1 Erros e números

- Limite superior do erro absoluto:

$$| x - x^*| \leq \delta_x \Leftrightarrow x - \delta_x \leq x^* \leq x + \delta_x$$

- Limite superior do erro relativo

$$r_x \simeq \frac{|x^* - x|}{| x|} \leq \frac{\delta_x}{| x|}.$$

- Fórmula fundamental dos erros

$$\delta_f \leq M_x\delta_x + M_y\delta_y + M_z\delta_z + \cdots$$

$$I = \begin{cases} x - \delta_x \leq & x^* & \leq x + \delta_x \\ y - \delta_y \leq & y^* & \leq y + \delta_y \\ z - \delta_z \leq & z^* & \leq z + \delta_z \\ \ldots \end{cases}, \qquad \left|[\frac{\partial f}{\partial x}]_I\right| \leq M_x\,, \left|[\frac{\partial f}{\partial y}]_I\right| \leq M_y\,, \left|[\frac{\partial f}{\partial z}]_I\right| \leq M_z\,, \ldots.$$

2 Sistemas de equações lineares

- Forma geral do problema com n equações e n variáveis

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

ou

$$Ax = b,$$

1 transformar $Ax = b$ em $Ux = c$, $((A|I)$ em $(U|J)$ para a inversa) com U é uma matriz triangular superior (multiplicador não superior a 1 em valor absoluto).

- Solução do sistema linear:

  2 resolver $Ux = c$ por substituição inversa

- cálculo do determinante de uma matriz quadrada

  2 $det(A) = (-1)^r \times U_{ii},\ i = 1\ldots, n,$, r é o número de trocas de linhas

- cálculo da inversa de uma matriz

  2 resolver os n sistemas, em que os termos independentes são as colunas de J, por substituição inversa

3 Equações não lineares

- Forma geral do problema

$$f(x) = 0, \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

- Algoritmo método da secante

ler: x_1 e x_2 (aproximações iniciais)

$k \leftarrow 1$

repetir

$k \leftarrow k + 1$

$$x_{k+1} \leftarrow x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

até $\dfrac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} \leq \varepsilon_1 \wedge |f(x_{k+1})| \leq \varepsilon_2$

$x^* \leftarrow x_{k+1}$

$f(x^*) \leftarrow f(x_{k+1})$

- Algoritmo método de Newton

ler: x_1 (aproximação inicial)

$k \leftarrow 0$

repetir

$k \leftarrow k + 1$

$$x_{k+1} \leftarrow x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

até $\dfrac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} \leq \varepsilon_1 \wedge |f(x_{k+1})| \leq \varepsilon_2$

$x^* \leftarrow x_{k+1}$

$f(x^*) \leftarrow f(x_{k+1})$

- Algoritmo do método de Newton para sistemas não lineares

ler: x_1 (aproximação inicial)

$k \leftarrow 0$

calcular $J(x)$

repetir

$k \leftarrow k + 1$

calcular $J(x_k)$

calcular $f(x_k)$

resolver o sistema linear $J(x_k)\Delta x_k = -f(x_k)$ por EGPP para calcular o vetor Δx_k

$x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta x_k$

até $\dfrac{\|\Delta x_k\|_2}{\|x_{k+1}\|_2} \leq \varepsilon_1 \wedge \|f(x_{k+1})\|_2 \leq \varepsilon_2$

$x^* \leftarrow x_{k+1}$

$f(x^*) \leftarrow f(x_{k+1})$

4 Polinómio interpolador de Newton

- Polinómio interpolador de Newton de grau menor ou igual a n:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f_0 + (x-x_0)[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ &+ \cdots + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n] \end{aligned}$$

- Diferenças divididas

  Para $n+1$ pontos diferentes entre si (x_0, f_0), $(x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)$.

  - Diferenças divididas de 1ª ordem

    $$[x_0,x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$
    ...
    $$[x_{n-1},x_n] = \frac{f_{n-1} - f_n}{x_{n-1} - x_n} = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

  - Diferenças divididas de 2ª ordem

    $$[x_0,x_1,x_2] = \frac{[x_0,x_1] - [x_1,x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{[x_1,x_2] - [x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$$
    ...
    $$[x_{n-2},x_{n-1},x_n] = \frac{[x_{n-2},x_{n-1}] - [x_{n-1},x_n]}{x_{n-2} - x_n} = \frac{[x_{n-1},x_n] - [x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}}$$

  - ...

