1 Erros e números

1.1 Com base no limite superior do erro absoluto no cálculo da expressão

$$f(\pi, \sqrt{3}, \sqrt{2}) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{\pi^2 + \sqrt{2}},$$

e sabendo que são usados os seguintes valores aproximados

$$\pi = 3.1416, \quad \sqrt{3} = 1.732 \ \ e \ \ \sqrt{2} = 1.4142,$$

quantos algarismos significativos tem o valor calculado de f?

1.2 Uma corrente elétrica atravessa uma resistência (R) de 20Ω. A resistência foi medida com um erro relativo que não excede 0.01. A intensidade da corrente (I) é 3.00 ± 0.01 A. Sabendo que a tensão da corrente é dada por $V = RI$, determine um limite superior do erro absoluto no calculo da tensão da corrente. Quantos algarismos significativos garante para o valor calculado da tensão?

1.3 O perímetro P de um triângulo retângulo de hipotenusa h e e com um dos ângulos agudos α, pode ser dado pela expressão

$$P = (\operatorname{sen}(\alpha) + \cos(\alpha))\, h.$$

Supondo que $\alpha = 0.34$ rad, qual o erro absoluto com que se deve medir h, de valor aproximado 16.7 m, para que o erro absoluto em P não exceda 0.5?

1.4 Pretende-se calcular a área de um círculo, de raio aproximadamente igual a 25 cm, com erro absoluto que em módulo não excede 0.5 cm^2. Com que aproximação se deve medir o raio do círculo e quantos algarismos significativos se devem usar no valor aproximado de π?

1.5 O rendimento η de um transformador depende da potência de entrada z, da potência de saída a e da perda de potência b, pelas relações:

$$\eta = \frac{a}{z} = \frac{a}{a+b}.$$

Podem medir-se z e a a menos de 1%, enquanto que o erro na medida de b pode ser de 20%, sendo η cerca de 0.95. Qual das relações usaria para a determinação de η?

2 Sistemas de equações lineares

2.1 Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.0x_3 = 12.6 \\ 0.6x_1 + 0.9x_2 + 2.8x_3 = 10.8 \\ 2.0x_1 + 1.0x_2 + 1.1x_3 = 4.0 \end{cases}$$

a) Calcule a inversa da matriz dos coeficientes por um método direto e estável.

b) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes por um método direto e estável.

c) Resolva o sistema por um método direto e estável.

2.2 Um engenheiro supervisiona a produção de 3 modelos de automóveis. Para a sua produção, são necessários 3 tipos de materiais: metal, tecido e plástico. As quantidades para produzir um carro de cada modelo são:

	metal (kg./carro)	tecido(kg./carro)	borracha(Kg./carro)
'Jeep'	2.71	4.11	2.69
'coupé'	1.63	2.44	1.64
'V6'	0.32	0.19	0.36

Existem em *stock*, respetivamente 38.48, 56.69, 38.54 kg. de metal, tecido e borracha. Quantos automóveis podem ser produzidos com a quantidade de *stock* existente?

Resolva o sistema por um método direto e estável usando 4 casas decimais nos cálculos.

Resolva o sistema pelo método EGPP, usando 5 casas decimais nos cálculos.

2.3 Considere os três sistemas e equações lineares

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule as três soluções de uma só vez, usando um método direto e estável.

2.4 Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 = 2 \\ 0.5x_1 + x_2 + 0.5x_3 = 2 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

a) Use o método da eliminação de Gauss com pivotagem parcial para calcular a sua solução.

b) Calcule o determinante da matriz dos coeficientes.

2.5 Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2.4 & 6.0 & -2.7 & 5.0 \\ -2.1 & -2.7 & 5.9 & -4.0 \\ 3.0 & 5.0 & -4.0 & 6.0 \\ 0.9 & 1.9 & 4.7 & 1.8 \end{pmatrix}$$

e o vetor $b = (14.6,\ -11.4,\ 14.0,\ -0.9)^T$,

a) resolva o sistema correspondente por um método direto e estável,

b) calcule o determinante de A por um método direto e estável e

c) calcule A^{-1} usando o método de eliminação de Gauss com pivotagem parcial.

3 Equações não lineares

3.1 Localize através do método gráfico os zeros das funções não lineares em x,

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$;

b) $f(x) = \sin x + x - 2$;

c) $f(x) = e^x + x - 1$;

d) $f(x) = x + \ln x$.

3.2 Um certo equipamento de 20000 euros vai ser pago durante 6 anos. O pagamento anual é de 4000 euros. A relação entre o custo do equipamento P, o pagamento anual A, o número de anos n e a taxa de juro i é a seguinte:

$$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

Utilize o método que não recorre à derivada para determinar a taxa de juro utilizada nos cálculos. O valor da taxa de juro pertence ao intervalo $[0.05, 0.15]$. Use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.005$. Use seis casas decimais nos cálculos.

3.3 O volume v de um líquido num tanque esférico de raio r está relacionado com a profundidade h do líquido da seguinte forma:

$$v = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}.$$

(a) Calcule, utilizando um método que não recorre ao cálculo de derivadas, a profundidade h, num tanque de raio $r = 1$ para um volume de 0.5. Utilize para aproximação inicial o intervalo $[0.25, 0.5]$. Faça 3 iterações e use seis casas decimais nos cálculos.

