

1 Introdução ao MATLAB

M1.1 Escreva os seguintes vetores ou matrizes:

(a) $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

(b) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$

(c) um vetor linha com os números naturais menores ou iguais a 10;

(d) um vetor linha com os números pares naturais menores ou iguais a 12;

(e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$

M1.2 Com base na matriz A da pergunta anterior, sem recorrer ao MATLAB, escreva as matrizes que resultam dos seguintes comandos. Confirme a sua resposta no MATLAB.

(a) $B=A(2:3,1:2);$

(b) $C=A(:,1:2);$

(c) $D=[A;4 \ 4 \ 4];$

(d) $E=D([2 \ 4],:);$

(e) $F=[0:3:9;2:2:8;5:5:20];$

(f) $A([1 \ 2],1)=2*A([1 \ 2],1);$

(g) $A([1 \ 3],1)=A([3,1],1).$

M1.3 Gere as seguintes matrizes:

(a) a matriz identidade 5×5 ;

(b) uma matriz 3×3 com elementos aleatórios entre 0 e 1;

(c) uma matriz 4×3 com elementos aleatórios entre -1 e 1;

- (d) uma matriz nula 2×3 ;
- (e) uma matriz 2×2 com todos os elementos iguais a 1;
- (f) uma matriz 10×10 com todos os elementos iguais a 10;
- (g) uma matriz com os elementos da diagonal da matriz A da pergunta 1 e os restantes iguais a zero.

M1.4 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, a matriz B que consiste numa matriz de

dimensão 3×3 , com todos os elementos iguais a um, o vetor $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e o vetor $b = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Efetue as seguintes operações.

- (a) $A + B$;
- (b) o produto de cada um dos elementos de a por b ;
- (c) $A \times B$;
- (d) o produto de cada um dos elementos de A por B .

M1.5 Construa uma `m-file` que lê dois números e escreve a sua soma e o seu produto.

M1.6 Escreva um programa que lê uma sequência de n números e escreve a sua soma e o seu produto.

M1.7 Escreva um programa que lê uma sequência de n números e escreve o maior deles.

2 Sistemas de equações lineares

M2.1 Resolva os seguintes sistemas através de um método direto e estável.

$$(a) \begin{cases} 4x_1 & + & 13x_2 & + & 2x_3 & = & -15 \\ -8x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 6.5x_2 & + & 5.5x_3 & = & -3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3.0001x_2 = 0.9999 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3.0001x_2 = 2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} -30x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 10 \\ 10x_1 - 2.9999x_2 - 2.9999x_3 = -3.3333 \\ 6x_1 - 6x_2 - 20x_3 = 10 \end{cases}$$

M2.2 Calcule o determinante e a inversa das seguintes matrizes:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3.0001 \end{pmatrix}$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} -602.9 & -0.4762 & 301.0 \\ -248.8 & -0.1048 & 124.2 \\ -200.6 & 0 & 101.7 \end{pmatrix}$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

M2.3 Considere a matriz A e o vetor b .

$$A = \begin{pmatrix} 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 \\ 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 14.6 \\ -11.4 \\ 14.0 \\ -0.9 \end{pmatrix}.$$

- (a) Resolva o sistema correspondente por um método direto e estável.
- (b) Calcule o determinante de A por um método direto e estável.
- (c) Calcule A^{-1} usando o método de eliminação de Gauss com pivotagem parcial.

M2.4 Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 & = & 10 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = & 15 \\ x_1 - 2x_2 + 8x_3 + x_4 & = & 8 \\ -x_3 + 9x_4 + 2x_5 & = & 10 \\ x_1 + x_2 - x_4 + 7x_5 & = & 8 \end{cases}$$

- (a) Resolva o sistema por EGPP.
- (b) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.
- (c) Calcule a inversa da matriz dos coeficientes.

3 Equações não lineares

M3.1 Calcule um zero da função

$$f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2,$$

usando $x^{(1)} = 2$.

M3.2 Resolva a seguinte equação não linear, fornecendo as primeiras derivadas.

$$\cos(x) - \cos(3.1x) = 0.$$

Considere

- a) $x^{(1)} = -1$;
- b) $x^{(1)} = 1$;
- c) $x^{(1)} = -10$;
- d) $x^{(1)} = 10$.

M3.3 Resolva o seguinte sistema de equações não lineares nas variáveis x_1 e x_2 .

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = 2x_1 \\ \cos\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right) = 2x_2 \end{cases}$$

- a) Considere uma aproximação inicial $x^{(1)} = (0, 0)^T$;
- b) Repita com $x^{(1)} = (1, 2)^T$

M3.4 Determine a solução do sistema de equações não lineares, fornecendo a matriz do Jacobiano,

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2^2 + x_2 = 0 \\ e^{x_3} - 1 = 0 \end{cases}$$

usando como aproximação inicial o vetor $x^{(1)} = (1, 1, -1)^T$.

