Otro método para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales:

Hay otro método que permite resolver EDO lineales.
Lo ilustraremos con el mismo ejemplo que usamos para ilustrar el Método de Variación de Parámetros.
Si lo analizamos con detalle, veremos que se trata de otra manera de aplicar ese método.

Ejemplo 12: Consideremos el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' + \dfrac{3}{x} y = x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Estamos buscando una función $y = y(x)$ que la verifique.
Propongamos una función de la forma $y(x) = u(x)v(x)$. ¿Y esto por qué? Observemos que *cualquier* función puede escribirse como producto de otras dos; la ventaja en este caso es que nos permite pedir condiciones sobre $u(x)$ y sobre $v(x)$, ajustándolas para que la ecuación se verifique.
Si $y(x) = u(x)v(x)$, es

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

(derivada de un producto).
Reemplazando en la ecuación $y' + \frac{3}{x} y = x$ se obtiene

$$(u'v + uv') + \frac{3}{x} uv = x$$

donde para simplificar la notación omitimos (x) en la funciones u y v.
Sacando como factor común una cualquiera de las funciones resulta

$$u'v + u(v' + \frac{3}{x} v) = x$$

Estamos buscando funciones $u(x)$ y $v(x)$ que verifiquen la ecuación. Pediremos que se vayan cumpliendo condiciones a tal efecto.
La primera es pedir que v sea una función que verifique

$$v' + \frac{3}{x}v = 0$$

Comparando con el Método de Variación de Parámetros vemos que es equivalente a buscar la solución de la ecuación lineal homogénea asociada.

$$v' + \frac{3}{x}v = 0$$
$$v' = -\frac{3}{x}v$$

Esta ecuación tiene, por un lado, la solución nula $v \equiv 0$ y, además de ella,

$$\frac{v'}{v} = -\frac{3}{x}$$

$$\int \frac{v'}{v}dx = -3\int \frac{dx}{x}$$

$$ln|v| = -3ln|x| + C$$

$$ln|v| = ln|x|^{-3} + C$$

$$v = \frac{K}{x^3}$$

que también comprende a la solución nula.
Busquemos **<u>una</u>** función no nula v que verifique la ecuación, elijamos la más simple posible, por ejemplo con $K = 1$ (podríamos elegir cualquier valor de la constante).
Introduciendo $v = \frac{1}{x^3}$ en la ecuación se tiene

$$u' \underbrace{v}_{\frac{1}{x^3}} + u\underbrace{\left(v' + \frac{3}{x}v\right)}_{\substack{\text{ya pedimos} \\ \text{que fuera 0}}} = x$$
$$u'\frac{1}{x^3} = x$$
$$u' = x^4$$
$$u = \frac{x^5}{5} + C$$

Como $y(x) = u(x)v(x)$ resulta

$$y(x) = (\frac{x^5}{5} + C)\frac{1}{x^3}$$
$$y(x) = \frac{x^2}{5} + C\frac{1}{x^3}$$

que es la solución general.
Ahora sólo falta hallar el valor de C para que se cumpla la condición $y(1) = 1$. En este caso, $C = \frac{4}{5}$.

Observemos la forma de la solución general que obtuvimos y comparemos con la solución que obtuvimos con el otro método

$$\underbrace{y(x)}_{y_G} = \underbrace{\frac{x^2}{5}}_{y_P} + \underbrace{C\frac{1}{x^3}}_{y_H}$$

La solución coincide exactamente con la que obtuvimos por el Método de Variación de Parámetros (podría ocurrir, eventualmente, que difirieran en la solución particular, porque justamente se trata de *una* solución particular cualquiera).
No debemos olvidar la constante de integración en la segunda función que busquemos, porque justamente esa constante suministra la parte general de la solución.
Si examinan el procedimiento verán que resolvemos la ecuación homogénea y luego buscamos una solución particular, al igual que hicimos con el método anterior.