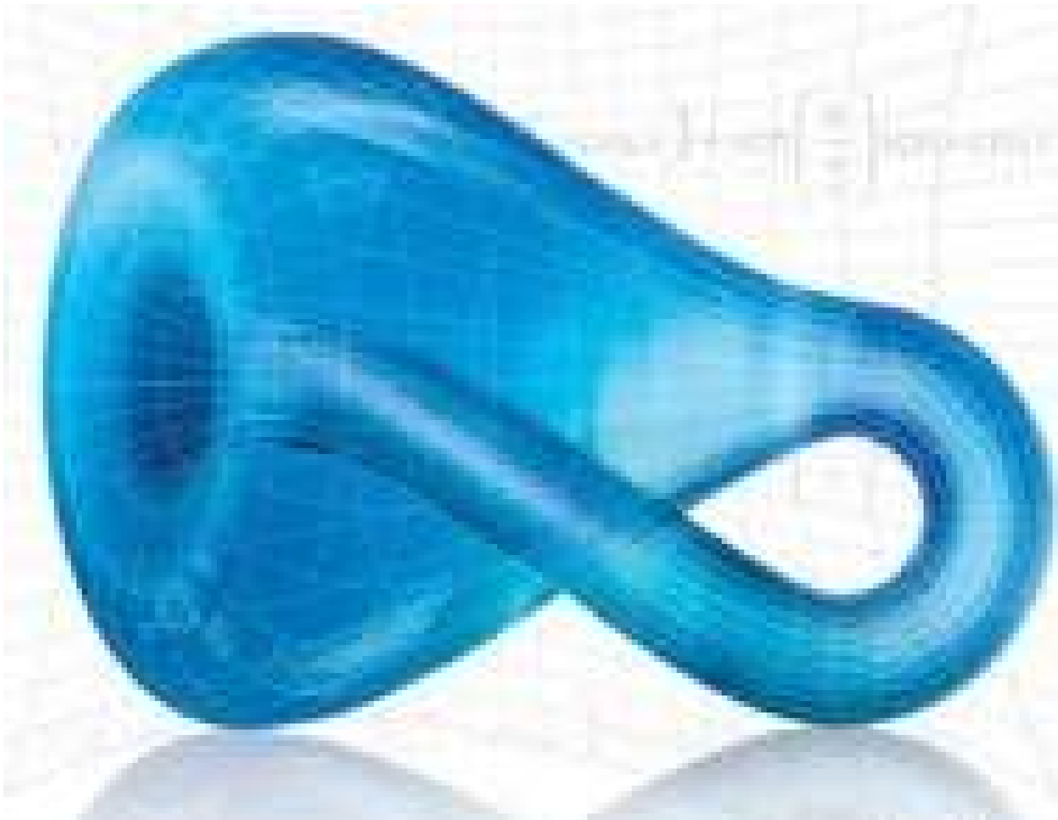


Manual de matemáticas discretas.

Elaborado por Mtra. Elvira Guardiola Julio 2018

Conjuntos y operaciones con conjuntos.

En matemáticas llamamos conjuntos a la colección o agrupación de elementos siempre y cuando exista una condición para que tales elementos pertenezcan o no a los conjuntos, los elementos del conjunto también se les denomina objetos del conjunto.

Por ejemplo, el conjunto de aves:

A={pelicano, gallina, tucán, gorrión}

El conjunto de marcas de Smartphone:

C={Sony, Samsung, Apple, LG, Huawei}

O el conjunto de los números primos:

P = {2,3,5,7,11…}

Notación de conjunto:

¿**Y cómo se representan los conjuntos**? Por lo general los conjuntos son representados o simbolizan por letras mayúsculas como:

A, B, C, X, Y, Z

y sus elementos se representan con letras minúsculas para generalizar una variable que representen a los elementos de manera individual con la propiedad que lo caracteriza así:

a, *b*, *c*, *x*, *y*, *z*

Se dice habitualmente que el concepto de conjunto es un concepto bien definido por parte de sus elementos, esto se debe de una propiedad específica que caracteriza de manera particular a cada elemento para que pueda ser agrupado en base a esta propiedad, por ello se dice que son conjuntos bien definidos.

Ejemplos del concepto de pertenencia

Si el conjunto A representa al conjunto de algunos colores como el amarillo, azul, rojo y verde, la relación de pertenencia lo escribiremos así:

- amarillo $\in$A
- azul $\in$A
- rojo $\in$A
- verde $\in$A

Luego, al conjunto A se puede escribir encerrando sus elementos entre llaves así:

A= {amarillo, azul, rojo, verde}

Si en esta colección de colores enumerados por comas no encontramos otros colores como el naranja o el violeta, lo escribiremos simplemente así:

- naranja ∉A
- violeta ∉A

Determinación de conjuntos

El caso es que el concepto intuitivo de conjunto que hemos planteado se puede representar en dos formas diferentes, una es **por <u>extensión</u>** y la otra es **por <u>comprensión</u>**.

Conjuntos por extensión

Los conjuntos por extensión son sencillamente una lista de los elementos del conjunto dado por comas como ya hemos visto en ejemplos anteriores. Algunos ejemplos de conjuntos por extensión son:

El conjunto de números primos no mayores de 10:

- A={2,3,5,7,9}

El conjunto de números múltiplos de 3 menores de 20:

- A={3,6,9,12,15,18}

Conjuntos por comprensión

Los conjuntos por comprensión son se definen literalmente con un argumento, es decir, se usa una variable que represente a los elementos especificando una propiedad específica que cumpla dicha variable que caracteriza a los elementos sobreentendidos del conjunto. Algunos ejemplos de conjuntos por comprensión son:

- A= {*x* | *x* es una constante del lenguaje español}; se lee:

  "A es el conjunto de los elementos representados por *x* tal que la variable *x* es una consonante de la lengua española".

- A= {*x* / *x* es un numero primo menor que 10}; se lee:

  "A es el conjunto de los elementos representados por *x* tal que la variable *x* es un número primo menor que 10".

Los conjuntos por comprensión son más específicos y explicitan la propiedad P que cumple la variable *x*, por lo general tiene la siguiente forma:

A= {*x* / *x* cumple P}

Aquí P es una proposición verdadera que satisface las leyes de la lógica proposicional, el valor P será la que determinará las características que la variable *x* y por ende, el conjunto dado A se comporta de determinada forma según la proposición dada P.

Clasificación de conjuntos

Sería imposible clasificar los conjuntos si no fuera sus elementos que lo contiene y según la propiedad que cumple cada elemento para agruparlos en una sola categoría (conjunto). Gracias a ello, podemos conceptualizar los siguientes tipos o clases de conjuntos:

Conjuntos finitos

Un conjunto finito es aquel conjunto que tiene un número limitado de elementos y que a su vez se puede contar, es decir, es contable. Aquí algunos ejemplos de conjuntos finitos:

- {2,4,6,8,10}
- {taza, cuchara, tenedor, plato, olla}

Los conjuntos finitos tiene unas propiedades que describiré en la secciones de operaciones de conjuntos.