  - Diferença dividida de nª ordem
    $$[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n] = \frac{[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}] - [x_1,x_2,\ldots,x_n]}{x_0 - x_n} = \frac{[x_1,x_2,\ldots,x_n] - [x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

- Majorante do erro de truncatura

  1. Se $f(x)$ for dada por uma expressão

     $$|e_n(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)| \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}$$

     em que

     $$\left| \left[f^{(n+1)}(x) \right]_{[a,b]} \right| \leq M_{n+1}.$$

  2. Se $f(x)$ for dada por um conjunto discreto de pontos,

     $$|e_n(x)| \leq |(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)|\,|(\text{dd de ordem } n+1)|$$

     em que

     $$(\text{dd de ordem } n+1) = [x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n,x_z]$$

     se só existir uma, ou a maior delas em valor absoluto se existirem mais que uma.

- $f^n(x) \approx ddn \times n!$

5 'Splines' cúbicas

$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) & x \in [x_0, x_1] \text{ (para o segmento 1)} \\ s_3^2(x) & x \in [x_1, x_2] \text{ (para o segmento 2)} \\ \vdots & \vdots \\ s_3^n(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \text{ (para o segmento } n). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s_3^i(x) = & \frac{M_{i-1}}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{M_i}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 \\ + & \left[\frac{f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{M_{i-1}(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) \\ + & \left[\frac{f_i}{x_i - x_{i-1}} - \frac{M_i(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1}), \end{aligned}$$

- Equação dos nós interiores da 'spline' cúbica

$$(x_i - x_{i-1})M_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})M_i + (x_{i+1} - x_i)M_{i+1} =$$

$$= \frac{6}{x_{i+1} - x_i}(f_{i+1} - f_i) - \frac{6}{x_i - x_{i-1}}(f_i - f_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

- 'Spline' cúbica natural

$$M_0 = 0 \text{ e } M_n = 0.$$

- 'Spline' cúbica completa

$$2(x_1 - x_0)M_0 + (x_1 - x_0)M_1 = \frac{6}{x_1 - x_0}(f_1 - f_0) - 6f'(x_0),$$

$$2(x_n - x_{n-1})M_n + (x_n - x_{n-1})M_{n-1} = 6f'(x_n) - \frac{6}{x_n - x_{n-1}}(f_n - f_{n-1}).$$

- Limite superior do erro de truncatura

$$|f(x) - s_3(x)| \le \frac{5}{384}h^4 M_4 \qquad h = \max_{0 \le i \le n-1}(x_{i+1} - x_i),$$

$$|f'(x) - s_3'(x)| \le \frac{1}{24}h^3 M_4. \qquad \max_{\xi \in [a,b]} \left|f^{iv}(\xi)\right| \le M_4.$$

6 Integração numérica

- Forma geral do problema

$$\int_a^b f(x)dx,$$

$M_1 \leq |f'(\eta)|$, $M_2 \leq f''(\eta)$, $M_4 \leq f^{(iv)}(\eta), \eta \in [a,b]$

- Regra simples do retângulo

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a), \quad e_R \leq \left| \frac{(b-a)^2}{2} \right| M_1$$

- Regra simples do ponto médio

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad e_M \leq \left| \frac{(b-a)^3}{24} \right| M_2$$

- Regra simples do trapézio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right], \quad e_T \leq \left| -\frac{(b-a)^3}{12} \right| M_2$$

- Regra simples de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right],, \quad e_S \leq \left| -\frac{(b-a)^5}{32}\frac{1}{90} \right| M_4$$

- Regra simples dos três oitavos

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right], \quad e_{3/8} \leq \left| -\frac{(b-a)^5}{6480} \right| M_4$$

- Fórmula composta do trapézio

$$T(h) = \frac{h}{2}\left[f_0+2f_1+2f_2+\cdots+2f_{n-1}+f_n\right], \quad e_{CT} \leq \left| -\frac{h^2}{12}(b-a) \right| M_2$$

- Fórmula composta de Simpson

$$S(h) = \frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\cdots+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n\right], \quad e_{CS} = \left| -\frac{h^4}{180}(b-a) \right| M_4$$

- Fórmula composta dos três oitavos

$$3/8(h) = \frac{3h}{8}\left[f_0+3f_1+3f_2+2f_3+3f_4+\cdots+2f_{n-3}+3f_{n-2}+3f_{n-1}+f_n\right], \quad e_{C3/8} = \left| -\frac{h^4}{80}(b-a) \right| M_4$$