Tarea 11. Mínimos cuadrados e integración

Dr. Luis Daniel Blanco Cocom

30 de octubre de 2023

Entrega máxima: 11:55 pm del domingo 05 de noviembre de 2023. Luego de esta fecha habrá penalización de 1 pt por día de entrega tardía. Puntuación máxima: 10 pts.

Instrucciones: En un reporte titulado ApellidoPaterno_Nombre_Tarea11.docx o .pdf, realiza los siguientes ejercicios, lo más detallado posible. No olvides añadir los códigos y la manera de ejecución en el reporte.

1. Crear un código en C que resuelva el problema de mínimos cuadrados en el sentido de interpolación numérica para:

   a) Un polinomio interpolador de $n+1$ puntos de la forma $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ para una función $f(x)$.

   b) Una función interpoladora trigonométrica de $n+1$ puntos para $f(x)$ de la forma $F_{trig}(x) = a_0 cos(0\frac{\pi x}{6}) + a_1 cos(1\frac{\pi x}{6}) + ... + a_n cos(n\frac{\pi x}{6})$.

   c) Una función interpoladora de base radial de $n+1$ puntos para $f(x)$ de la forma $F_{RBF}(x) = a_0 e^{-r_0^2} + a_1 e^{-r_1^2} + ... + a_n e^{-r_n^2}$, dónde $r = (x - x_i)$ para $i = 0, ..., n$.

   NOTA: Recordemos que el problema de mínimos cuadrados "regularizado" resuelve el sistema:

   Conjunto de entrenamiento $\mathcal{T} = \left\{\left(\mathbf{x}^{(k)}, y^{(k)}\right)\right\}_{k=1}^{p}$ $\qquad y = f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} w_i \phi_i(\mathbf{x})$

$$\left(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Lambda}\right)\mathbf{w}^* = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{w}^* = \left(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Lambda}\right)^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{\Phi} = \left(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_m\right)$$

$$\mathbf{w}^* = \begin{bmatrix} w_1^* \\ w_2^* \\ \vdots \\ w_m^* \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi}_j = \begin{bmatrix} \phi_j\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) \\ \phi_j\left(\mathbf{x}^{(2)}\right) \\ \vdots \\ \phi_j\left(\mathbf{x}^{(p)}\right) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(p)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

   Encontrar los valores λ_i es todo un problema de optimización, para nuestro fines consideremos que los valores son constantes, es decir, $\lambda = \lambda_i, \forall i$.

2. Para evaluar los códigos del ejercicio 1. Consideremos la función de Sutherland que define la viscosidad de un gas según la temperatura T en Kelvin (entre 1000), definida por $f(x) = m_0 \left(\frac{1000T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{T_0 + S_u}{1000T + S_u}\right)$. Calculemos la viscosidad del oxígeno O_2, para ello usemos $m_0 = 1.919e^{-2}$, $T_0 = 273$, y $S_u = 139$. Realiza lo siguiente:

   a) Evalúa los puntos $Ti = [0.273, 0.303, 0.323, 0.353, 0.423, 0.573, 1.473\ ]$ en la función de Sutherland. Los puntos Ti corresponden a los $n+1$ puntos xi, y las evaluaciones son los valores yi (estamos simulando que se ha realizado un experimento de laboratorio físico, es decir, sólo tenemos mediciones experimentales).

b) Usando el valor de $\lambda = 0,\, 1e^{-5}, 1e^{-7}$, para $0 \leq i \leq n$, aplica las 3 funciones de interpolación programadas obtenidas del método de mínimos cuadrados en el inciso 1), con ellos calcula la viscosidad para $T = 1.2$, compara con el valor real obtenido directamente con la función de Sutherland.

c) Grafica las soluciones obtenidas en el intervalo [0.273, 1.5], usa incrementos de ≈0.05.

d) Repite los incisos a), b) y c), pero con los nodos $Ti = [0.273,\, 0.473,\, 0.673,\, 0.873,\, 0.1073,\, 0.1273,\, 1.473]$. ¿Qué puedes concluir de los nodos y el comportamiento de las funciones de interpolación según λ?

3. Crea una librería en C que calcule la aproximación a una integral en el intervalo [a,b] arbitrario con los métodos de Newton-Cotes abierto (n=0,1,2,3), Newton-Cotes cerrado (n=1,2,3,4), y cuadratura gaussiana (n= 1,2,3,4,5). Con las librerías aproxima las siguientes integrales:

$$\int_0^{\pi/4} \sin(x)dx, \quad \int_1^{1,5} x^2 \ln x dx, \quad \int_0^1 x^2 e^{-x} dx,$$

   NOTA: Crea una tabla comparativa de los resultados. OJO: La primer integral es la vista en clase.

4. Investiga el método de extrapolación Richardson, y el método de Romberg, presenta un ejemplo. No olvides referenciar tu investigación.

Rúbrica de evaluación del reporte:

Introducción = 0.2 pts.
Pseudocódigo = 1 punto.
Resultados = 1.5 pts.
Conclusiones = 0.2 pts.
Referencias = 0.1 pts.

NOTA: La redacción de la introducción y conclusión son respecto a la realización de los ejercicios, presentar la importancia o necesidad de la interpolación. NO SE ACEPTA EL DOCUMENTO DEL REPORTE, si la redacción no es personal.