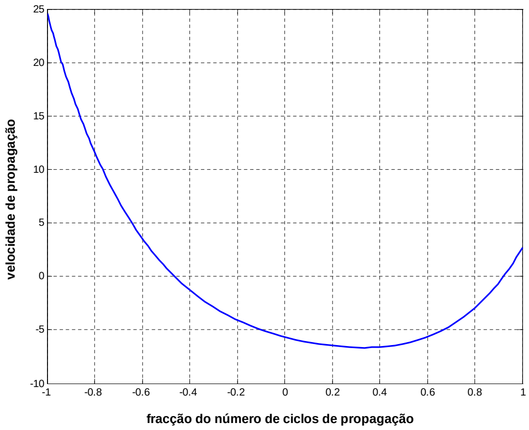
(b) Repita os cálculos, nas mesmas condições da alínea anterior, mas utilizando para aproximação inicial o intervalo $[2.5, 3]$. Comente os resultados e analise a viabilidade da solução encontrada.

3.4 A função

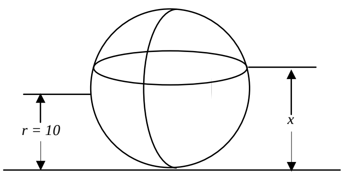
$$a(x) = 2.02x^5 - 1.28x^4 + 3.06x^3 - 2.92x^2 - 5.66x + 6.08$$

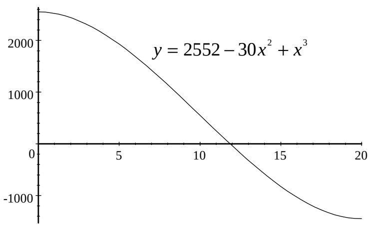
é utilizada num estudo do comportamento mecânico de materiais, representando $a(x)$ o comprimento da fissura e x (> 0) uma fracção do número de ciclos de propagação.

Pretende-se saber para que valores de x a velocidade de propagação da fissura é nula. Utilize um método que não recorre ao cálculo de derivadas, usando no critério de paragem $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ ou no máximo três iterações. Use seis casas decimais nos cálculos.



3.5 Uma bola esférica de raio $r = 10$ cm feita de uma substância cuja densidade é $\rho = 0.638$, foi colocada num recipiente com água.





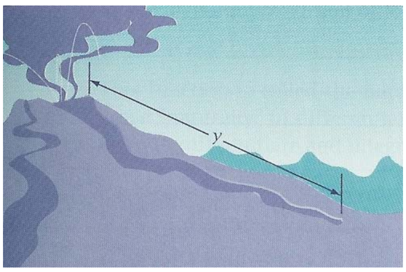
Usando o método iterativo de Newton, calcule a distância x da parte submersa da bola sabendo que

$$f(x) \equiv \frac{\pi\,(x^3 - 3x^2 r + 4r^3\rho)}{3} = 0.$$

Pare o processo iterativo quando o critério de paragem for verificado para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$, ou ao fim de três iterações. Use o método de Newton e seis casas decimais nos cálculos.

3.6 A figura representa um vulcão em erupção. A relação entre a distância y (milhas) percorrida pela lava e o tempo t (horas) é dada por:

$$y = 7\,(2 - 0.9^t).$$

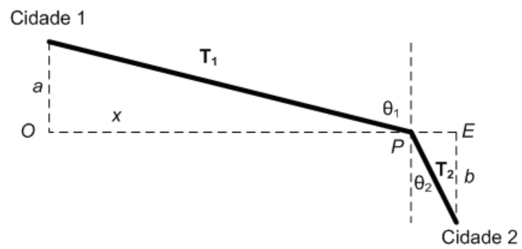


Existe uma aldeia no sopé da montanha a uma distância de $y = 10$. O gabinete de protecção civil advertiu os moradores da aldeia de que a lava chegaria às suas casas em menos de 6 horas. Calcule utilizando um método iterativo que recorre ao cálculo de derivadas o instante de tempo em que a lava do vulcão atinge a aldeia.

Considere $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$ ou no máximo três iterações. Use seis casas decimais nos cálculos.

`Nota:` $(a^x)' = a^x \ln(a)$, para a constante.

3.7 Considere duas cidades localizadas como se mostra na figura. Uma petrolífera pretende construir uma conduta que ligue as duas cidades. Devido às diferenças no terreno, o custo para construir a conduta será C_1 milhões de euros por quilómetro para o troço $\mathbf{T}_1$ e C_2 milhões de euros por quilómetro para o troço $\mathbf{T}_2$. Para tornar a construção mais económica, o ponto P de intersecção dos dois troços deve estar localizado de modo a que $C_1 \text{sen}\theta_1 = C_2 \text{sen}\theta_2$.



(a) Usando a informação da figura e escrevendo esta equação em função de x (a distância de O a P), mostre que se obtém

$$C_2^2(L-x)^2(a^2+x^2) = C_1^2 x^2 (b^2 + (L-x)^2),$$

sendo L a distância de O a E.

(b) Resolva a equação considerando $a = 3$, $b = 1$, $L = 4$, $C_1 = 1$ e $C_2 = 2$. Utilize o método de Newton e a aproximação inicial $x_1 = 3.75$ e $n_{\max} = 2$. Apresente uma estimativa do erro relativo. Use seis casas decimais nos cálculos.

3.8 Num coletor solar, um balanço de energia na placa absorvente e na placa de vidro produz o seguinte sistema de equações não lineares nas temperaturas absolutas da placa absorvente (x_1) e da placa de vidro (x_2)

$$\begin{cases} x_1^4 + 0.068x_1 - x_2^4 - 0.058x_2 & = & 0.015 \\ x_1^4 + 0.058x_1 - 2x_2^4 - 0.117x_2 & = & 0 \end{cases}.$$

Considerando a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)_1 = (0.3, 0.3)$, implemente duas iterações do método de Newton. Apresente uma estimativa do erro relativo da aproximação calculada. Use seis casas decimais nos cálculos.

