Ruiz Gudiño Jose Rafael Matematicas Discretas Tarea
Registro: 20110374 3/Abril/2020

Sucesiones, series, inducción matemática

Sección 5,1 pag 242-244

Escriba los cuatro primeros términos de las sucesiones definidos por las fórmulas de los ejercicios 1 al 6

1. $a_k = \frac{k}{10+k}$, para todo entero $k \geq 1$

$a_1 = \frac{1}{10+1} = \frac{1}{11}$, $a_2 = \frac{2}{10+2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{3}{10+3} = \frac{3}{13}$, $a_4 = \frac{4}{10+4} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

5 $e_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot 2$, para todo entero $n \geq 0$

$n_0 = |\frac{0}{2}| \cdot 2 = 0 \cdot 2 = 0$

$n_1 = |\frac{1}{2}| \cdot 2 = [0.5] \cdot 2 = \cancel{1} = 0$

$n_2 = |\frac{2}{2}| \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$

$n_3 = |\frac{3}{2}| \cdot 2 = [1.5] \cdot 2 = 3$

9.- $h_n = \lfloor \log_2 n \rfloor$ para todo entero $n \geq 1$

1 $h_1 = 1 \cdot \lfloor \log_2 1 \rfloor = 1 \cdot \lfloor 0 \rfloor = 1 \cdot 0 = 0$

2 $h_2 = 2 \cdot \lfloor \log_2 2 \rfloor = 2 \cdot \lfloor 1 \rfloor = 2 \cdot 1 = 2$

3 $h_3 = 3 \lfloor \log_2 3 \rfloor = 3 \lfloor 1,5850\ldots \rfloor = 3 \cdot 1 = 3$

4 $h_4 = 4 \lfloor \log_2 4 \rfloor = 4 \lfloor 2 \rfloor = 4 \cdot 2 = 8$

5 $h_5 = 5 \lfloor \log_2 5 \rfloor = 5 \lfloor 2.3219 \rfloor = 5 \cdot 2 = 10$

13 $1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \frac{1}{5} - \frac{1}{6}, \frac{1}{6} - \frac{7}{7}$

n	a_n
1	$a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}$
2	$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2+1}$
3	$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3+1}$
4	$a_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4+1}$
5	$a_5 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5+1}$
6	$a_6 = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6+1}$

17.- Considere la sucesión definida por $a_n = \frac{2n + (-1)^n - 1}{4}$ para todo entero $n \geq 0$. Determine una fórmula alternativa explícita para a_n que utilice la notación de piso

0 $a_0 = \frac{2 \cdot 0 + (-1)^0 - 1}{4} = \frac{0}{4} = 0 = \lfloor \frac{0}{2} \rfloor$

1 $a_1 = \frac{2 \cdot 1 + (-1)^1 - 1}{4} = \frac{0}{4} = 0 = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor$

2 $a_2 = \frac{2 \cdot 2 + (-1)^2 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1 = \lfloor \frac{2}{2} \rfloor$

3 $a_3 = \frac{2\cdot 3+(-1)^3-1}{4} = \frac{4}{4} = 1 = \lfloor \frac{3}{2} \rfloor$

4 $a_4 = \frac{2\cdot 4+(-1)^4-1}{4} = \frac{4}{4} = 1 = \lfloor \frac{3}{2} \rfloor$

5 $a_5 = \frac{2\cdot 5(-1)^5-1}{4} = \frac{8}{4} = 2 = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor$

6 $a_6 = \frac{2\cdot 6(-1)^6-1}{4} = \frac{12}{4} = 3 = \frac{6}{2}$

$a_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad n \geq 0$

21: $\sum_{m=0}^{3} \frac{1}{2m} \quad \frac{1}{2^{\prime}} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$

25: $\prod_{k=2}^{2} (1-\frac{1}{k}) \quad 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

29: $\sum_{i=1}^{n} (-2)^i = (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + \ldots + (-2)^n$
$= -2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 + \ldots + (-1)^n 2^n$
$= -2 + 4 - 8 + 16 + \ldots (-1)^n 2^n$

33: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2};\ n=1$

$\sum^{n} i=1\ [i(i!)]$

37 $\sum_{i=1}^{k+1} i(i!) \quad \sum^{k}{}_{i=1} [i(i!)] + [k+1][(k+1)!]$

41.- $\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{k+1} + \frac{m+1}{m+2} = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{k+1} + \frac{m+1}{m+2} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{k}{k+1}$