Conjuntos infinitos

Los conjuntos infinitos son aquellos conjuntos que no tiene límite de elementos y pueden extenderse sin fin. Los típicos ejemplos de conjuntos infinitos que más se conocen son los números naturales, números enteros, números racionales, números irracionales, números reales y números complejos.

Aquí algunos ejemplos de conjuntos infinitos

- {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,…}

O los números múltiplos de 3:

- {3, 6, 9, 12, 15, 18,…}

Conjuntos especiales

También existen otros conjuntos que vale la pena nombrar aquí que se usarán como sistema referencial y de límite para indicar el comportamiento de otros conjuntos en general.

Conjunto vacío o nulo

También llamado conjunto nulo, es aquel conjunto que simplemente no tiene elemento, pero tiene una representación simbólica matemática. Su representación simbólica es ϕ, es una letra derivada de la danesa y noruega y se escribe extensivamente así:

Φ = {}

Conjunto Unitario

Es el conjunto que simple y sencillamente tiene un único elemento, no hay nada nuevo con este conjunto.

Conjunto Universal

Es un conjunto referencial para "medir" otros conjuntos que se encuentran en el conjunto universal, se nota con la letra mayúscula U y sirve que tipo de conjunto recibirá las restricciones de una propiedad especifica P.

Conjuntos iguales

También se le llama **relación de igualdad**, llamamos conjuntos iguales o idénticos si y sólo si dos conjuntos *A* y *B* tienen los mismos elementos y lo expresamos de la siguiente manera:

$A=B \Leftrightarrow x \in A \leftrightarrow x \in B$

Donde es un elemento de A o elemento de B. Para indicar que los conjuntos no son iguales, simplemente lo denotamos como A≠B donde:

$A \neq B \Leftrightarrow x \in A \not\leftrightarrow x \in B$

El símbolo $\leftrightarrow$ indica que es una disyunción exclusiva. La razón de este símbolo para este tipo de disyunción es que es equivalente a la negación de la bicondicional.

Ejemplos de conjuntos iguales

1. A= {3/4,2,*b*2} y B={6/8,2,2,*b*·*b*}.

   Estos conjuntos son iguales ¿por qué?, simple, porque 3/4=6/8, indican un mismo elemento para A y B; repetir el número 2 varias veces en B solo indica un único elemento 2 de A y *b*2=*b*·*b* para A y B, por tanto, los conjuntos A y B son iguales.
   Otra manera de explicarlo es por medio de la inclusión de subconjunto, pero esto lo veremos en apartados siguientes.

2. A= {3,6,9}y B={x∈N|0<x/3<4}.

   Estos conjuntos son iguales ya que el conjunto A esta escrito por extensión y B por comprensión.

Conjuntos equivalentes o coordinables

Dos conjuntos no vacíos son equivalentes o coordinables si tienen los mismos números de elementos independientemente si los elementos de tales conjuntos son los mismos o no. También se dice que dos conjuntos A y B son equivalentes si tiene correspondencia biunívoca (relación de uno a uno) entre todos sus elementos, en otras palabras, que es posible formar parejas de un elemento de un conjunto con todos los elementos de otro conjunto una sola vez.

Habíamos visto que dos conjuntos son iguales usando el símbolo igual así A=B, para denotar que dos conjuntos son equivalentes, lo expresaremos así $A \equiv B$.

Ejemplos de conjuntos equivalentes o coordinables

1. Sean los conjuntos A={1,2} y B={a, b}, una relación biunívoca sería así:

$1 \longleftrightarrow a$ y $2 \longleftrightarrow b$	$1 \longleftrightarrow b$ y $2 \longleftrightarrow a$

Subconjuntos de un conjunto

Este tipo de relaciones se llaman **relación de contenencia**, en este caso decimos que un conjunto B es subconjunto de otro conjunto A si todos sus elementos de B le pertenece al conjunto A, decimos entonces lo siguiente:

- B está incluido en A
- A incluye a B
- A es superconjunto de B
- B está contenido en A
- B es subconjunto de A
- B es parte de A

Simbólicamente se escribe $B \subset A$ o $A \supset B$. si cumple la siguiente equivalencia.

$B \subset A \Leftrightarrow x \in B \rightarrow x \in A$ ó $B \subset A \Leftrightarrow \forall\, x \in B \mid x \in A$

Para indicar que el conjunto B no es subconjunto del conjunto A lo escribimos de la siguiente manera:

$B \nsubseteq A \Leftrightarrow \exists\ x \in B \mid x \notin A$

Por tanto también decimos que A no es superconjunto de B porque los elementos de B no le pertenecen al conjunto A.

Ejemplo de subconjuntos

En siguiente ejemplo que veremos no solo es para mostrar con más claridad la sencillez de este concepto, sino también para indicar una débil definición del concepto de subconjunto de otro conjunto específico.

I. Sean los conjuntos A= {1,2,3}, B={*a*,*b*,*c*,1,2,3}.

   Es obvio que los elementos de A también lo contienen en B, este caso escribimos $A \subset B$; en caso contrario, como hay elementos de B que no los contiene A.

Conjuntos disjuntos

Dos conjuntos A y B son disjuntos cuando no tiene elementos en común. En este caso, debe cumplirse lo siguiente:

A es disjunto con B si $\nexists\ x \mid x \in A \wedge x \in B$

Con esto indicamos que para que A y B sean disjuntos, entonces no debe existir un elemento que pertenezca a la vez a A y B.

También se puede escribir con una la intersección de dos conjuntos donde el resultado es el conjunto vacío.

Conjuntos comparables

Se llaman conjuntos comparables cuando un conjunto está incluido en otro. Si el conjunto A y el conjunto B son comparables si A esta incluido en B o B está incluido en A.

Ejemplo de conjuntos comparables

- A={4,8,10} y C={1,4,8,10,*a*,*b*,*c*,*n*,*m*} son comparables porque $A \subseteq C$.

Conjuntos de conjunto

Se dice conjunto de conjunto aquel conjunto que tiene como elementos únicamente a otros conjuntos, si por lo menos aquel conjunto que contiene otros conjuntos tiene por lo menos un elemento que no es conjunto, entonces no es un conjunto de conjuntos.

Ejemplos de conjuntos de conjunto

- A = {{4,8},{10,5}}, este conjunto es un conjunto de conjuntos.
- B = {{3,8},{7,5},2}, este conjunto no es un conjunto de conjuntos porque tiene un elemento que no es conjunto, en este caso al 2.

Operaciones de conjuntos con ejemplos

Unión de conjuntos

La unión de dos conjuntos A y B se puede definir como un nuevo conjunto formado por los conjuntos que acabamos de mencionar con símbolo ∪ y expresado de la siguiente manera:

A∪B

Se lee: A unido con B o A unión B, tal que la unión entre estos conjuntos deba cumplir la siguiente condición matemática:

A∪B ={ x ∈ U | x ∈ A ∨ x ∈ B}

Donde U es el conjunto universal para x tal que x pertenece a al conjunto A o x pertenece a al conjunto B. En consecuencia, también podemos representarlo proposicionalmente así:

x ∈(A∪B)≡(x ∈ A ∨ x ∈ B)

Tres juegos populares de computador son: La invasión de los extraterrestres, Las carreras de carros y Fútbol de lujo. Cincuenta personas de su barrio tienen juegos de computador. 16 tienen los tres juegos, 5 tienen Las carreras de carros, 7 tienen Fútbol de lujo, y 19 tienen únicamente La invasión de los extraterrestres. En total ¿cuántos juegos de computador hay en su vecindario?