3.9 Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_1^n = 4 \\ -x_2 - x_2^m - x_1 = 8 \end{cases}$$

em que n e m são parâmetros.

Considere $m = 3$ e $n = 2$. Resolva o sistema utilizando para aproximação inicial o ponto $x_1 = (1, -2)^T$. Para o critério de paragem use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$ (ou no máximo duas iterações). Use seis casas decimais nos cálculos.

3.10 Existe um par de valores que anula as primeiras derivadas parciais da função de duas variáveis

$$f(x, y) = -e^{-x} + y^2 - 2x + 2y.$$

Usando um método iterativo, e a partir da aproximação inicial $(x, y)_1 = (-1, 1)$, determine esse par de modo que a estimativa do erro relativo da aproximação calculada não exceda 0.05 (duas iterações). Use seis casas decimais nos cálculos.

3.11 Usando o método de Newton, determine um dos pontos de interseção da circunferência

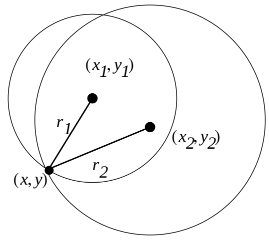
$$x_1^2 + x_2^2 = 2$$

com a hipérbole

$$x_1^2 - x_2^2 = 1.$$

Considere os valores iniciais $(x_1, x_2)_1 = (1.5, 0.5)$ e para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$ ou no máximo duas iterações. Use seis casas decimais nos cálculos.

3.12 Em problemas de navegação, é necessário encontrar a posição de um ponto (x, y), através dos valores das distâncias r_1 e r_2 a dois pontos de posição conhecida (x_1, y_1) e (x_2, y_2), como mostra a figura.



a) Formule o problema como um sistema de equações não lineares em função das coordenadas do ponto (x, y).

b) Considerando $(x_1, y_1) = (10, 10)$, $(x_2, y_2) = (10, -10)$, $r_1 = 14$ e $r_2 = 16$, calcule as coordenadas do ponto (x, y) através do método iterativo de Newton considerando a aproximação inicial $(x, y)_1 = (0, 0)$. Apresente o valor ao fim de duas iterações com a correspondente estimativa do erro relativo. Use seis casas decimais nos cálculos.

3.13 A concentração de um poluente num lago depende do tempo t e é dada por

$$C(t) = 70e^{\beta t} + 20e^{\omega t}.$$

Efectuaram-se duas medições da concentração que foram registadas na seguinte tabela

t	1	2
$C(t)$	27.5702	17.6567

Utilize o método de Newton para determinar β e ω. Considere a aproximação inicial $(\beta, \omega)_1 = (-1.9, -0.15)$, efetue duas iterações e apresente uma estimativa do erro relativo.

3.14 Pensei em dois números. O produto dos dois somado ao segundo ao cubo é igual a 3 e o logaritmo neperiano do segundo adicionado à metade do primeiro é 1.

a) Formule o problema como um sistema de equações.

b) Resolva-o utilizando para aproximação inicial o ponto $(1.9, 1.1)$. Apresente o resultado obtido no final de uma iteração e a correspondente estimativa do erro relativo.

4 Polinómio interpolador de Newton

4.1 Dada a tabela de valores de uma função $f(x)$

x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.8	1.0
$f(x_i)$	0	1	1	2	2	3	3	4

a) Pretende-se aproximar $f(0.6)$ usando um polinómio de grau 3. Use a fórmula interpoladora de Newton baseada em diferenças divididas.

b) Estime o erro de truncatura cometido na alínea anterior.

c) Estime $f\,(0.6)$ usando todos os pontos da tabela.

4.2 A tabela seguinte apresenta a população dos Estados Unidos da América (em milhões) de 1940 e 1980.

ano	1940	1950	1960	1970	1980
população	132.165	151.326	179.323	203.302	226.542

a) Construa o polinómio interpolador de Newton de grau 4 para estimar a população no ano 1965.

b) A população em 1930 foi 123.203. Qual a precisão do valor calculado na alínea a)?

4.3 Os registos efectuados numa linha de montagem são os seguintes:

n^o de unidades	1	3	4	6	7	10
horas necessárias	2	3	4	5	6	10

a) Tendo sido recebidos pedidos para a montagem de 2 unidades e 8 unidades, use interpolação cúbica para estimar o tempo (em horas) necessário para satisfazer cada pedido.

b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido na alínea anterior para cada um dos pedidos.

4.4 Considere a seguinte tabela de uma função polinomial

x	-1	0	1	2	3	4
$p(x)$	-1	-3	-1	5	15	29

Sem recorrer à expressão analítica de $p(x)$:

a) mostre que $p(x)$ é um polinómio interpolador de grau 2.

b) determine $p(10)$.

4.5 Considere a tabela de valores da função $f(x)$

x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	a	2	4	b

Determine a e b por forma a que o polinómio interpolador de Newton que aproxima f seja de grau 3, com coeficiente do termo de maior grau igual à unidade e coeficiente do termo de menor grau igual a zero. Escreva o polinómio.

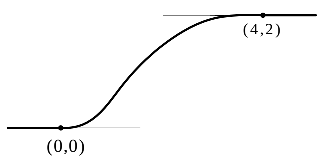
4.6 Considere a seguinte tabela da função $f(x)$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	a	2	1	0	4

Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo a que $f(x)$ seja um polinómio de grau 3.