45: $(2^2-1)\cdot(3^2-1)\cdot(4^2-1)$
$\prod^{4}_{k=2} (k^2-1) = (2^2-1) * (3^2-1) * (4^2-1)$

49. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$
i^3 de $i = 1$ a $n = \sum_{i=1}^{n} i^3$

53: $\sum_{k=0}^{5} k(k-1)$ Cuando $k=0$ entonces $i=1$
Cuando $k=5$ entonces $i=6$
$i=k+1$ entonces $k=i-1$
$k(k-1) = (i-1)((i-1)-1) = (i-1)(i-2)$
$\sum_{k=0}^{5} k(k-1) = \sum_{i=1}^{6} (i-1)(i-2)$

57. $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{(n-i)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(i-1)+1}{(n-((i-1)+1))^2}$ $\quad i=(i-1)+1$

$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(i-1)+1}{(n-(i-1)-1)^2} = \sum_{i-1=0}^{n-2} \frac{(i-1)+1}{(n-(i-1)-1)^2}$ remplazamos $i-1$ b y j.

$= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{j+1}{(n-j-1)^2}$

61. $\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)}$

$= \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+2)}$

65. $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} = n$

69. $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 2,1}{(n-k)(n-k-1)\ldots 2,1} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$

73. $\binom{3}{0} = \frac{3!}{(0!)(3-0)!} = \frac{3!}{(1)(3!)} = 1$

77. a. Demuestre que $n!+2$ es divisible por 2, para todo entero $n \geq 2$

b. Demuestre que $n!+k$ es divisible por k, para todo entero $n \geq 2$ y $k=2,3,\ldots,n$.

c. Dado cualquier entero $m \geq 2$ ¿es posible encontrar una sucesión de $m-1$ de enteros positivos no consecutivos ninguno de los cuales es primo?

a) $n! = \begin{cases} 2\cdot 1 & \text{Si } n<2 \\ 3\cdot 2\cdot 1 & \text{Si } n<3 \\ n\cdot(n-1)\ldots 2\cdot 1 & \text{Si } n>3 \end{cases}$

En cada caso $n!$ tiene un factor de 2 y así $n! = 2k$ para algún entero k, entonces $n!+2 = 2k+2$

$= 2(k+1)$

Como $k+1$ es un entero entonces $n!+2$ es divisible por 2

b) $n \geq 2$ Por la definición de factores: $n! = n\cdot(n-1)\ldots 2\cdot 1$

$2 \leq k \leq 2$ $\quad 2 \leq k \leq n$ es seguro que $n\cdot(n-1)\ldots 2\cdot 1$ tiene factores k

$n!+k = n\cdot(n-1)\cdot,\ldots,\cdot(k+1)\cdot k\cdot(k-1)\ldots 2\cdot 1+k$

$= k(n\cdot(n-1))\cdot,\ldots(k+2)\cdot(k-1),\ldots,2\cdot 1+1)$

$= n\cdot(n-1)\cdot,\ldots,(k+1)\cdot(k-1),\ldots,2\cdot 1+1$ el producto es un entero

$-(n,(n-1)\cdot,\ldots,(k+1).(k-1),\ldots,2\cdot 1+2$ es un entero

$n!+k$ es divisible por k.

c) Se sabe que $m! + k$ es divisible por k cuando $k = 2, 3, \ldots, m$, $m! + k$ es k consecutivo entero positivo

Secuencia de $m-1$ $(m!+2, m!+3, m!+4, \ldots, m!+m)$ Por lo tanto si

81: 90

$$\begin{array}{r} 2\overline{)1}\ 0 \\ 2\overline{)2} \\ 2\overline{)5} \\ 2\overline{)11} \\ 2\overline{)22} \\ 2\overline{)45} \\ 2\overline{)90} \end{array}$$

residuos

6=1
5=0
4=1
3=1
2=0
1=1
0=0

85: 28

i	-	0	1	2	3	4
q	28	14	7	3	1	0
r(i)	-	0	0	1	1	1

28=11100

89. 693

$$\begin{array}{r} 43 \\ 16\overline{)693} \\ 640 \\ \hline 53 \\ 48 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 16\overline{)43} \\ 32 \\ \hline 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ 16\overline{)2} \end{array}$$

R = 2B5