3 Circunferência orientada e circunferência trigonométrica

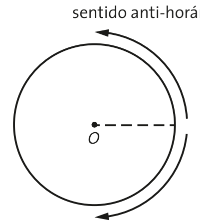
Como já estudamos, as medidas de arcos e ângulos variam de 0° ou 0 rad (arco nulo) até 360° ou 2π rad (arco de uma volta); portanto, não fazia sentido falar em, por exemplo, um arco de 720° ou um ângulo de 720°.

Porém, estudos realizados em Mecânica, com os movimentos periódicos (como o movimento de um pêndulo ou o movimento de uma mola pulsando), mostraram que era necessária uma ampliação da noção de seno, de cosseno e de tangente de um ângulo para ângulos maiores que 360° e para ângulos negativos.

Circunferência orientada

A cada número real associamos um percurso em uma circunferência. No caso de uma circunferência de raio igual a 1, a medida desse percurso é o mesmo número real escolhido.

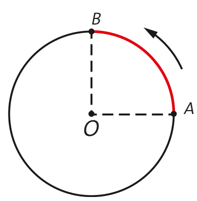
Se o número real for positivo, o percurso será feito no sentido anti-horário e, se o número real for negativo, o percurso será feito no sentido horário.



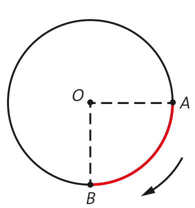
Fique atento!

- Como vimos nas páginas 24 e 25, o comprimento de um arco de circunferência (ℓ) depende do raio da circunferência (r), mas a medida angular (α) não. Sabendo que $\ell = \alpha \cdot r$, quando $r = 1 \Rightarrow \ell = \alpha$.
- Para a medida angular α usam-se geralmente unidades como o "grau" e o "radiano".

Vejamos alguns exemplos:



a) O número real dado é $\frac{\pi}{2}$. A esse número associamos o percurso no sentido anti-horário representado, em uma circunferência de raio igual a 1, pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ de comprimento $\frac{\pi}{2}$.



b) O número real dado é $-\frac{\pi}{2}$. A esse número associamos o percurso no sentido horário representado, em uma circunferência de raio igual a 1, pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ de comprimento $\frac{\pi}{2}$.

Agora, podemos apresentar a seguinte definição:

Circunferência orientada é toda circunferência na qual convencionamos como positivo um dos sentidos do percurso (horário ou anti-horário).

Neste livro, convencionamos como positivo o sentido anti-horário.

Exercício

7. No caderno, esboce o desenho para representar, em uma circunferência de raio igual a 2, os arcos de comprimentos iguais a:

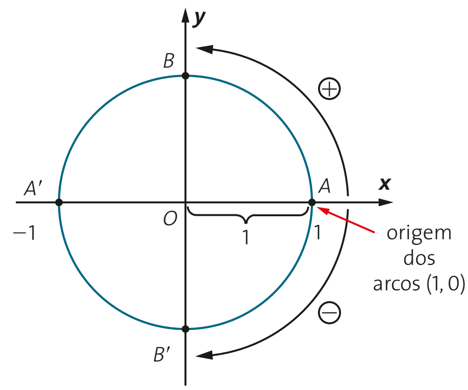
a) π　　b) 2π　　c) $-\frac{3\pi}{2}$　　d) $\frac{\pi}{4}$

Veja a resolução deste exercício no Manual do Professor.

Circunferência trigonométrica

Denomina-se **circunferência trigonométrica** a circunferência orientada, de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cujo raio tem 1 unidade de comprimento e na qual o sentido positivo é o anti-horário.

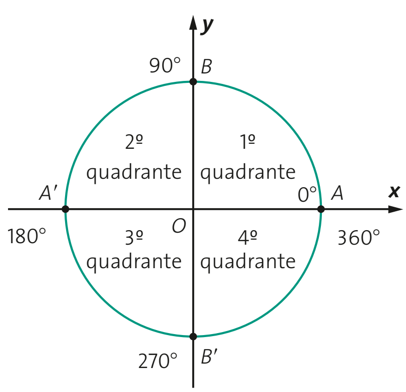
À circunferência trigonométrica de centro O vamos associar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, fixando o ponto A de coordenadas (1, 0) como origem dos arcos (conforme figura abaixo).

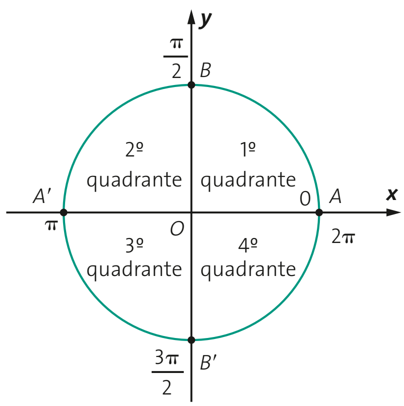


Para refletir
Os pontos B, A' e B' correspondem a quais pares ordenados?

$B(0, 1)$; $A'(-1, 0)$ e $B'(0, -1)$

Os eixos x e y dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes congruentes chamadas **quadrantes**, numeradas de 1 a 4 e contadas a partir de A, no sentido positivo.





Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observações:

1ª) Os pontos A, B, A' e B' são pontos dos eixos e por isso não são considerados pontos dos quadrantes.