4 Interpolação polinomial – polinómio interpolador de Newton

M4.1 Dada a tabela de valores de uma função $f(x)$,

x_i	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
f_i	0.0639	0.0800	0.0988	0.1203	0.1442	0.1714	0.2010	0.2330	0.2673	0.3036	0.3414

Para aproximar $f(5.44)$,

- a) apresente o polinómio interpolador de grau 2;
- b) com base no polinómio anterior, estime $f(5.44)$;
- c) apresente o polinómio interpolador de grau 5;
- d) com base no polinómio anterior, estime $f(5.44)$;
- e) apresente o polinómio interpolador de grau 10;
- f) com base no polinómio anterior, estime $f(5.44)$.

M4.2 Considere a tabela seguinte de 12 valores de $f(x)$.

x_i	0.00	0.30	0.50	0.70	0.90	1.00	1.20	1.50	1.60	1.75	2.00	2.10
f_i	0.0000	0.2955	0.4794	0.6442	0.7833	0.8415	0.9320	0.9975	0.9996	0.9840	0.9093	0.8632

Para aproximar $f(1.57)$

- a) apresente o polinómio interpolador usando quatro pontos;
- b) com base no polinómio anterior, estime $f(1.57)$;
- c) apresente o polinómio interpolador usando seis pontos;
- d) com base no polinómio anterior, estime $f(1.57)$;
- e) apresente o polinómio interpolador usando 12 pontos;
- f) com base no polinómio anterior, estime $f(1.57)$;
- g) represente graficamente os pontos e o polinómio de grau 11.

M4.3 A velocidade de ascensão de um foguetão, $v(t)$, é conhecida para diferentes tempos conforme a seguinte tabela. Esta velocidade pode ser estimada a partir de um polinómio interpolador de grau três.

$t(s)$	0	5	10	15	20	30
$v(t)(m/s)$	0	106.8	227.04	362.78	517.35	901.67

- a) Calcule o polinómio e estime a velocidade do foguetão para $t = 8$ s.
- b) Represente graficamente os pontos o polinómio calculado.

M4.4 Considere um reservatório de água com 2.1 m de altura. No início, o reservatório está cheio de água. Num certo instante, abre-se a a válvula e o reservatório começa a ser esvaziado. A altura (em metros) de água do reservatório, t horas depois de este ter começado a ser esvaziado, é dada por $h(t)$, de acordo com a tabela

instante, t_i	0	1	4	7	8	10	14
altura de água, $h(t)_i$	2.1	2.0	1.8	1.5	1.4	1.1	0

Pretende estimar-se a altura de água no reservatório ao fim de 5 h.

- apresente o polinómio interpolador de grau 2;
- com base no polinómio anterior, estime $f(5)$;
- apresente o polinómio interpolador de grau 5;
- com base no polinómio anterior, estime $f(5)$;
- apresente o polinómio interpolador de grau 6;
- com base no polinómio anterior, estime $f(5)$.

5 Splines

M5.1 Considerando a função $f(x)$ dada pela tabela

x_i	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
f_i	0.0639	0.0800	0.0988	0.1203	0.1442	0.1714	0.2010	0.2331	0.2673	0.3036	0.3414

qual o valor aproximado da função no ponto $x = 5.45$, bem como o segmento da spline correspondente desse ponto

- usando uma 'spline' cúbica sem considerar derivadas nos extremos?
- usando uma 'spline' cúbica completa?

M5.2 De uma tabela de logaritmos obteve-se o seguinte quadro de valores.

x_i	1	1.5	2	3	3.5
$\ln(x_i)$	0	0.4055	0.6931	1.0986	1.2528

Usando uma função 'spline' cúbica completa, calcule uma aproximação a $\ln(2.5)$.
Escreva o segmento da spline para estimar este valor.

M5.3 Foram registados os consumos de combustível $f(x_i)$, de um automóvel a arrancar em determinados instantes, x_i (em segundos).

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	3.6	6.6	9.6	9.8	10
f_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.7	0.8

- a) Usando uma função 'spline' cúbica sem usar derivadas nos extremos, calcule o consumo no instante de tempo $x_i = 5$ s e escreva o segmento correspondente da 'spline'.
- b) Repita a alínea anterior, mas agora usando uma 'spline' cúbica completa.

6 Integração numérica

M6.1 Dada a tabela de valores da função $f(x)$

x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0
f_i	-4271	-2522	-499	1795	4358	7187	10279	13633	17247

Calcule a melhor aproximação ao integral

$$\int_{0.0}^{5.0} f(x) dx$$

usando toda a informação da tabela.

