14/6

Ecuaciones diferenciales:

EDO ecuaciones diferenciales ordinarias

la incógnita es una función de una sola variable

∴ las derivadas que aparecen en la EDO son derivadas ordinarias (no parciales)

EDO:

variable indep.

$y = y(x)$ función incógnita a encontrar

$$F(x, y, \underbrace{y', \dots, y^{(n)}}_{\text{derivadas de la función incógnita}}) = 0$$

El ORDEN de la EDO es el orden de derivación más alto que aparece en la ec. (en este caso, n)

"Resolver" la EDO es hallar la función incógnita $y = y(x)$

Ejemplos

1) $$y y' + x y'' = \operatorname{sen}(x)$$

EDO
Incógnita
$y = y(x)$
2° orden

SG
solución general

En general, como debemos integrar 2 veces para obtener una solución, aparecerán 2 ctes de integración:
familia de soluciones que contiene 2 ctes arbitrarias (tantas como indica el orden)

Problema de valores iniciales

$$\text{PVI} \begin{cases} y y' + x y'' = \operatorname{sen}(x) \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

SP
solución particular
una solución que se obtiene dando valores a las ctes. de integración a partir de condiciones dadas

También existe:
SS
Solución singular
es una solución de una EDO que no pertenece a la familia de la SG

2) $$\text{PVI} \begin{cases} y'' = x \\ y(1) = -2 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

EDO de 2° orden

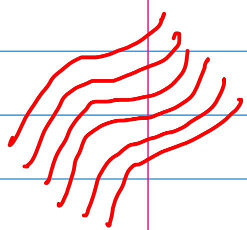
$$y'' = x$$

$$y' + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$y' = \frac{x^2}{2} + C \qquad (C = C_2 - C_1)$$

familia de cúbicas

SG : $$y = \frac{x^3}{6} + Cx + K \qquad C, K \in \mathbb{R}$$



SP que verifica $y(1) = -2$
$y'(1) = 0$

$$\begin{cases} -2 = \frac{1}{6} + C \cdot 1 + K \\ 0 = \frac{1}{2} + C \end{cases}$$

$$C = -\frac{1}{2}, \quad K = -2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = -5/3$$

SP : $$y = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x - \frac{5}{3}$$

¿Es $y = \frac{x^3}{6} + Cx + K$ solución de la EDO?

$$y'' = x$$

$$y' = \frac{3x^2}{6} + C$$

$$y'' = \frac{6x}{6} = x \quad \checkmark$$

3) Comprobar que $y = Cx + C^2$ es SG de la EDO $y = xy' + (y')^2$ y que $y = -\frac{x^2}{4}$ es una SS. Halle la SP que pasa por $(2,-1)$.

tiene la forma de un polinomio de 2° grado en x, y, y'

EDO: $y = xy' + (y')^2$ 1° orden 2° grado

x: v. indep.

$y = y(x)$ función incógnita

1) $y = Cx + C^2$ ¿es SG?

$y = Cx + C^2$

$y' = C$

∴ obtengo la EDO

$y = y'x + (y')^2$

∴ $y = Cx + C^2$ es solución de la EDO y es SG porque contiene una cte. arbitraria.

2) $y = -\dfrac{x^2}{4}$ ¿es solución de la EDO?

$y' = -\dfrac{x}{2}$

Reemplazando en la EDO $y \overset{?}{=} y'x + (y')^2$ debo verificar

$$y'x + (y')^2 = -\frac{x}{2}\,x + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$

