Jose Rafael Ruiz Gudiño 1°P T/M 20110374 Tarea 4

Matemáticas Discretas 23/04/2020

Teorema del Binomio, Principio de inducción matemática

5.31 Encuentre

a) $10! = 3{,}628{,}800$ b) $60! = 8.320987113 \times 10^{81}$

$11! = 39{,}916{,}800$

$12! = 479{,}001{,}600$

5.32 Evalúe

a) $\frac{16!}{14!} = \frac{16\times15\times\cancel{14!}}{\cancel{14!}} = 240$ c) $\frac{8!}{10!} = \frac{\cancel{8!}}{10\times9\times\cancel{8!}} = \frac{1}{90}$

b) $\frac{14!}{11!} = \frac{14\times13\times12\times\cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 2184$ d) $\frac{10!}{13!} = \frac{\cancel{10!}}{13\times12\times11\times\cancel{10!}} = \frac{1}{1716}$

5.33 Simplifique

a) $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{7!}{2!} = 1$ b) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2!)}{n-2!} = n\times(n-1)$

c) $\frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{(n+2)\cdot(n+1)\times(n)\cancel{(n-1)!}} = \frac{1}{(n+2)(n+1)(n)}$

d) $\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!} = \frac{(n-r+1)(n-r)\cancel{(n-r-1)!}}{\cancel{(n-r-1)!}} = (n-r+1)\times(n-r)$

5.34 Encuentre $C(n,r)$

a) $\binom{5}{2}$ $C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5\times4\times3!}{2(3!)} = \frac{20}{2} = 10$

b) $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7\times6\times5\times\cancel{4!}}{3!(\cancel{4!})} = \frac{210}{6} = 35$

c) $\binom{14}{2} = \frac{14!}{2!(14-2)!} = \frac{14\times13\times\cancel{12!}}{2!\cancel{(12)!}} = \frac{182}{2} = 91$

d) $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}(2)!} = \frac{30}{2} = 15$

e) $\binom{20}{17} = \frac{20!}{17!(20-17)!} = \frac{20\times19\times18\times\cancel{17!}}{\cancel{17!}(3)!} = \frac{6840}{6} = 1140$

f) $\binom{18}{15} = \frac{18!}{15!(18-15)!} = \frac{18\times17\times16\times\cancel{15!}}{\cancel{15!}(3)!} = \frac{4896}{6} = 816$

5.35 Demuestre que $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$ ①

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{n} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$ Por definición de sumatoria

Si es válido para 2^n entonces tiene que ser válido para 2^{n+1} así:

$\sum_{r=0}^{n} \binom{n+1}{r} \to \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$ Definición Teorema ①

$2^{n+1} = 2(2^n)$ = Igualdad $2^3 = 2(2^2)$ $\forall x \,/\, a^n = a(a^{n-1})$

$2[2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2} 2^{n-2} \cdot 1^2 \dots + \underbrace{\binom{n}{r-1} 2^{n-r+1} \cdot 1^{r-1}}_{a} + \underbrace{\binom{n}{r} 2^{n-r} \cdot 1^r}_{b} + \binom{n}{1} 2 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{0} 1^n]$

Por definición y aplicación del triangulo de pascal y $\cdot 1^n$ por identidad de 1

$a\{\binom{n}{r-1} 2^{n-r+1} \cdot 1^{r-1} + r\{\binom{n}{r} 2^{n-r} \cdot 1^r$ Para obtener r se obtiene de a y b asignados

$2[\binom{n}{r-1} 2^{n-r} \cdot 1^r] + 1[\binom{n}{r} 2^{n-r+1} \cdot 1^{r-1}$ Por definición del teorema 1 e igualdad $a^n = a(a^{n-1})$

$\binom{n}{r-1} 2^{n-r+1}\, 1^r + \binom{n}{r} 2^{n-r+1} \cdot 1^r$ Por definición de la igualdad $a^n = a(a^{n-1})$

$[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}] 2^{n-r+1} \cdot 1^r$ Término común