5 Splines

5.1 Pretende-se construir um desvio entre duas linhas de caminho de ferro paralelas. O desvio deve corresponder a um polinómio de grau três que une os pontos $(0,0)$ e $(4,2)$, como mostra a figura



Com base nos quatro pontos da tabela

x_i	-1	0	4	5
$f_i = f(x_i)$	0.4375	0	2	1.5625

construa uma 'spline' cúbica natural para definir a trajetória do desvio e calcular $f(2)$.

5.2 A resistência de um certo fio de metal, $f(x)$, varia com o diâmetro desse fio, x. Foram medidas as resistências de 6 fios de diversos diâmetros:

x_i	1.5	2.0	2.2	3.0	3.8	4.0
$f(x_i)$	4.9	3.3	3.0	2.0	1.75	1.5

Como se pretende estimar a resistência de um fio de diâmetro 1.75, use uma 'spline' cúbica natural para calcular esta aproximação.

5.3 Num certo campeonato regional de futebol há 7 equipas. No fim da temporada, o número de pontos ganhos e o número de golos sofridos por 6 das equipas estão representados na tabela

Equipa	F.C.Sol	F.C.Lá	S.C.Gato	Nova F.C.	Vila F.C.	F.C.Chão
Nº de pontos, x_i	10	12	18	27	30	34
Nº de golos, $f(x_i)$	20	18	15	9	12	10

a) Use uma 'spline' cúbica completa para descrever a relação entre o número de pontos e o número de golos sofridos pelas equipas no campeonato. Sabendo que a 7ª equipa terminou o campeonato com 29 pontos, estime o número de golos que terá sofrido.

b) Calcule uma estimativa do erro de truncatura cometido na alínea anterior.

5.4 Um braço de um robô deve passar nos instantes t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 por posições pré-definidas $\theta(t_0), \theta(t_1), \theta(t_2), \theta(t_3), \theta(t_4)$ e $\theta(t_5)$, onde $\theta(t)$ é o ângulo (em radianos) que o braço do robô faz com o eixo dos X's.

t_i	1	2	3	4	5	6
$\theta_i = \theta(t_i)$	1	1.25	1.75	2.25	3	3.15

a) Com base nos dados da tabela, aproxime a trajetória do robô por uma 'spline' cúbica completa. Indique também uma aproximação da posição do robô no instante $t = 1.5$.

b) Calcule uma aproximação à velocidade do robô no instante $t = 1.5$

c) Calcule um limite superior do erro de truncatura que se comete quando se usa a derivada da 'spline' calculada para aproximar a velocidade do robô.

5.5 Considere a função $f(x)$ definida por

x	-2	0	1	2
$f(x)$	-8	0	1	8

Sabendo que $s_3^{1}{}''(-2) = 12$ e $s_3^{n}{}''(2) = 20$ estime o valor de $f(-1)$ através de uma 'spline' cúbica.

5.6 A seguinte função segmentada $s_3(x)$ no intervalo $[0, 3]$, poderá representar uma spline cúbica? Justifique.

$$s_3(x) = \begin{cases} s_3^1(x) = 3\,x^3 - x^2 + x - 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ s_3^2(x) = 2\,x^3 + 2x - 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

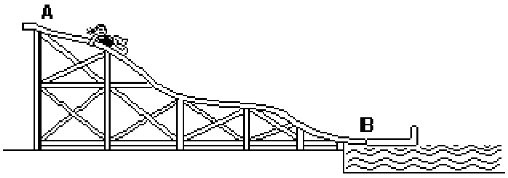
6 Integração numérica

6.1 Considere o erro de truncatura da fórmula do retângulo, baseada em a, de Newton-Cotes

$$e_R = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta), \quad \eta \in [a, b]$$

para aproximar o integral $\int_a^b f(x)dx$. Deduza a fórmula do erro de truncatura da correspondente fórmula composta.

6.2 A figura mostra uma pessoa que desliza, sem atrito, do alto de um escorrega (ponto A), acoplando-se a um carrinho que se encontra em repouso no ponto B. A partir deste instante, a pessoa e o carrinho movem-se juntos na água até parar.



a) Sabendo que a velocidade do conjunto pessoa-carrinho imediatamente após o acoplamento é 4 m/s e que a velocidade, v, em cada instante t na água é dada pela tabela seguinte, calcule (usando todos os pontos da tabela) a distância percorrida na água pelo conjunto pessoa-carrinho até parar.

t	0.0	0.3	0.6	0.8	1.0	1.2	1.8	2.4	3.0	3.6	4.2
v	4.0	3.9	3.7	3.5	3.3	2.9	2.5	2.0	1.25	0.75	0.0

b) Estime o erro de truncatura cometido na alínea anterior.

c) Selecione o maior número possível de pontos da tabela por forma a obter um conjunto de pontos igualmente espaçados, e calcule a mesma distância usando uma única fórmula composta de integração no intervalo $[0, 4.2]$.

6.3 A resposta de um transdutor a uma onda de choque causada por uma explosão é dada pela função $F(t) = 8e^{-t\frac{I(a)}{\pi}}$ para $t \geq a$, em que

$$I(a) = \int_1^2 f(x,a)dx \qquad \text{com } f(x,a) = \frac{e^{ax}}{x}.$$

Calcule $I(1)$ usando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura inferior a 0.05.