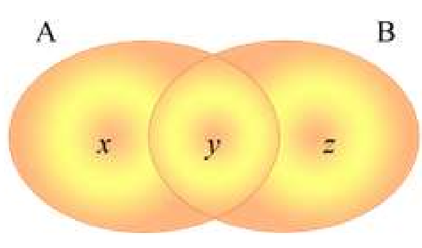


Imagen 1: A y B son intersecantes.

- $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$
- $y \in A \wedge y \in B \rightarrow y \in (A \cup B)$
- $z \in B \Rightarrow z \in (A \cup B)$

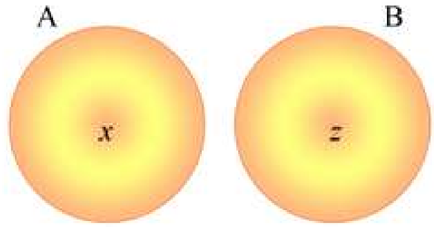


Imagen 2: A y B son conjuntos disjuntos.

- $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$
- $z \in B \Rightarrow z \in (A \cup B)$

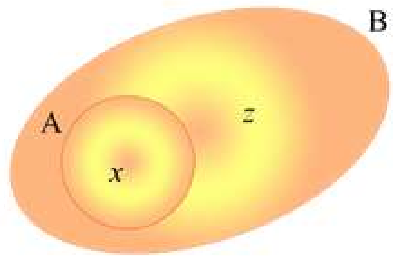


Imagen 3: $A \subsetneq B$

- $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$
- $z \in B \Rightarrow z \in (A \cup B)$
- $z \notin A \wedge A \subseteq B \Rightarrow z \in (A \cup B)$

Intersección de conjuntos

La intersección de dos conjuntos A y B está definido como aquel conjunto representado por los elementos comunes entres A y B, en otras palabras, es el conjunto de los elementos que pertenecen tanto al conjunto A como al conjunto B simultáneamente. Simbólicamente lo representamos así:

$A \cap B$

Se lee: A intersección B y debe cumplir la siguiente condición:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Proposicionalmente también podemos escribir así:

$x \in (A \cap B) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

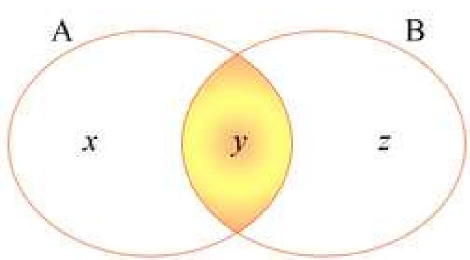


Imagen 4: A y B son intersecantes.

- $x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cap B)$
- $y \in A \wedge y \in B \Rightarrow y \in (A \cap B)$
- $z \in B \wedge z \notin A \rightarrow z \notin (A \cap B)$

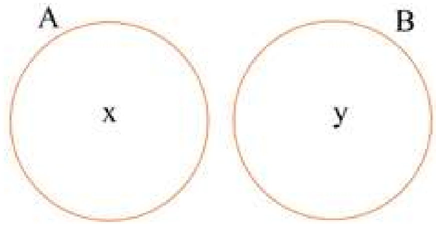


Imagen 5: A y B son conjuntos disjuntos.

- $x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cap B)$
- $y \in B \wedge y \notin A \Rightarrow x \notin (A \cap B$
- $A \cap B = \phi$

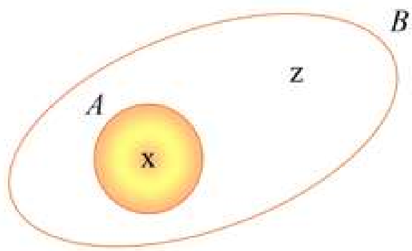


Imagen 6: $A \subsetneq B$

- $x \in A \wedge A \subsetneq B \Rightarrow x \in (A \cap B)$
- $z \in B \wedge z \notin A \Rightarrow z \notin (A \cap B)$
- $z \notin A \wedge A \subsetneq B \Rightarrow z \notin (A \cap B)$
- Ademas $A \cap B = A$

Diferencia de conjuntos

La diferencia de dos conjuntos A y B está definido como el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto A pero no pertenecen al conjunto B, esta denotado como A–B y simbólicamente cumple la propiedad ya expuesta:

A–B={ x|$x \in A \wedge x \notin B$}

Proposicionalmente lo podemos escribir así:

$x \in (A–B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

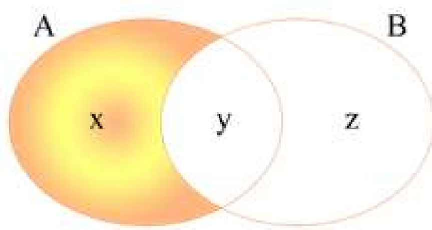


Imagen 7: A y B son intersecantes.

- $x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in (A-B)$
- $y \in A \wedge y \in B \Rightarrow y \notin (A-B)$
- $z \in B \wedge z \notin A \Rightarrow z \notin (A-B)$

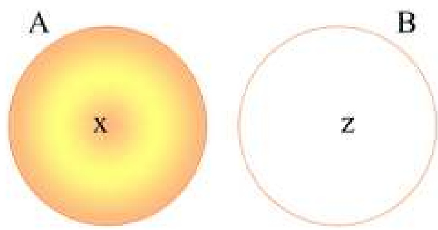


Imagen 8: A y B son disjuntos.

- $x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in (A - B)$
- $z \in B \wedge z \notin A \Rightarrow z \notin (A - B)$

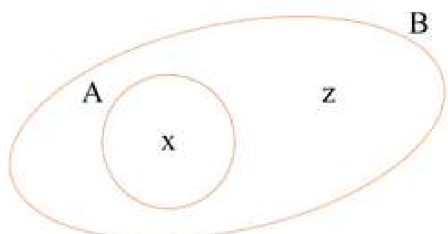


Imagen 9: $A \subsetneq B$

- $A \subsetneq B \Rightarrow A - B = \phi$

Complemento de un conjuntos

El complemento de un conjunto A respecto a otro conjunto B que lo contiene, resulta ser lo que le falta al conjunto A para ser igual a B. Sea los conjuntos A y B tal que A⊆B, definimos el complemento denotado por *C*AB de la siguiente manera:

*C*BA=B–A

Por comprensión, lo podemos escribir así:

*C*BA={ *x* ∈ B | *x*∈(B–A)∧A⊆B}

Proposicionalmente lo podemos escribir así:

x ∈ *C*B A ⇔ *x* ∈ (B–A)∧A⊆B

A partir de ahora, usaremos la notación A′ para referirnos al complemento de un conjunto respecto al universo, tener en cuenta que A⊆U. Veamos los diagramas de Venn del complemento de un conjunto.