$\binom{n+1}{r} 2^{n-r+1}$ Por definición del teorema ① y porque 1 es identidad de $\cdot$ en cualquier potencia r

$\binom{n}{r} 2^{n-r}$ Por definición de coeficiente binomial

$\sum_{r=0}^{n} 2^{n-r}$ Por valor de inicio dado del rango $r=0$

$\sum_{r=0}^{n} 2^{n-0} \to \sum_{r}^{n} 2^n$ Sustituido

2^n Es el alcance de su propia sumatorio como se quería demostrar

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots \binom{n}{n} = 0$

$\sum_{i=n}^{n} \binom{n}{i} - \binom{n}{i+1} = 0$ Definición en sumatoria

$\frac{n!}{i(n-i)!} = \binom{n}{i}$

$\{\frac{n!}{i!(n-i)!}, /i=0 \quad - \frac{n(n-1)!}{i(n-i)!}, /i=1 \quad + \frac{n(n-1)(n-2)!}{i(n-i)!}, /i=2 \quad - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{i!(n-i)!}, /i=3 \quad + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{i!(n-i)!}, /i=n-3 \quad - \frac{n(n-1)(n-2)!}{i!(n-i)!}, /i=n-2$

$$+\frac{n(n-1)!}{i!(n-1)!} - \frac{n!}{i!(n-1)!}\}$$
$/i_{n-1} \quad /i=n$

Extensión de la sumatoria $\forall x$ $x=1$ y $n \in \Sigma$

$$\left\{\frac{n!}{0!(n-0)!} - \frac{n(n-1)}{1!(n-1)!} + \frac{n(n-1)(n-1)!}{2!(n-2)!} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!(n-(n-3))!} - \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!(n(n-2))!}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)!}{(n-1)!(n-(n-1))!} - \frac{n!}{n!(n-n)!}\right\}$$

$$\left\{\frac{n!}{1(n)!} - \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{(n-n+3)!} - \frac{n(n-1)}{(n-n+2)!} + \frac{n}{(n-n+1)!} - \frac{1}{0!}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{1} - \frac{n}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} - \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n}{1!} - \frac{1}{1}\right\}$$

$\{0\}$ Como se querra demostrar

5.36 A partir del renglon ocho del triángulo de Pascal, encuentre

a) el noveno renglón b) el décimo renglón

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

5.37 Evalúe los siguientes coeficientes multinomiales (definidos en probleme 5.29)

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!, n_2!, \ldots, n_r!}$$

a) $\binom{6}{2,3,1} = \frac{6!}{2!, 3!, 1!} = \frac{6\times 5\times 4\times \cancel{3!}}{2!, \cancel{3!}, 1!} = \frac{120}{2} = 60$

b) $\binom{7}{3,2,2,0} = \frac{7\times 6\times 5\times 4\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}, 2!, 2!, 0!} = 210$

c) $\binom{9}{3,5,1} = \frac{9!}{3!, 5!, 1!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times \cancel{5!}}{3!, \cancel{5!}, 1!} = 504$

d) $\binom{8}{4,3,2} = \frac{8!}{4!, 3!, 2!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}, 3!, 2!} = 140$

Problemas suplementarios Capitulo 11

11.70 Demuestre la proposicion de que la suma de los n primeros enteros pares positivos es $n(n+1)$, es decir, $P(n): 2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$

De la igualdad sabemos

n = par o n = impar entonces par(impar) = par
$n+1$ = Impar o $n+1$ = par entonces impar(par) = par

Sustituimos ambos casos
① par(impar) = par
② impar(par) = par

Para ambas formas de la igualdad siempre obtendremos un par como se querra demostrar

11.71 Demuestre que la suma de los n primeros cubos es igual al cuadrado de la suma de los n primeros positivos $P(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$

Hipótesis $n=k$ | Demostrar $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \Big| \quad \sum_{i=1}^{k} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \quad \Big| \quad \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\sum^{k} i^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k^2(k+1)^2}{4}\right) + (k+1)^3 = \left[\left(\frac{k^2(k+1)^2}{4}\right) + (k+1)^3\right] = \left[\frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}\right]$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