6.4 Uma corrida de *dragsters* tem duas fases distintas: na primeira fase, a mais curta, o movimento do carro é perfeitamente não determinístico, dependendo das derrapagens e da forma como o condutor consegue dominar o carro. Na segunda fase, o carro tem um movimento muito rápido, cuja aceleração está perfeitamente definida.

Considere-se a prova do condutor Don Nase de duração 7.5 s. Na primeira fase os valores da aceleração em cada instante encontram-se na tabela:

t_i	0	0.5	1	1.5
$a(t_i)$	0	0.35	0.55	0.9

Na segunda fase da corrida a aceleração é definida pela seguinte expressão:

$$a(t) = 0.5t^2 - 0.15t \quad \text{para} \quad t \in [1.5, 7.5].$$

a) Estime a velocidade na primeira fase da corrida, utilizando a fórmula de integração mais adequada.

b) Estime a velocidade na segunda fase da corrida, utilizando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura em valor absoluto inferior a 0.3.

c) Estime o erro de truncatura cometido na alínea a).

6.5 Considere a seguinte função dada pela tabela

x_i	1	1.15	1.3	1.45	1.6	1.75	1.9
$f(x_i)$	a	16.8	19.4	22	b	27.6	30.7

e seja $I = \int_1^{1.9} f(x)\,dx$. Ao utilizar as fórmulas compostas de Simpson e dos três oitavos foram obtidas as seguintes aproximações a I, respectivamente $S(0.15) = 20.005$ e $3/8(0.15) = 20.030625$. Determine os valores de a e b. Use 6 casas decimais nos cálculos.

6.6 Na tabela seguinte são apresentados registos pontuais das vendas de um produto que foi lançado no início do ano de 2009. A variável x representa a semana (de 2009).

x_i	1	2	3	4	5	7	9	11	13	15	16	17	18	19
$v(x_i)$	10	9	8	8	8	6	5	5	4	4	4	4	3	1

a) Calcule a melhor aproximação ao integral $\int_1^{19} v(x)dx$, com base em toda a informação fornecida na tabela sobre $v(x)$.

b) Estime o erro de truncatura cometido com a aproximação obtida na alínea anterior no intervalo $[5, 15]$.

c) Selecione o maior número possível de pontos da tabela para calcular uma aproximação ao integral da alínea a), usando só uma fórmula composta de integração no intervalo $[1, 19]$.

6.7 Considere a seguinte tabela da função $f(x)$

x_i	0.0	1.0	2.0
$f(x_i)$	0.0000	0.8415	0.9093

a) Determine um valor aproximado de $I = \int_0^2 f(x)dx$, usando a fórmula composta do trapézio com $h = 1$.

b) Sabendo que um valor aproximado de I, usando a fórmula composta do trapézio com $h = 0.5$ é $T(0.5) = 1.2667$, determine uma nova aproximação de I, usando a fórmula composta de Simpson com $h = 0.5$.

6.8 O valor de π pode ser calculado através do seguinte integral:

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx.$$

Estime o valor de π utilizando a fórmula composta do trapézio com erro de truncatura inferior a 0.01.

6.9 Determine uma aproximação ao valor do integral definido

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

através da fórmula de Simpson, com um erro de truncatura inferior a 0.0005 em valor absoluto.

6.10 Admita que, para ações de uma determinada empresa cotada na bolsa de Nova Iorque, o lucro anual por acção, depois de impostos, é representado por x (US \$), uma variável aleatória que tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{27}(9x - 6x^2 + x^3), & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{para outros valores de } x. \end{cases}$$

a) Calcule, numericamente, a probabilidade $PROB$ do lucro anual ser um valor menor do que 1 ou maior do que 2.5 ($PROB = P(x \leq 1) + P(x \geq 2.5)$).

Use a fórmula composta do trapézio para calcular essa probabilidade por forma a que o erro total de truncatura seja inferior a 0.02. Assuma que os erros das duas parcelas são iguais.

Nota: $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

b) Relativamente à primeira parcela para o cálculo de $PROB$, se tivesse usado a fórmula composta de Simpson com o mesmo valor de h que usou na alínea anterior, iria obter um erro menor, ou seja uma melhor aproximação ao valor de $P(x \leq 1)$? Justifique a resposta.

7 Aproximação dos mínimos quadrados

7.1 Um carro inicia a sua marcha num dia frio de inverno e um aparelho mede o consumo de gasolina verificado no instante em que percorreu x Km. Os resultados obtidos foram:

x (Km)	0	1.25	2.5	3.75	5	6.25
$f(x)$ (l Km^{-1})	0.260	0.208	0.172	0.145	0.126	0.113

Construa um modelo quadrático, para descrever o consumo de gasolina em função da distância percorrida, usando a técnica dos mínimos quadrados.

7.2 A tabela seguinte contém os registos efetuados dos valores médios da radiação solar numa região de Portugal:

mês (x_i)	J(1)	F(2)	M(3)	A(4)	M(5)	J(6)	J(7)	A(8)	S(9)	O(10)	N(11)	D(12)
Radiação	122	-	188	-	-	270	-	-	-	160	-	120

Ajuste o modelo

$$M(x) = c_1 x + c_2 \text{sen}(x)$$

aos valores da tabela, no sentido dos mínimos quadrados, e use o modelo encontrado para prever a radiação média no mês de Agosto.