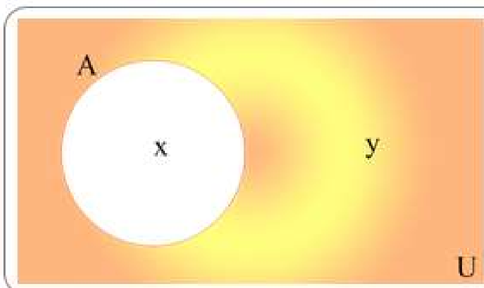
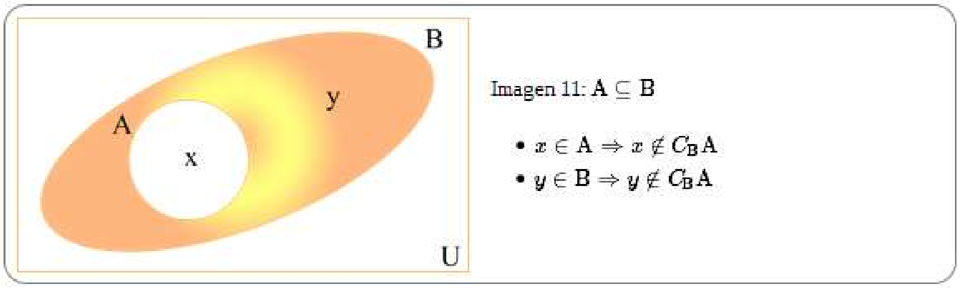


Imagen 10: $A \subseteq U$

- $x \in A \Rightarrow x \notin A'$
- $y \notin A \Rightarrow y \in A'$

El siguiente diagrama esta determinado el complemento del conjunto A respecto al conjunto B, el diagrama de Venn para *C*BA es:



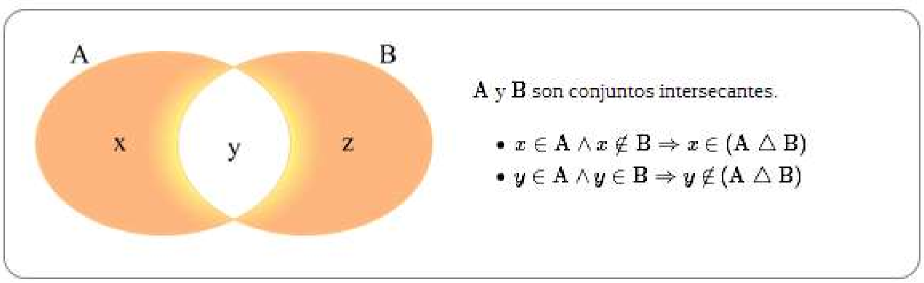
Diferencia simétrica de conjuntos

La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B simbolizado por A△B se define como la unión de los conjuntos diferencia A–B y B–A, formalmente se representa así:

B△A=(A–B) ∪ (B–A)

También se puede definir como la unión de los conjuntos A y B menos la intersección de las mismas, o sea:

B△A = (A∪B) – (B∩A)



Cardinal de un conjuntos

El cardinal de un conjunto A se define como el número de elementos de un conjunto A y se representa simbólicamente así:

Card (A) ó *n*(A) ó |A|

Se lee: "cardinal del conjunto A" o "numero de elementos del conjunto A"

Ejercicios:

1. Escribe cinco conjuntos por extensión y cinco conjuntos por comprensión.
2. Dados los siguientes conjuntos A = {a, e, i, 6, 8, 9}

B = {a, i, o, 1, 2, 3} C = {a, e, u, 0, 6, 7} D = {a, i, 3, 5, 6, 7}, Siendo el Universo todas las vocales y todos los dígitos.

Determine las siguientes operaciones, escribiendo explícitamente los elementos del conjunto resultante:

a) A U B	b) A Δ E	c) (D U B) ∩ (C – A)
d) (B ∩ C) U (D ∩ A)	e) A ∩ B ∩ C	f) (A – D) U (A ∩ B)
g) A^{c}	h) $(A \cup D)^{C}$	i) $(B \cap C)^{C} \cup D$
j) (D Δ A) U C	k) A x B	l) B x A

Aplicación de conjuntos.

Problema 1: conos de Helado

Hay conos de dos sabores: chocolate y vainilla. Usted y sus 24 amigos (25 personas en total), van a comprar conos. Si 15 personas compran conos de vainilla y 20 conos de chocolate, ¿cuántas personas compraron conos de chocolate y vainilla?

Problema 2: Barras de chocolate.

Un grupo de 50 personas va al supermercado a comprar barras de chocolate. Cada persona compra como mínimo una barra. El supermercado vende dos tipos de barras de chocolate: con relleno y sin relleno. Si 45 personas compran de los dos tipos de barras, y 47 compran como mínimo una barra con relleno cada uno, ¿cuántas personas compraron únicamente barras de chocolates sin relleno?

Problema 3: Invasión de extraterrestres.

Un grupo de 100 extraterrestres llega en la nave Estrella 2000 para invadir su planeta. Estos extraterrestres se distinguen por dos características: sus ojos y sus colas. Algunos de ellos tienen ojos, pero no tienen cola, otros tienen cola pero no tienen ojos, y otros tienen ojos y cola. Si hay 75 extraterrestres que tienen ojos y 50 que tienen ojos y cola, ¿cuántos de ellos tienen ojos pero no tienen cola? ¿Cuántos tienen solamente cola?

Problema 4: Paseo al zoológico.

Un grupo de 30 estudiantes decide ir de paseo al zoológico. Hay dos exhibiciones principales abiertas para visitas: la pajarera y la cueva del león. Ocho estudiantes visitan la pajarera, de los cuales seis visitan también la cueva del león. ¿Cuántos estudiantes visitan únicamente la cueva del león? ¿Cuántos estudiantes visitan únicamente la pajarera?

Problema 5 Fiesta de disfraz.

Hay 70 niños en la ciudad de Cartagena, y todos se van a vestir en forma especial para ir a una fiesta. Hay dos actividades para la noche de la fiesta: un baile y un concurso de disfraz. Si 30 niños fueron tanto al baile como al concurso de disfraz, y solamente 24 niños fueron únicamente al baile, ¿cuántos niños en total participaron en el concurso de disfraz? ¿Cuántos fueron únicamente al concurso de disfraz?

Problema 6: Cine.

Actualmente se están exhibiendo dos películas en un teatro de la ciudad: *Ficción Increíble 3* y *Las matemáticas en las estrellas*. Un total de 68 personas asistieron al teatro. Si 35 personas vieron *Las matemáticas en las estrellas*, y 10 vieron tanto *Ficción Increíble 3* como *Las matemáticas en las estrellas*, ¿cuántas personas vieron únicamente *Ficción Increíble 3*? ¿Cuántos boletas se vendieron en total en el teatro?

Problema 7: Bebidas.

Se anotaron 75 órdenes de bebidas en un restaurante, donde se ofrecen dos tipos de bebidas: jugo de naranja y leche. Si 59 personas tomaron jugo de naranja y 18 tomaron leche, ¿cuántas personas tomaron tanto leche como jugo de naranja?

Problema 8: Deportes.

