16/6

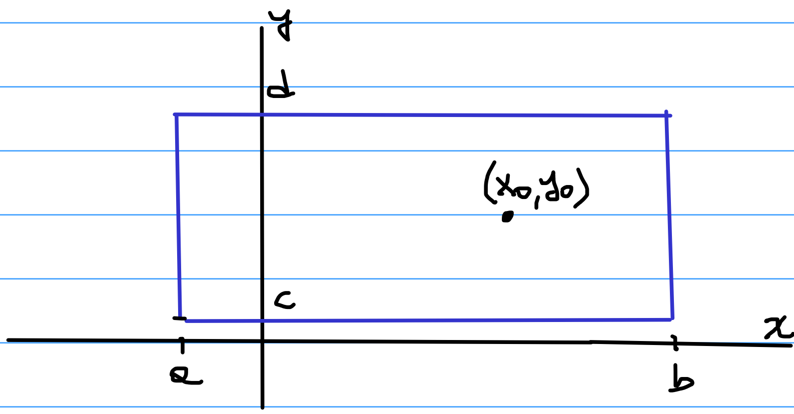
Teorema de Existencia y unicidad:
(versión simplificada)

$$\text{PVI} \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ec. dif. EDO (ordinaria) de 1ª orden

cond. inicial

$(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$



Si f y f'_y son continuas en $(a,b) \times (c,d)$

entonces existe un intervalo $I \subset (a,b)$ que contiene a x_0 / existe una solución $y = f(x)$ de PVI y es única en I.

Este Teorema es un respaldo para la utilización de los distintos métodos de resolución.

I) Método de variables separables

Problema de valores iniciales

$$\text{PVI}\begin{cases} y' = \underbrace{h(x)g(y)}_{f(x,y)} \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

Si h y g son continuas en cierto intervalo I, el Teorema garantiza la existencia y unicidad de solución del PVI

II) Método de las ecuaciones lineales:

EDO lineal de orden n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

$a_i(x)$, $f(x)$ continuas en $I \subseteq \mathbb{R}$

EDO lineal de 1ª orden

$$a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad (*)$$

$a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ continuas $I \subseteq \mathbb{R}$

EDO lineal homogénea asociada a $(*)$

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

Tomo

$y_1(x)$, $y_2(x)$ soluciones la homogénea

$$(\underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{R}} y_1(x) + \underbrace{\beta}_{\in\mathbb{R}} y_2(x))' = \alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x)$$

$$a(x)\left(\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)\right)' + b(x)\left(\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)\right) =$$

$$= \alpha\left(\underbrace{a(x)\,y_1'(x) + b(x)\,y_1(x)}_{0}\right) +$$

$$+ \beta\left(\underbrace{a(x)\,y_2'(x) + b(x)\,y_2(x)}_{0}\right) = 0$$

∴ la combinación lineal de soluciones de la EDO lineal homogénea es solución de la EDO lineal homogénea.

S conjunto de soluciones de la homogénea $\Big\}$ es un subespacio del espacio vectorial de las funciones derivables

Tomemos

$z_1(x)$, $z_2(x)$ soluciones de la no homogénea:

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x)$$

$$\begin{array}{rl} & a(x)\,z_1' + b(x)\,z_1 = f(x) \\ - & a(x)\,z_2' + b(x)\,z_2 = f(x) \\ \hline & a(x)\left(z_1 - z_2\right)' + b(x)\left(z_1 - z_2\right) = 0 \end{array}$$

∴ la diferencia entre soluciones de la no homogénea es solución de la homogénea

Entonces:
la SG de la no homogénea se podrá obtener como suma

$$\underbrace{y_{NH}}_{} = \underbrace{y_H}_{\text{SG de la homogénea}} + \underbrace{y_P}_{\text{SP de la no homogénea}}$$

$$a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x)$$

$$a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$$

$$a(x)\, y' = -b(x)\, y$$

Con los cuidados necesarios....

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$$

Es de variables separables!...