$\underbrace{\qquad}_{y}$

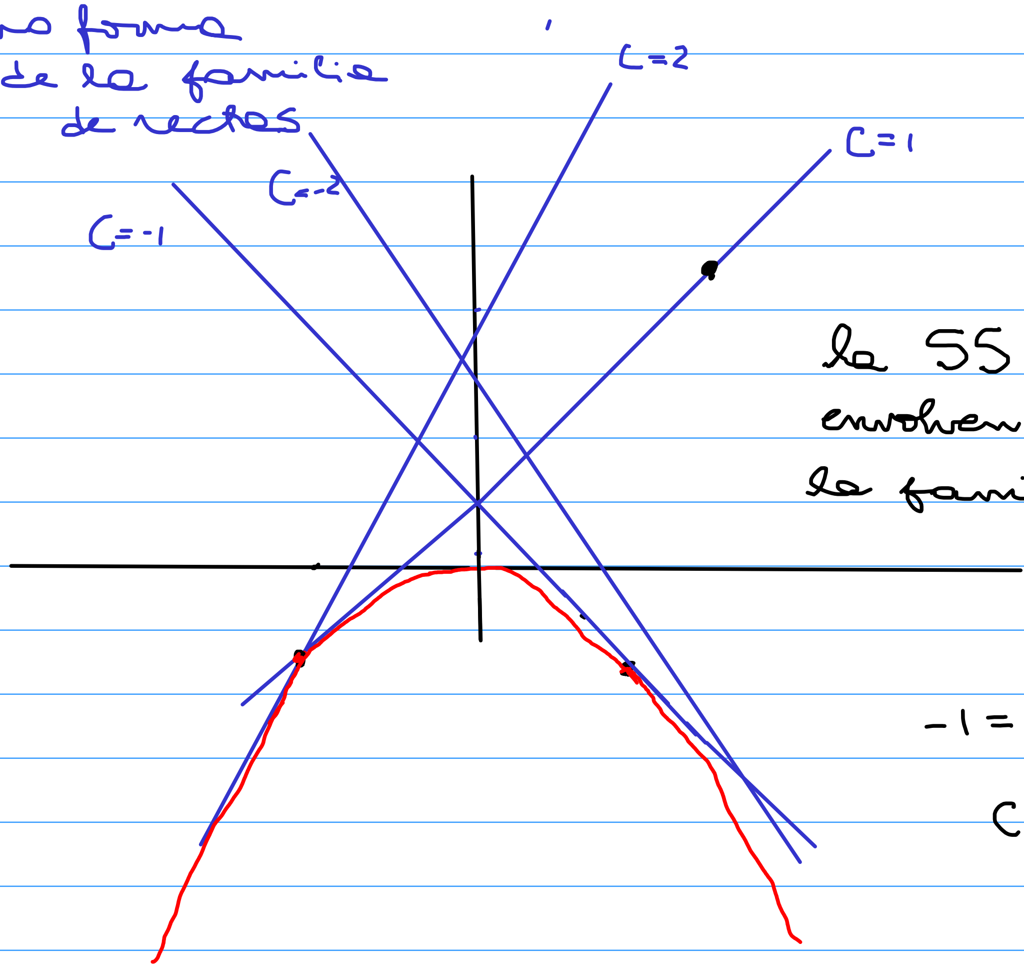
$\therefore$ verifica la EDO

SG: $y = Cx + C^2$ reemplazo en

$y = xy' + (y')^2$ ✓

SS: $y = -\dfrac{x^2}{4}$ reemplazo en

porque no forma parte de la familia de rectas



la SS es envolvente de la familia SG

$-1 = 2C + C^2$

$C^2 + 2C + 1 = 0$

$(\overset{x}{2}, \overset{y}{-1})$

$y = Cx + C^2 \rightarrow C = -1$

$y = -\dfrac{x^2}{4}$

EDO de 1ª orden

$$F(x, y, y') = 0$$ en forma implícita

o

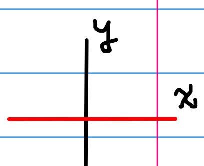
$$y' = f(x,y)$$ "forma normalizada"

Newton

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Leipnitz

Método de variables separables: $f(x,y) = g(x)\,h(y)$



EDO de 1ª orden

$$y' = x\,y$$

$y \equiv 0$ ✓ verifica la EDO

$0 = x \cdot 0$

si $y \not\equiv 0$

$$\frac{y'}{y} = x$$

$y = y(x)$

$dy = y'dx$

$$\int \underbrace{\frac{y'}{y}\,dx}_{dy} = \int x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{x^2}{2} + C}$$

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \underbrace{e^{C}}_{K>0}$$

$$|y| = K e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$|y| = \begin{cases} y & y \geq 0 \\ -y & y < 0 \end{cases}$$

$$y = \underbrace{\pm K}_{A \; \substack{>0 \\ <0}} e^{\frac{x^2}{2}}$$

SG: $$y = B e^{\frac{x^2}{2}}$$

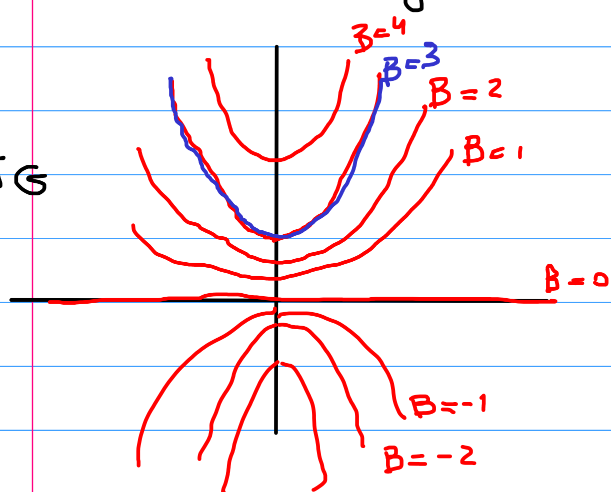
$$B \in \mathbb{R}$$

¿ $y = Be^{\frac{x^2}{2}}$ es solución de $y' = xy$?

$$y = B e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y' = B e^{\frac{x^2}{2}} \frac{2x}{2} = x \underset{\sim}{B e^{\frac{x^2}{2}}} = xy \checkmark$$

SG



PVI $$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$3 = B e^{\frac{0^2}{2}}$$

SP: $$y = 3e^{x^2/2}$$