Hay 100 atletas y tres estaciones diferentes en que se presentan deportes: fútbol en el otoño, basketball en el invierno y baseball en la primavera. Algunos de los atletas juegan solamente un deporte, otros dos y otros tres. Cuarenta personas juegan fútbol. Si 15 juegan los tres deportes, 5 juegan basketball y fútbol, pero no baseball, y 10 juegan solamente fútbol, ¿cuántas personas juegan tanto baseball como fútbol?

Problema 9: Mascotas.

Hay 49 personas que tienen mascotas. 15 personas tienen únicamente perros, 10 tienen únicamente gatos, 5 personas tienen perro y gato y 3 tienen gato, perro y serpientes. ¿Cuántas serpientes hay?

Problema 10: Juegos computador

Tres juegos populares de computador son: La invasión de los extraterrestres, Las carreras de carros y Fútbol de lujo. Cincuenta personas de su barrio tienen juegos de computador. 16 tienen los tres juegos, 5 tienen Las carreras de carros, 7 tienen Fútbol de lujo, y 19 tienen únicamente La invasión de los extraterrestres. En total ¿cuántos juegos de computador hay en su vecindario?

LÓGICA MATEMÁTICA

Lógica proposicional.

Lo más importante de las matemáticas y computación es conocer la veracidad de una aseveración.

La palabra lógica viene del griego y significa, razón, tratado o ciencia. Y en computación es la ciencia que estudia la forma de razonar correctamente, la que nos indica la forma correcta de obtener conclusiones y los métodos conocidos para lograrlo.

La lógica como cualquier ciencia y como la filosofía busca la verdad y es la que establece las reglas para hacer un razonamiento correcto. Aquí debemos distinguir entre pensamiento correcto y verdadero, la lógica proporciona una herramienta para saber si un desarrollo es, pero la veracidad del mismo dependerá de las premisas o sea las condiciones de las que parte.

Concepto de proposición

En computación frecuentemente se usan estructuras que dependen solamente de dos valores, así por ejemplo tenemos el sistema numérico binario que se utiliza para representar los números utilizando solamente 0 y 1.

El trabajar con sólo 2 opciones facilita la implementación de los conceptos y simplifica su manejo. Así una teoría resulta mucho más fácil de establecer y de justificar si tiene sólo dos valores asociados, que otra por ejemplo una estructura de álgebra de números que tiene una cantidad infinita.

Otro tipo de entes que se utilizan en computación que también está asociado a “dos” opciones, es lo que se conoce como expresiones booleanas. Estas expresiones, que deben su nombre a George Boole, se pueden ver caracterizadas como verdaderas ó falsas y de acuerdo a esta condición se desarrolla el estudio sobre dichos conceptos. Este tema se conoce como cálculo de proposiciones

Los argumentos son una de las formas más comunes en matemáticas, en lógica y en computación de establecer razonamientos para llegar a la verdad. Si tenemos un conectivo lógico **OR** de dos valores de entrada y después un inversor, cuál es la salida.

Ejemplos:

Podemos tener también situaciones como:

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto: Sócrates es mortal.

Si lo comparamos con:

Todos los árboles son verdes.

Todos los pericos son verdes.

Por lo tanto: Todos los árboles son pericos.

Uno de los principales propósitos de la lógica es por lo tanto encontrar la forma de poder saber si un argumento es válido o no. A esto le llamamos inferencia.

Empezaremos por decir que en lógica proposicional utilizaremos dos valores asociados llamados valores de verdad, que son verdadero (V) y falso (F), y en computación a las expresiones que se les asocia uno de estos dos valores se les llama expresiones booleanas.

Los enunciados o expresiones del lenguaje se pueden clasificar en: Proposiciones lógicas, Proposiciones abiertas y Frases o expresiones indeterminadas.

Proposición lógica. Expresiones que pueden ser verdaderas o falsas pero no ambas.

Proposición abierta. Una expresión que contiene una o más variables y al sustituir las variables por valores específicos se obtiene una proposición lógica.

Frases. Todas las expresiones que no cumplen alguna de las dos definiciones anteriores.

Expresiones Booleanas. Proposiciones lógicas y proposiciones abiertas.

Ejemplos:

i) México está en América	Proposición Lógica
ii) $1 < 2$	Proposición Lógica
iii) Hoy es lunes	Proposición Abierta
iv) $x + 3 = 5$	Proposición Abierta
v) Ecosistemas	Frase

Combinando dos o más proposiciones se pueden formar expresiones compuestas con los operadores, estos operadores también se llaman conectivos lógicos y se presentan en la siguiente sección.

Proposiciones compuestas (Disyunción, Conjunción, Negación, Condicional, Bicondicional)

Como se mencionó en el tema de argumentos para formar expresiones compuestas necesitamos conectivos lógicos, empezaremos por un conectivo unitario;

esto es, se aplica a una proposición sola.

La Negación

La operación unitaria de negación, **no es cierto que** se representa por "¬" y tiene la siguiente tabla de verdad de verdad

p	**¬ p**
V	F
F	V

Ejemplo. Encuentre la negación de las expresiones siguientes:

i) Júpiter es un planeta
ii) El pizarrón es verde
iii) El número real x es negativo
iv) Algún elefante es de color rosa
v) Ningún pez respira fuera del agua
vi) Todos los leones son feroces

Solución:

i) Júpiter no es un planeta
ii) El pizarrón no es verde
iii) El número real x no es negativo o también El número real x es positivo ó cero
iv) Ningún elefante es de color rosa
v) Algún pez respira fuera del agua
vi) Algún león no es feroz

En la siguiente sección veremos operadores binarios, con esto será suficiente para construir cualquier fórmula válida en lógica de proposiciones. La jerarquía que utilizaremos es que la negación se efectúa primero que los demás operadores, aparte de esta no imponemos ninguna otra, esto con el fin de que se acostumbren a la utilización de paréntesis.

Conjunción

La **conjunción** de las proposiciones p, q es la operación binaria que tiene por resultado p y q, se representa por **p ^ q**, y su tabla de verdad es:

p	Q	p ^ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción nos sirve para indicar que se cumplen dos condiciones simultáneamente, así por ejemplo si tenemos:

La función es creciente y está definida para los números positivos, utilizamos

p ^ q, donde

p: la función es creciente

q: la función está definida para los números positivos Así también: **p ^ q**, donde

p: el número es divisible por 3

q: el número está representado en base 2

Se lee: El número es divisible entre 3 y está representado en base 2.

Disyunción

La **disyunción** de dos proposiciones p, q es la operación binaria que da por resultado p ó q, notación **p v q**, y tiene la siguiente tabla:

p	Q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Con la disyunción a diferencia de la conjunción, representamos dos expresiones y que afirman que una de las dos es verdadera, por lo que basta con que una de ellas sea verdadera para que la expresión **p v q** sea verdadera.

Aquí debemos tener cuidado, porque en el idioma español muchas veces utilizamos la disyunción para representar otros operadores que aparentemente son lo mismo, pero que tienen diferente significado.

En español tenemos tres casos de disyunción:

La llamada y/o bancaria, lógica o matemática, que es la misma y se utiliza en computación como el operador **OR**, este operador corresponde al mencionado anteriormente p v q y ya se mostró su tabla de verdad.