7.3 A resistência de um certo fio (de uma certa substância), $f(x)$, varia com o diâmetro desse fio, x. A partir de uma experiência registaram-se os seguintes valores:

x_j	1.5	2.0	3.0	4.0
f_j	4.9	3.3	2.0	1.5

Foram sugeridos os seguintes modelos para ajustar os valores de $f(x)$, no sentido dos mínimos quadrados:

i uma reta

ii o modelo linear $M(x, c_1, c_2) = \dfrac{c_1}{x} + c_2 x$

a) Calcule a reta.

b) Calcule o modelo $M(x)$.

c) Qual dos modelos escolheria? Justifique a sua resposta.

7.4 Um sistema simples de comunicações pode ser representado por um transmissor e um recetor. O transmissor recebe um símbolo, m, e modula o sinal a transmitir, $s_m(t)$, num canal com ruído. O recetor recebe o sinal modulado com o ruído adicionado, $y(t)$, e prevê qual foi o símbolo transmitido. Neste sistema simples, suponha que o transmissor apenas transmite dois sinais

$$s_1(t) = 0.2\alpha_1 \sin(20\pi t) + 0.2\beta_1 \sin(22\pi t)$$

$$s_2(t) = 0.2\alpha_2 \sin(20\pi t) + 0.2\beta_2 \cos(20\pi t)$$

a) Transmitindo o primeiro sinal ($s_1(t)$) e fazendo uma análise ao transmissor, observaram-se os seguintes valores:

t_i	0.11	0.52	0.79
s_{1i}	-3.1127	0.0625	3.0351

Determine os valores de α_1 e β_1, no sentido dos mínimos quadrados.

b) Suponha que $\alpha_1 = -10$, $\beta_1 = -10$, $\alpha_2 = 10$ e $\beta_2 = 10$. Sabendo que o recetor recebeu o sinal indicado na tabela seguinte, determine qual foi o sinal transmitido (isto é, aquele que se ajusta melhor ao sinal recebido, no sentido dos mínimos quadrados).

t_i	0.1	0.45	0.63
$y(t_i)$	1.9963	−2.0100	1.2742

7.5 Uma companhia de gás sugeriu um modelo do tipo

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 x^2 + c_2 \frac{1}{x}$$

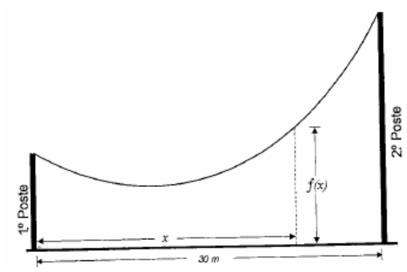
para estimar o consumo de gás em qualquer altura do ano. No sentido dos mínimos quadrados e considerando a amostra de 6 pontos,

mês	1	3	4	6	9	12
consumo de gás	20.0	7.5	6.5	7.0	10.0	A

a) comece por apresentar o sistema de equações lineares que deve construir para calcular os parâmetros c_1 e c_2, em função de A.

b) Considerando $A = 15.0$, apresente o modelo sugerido.

7.6 Um fio está suspenso entre dois postes. A distância entre os postes é de 30 metros. A distância do fio ao solo $f(x)$, em metros, depende de x como mostra a figura. A tabela mostra 5 valores conhecidos de f.



x_i	0	8	12	16	20
$f(x_i)$	15.43	10.2	10.2	11.86	15.43

a) Calcule a parábola que melhor se ajusta aos valores de $f(x_i)$ no sentido dos mínimos quadrados e determine a distância do fio ao solo quando $x = 10$.

b) A partir da parábola da alínea anterior, verifique se $x = 10$ é o ponto em que a distância do fio ao solo é mínima.

c) Determine os coeficientes c_1 e c_2 do modelo

$$M(x; c_1, c_2) = c_1 e^{1-0.1x} + c_2 e^{0.1x-1}$$

que melhor se ajusta à função $f(x)$ de acordo com

$$\min_{c_1,c_2} \sum_{i=1}^{5} (f(x_i) - M(x_i; c_1, c_2))^2.$$

7.7 Pretende-se ajustar o modelo linear

$$M(x; c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{-x} + c_2 x + c_3$$

à função $f(x)$ dada pela tabela

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1.4	0	0.75	2.3

no sentido dos mínimos quadrados. Determine os coeficientes do modelo apresentado. Apresente uma estimativa para $f(0.5)$.

7.8 Considere as seguintes observações relativas à função f

x_i	-3	0	2	5
f_i	-10	a	0	b

Determine a e b sabendo que a aproximação polinomial de grau 1 dos mínimos quadrados é $p_1(x) = -4 + 2x$.

8 Otimização não linear unidimensional - método de DSC

8.1 Dada a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ calcule os seus pontos estacionários e classifique-os.

8.2 Na cidade de Ulam Bator surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi descrita pela fórmula

$$P(t) = e^{0.4t - 0.01t^2}$$

onde $P(t)$ representa a percentagem de pessoas doentes e t é o tempo em dias.

Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule o pior momento da epidemia identificando a percentagem de doentes nesse momento. Inicie o processo iterativo com $t_1 = 30$ dias. Considere ainda $\delta = 2$, $M = 0.05$ e $\varepsilon = 0.1$ (duas iterações). Use 4 casas decimais nos cálculos.