M6.2 Calcule uma aproximação ao integral

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx.$$

M6.3 Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x)$:

x_i	-1.0	-0.95	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.2	0.6	1.0	1.4
f_i	-1.000	-0.05	1.00	0.980	0.95	0.900	0.850	0.200	-0.500	-2.000

- a) Calcule numericamente $\int_{-1.0}^{1.4} f(x) dx$ usando todos os pontos da tabela.

- b) Calcule o mesmo integral usando um valor de h constante, deixando de fora o menor número possível de pontos.

M6.4 A função $F(t)$ surge na determinação da tensão à superfície de um líquido que rodeia uma bolha esférica de gás:

$$F(t) = \int_0^t \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

em que

$$P(x) = 3 + 3x + x^2$$

$$Q(x) = 3 + 6x + 6x^2 + 2x^3.$$

Determine $F(1)$.

7 Mínimos quadrados

M7.1 Considere a seguinte tabela:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
f_i	1.000	1.221	1.492	1.882	2.226	2.718	3.320	4.056

Com base nos mínimos quadrados:

- Escreva um polinómio de grau 3.
- qual a aproximação para o ponto $x = 0.5$, usando o polinómio da alínea anterior?
- qual o resíduo do erro?

M7.2 A docente responsável pela UC de MN&ONL registou, para 8 alunos, os resultados obtidos num teste e a respetiva classificação final obtida.

teste	1.2	1.75	1.1	2.0	0.5	0.8	1.0	1.5
classificação final	16	18	16	19	10	11	14	16

- Determine, no sentido dos mínimos quadrados, a reta que melhor aproxima os dados da tabela.
- Qual o resíduo do erro obtido?

- c) Qual será a classificação previsível para um aluno que tenha neste teste uma classificação de 1.6?

M7.3 Considerem-se as seguintes funções de aproximação

um polinómio de grau 3 ($p_3(x)$)

$$M(x) = c_1 + c_2 \cos(x) + c_3 \sin(x)$$

$$N(x) = c_1 e^x + c_2 \frac{1}{x}$$

$$O(x) = c_1 + c_2 x + \frac{c_3}{x}$$

$$Q(x) = c_1 x + c_2 e^x$$

- a) Calcule os coeficientes dos vários modelos (e construa-os) que melhor se ajustam à função $f(x)$ dada pela tabela seguinte, no sentido dos mínimos quadrados.

x_i	-1.00	-0.95	-0.85	-0.80	0.20	0.50	0.90
f_i	-1.00	-0.05	0.90	1.00	0.90	0.50	-0.30

- b) Estime $f(0.6)$ para cada um deles.
- c) Indique o resíduo para cada um dos modelos.
- d) Qual dos modelos é melhor, no sentido dos mínimos quadrados? Justifique.

8 fminunc

M8.1 Resolva o problema *Aluffi-Pentini*,

$$\min_x f(x) \equiv 0.25x_1^4 - 0.5x_1^2 + 0.1x_1 + 0.5x_2^2,$$

considerando o valor inicial $(-1, 0.5)$,

- a) usando o método quasi-Newton sem fornecer as primeiras derivadas da função objetivo.
- b) usando o método quasi-Newton com procura unidimensional, fornecendo as primeiras derivadas da função objetivo.
- c) usando o método de Newton com regiões de confiança, fornecendo as primeiras derivadas da função objetivo.

- d) usando o método de Newton com regiões de confiança, fornecendo as primeiras e segundas derivadas da função objectivo.

M8.2 No planeamento da produção de dois produtos, uma determinada companhia espera obter lucros iguais a P :

$$P(x_1, x_2) = \alpha_1(1 - e^{-\beta_1 x_1}) + \alpha_2(1 - e^{-\beta_2 x_2}) + \alpha_3(1 - e^{-\beta_3 x_1 x_2}) - x_1 - x_2,$$

em que x_1 é a quantia gasta para produzir e promover o produto 1, x_2 é a quantia gasta para produzir e promover o produto 2 e os α_i e β_i são constantes definidas. P , x_1 e x_2 estão em unidades de 10^5 euros. Calcule o lucro máximo para as seguintes condições:

$$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 1, \beta_1 = 1.2, \beta_2 = 1.5, \text{ e } \beta_3 = 1.$$

- Resolva o problema usando o método quasi-Newton sem fornecer as primeiras derivadas da função objectivo. Considere a aproximação inicial $(1, 1)$.
- Resolva o problema usando o método quasi-Newton com procura unidimensional, fornecendo as primeiras derivadas da função objectivo. Considere a aproximação inicial da alínea anterior.
- Resolva novamente o problema mas selecione agora o método de Newton com regiões de confiança.