La o excluyente, que algunos también le llaman o exclusiva, y que indica que una de las dos proposiciones se cumple, pero no las dos. Este caso corresponde por ejemplo a: Hoy compraré un libro o iré al cine; se sobrentiende que una de las dos debe ser verdadera, pero no la dos. Se representa por p XOR q y su tabla de verdad es:

p	**Q**	**p XOR q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Por último, también es muy común utilizar una disyunción como la siguiente: El menú incluye café o té. En este caso se está dando una disyuntiva diferente pues no se pueden las dos simultáneamente como en el caso anterior, pero aquí si es válido el caso donde las dos son falsas. Es el caso "no ambas", se puede representar por p § q y su tablas es

p	**Q**	**p § q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Nota: El último símbolo no es estándar y puede haber varias formas de representarlo.

Condicional

La **condicional** de dos proposiciones p, q da lugar a la proposición; si p entonces q, se representa por **p → q**, y su tabla de verdad está dada por:

P	Q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Con respecto a este operador binario, lo primero que hay que destacar es que no es conmutativo, a diferencia de los dos anteriores la conjunción y la disyunción. El único caso que resulta falso es cuando el primero es verdadero y el segundo falso.

Por ejemplo, si p es llueve y q es hay nubes entonces:

p → q es, si llueve entonces hay nubes.

Bicondicional

La **bicondicional** de dos proposiciones p, q da lugar a la proposición; p si y sólo si q, se representa por **p ↔ q** su tabla de verdad está dada por:

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Jerarquía de Operadores.

Combinando los operadores anteriores podemos formar nuevas expresiones.

En términos formales la negación de p, deberá ser (¬ p), así como la conjunción de p y q sería (p ^ q). Con el uso de paréntesis evitamos la ambigüedad, por ejemplo ¬ p ^ q podría significar dos cosas distintas

Por un lado podría significar: ((¬ p) ^ q) O también: (¬ (p ^ q)).

En la práctica para no usar tantos paréntesis se considera que el operador ¬ tiene jerarquía sobre ^, v, →, ↔. Así ¬ p ^ q significa ((¬ p)^ q).
En algunos casos se considera ^, v tienen mayor jerarquía que ↔ por lo que p ↔ q v r sería (p ↔ (q v r)) y también que ^ tiene prioridad sobre v, por lo que p ^ q v r sería (p ^ q) v r.

Así por ejemplo, en electrónica, para representar circuitos lógicos se utiliza + en lugar de v y · en lugar de ^.

Por lo que p · q + r es ((p ^ q) v r).

En estos apuntes no se considerará jerarquía en ninguno de los operadores binarios ^, v, →, ↔ por lo que utilizaremos paréntesis. Sólo ¬ tiene prioridad sobre los demás operadores. Esto nos ahorra algunos paréntesis, por ejemplo: (((¬ p) ^ q) v r) se representa por (¬ p ^ q) v r.

Tablas de verdad.

Como ya sabemos la sintaxis en lógica es la forma correcta de escribir una fórmula y la semántica es lo que significa. Como en lógica solamente tenemos dos valores una fórmula solamente puede ser verdadera o falsa. Para determinar su valor seguimos las reglas simples que dimos en las definiciones básicas de acuerdo a su tabla de verdad. Esto lo hacemos mediante interpretaciones.

Al interpretar una fórmula lo que finalmente vamos a obtener es un valor de verdad, bien sea verdadero o falso. Si deseamos hacerlo en general, debemos analizar todas las posibilidades, esto se puede hacer construyendo una tabla de verdad.

Tautologías, contradicción y contingencia

Definición: Una **tautología** es una expresión lógica que es verdadera para todos los posibles valores de verdad de sus componentes atómicos.

Equivalencias Lógicas

Junto con las tautologías un concepto muy utilizado es el de equivalencia.

Definición: Dos fórmulas lógicas son equivalentes si tienen los mismos valores de verdad para todos los posibles valores de verdad de sus componentes atómicos.

Teorema: Si dos fórmulas lógicas son equivalentes, entonces, la fórmula que se obtiene al operarlas con la bicondicional es una tautología.

Si F es equivalente a G, entonces F $\leftrightarrow$ G es una tautológica.

La propiedad inversa también se cumple pues si una bicondicional es una tautología, las fórmulas que la componen son equivalentes. El teorema y su inverso se comprueban directamente de la tabla de verdad de la bicondicional..

Tautologías fundamentales

Ley del medio excluido	$p \vee \neg p$
Ley de no contradicción	$\neg (p \wedge \neg p)$
Modus ponendo ponens	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
Modus tollendo tollens	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
Silogismo Disyuntivo	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

La comprobación de cualquiera de las tautologías anteriores es directa, es suficiente hacer la tabla de verdad y se obtendrá la columna correspondiente a la fórmula con valores de verdaderos únicamente.

Equivalencias

Doble negación	$\neg (\neg p) = \leftrightarrow p$		
Implicación y disyunción	$p \rightarrow q$	$\equiv$	$\neg p \vee q$
Contrapositiva	$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$\neg q \leftrightarrow \neg p$
Negación de la Implicación	$\neg (p \rightarrow q)$	$\equiv$	$p \wedge \neg q$

La expresión $\mathbf{p \rightarrow q}$ es equivalente a $\mathbf{\neg p \vee q}$ pues

p	q	p → q	¬ p	¬ p v q
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Reglas de inferencia

La inferencia es la forma en la que obtenemos conclusiones en base a datos y declaraciones establecidas.

Un argumento, por ejemplo es una inferencia, donde las premisas son los datos o expresiones conocidas y de ellas se desprende una conclusión.

Una inferencia puede ser: Inductiva, deductiva, transductiva y abductiva

Inductiva (de lo particular a lo general)

Aquí por ejemplo si durante la primera semana el maestro llega 10 minutos tarde, podemos concluir que todo el semestre va a llegar tarde. Esta conclusión no necesariamente es válida porque puede ser que el maestro algún día llegue temprano. En general una inferencia inductiva es la que se desprende de una o varias observaciones y en general no podemos estar seguros de que será verdadero lo que concluimos.
Resumiendo, la inferencia inductiva es la ley general que se obtiene de la observación de uno o más casos y no se puede asegurar que la conclusión sea verdadera en general.

Deductiva (de lo general a lo particular)

También se conoce como inferencia deductiva cuando tenemos un caso que analiza todos los posibles resultados y de acuerdo a las premisas sólo hay una posible situación, en este caso decimos que la situación única es la conclusión. Es este caso estamos seguros de que si las premisas son verdaderas entonces la conclusión también lo es.

Transductiva (de particular a particular o de general a general)
El anterior sería de particular a particular, un caso de general a general es por ejemplo de un compañero maestro que la primera vez que impartió matemáticas discretas observó que todos los alumnos estudiaban, concluyó que para el siguiente

semestre todos los alumnos iban a estudiar.

Este es un caso donde como en el caso inductivo, no podemos estar seguros de que la conclusión es verdadera.

Abductiva es semejante a la deductiva, también utiliza la estrategia de analizar todas las posibilidades, pero en este caso hay varios casos que se pueden presentar, como por ejemplo si se sabe que siempre que llueve hay nubes y se sabe que hay nubes se puede concluir que llueve, pero no se tiene la certeza, al igual que el caso inductivo y transductivo no es una forma válida de obtener conclusiones en matemáticas o en lógica y es necesario conocer más información para poder verificar la validez.

