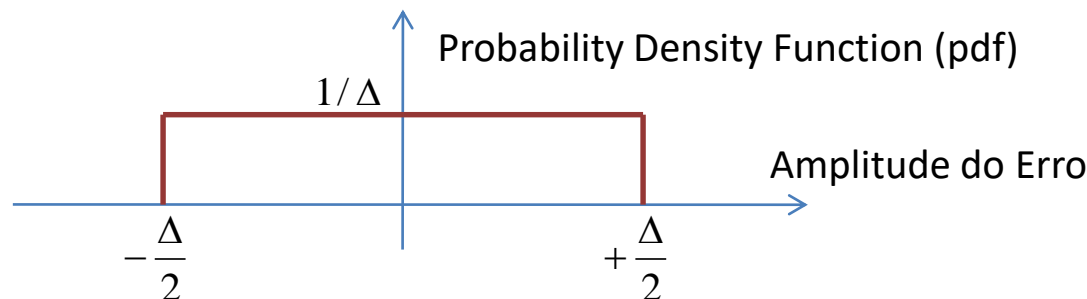
## 4. Quantização da Amplitude dos Sinais

- Cada código corresponde a um intervalo da amplitude igual a:

$$\Delta = \frac{V_{FS}}{2^N}$$



- Admitindo que o valor do erro de quantização pode adquirir, com igual probabilidade, qualquer valor nesse intervalo:



- Então, a potência (normalizada) do erro de quantização é:

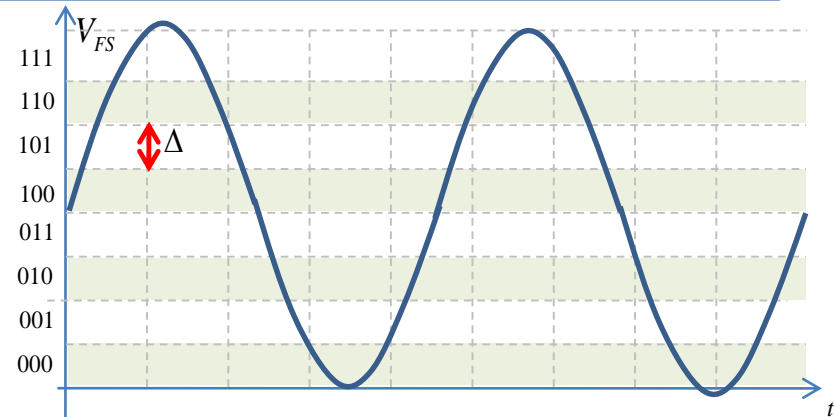
$$P(\varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varepsilon^2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 pdf(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} \varepsilon^2 d\varepsilon \rightarrow P(\varepsilon) = \frac{\Delta^2}{12}$$



## 4. Quantização da Amplitude dos Sinais

- Considerando um sinal sinusoidal que percorre toda a escala de amplitude:

$$x(t) = \frac{V_{FS}}{2} \sin(\omega t)$$



- A potência associada a essa onda sinusoidal é, então:

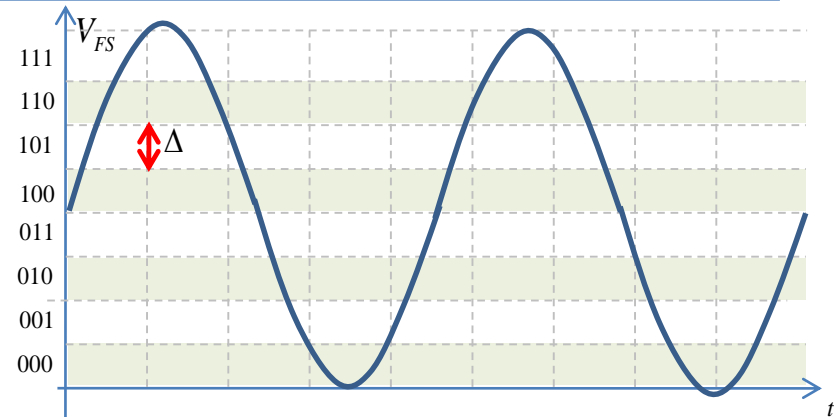
$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{V_{FS}}{2} \right)^2 = \frac{V_{FS}^2}{8}$$