Ejemplo

$$\begin{cases} \overbrace{x}^{a(x)}\, y' \overbrace{-}^{b(x)} y = \overbrace{x}^{f(x)} \\ y(3) = 2 \end{cases}$$

EDO lineal no homogénea

$(0, +\infty)$ o $(-\infty, 0)$

$x = 0$ punto singular

$$x y' - y = x$$

Trabajaremos para $x \neq 0$:

1°) Resolvemos la homogénea asociada

$$x y' - y = 0$$

$$x \cdot y' = y$$

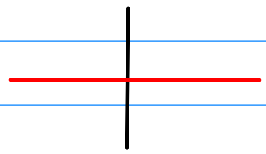
Como $x \neq 0$:

$$y' = \frac{y}{x}$$

$y \equiv 0$

$$0 = \frac{0}{x} \checkmark$$

es solución



$y \not\equiv 0$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$$

$dy = y' dx$

$$\int \frac{\overbrace{y' dx}^{dy}}{y} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|} e^{C}$$

$$|y| = |x| K$$

$K > 0$

$$y = \pm K x$$

$$\underbrace{y = A x, \ A \in \mathbb{R}}_{\text{SG de la homogénea}}$$

2°) Buscamos una solución particular de la no homogénea:

$$x\,y' - y = x$$

Proponemos

$y_p = A(x) \cdot x$

pido que sea

$$x\left(A'(x)\,x + A(x)\cdot 1\right) - A(x)\,x = x$$

$$A'(x)\,x^2 + \cancel{A(x)\cdot x} - \cancel{A(x)\,x} = x$$

$$A'(x) = \frac{1}{x}$$

Integrando:

$$A(x) = \ln|x| + C$$

Elijo la más sencilla (necesito una particular)

$$A(x) = \ln|x|$$

$$y_p(x) = A(x)\,x = x\ln|x|$$

SG de la no homogénea

$$y = y_H + y_p$$

$$= Ax + x\ln|x|$$

es la SG de

$$x\,y' - y = x$$

3º) Buscamos la solución del PVI

$$\begin{cases} xy' - y = x \\ y(3) = 2 \end{cases}$$

SG

SP

$$y = Ax + x\ln|x|$$

$$2 = A \cdot 3 + 3\ln(3)$$

$$A = \frac{2}{3} - \ln(3)$$

SP del PVI : $y = \left(\frac{2}{3} - \ln(3)\right)x + x\ln|x|$

(Sirve en $(0, +\infty)$)

EDO $\xrightarrow[\text{Integramos}]{\text{Resolvemos}}$ SG

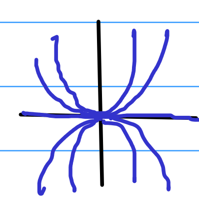
familia de curvas

Familia de curvas $\xrightarrow[\text{(desaparezcan ctes.)}]{\text{Derivamos}}$ EDO

cuya SG sea esa familia

Familia de parábolas

$$\left.\begin{array}{l} y = kx^2 \\ y' = k\,2x \end{array}\right\} \quad y' = \frac{y}{x^2}\,2x$$



$$y' = 2\frac{y}{x}$$

EDO cuya SG es

Familia de circunf.

$$\mathcal{F}: \quad x^2 + y^2 = k \;, \quad k \geq 0$$

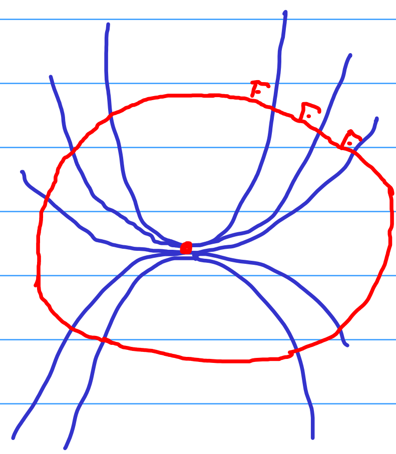
$$x^2 + y(x)^2 = k$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$x + yy' = 0$$

EDO cuya SG es $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{\perp}$$



$$y = kx^2$$

$$y' = 2kx$$

$$y' = 2\frac{y}{x^2}x$$

EDO de $\mathcal{F}$ $\quad y' = \frac{2y}{x}$

EDO de $\mathcal{F}^{\perp}$ $\quad -\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x}$

$$-x = 2yy'$$

$$-\int x\,dx = \int 2yy'\,dx$$

$$-\frac{x^2}{2} = y^2 + C$$

Familie de elipses $\frac{x^2}{2} + y^2 = K$