Ejercicios:

Clasifique las siguientes expresiones del idioma en proposiciones lógicas, proposiciones abiertas o expresiones indeterminadas.

Cuantificadores lógicos

Los cuantificadores en lógica son muy usado en teoría de conjuntos y son frases que indican una cantidad, sea plural o singular sobre el sujeto incógnito de una función proposicional (enunciado abierto) que cumple una propiedad determinada.

Los cuantificadores se clasifican en cuantificador universal con símbolo ∀ y cuantificador existencial con símbolo ∃ y son lógicamente opuestas.

Cuantificador universal

Otra manera de transformar una función proposicional a una variable proposicional es anteponiendo cuantificadores en el sujeto de la función, una ellas es el cuantificador universal y sirve para indicar que todos los elementos de la variable-sujeto (el conjunto de sus elementos) cumplen una determinada propiedad.

Este tipo de proposiciones con variables tiene la siguiente forma:

Cuantificador Universal + función proposicional = variable proposicional

El cuantificador universal se simboliza con una letra “A” mayúscula de cabeza así ∀, la proposición con una variable-sujeto quedaría así:

$$\forall x : p(x)$$

Y se lee “**para todo *x*, se verifica *p*(*x*)**“ este tipo de proposiciones las denominaremos a partir de ahora, **proposiciones universales**. Ahora, explicamos porque los cuantificadores transforman a las funciones proposicionales en variables proposicionales.

Ejemplos de cuantificadores universales

Ejemplo 1

Sea la siguiente función proposicional:

- $x \in N : 1 < x + 3 < 8$.

En esta función no sabemos qué valor de x cumple $1<x+3<8$, pero si anteponemos un cuantificador universal de la siguiente manera:

- $\forall x \in N : 1 < x + 3 < 8$.

Resulta que ser una variable proposicional, además es falsa, porque no puede cumplir para todos los valores de $x \in N$, por ejemplo para $x=6$, no cumple la desigualdad.

Pero si restringimos los valores de para un conjunto dado tal que $x \in A$ donde

A= {1, 2, 3, 4}, la proposición seria así:

- $\forall x \in A : 1 < x + 3 < 8$.

Esta proposición resulta ser verdadera porque la desigualdad cumple para todos los valores del conjunto.

Ejemplo 2

Sea la siguiente proposición categórica

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$.

Esta proposición es verdadera porque para cualquier valor real x, siempre será un real positivo mayor que cero.

Cuantificador existencial o particular

A diferencia del cuantificador universal, el cuantificador existencial transforma una función proposicional a una variable proposicional de tal manera que por lo menos existe un elemento de la variable-sujeto (por lo menos un elemento del conjunto) que cumple una propiedad determinada.

Este tipo de proposiciones tiene la misma forma como el cuantificador universal en cuanta escritura y se puede escribir igualmente así:

Cuantificador Existencial + función proposicional = variable proposicional

El símbolo del cuantificador existencial es una letra ∃ mayúscula volteada así ∃, la proposición categórica quedaría así:

$\exists x : p(x)$

Se lee "**Existe por lo menos un *x* tal que verifica *p*(*x*)**" desde este momento este tipo de proposiciones se llaman proposiciones existenciales.

Ejemplos de cuantificadores existenciales

Ejemplo 1

- $\exists x : x$ es un número primo.

Si eliminamos la variable *x*, podríamos decir "existe por lo menos algún número primo", naturalmente esta proposición es verdadera.

Ejemplo 2

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0.$

Si resolvemos las raíces de esta ecuación, nos encontraremos con números complejos, por lo que nuestra proposición es falsa.

Ejemplo 3

Sea el conjunto A = {1,6,8,17}.

- $\exists\, x \in$ A: *x* es múltiplo de 3.

Esta proposición nos dice que por lo menos existe un *x*∈A que es múltiplo de 3, esta proposición es verdadera porque existe un elemento del conjunto A que es múltiplo de 3 y es 6∈A.

Cuantificador EXISTENCIAL ÚNICA

Pueden existir casos donde el cuantificador existencial pueda hacer referencia solo a uno y tan solo un elemento del conjunto, se representa con el símbolo ∃!, para una función proposicional, la proposición se escribiría así:

$$\exists! x : p(x)$$

y se lee:

- Existe un único valor de *x* tal que *p*(*x*) es verdadera.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Si por lo menos existe dos elementos, entonces la este cuantificador es falso. Por ejemplo:

- $\exists! x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 2.$

Es verdadera porque el único valor que cumple para esta proposición es para *x*=1.

Ejemplo 2

- $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 4 = 0.$

Este también es verdadera por que cumple para un único valor *x*=2.

Ejemplo 3

- $\exists! x \in \mathbb{N} : x^2 - 5x + 6 = 0.$

Esta proposición es falsa porque existe más de un valor para esta proposición y son *x*=2 y *x*=3.

NEGACIÓN de los cuantificadores (equivalencias)

La negación de los cuantificadores de una función proposicional es otro cuantificador de la misma función proposicional negada, pero lo interesante aquí es que se crea una relación de equivalencia entre un cuantificador universal y un cuantificador existencial, de hecho, son proposiciones de valores opuestos.

Sea la siguiente función proposicional:

- *p*(*x*): *x* es un animal que tiene cola.

Por tanto, la proposición ∀*x*:*p*(*x*) es lógicamente falsa, creo que no necesito explicar el porqué, para corregir esto, simplemente lo negamos, quedaría así:

- $\sim [\forall x : p(x)]$

Su lectura es:

- No es cierto que para todo *x*, *x* es un animal que tiene cola.

O su equivalente:

- No todos los animales tiene cola.

O bien:

- Existe por lo menos un animal que no tiene cola.

Como se habrán dado cuenta, esta última proposición es viene con un cuantificador existencial con una función proposicional negada $\sim p(x)$ que simbólicamente quedaría así:

- $[\exists x{:}\sim p(x)]$

NEGACIÓN de una DECLARACIÓN universal

Bajo estas consideraciones podemos remitir la siguiente propiedad:

Propiedad 1: La negación de un cuantificador universal de una función proposicional es equivalente a la afirmación del cuantificador existencial de la negación de una función proposicional, y se escribe:

$\sim [\forall x{:}\ p(x)] \equiv \exists x{:}\sim p(x)$

NEGACIÓN de una DECLARACIÓN existencial

Propiedad 2: La negación de un cuantificador existencial de una función proposicional es equivalente a la afirmación del cuantificador universal de la negación de una función proposicional, y se escribe:

$\sim[\exists x{:}p(x)]\equiv\forall x{:}\sim p(x)$

Tengan en cuenta que solo se intercambió las posiciones de $\exists$ y $\forall$, Observe que esto se puede extender de manera correcta para un conjunto cualquiera A tal que $x \in A$, las dos propiedades anteriores se escribirán de la siguiente manera:

Propiedad 3: $\sim [\forall x \in A{:}p(x)]\equiv\exists\ x \in A{:}\sim p(x)$.

Esta propiedad nos dice que:

- No es verdad que para $x \in A$, $p(x)$ es verdadera.