M8.3 Suponha que pretendia representar um número positivo A na forma de um produto de quatro factores positivos x_1, x_2, x_3, x_4 . Para $A = 2401$, determine esses factores de tal forma que a sua soma seja a menor possível.

Formule o problema como um problema de optimização sem restrições em função das três variáveis x_1, x_2 e x_3 .

A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2, x_3)^{(1)} = (6, 7, 5)$, use o método quasi-Newton (com fórmula DFP), para calcular esses factores. Na paragem do processo iterativo use $\text{TolX}=\text{TolFun}=0.0001$.

M8.4 Resolva o problema *Epistatic Michalewicz*

$$\min_x f(x) \equiv - \sum_{i=1}^n \sin(y_i) \left(\sin \left(\frac{iy_i^2}{\pi} \right) \right)^{2m}$$

$$y_i = \begin{cases} x_i \cos(\theta) - x_{i+1} \sin(\theta), & i = 1, 3, 5, \dots, < n \\ x_i \sin(\theta) + x_{i+1} \cos(\theta), & i = 2, 4, 6, \dots, < n \\ x_i & i = n \end{cases}$$

pelo método quasi-Newton (sem fornecer derivadas) para $n = 5$ e para $n = 10$.

$$\text{Considere } \theta = \frac{\pi}{6}, m = 10 \text{ e o valor inicial } x^{(1)} = \begin{cases} 2, & i = 1, 3, 5, \dots, \leq n \\ 1, & i = 2, 4, 6, \dots, \leq n \end{cases}.$$

M8.5 Considere o problema *Griewank*

$$\min_x f(x) \equiv 1 + \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right).$$

Resolva-o pelo método quasi-Newton com fórmula DFP para $n = 10$ e $n = 25$.

Considere o valor inicial $x^{(1)} = (1, 1, \dots, 1)^T$.

9 fminsearch

M9.1 Resolva o problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)$$

com $f(x_1, x_2) = \max\{|x_1|, |x_2 - 1|\}$. Como aproximação inicial considere o ponto $(1, 1)$.

M9.2 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) \equiv \max\{x_1^2 + x_2^4, (2 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2, 2e^{-x_1 + x_2}\}.$$

A partir da aproximação inicial $x = (1, -0.1)^T$, calcule a solução, usando o método mais adequado. Repita o processo com a seguinte aproximação inicial $x = (2, 2)^T$.

Resolva novamente o problema a partir de $x = (-10, -10)^T$.

Com qual das aproximações iniciais o processo exigiu menos cálculos da função objectivo?

M9.3 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \equiv n \left(\max_{1 \leq i \leq n} x_i \right) - \sum_{i=1}^n x_i.$$

Para $n = 2$ e a partir da aproximação inicial $x_i = i - (\frac{n}{2} + 0.5)$, $i = 1, \dots, n$, calcule a solução.

Repita a resolução considerando agora $n = 5$ e $\text{TolX} = 10^{-20}$. Resolva ainda acrescentando a opção $\text{MaxFunEvals} = 10000$. Acrescente ainda a opção $\text{MaxIter} = 10000$. Comente os resultados.

M9.4 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \equiv \prod_{i=1}^n x_i - \left(\min_{1 \leq i \leq n} x_i \right).$$

Para $n = 2$ e a partir da aproximação inicial $x_i = i - (\frac{n}{2} + 0.5)$, $i = 1, \dots, n$, calcule a solução.

Repita a resolução considerando agora $n = 5$ e $\text{MaxFunEvals} = 5000$.

M9.5 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) \equiv \max \{ x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + x_2^2 + \omega(-4x_1 - x_2 + 4), x_1^2 + x_2^2 + \omega(-x_1 - 2x_2 + 6) \}.$$

A partir da aproximação inicial $x = (-1, 5)^T$, calcule a solução, usando o método mais adequado e considerando $\omega = 500$. A partir da mesma aproximação inicial, volte a resolver o problema, mas agora fazendo $\omega = 1000$.

Repita mais uma vez considerando $\omega = 1500$.

Para que valor de ω , o processo iterativo é mais eficiente?

M9.6 Considere o seguinte problema não diferenciável

$$\min_{x \in \mathbb{R}^4} f(x) \equiv \max_{1 \leq i \leq 21} |u_i(x)|$$

em que

$$u_i(x) = x_4 - (x_1 t_i^2 + x_2 t_i + x_3)^2 - \sqrt{t_i}$$

para $1 \leq i \leq 21$.

A partir da aproximação inicial $x_i = 1$, $i = 1, \dots, 4$, calcule a solução, usando o método mais adequado e os seguintes valores $t_i = 0.25 + 0.75(i-1)/20$, $i = 1, \dots, 21$.

Repita o processo mas agora considere os seguintes parâmetros $t_i = 0.2i$, $i = 1, \dots, 21$.