- E a relação sinal-ruído (**SNR** – *Signal to Noise Ratio*) é:

$$SNR = \frac{P_x}{P_\epsilon} = \frac{\frac{V_{FS}^2}{8}}{\frac{\Delta^2}{12}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V_{FS}^2}{\Delta^2}$$

## 4. Quantização da Amplitude dos Sinais

- A relação sinal-ruído é uma métrica muito importante, pois indica o esforço necessário para se distinguir a informação útil contida num sinal, quando na presença de ruído.



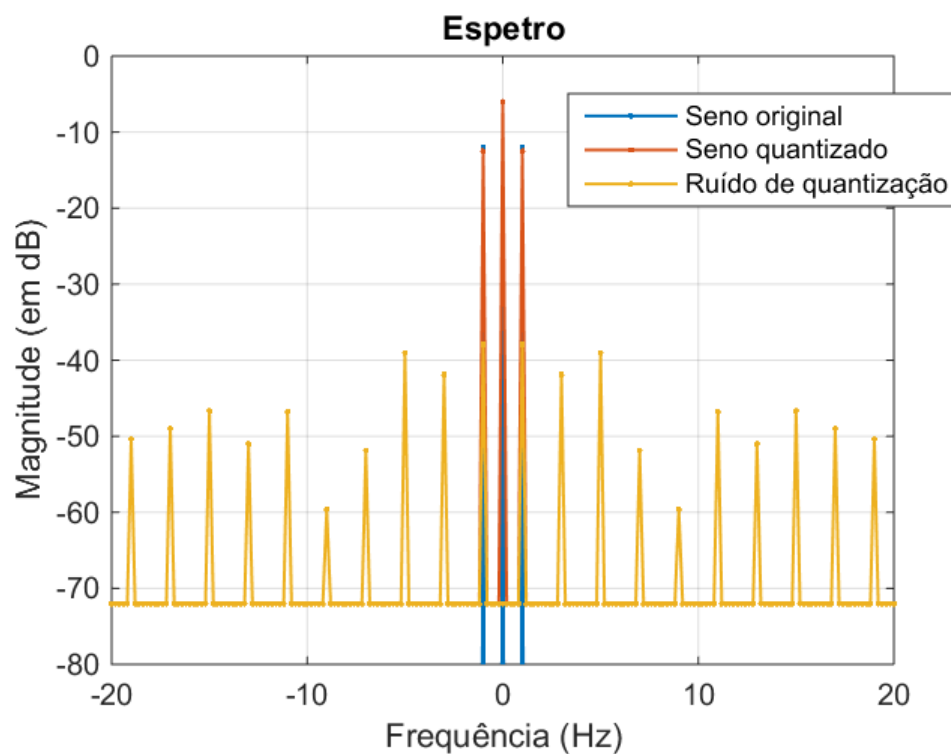
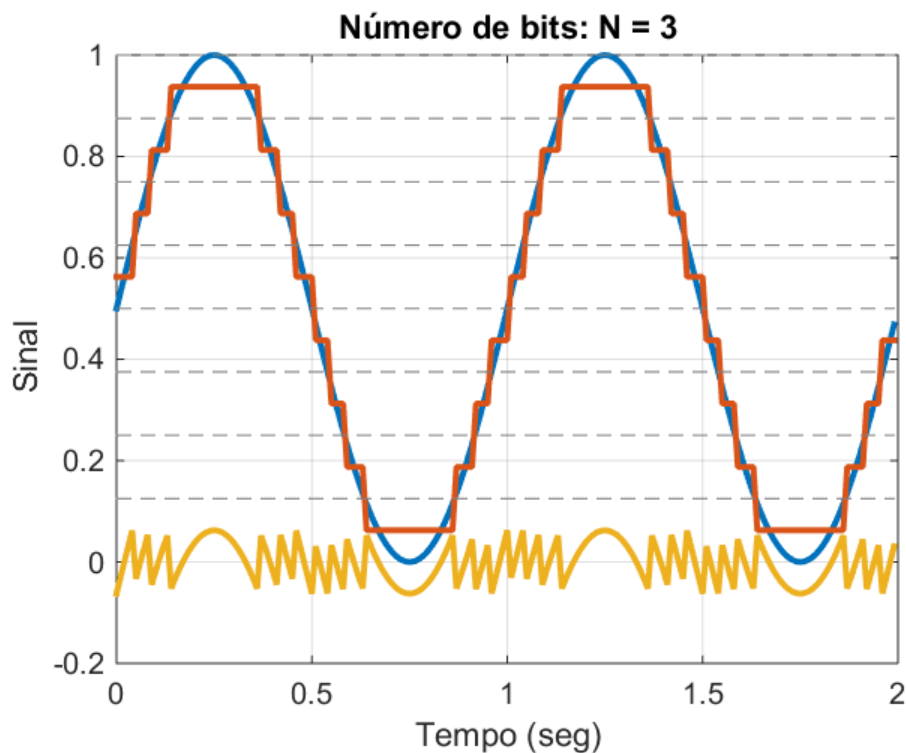
- A relação sinal-ruído é usualmente apresentada em decibéis (dB):
$$SNR_{dB} = 10 \log_{10}(SNR)$$
- Notando que  $\Delta = V_{FS}/2^N$ , verifica-se que a SNR entre a senoide de referência e o ruído de quantização é:

