Maestría en Ciencias con Especialidad en Computación y Matemáticas Industriales
Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT), A.C.
Examen Parcial 2: Métodos Numéricos
(Tiempo: 6 horas)

Nombre: ____

Fecha: ____

Instrucciones:

- El tiempo estimado del examen está pensado para realizarse en, a lo más, 3 horas si se han realizado las tareas del parcial, pero se proporciona más tiempo debido a que deben analizar y escribir adecuadamente sus respuestas.
- Escriba lo más claro posible los programas que realices.
- Escriba su nombre en cada programa.
- Justifique lo más precisamente posible todas sus respuestas, el procedimiento es MUY importante.
- En el documento final, presenta la manera de compilar cada uno de tus programas creados.
- Los PLAGIOS serán altamente penalizados.
- Conección a videollamada a las 5:00 pm para analizar si se requiere algo de tiempo extra.

Problema 1 [1 puntos]

Aproxima el valor de

$$\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

utilizando 4 de los métodos estudiados en clase, además, realiza un comparativo de errores absolutos respecto al valor exacto.

Problema 2 [2.5 puntos]

Hallar el mínimo de la siguiente función en el dominio $(x, y) \in [4\pi/3, 7\pi/4] \times [4\pi/3, 7\pi/4]$,

$$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \cos(x + y)$$

Elige uno de los métodos de minimización estudiados para hallar el mínimo de la función, comenzar las iteraciones con el extremo inferior izquierdo de dominio. Tú defines la tolerancia. ¿Cuántas iteraciones se alcanzaron? Explica claramente el por qué.

Problema 3 [4 puntos]

La siguiente tabla muestra la evolución de una enfermedad contagiosa en función del tiempo t. Aquí, c indica el número de contagiados.

t	0	3	5	7
c	1	20	22	23

1. Aproximar, mediante interpolación con el método de Lagrange el valor de $c(4)$ (**0.5 pts.**).
2. En la tabulación de c(t) se observa que dicha función parece saturarse a medida que pasa el tiempo, es decir, presenta una asíntota horizontal cercana a $c \approx 22$. Explica entonces por qué el polinomio obtenido en el apartado anterior no resulta adecuado para aproximar valores de c en tiempos superiores a 7 (**1 pt.**).
3. Una forma de resolver el problema del inciso anterior (2.) consiste en ajustar los datos de la tabulación a un modelo de crecimiento logistico. Para este ejemplo, se propone,

$$c(t) = \frac{1}{\alpha + \beta \exp(-3t)}.$$

   Calcula el valor de los parámetros α y β mediante el método de minimos cuadrados. Para esto te sugiero retabular los valores de la tabla calculando $1/c(t)$, y hacer lo mismo con la función $c(t)$ (**2 pts.**).
4. Grafica el polinomio interpolador de Lagrange comparándolo con $c(t)$ en el intervalo $t \in [0, 10]$ (**0.5 pts.**).

Problema 4 [2.5 puntos]

Considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \operatorname{sen} x, \\ y'(0) = 1, y(0) = -1 \end{cases}$$

el cual tiene como solución única a $y(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^x + \frac{5}{2}x\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\cos x$.

1. Realiza una propuesta de solución de la ecuación diferencial en el intervalo $x \in [0, 2]$ según los temas estudiados en la clase. Explica lo más claro posible tu procedimiento y elección (**2 pts.**).
2. Grafica tu solución y compárala con la solución analítica en el intervalo $x \in [0, 2]$ (**0.5 pts.**).