O bien:

- Existe un $x \in A$ tal que $p(x)$ es falso.

Y su análogo de la propiedad 2 sería:

Propiedad 4: $\sim [\exists x \in A : p(x)] \equiv \forall x \in A : \sim p(x)$.

Su lectura es: No existe un $x \in A$ tal que $p(x)$ es verdadero.

O también: Para todo $x \in A$, $p(x)$ es falso.

Negación de los cuantificadores de las funciones proposicionales de MÁS de una variable

La negación de una proposición con múltiples cuantificadores se realiza en orden y debe tenerse en cuenta las propiedades de cuantificadores expuesto arriba.

Tener en cuenta que negar un cuantificador universal nos da un cuantificador existencial y negar un cuantificador existencial nos da como resultado un cuantificador universal. Por ejemplo, tenemos la siguiente proposición cuantificacional.

$$\exists z : \forall y : \forall x : p(x, y, z)$$

Lo negamos:

$$\sim [\exists z : \forall y : \forall x : p(x, y, z)]$$

Tenga en cuenta que el símbolo de la negación afecta primero a $\exists z$, al ser afectada, este cambio a $\forall z$ y el símbolo de la negación afecta a $\forall y$, quedando así:

$$\forall z : [\sim [\forall y : \forall x : p(x, y, z)]]$$

Como la negación afecta a $\forall y$, se transforma en $\exists y$ afectando dicha negación a $\forall x$, tenemos:

$$\forall z : [\exists y : [\sim [\forall x : p(x, y, z)]]]$$

Por último, la negación de $\forall x$ es $\exists x$, pero con la función proposicional negada quedando:

$$\forall z : [\exists y : [\exists x : \sim p(x, y, z)]]$$

O simplemente escribimos lo escribimos así:

$$\forall z : \exists y : \exists x : \sim p(x, y, z)$$

De aquí, logramos la siguiente equivalencia:

$$\sim [\exists z : \forall y : \forall x : p(x, y, z)] = \forall z : \exists y : \exists x : \sim p(x, y, z)$$

Clasifique las siguientes expresiones del idioma en proposiciones lógicas, proposiciones abiertas o expresiones indeterminadas.

1. Colón descubrió América en miércoles
2. $2 + 2 = 5$
3. Espérame un momento.
4. Estudien mucho
5. $x + 1 < 4$
6. Estoy mintiendo
7. Todos los pericos son verdes
8. La mesa es de color rojo
9. Un ángulo recto mide 90º

- Nieguen las expresiones siguientes
    1. Algunos peces pueden nadar
    2. El agua es tranparente
    3. México está en América
    4. La mesa es azul
    5. Todos los días hace calor
    6. Ningún oso polar tiene frio
    7. Algún sabio no toma café
- Escriba las siguientes expresiones en forma simbólica.
    1. Hoy es lunes o mañana será sábado
    2. Un número distinto de cero es positivo o negativo
    3. Si no llueve iremos de día de campo
    4. Se pueden estacionar alumnos y maestros
    5. Si encuentra un producto mejor, cómprelo
    6. El no es rico ni feliz
    7. Ser pobre es ser feliz
    8. Hay que saber matemáticas para ser feliz
- Escriba con palabras las siguientes expresiones simbólicas
    1. P v q

       p: llueve   q: hay nubes

2. $p \rightarrow (q \vee r)$

   p: mi carro falla q: me iré en taxi r: me iré en camión

3. $(p \wedge q) \leftrightarrow r$

   p: compraré un cuaderno q: compraré un libro r: el maestro dicta la lección

4. $(p \vee q) \leftrightarrow r$

   p: encuentro un cuaderno azul q: encuentro un cuaderno rojo

   r: compro un cuaderno

5. $(p \wedge \neg q) \rightarrow (r \vee s)$

   p: paso el examen q: me dejan tarea r: voy al cine s: voy de paseo

- Construya una tabla de verdad para cada una de las siguientes expresiones

1. $p \vee \neg q \vee r$
2. $(p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$
3. $(\neg p \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg q)$
4. $\neg(p \vee \neg r) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$
5. $(p \wedge (q \rightarrow \neg r)) \rightarrow (\neg p \vee \neg r)$

- Diga si las dos fórmulas dadas son equivalentes

1. $\neg p \rightarrow (q \vee \neg r)$, $q \vee (\neg p \rightarrow \neg r)$
2. $p \rightarrow q$, $\neg q \rightarrow \neg p$
3. $\neg(p \rightarrow q)$, $p \wedge \neg q$
4. $p \rightarrow (q \vee \neg r)$, $\neg p \vee q \vee \neg r$
5. $(\neg p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow p)$, $p \wedge \neg q \vee r$

- Compruebe que las siguientes fórmulas son tautologías

1. $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
2. $p \vee \neg p$
3. $p \leftrightarrow p$
4. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
5. $(p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)) \rightarrow r$

- Compruebe los siguientes argumentos en forma directa

1. $t, \neg t \vee s, s \rightarrow p, q \rightarrow \neg p \models \neg q$
2. $p \vee q, r \rightarrow \neg p, r \models q$
3. $\neg s \rightarrow \neg p, t \vee \neg s, t \rightarrow \neg w, p \models \neg w$

4. $p \rightarrow q, \neg s \vee t, p \vee s \models q \vee t$
5. $p \rightarrow (q \vee \neg r), p, \neg q \models \neg r$

- Compruebe la validez de los siguientes argumentos utilizando una tabla en forma directa abreviada
  1. $p \rightarrow (q \vee \neg r), p, \neg q \models \neg r$
  2. $\neg w, r \rightarrow (w \vee s), r \models s$
  3. $p, \neg q, \neg q \rightarrow (\neg p \vee r) \models r$
  4. $(s \wedge \neg t) \rightarrow \neg p, p, \neg t \models \neg s$
  5. $(\neg q \wedge \neg r) \rightarrow t, \neg t, \neg q \models r$

- Convierta los siguientes argumentos a fórmulas lógicas y después demuestre. Aplique reglas de inferencia

1. Un maestro dice: Si estudian aprobarán el examen. Y sabemos que Juan aprobó el examen, ¿qué podemos concluir?
2. Armando dice: Si no llueve y hace calor el domingo iré a la playa. Supongamos que no fue a la playa y no llovió. ¿Cuál es la conclusión?
3. Fernando dice: Si el libro cuesta menos de 200 pesos o tiene más de 50 páginas lo compraré. Si el libro no costaba más de 200 pesos y no lo compró, ¿Cuál es la conclusión?
4. Si no hay clase de inglés iré al cine o de compras. Si sabemos que no hubo clase de inglés y no se fue de compras, ¿Qué podemos concluir?
5. Pedro dice: Si hoy en la noche estudio nos veremos en la fiesta. Si lo vemos en la fiesta, ¿qué podemos concluir?

- Demuestre por inducción matemática
  1. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$
  2. $6 + 12 + 18 + \dots + 6n = 3n(n+1)$
  3. $3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1) = n(2n+1)$
  4. $7 + 13 + 19 + \dots + (6n+1) = n(3n+4)$
  5. $5 + 10 + 15 + \dots + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$