8.3 Uma empresa precisa de usar x_1 horas de equipamento ao preço (unitário) de 6 unidades monetárias (u.m.) e x_2 horas de mão-de-obra ao preço (unitário) de 4 u.m. para colocar no mercado um certo número fixo de produtos. As horas utilizadas de equipamento e mão-de-obra verificam a relação

$$x_1^2 + x_1 x_2 = 2500.$$

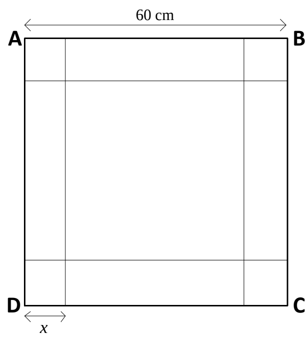
Calcule x_1 e x_2 de modo a minimizar os custos da empresa.

a) Comece por formular esta situação como um problema de otimização sem restrições de uma só variável (por exemplo, em função de x_1).

b) Resolva o problema resultante usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática). Na implementação do DSC inicie o processo iterativo com a aproximação inicial $x_1 = 50$. Use $\delta = 5$, $\varepsilon = 0.05$ e $M = 0.1$.

   Com a aproximação calculada identifique os valores obtidos para as duas variáveis e o custo mínimo.

8.4 $[ABCD]$ representa uma cartolina quadrada de lado 60 cm. Pretende-se montar uma caixa de volume máximo cortando em cada canto um quadrado de lado x, como mostra a figura.

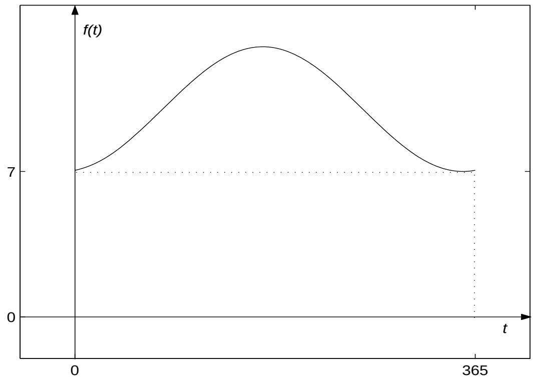


Usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática), calcule x. Use duas casas decimais nos cálculos e inicie o processo iterativo com $x_1 = 5$. Considere ainda $\delta = 1$, $M = 0.5$ e $\varepsilon = 0.5$ (duas iterações).

8.5 A função

$$f(t) = 10 + 3\ \sin(\frac{2\pi}{365}(t - 80))$$

dá o número de horas com luz do dia numa certa região do país.



O dia 1 de Janeiro corresponde a $t = 0$. Determine o dia do ano (t) em que o número de horas com luz do dia é máximo, usando o método DSC (baseado em interpolação quadrática). Use 2 casas decimais nos cálculos, $\pi = 3.14$ e inicie o processo iterativo com $t_1 = 200$. Considere ainda $\delta = 10$, $M = 0.1$ e $\varepsilon = 2$ (duas iterações). Use radianos nos cálculos.

9 Condições de otimalidade

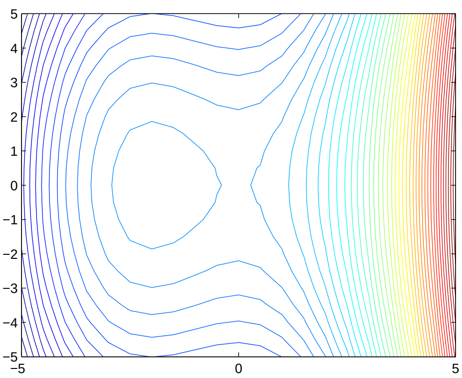
9.1 Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1^2(1 - x_1)^2 + x_1 x_2$$

verifique se tem maximizantes, minimizantes e/ou pontos sela.

9.2 Considere a função

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$$



Mostre que a função dada tem um máximo local em $(-2, 0)$; tem um ponto sela em $(0, 0)$; e não tem mínimos.

9.3 Dada a função $f : R^3 \to R$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^4 - 32x_3 + 6x_1x_2 + 5x_2$$

verifique que ela tem apenas um ponto estacionário. Classifique-o.

10 Métodos do gradiente

10.1 Considere a função

$$f(x_1, x_2) = -\sin(x_1 - 1) - x_2^4.$$

Implemente, no máximo, duas iterações do método de segurança de Newton para determinar o máximo da função $f(x_1, x_2)$. Considere $\eta = 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$, $\varepsilon = 1$ e $x^{(1)} = (1, 1)^T$.

10.2 A soma de três números (x_1, x_2 e x_3) positivos é igual a 40. Determine esses números de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima.

Use a relação da soma para colocar x_3 em função das outras 2 variáveis. Formule o problema como um problema de optimização sem restrições.

A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (10, 10)$, use o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$) para calcular esses números, considerando no critério de paragem os seguintes valores $\varepsilon = 0.001$ (duas iterações). Na condição de Armijo tome $\mu = 0.001$.

10.3 Uma empresa fabrica e comercializa dois tipos de computadores portáteis. O custo de fabrico de cada um deles decresce à medida que o número de unidades produzidas aumenta e é dado pelas seguintes relações empíricas:

$$c_1 = 5 + \frac{1500}{x_1} \qquad c_2 = 7 + \frac{2500}{x_2},$$

em que x_1 e x_2 são o número de unidades de cada um dos portáteis produzidos. O custo de reparação e manutenção do equipamento usado para a produção depende do número total de portáteis produzidos e é dado pela seguinte equação:

$$r = (x_1 + x_2)[0.2 + 2.3 \times 10^{-5}(x_1 + x_2) + 5.3 \times 10^{-9}(x_1 + x_2)^2].$$

O preço de venda dos computadores é tanto menor quanto maior for o número de unidades produzidas, de acordo com as seguintes relações:

$$p_1 = 15 - 0.001x_1 \qquad p_2 = 25 - 0.0015x_2$$

a) Formule o problema de optimização que consiste em determinar quantas unidades de cada computador a firma deve produzir de modo a maximizar os lucros.

b) Desprezando os custos de reparação e manutenção ($r = 0$), resolva o problema usando o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$). Considere a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (20, 30)$ e $\varepsilon = 0.001$. Na condição de Armijo tome $\mu = 0.001$.

c) Com base na aproximação calculada na alínea anterior ao número de computadores produzidos, a empresa terá lucro?