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{3}{2} \cdot 2^{2N} \right) = N \cdot 20 \log_{10}(2) + 10 \log_{10} \left( \frac{3}{2} \right) \rightarrow$$

$$SNR_{dB} \approx 6.02N + 1.76$$

## 4. Quantização da Amplitude dos Sinais

- Exemplo: Quantização de um seno com resolução de  $N = 3$  bits:



## 4. Quantização da Amplitude dos Sinais

- Exemplo: Quantização de uma imagem:

Imagem original

RGB codificados com 8 bits



$256^3 = 16.8$  milhões de cores

RGB codificados com 2 bits



$4^3 = 64$  cores

RGB codificados com 1 bit



$2^3 = 8$  cores

## 4. Quantização da Amplitude dos Sinais

- Exemplo: Quantização de uma imagem (maior diversidade de cores):

Imagem original

RGB codificados com 8 bits



$256^3 = 16.8$  milhões de cores

Tons de cinza (8 bits)



256 tons

RGB codificados com 2 bits



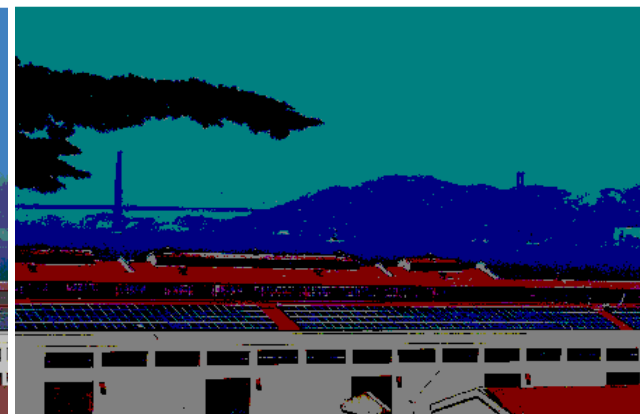
$4^3 = 64$  cores

Tons de cinza (2 bits)