11.72 Demuestre: $1+4+7+\dots+3(n-2) = n(3n-1)/2$

$n = k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} 3k-2 = \frac{k+1(3k+2)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} 3k-2+3(k+1)-2 = \frac{k(3k-1)+2(3k+1)}{2} \rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} 3k-2 = \frac{3k^2-k+6k+2}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} 3k-2 = \frac{(k+1)(3k+2)}{2}$$

11.73 Demuestre

a) $a^n a^m = a^{n+m}$ $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} \Rightarrow \overbrace{a \cdot a}^{2} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^{3} = a^{2+3}$

b) $(a^n)^m = a^{nm}$ $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} \rightarrow \underbrace{\overbrace{a \cdot a}^{2} \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{3} = a^{2 \cdot 3}$

c) $(ab)^n = a^n b^n$ $(ab)^2 \rightarrow (ab)(ab) = a^2 b^2$

11.74 Demuestre: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{r+1((r+1)+1)} = \frac{r}{r+1} + \frac{1}{r+1(r+2)} = \frac{(r+2)(r)+1}{r+1(r+2)} =$$

$$\frac{r^2+2r+1}{(r+1)(r+2)} = \frac{(r+1)^2}{r+1(r+2)} \qquad \sum_{i=1}^{r+1} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{r+1}{r+2}$$

11.75 Demuestre $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

$$\sum_{i=1}^{r+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{r}{2r+1} + \frac{1}{(2r+1)(2r+3)} = \frac{r(2r+3)+1}{(2r+1)(2r+3)} = \frac{2r^2+3r+1}{(2r+1)(2r+3)} = \frac{(2r+1)(r+1)}{(2r+1)(2r+3)}$$

$$\sum_{i=1}^{r+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{r+1}{2r+3}$$

11.76 Demuestre: $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

$n+1$

$$\sum_r \frac{r^2}{(2r-1)(2r+1)}+\frac{(r+1)^2}{(2r+1)(2r+3)}=\frac{r(r+1)}{2(2r+1)}+\frac{(r+1)^2}{(2r+1)(2r+3)}=\frac{(r^2+r)(2r+3)+2r^2+r+1}{2(2r+1)(2r+3)}=$$

$$\frac{2r^3+3r^2+3r^2+2r^2+r+2r}{2(2r+1)(2r+3)}=\frac{2r^2+6r^2+5r+1}{2(2r+1)(2r+3)}=\frac{2r^2+4r+1(r+1)}{2(2r+1)(2r+3)}$$

11.77. Demuestre: $x^{n+1}-y^{n+1}=(x-y)(x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\dots+y^n)$

$x^{m+1}-y^{n+1}=(x-y)(m^{m+1}+x^m y+x^{m+1}y^2+\dots+xy^n+y^{n+1})$

11.78 Demuestre $|P(A)|=2^n$ donde $|A|=n$ Aqui $P(A)$ es el conjunto potencia A con n elementos

Para establecer $P(n)$ debemos demostrar $P(0)=2^0$. El unico elemento de un conjunto vacio es 0 por lo tanto tiene 1 elemento y $2^0=1$ y esto es valido.

Ahora

$P(k)$ $k\geq 0$ si $P(k)$ es cierto, entonces $P(k+1)$ tambien es cierto

k es cualquier entero con $k\geq 0$ tal que $P(k+1)=2^{k+1}$

Sea X un conjunto con $k+1$ elementos. Ya que $k+1\geq 1$ podemos elegir un elemento Z ($\wedge Y$)

Por definicion de subconjuntos de un elemento. Ya que $k+1\geq 1$ podemos elegir un elemento z en Y

$X-(z)=(z)$ es decir $(X-(z))\cdot z=U$ que significa $U=2^k$ $X=2\cdot(X-(z))$

entonces $X=2\cdot 2^k$ y $\boxed{X=2^{k+1}}$