10.4 Três estações eléctricas vão fornecer vão fornecer a uma certa região da forma mais económica possível. Os custos individuais de operação de cada uma das estações são dados por

$$f_1 = 0.1 + 0.25x$$

$$f_2 = 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2$$

$$f_3 = 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3$$

em que x, y e z são as energias fornecidas pelas três estações (em MWatt). Determine os valores de x, y e z que minimizam o custo total a ser fornecida for de 100 MWatt, recorrendo ao método de segurança de Newton.

Como valores iniciais use $(x, y)^{(1)} = (30, 50)$, no critério de paragem considere $\varepsilon = 0.05$ e tome $\eta = 0.0001$. Como estratégia de procura unidimensional utilize o critério de Armijo com $\mu = 0.01$. Use a relação relacionada com a energia a fornecer para eliminar uma das variáveis, por exemplo, $x = 100 - y - z$.

10.5 Numa situação monopolista, o rendimento de uma empresa face à venda de um produto ou serviço depende do nível de produção z. O rendimento é uma função crescente de z mas tende em direcção a uma assímptota assim que o mercado fica saturado.

Considere a seguinte função rendimento

$$R(z) = z^2/(1+z^2)$$

que depende da produção z dada por $z = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, em que x_1 representa o capital e x_2 o trabalho.

Supondo que a função lucro é dada por

$$\pi(x_1, x_2) = R(z) - 0.04x_1 - 0.06x_2$$

calcule o lucro máximo que a empresa pode ter. Use o método quasi-Newton (com fórmula BFGS). Como aproximação inicial considere o ponto $(2, 1)$. Use na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.1$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

10.6 Suponha que pretendia representar um número A positivo na forma de um produto de quatro factores positivos x_1, x_2, x_3 e x_4. Para $A = 2401$, determine esses factores de tal forma que a sua soma seja a menor possível.

Formule o problema como um problema de optimização sem restrições em função das 3 variáveis x_1, x_2 e x_3.

A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2, x_3)^{(1)} = (6, 7, 5)$, use o método quasi-Newton (com fórmula DFP), para calcular esses factores. Na paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.1$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

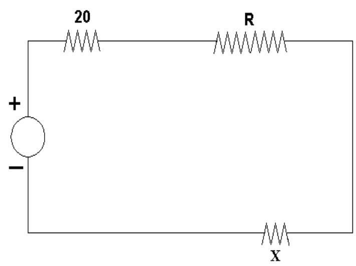
10.7 O lucro, em milhares de euros, da colocação de um sistema eléctrico é dado por

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$$

em que x_1 e x_2 designam, respectivamente, o custo da mão de obra e do material. Calcule o lucro máximo usando o método quasi-Newton baseado na fórmula DFP, considerando na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.0001$. Tome a seguinte aproximação inicial $(0, 0)$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

10.8 Considere um circuito eléctrico em que existem duas resistências variáveis, R e X. O valor médio da energia do circuito é dado por

$$P = \frac{10^4 R}{(R+20)^2 + X^2}.$$



Determine os valores de R e X para os quais se obtém uma energia de saída máxima. Use o método quasi-Newton (fórmula DFP) e os valores iniciais $(R,X)^{(1)} = (10,5)$. Considere $\mu = 0.001$ e $\varepsilon = 0.5$.

11 Método de Nelder-Mead

11.1 Considere um sistema de duas molas em que é aplicada uma força de deformação P com duas componentes P_1 e P_2. Pretende-se determinar os deslocamentos x_1 e x_2 das molas que minimizam a energia potencial total EP, definida pela seguinte expressão:

$$EP(x_1,x_2) = \frac{1}{2}K_1\left(\sqrt{x_1^2+(l_1-x_2)^2}-l_1\right)^2+\frac{1}{2}K_2\left(\sqrt{x_1^2+(l_2+x_2)^2}-l_2\right)^2-P_1x_1-P_2x_2.$$

Sabendo que as características do sistema são: $l_1 = 10$, $l_2 = 10$, $K_1 = 8$, $K_2 = 1$, $P_1 = 5$ e $P_2 = 5$, resolva o problema através do método de Nelder-Mead com $\varepsilon = 0.5$ (ou duas iterações). Considere os seguintes pontos iniciais: $(5,2)$, $(3.25,2.5)$ e $(0,0)$.

11.2 Calcule o mínimo da função $f(x)$ definida por

$$f(x_1,x_2) = \max\left((x_1-1)^2, x_1^2+4(x_2-1)^2\right)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vetores

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle.$$

e $\varepsilon = 0.5$.

11.3 Calcule o mínimo da função $f(x)$ definida por

$$f(x_1,x_2) = \max\left(|x_1|, |x_2-1|\right)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vetores

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.5\\0\end{pmatrix} \right\rangle.$$

e $\varepsilon = 0.5$.

11.4 Calcule o máximo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = -|x_1 x_2| - x_2^2$$

usando o método de Nelder-Mead. Inicie o processo iterativo com o seguinte simplex:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.5$ ou $n_{\max} = 4$.