4 tons

RGB codificados com 1 bit



$2^3 = 8$  cores

Tons de cinza (1 bit)



2 tons



## 5. Número de Bits Efetivos (ENOB)

---

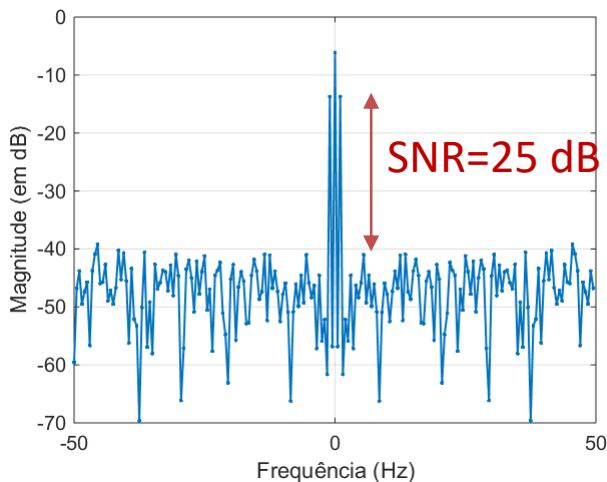
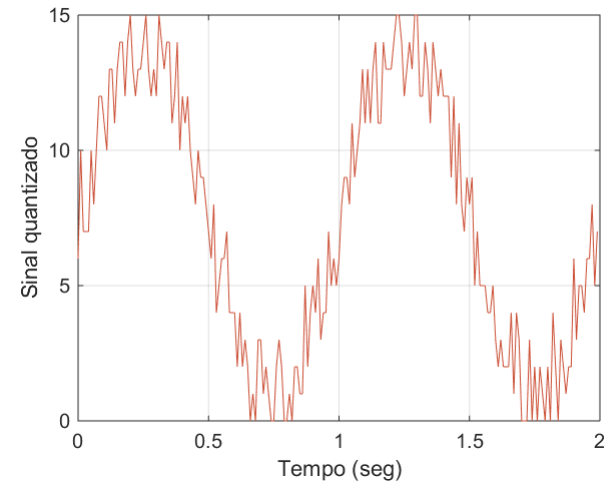
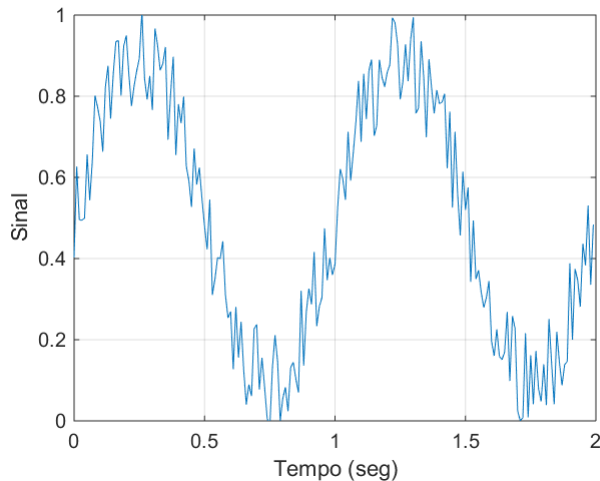
- A análise apresentada anteriormente pode ser colocada de forma inversa:
- Sendo verificada uma determinada relação sinal-ruído, qual é o número de bits que se obtém na representação da informação útil?
- Este é o conceito de Número de Bits Efetivos (**ENOB** – *Effective Number of Bits*):

$$ENOB \approx \frac{SNR_{dB} - 1.76}{6.02}$$

- Neste conceito, o ruído pode incluir diferentes componentes (quantização, ruído térmico, ruído de medida, de processo, ...).

# 5. Número de Bits Efetivos (ENOB)

- Exemplo da quantização (N=4 bits) de um sinal com ruído:



SNR=25 dB → ENOB=3.86 bit