2ª) Para todo ponto (x, y) pertencente à circunferência trigonométrica, temos $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

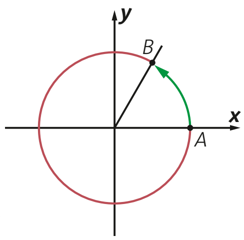
3ª) Analisando os arcos que medem de 0° a 360° (ou de 0 a 2π rad), podemos afirmar, por exemplo, que:

- são do primeiro quadrante os arcos de medidas $30° = \frac{\pi}{6}$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $60° = \frac{\pi}{3}$ e todos os de medida entre 0° e 90° $\left(\text{ou } 0 \text{ e } \frac{\pi}{2}\right)$;
- são do segundo quadrante os arcos de medidas $120° = \frac{2\pi}{3}$, $150° = \frac{5\pi}{6}$ e todos os de medida entre 90° e 180° $\left(\text{ou } \frac{\pi}{2} \text{ e } \pi\right)$;
- são do terceiro quadrante os arcos de medidas $210° = \frac{7\pi}{6}$, $240° = \frac{4\pi}{3}$ e todos os de medida entre 180° e 270° $\left(\text{ou } \pi \text{ e } \frac{3\pi}{2}\right)$;
- são do quarto quadrante os arcos de medidas $300° = \frac{5\pi}{3}$, $320° = \frac{16\pi}{9}$ e todos os de medida entre 270° e 360° $\left(\text{ou } \frac{3\pi}{2} \text{ e } 2\pi\right)$.

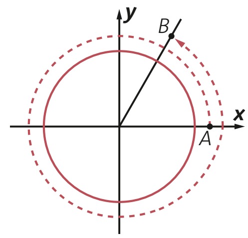
4 Arcos côngruos (ou congruentes)

Toda vez que o ponto da circunferência, final do arco iniciado em (1, 0), é o mesmo para dois arcos diferentes (por exemplo, 0 e 2π), chamamos esses arcos de **arcos côngruos** ou **congruentes**. É conveniente notar que todos os arcos côngruos diferem entre si de um múltiplo de 2π, que é o comprimento de cada volta.

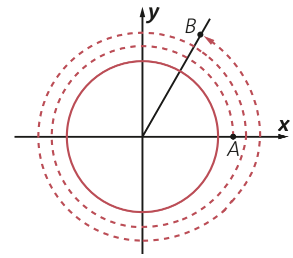
Ilustrações técnicas: Banco de Imagens/ Arquivo da editora



Ao número $\frac{\pi}{3}$ está associado o ponto *B*.



Ao número $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ também está associado o ponto *B*.



Ao número $\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$ está associado o mesmo ponto *B*.

Fique atento!
Observe que na circunferência trigonométrica há vários números reais associados à mesma extremidade de arco.

Imaginando o ponto como um móvel que se desloca sobre a circunferência no sentido anti-horário, teríamos o seguinte:

- na primeira figura, o ponto deslocou-se $\frac{\pi}{3}$ ou 60° de *A* até *B*;
- na segunda figura, o ponto deslocou-se uma volta inteira (2π ou 360°) e mais $\frac{\pi}{3}$ ou 60°, ou seja, deslocou-se $\frac{7\pi}{3}$ ou 420°;
- na terceira figura, o ponto deslocou-se duas voltas inteiras ($2 \cdot 2\pi$ ou $2 \cdot 360°$) e mais $\frac{\pi}{3}$ ou 60°, ou seja, $\frac{13\pi}{3}$ ou 780°.

Supondo que o ponto se deslocasse *k* voltas inteiras, o número associado à extremidade *B* do arco *AB* seria escrito assim:

$$\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } 60° + k \cdot 360°\text{, com } k \in \mathbb{Z}$$

Questione os alunos sobre o que acontece quando *k* é negativo. A circunferência é percorrida no sentido horário.

Podemos então definir:

Dois arcos são côngruos ou congruentes quando suas medidas diferem de um múltiplo de 2π rad ou 360°.

Exemplos de arcos côngruos:

a) 30° e 30° + 360° $\left(\text{ou } \frac{\pi}{6} \text{ e } \frac{\pi}{6} + 2\pi\right)$

b) 45° e 45° + 2 · 360° $\left(\text{ou } \frac{\pi}{4} \text{ e } \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi\right)$

c) 60° e 60° − 3 · 360° $\left(\text{ou } \frac{\pi}{3} \text{ e } \frac{\pi}{3} - 3 \cdot 2\pi\right)$

No último exemplo, o sinal negativo significa que as três voltas completas foram dadas no sentido horário. Dizemos, nesse caso, que $60° - 3 \cdot 360° = -1020°$ ou $-\frac{17\pi}{3}$ são arcos negativos.

Para refletir
Com relação ao exemplo **a**, podemos afirmar que são côngruos: 30° e 390° ou $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{13\pi}{6}$.
E com relação ao exemplo **b**?

45° e 765° ou $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{17\pi}{4}$.

Fique atento!
De modo geral:
- se um arco mede $\alpha°$, os arcos côngruos a ele podem ser dados pela expressão $\alpha° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.
- se um arco mede *x* radianos, os arcos côngruos a ele podem ser dados pela expressão $x + k \cdot 2\pi$ ou $x + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
- como a cada ponto da circunferência podem estar associados infinitos arcos côngruos, dizemos que o arco da 1ª volta positiva (entre 0 e 2π ou entre 0° e 360°), associado a um ponto da circunferência, é a primeira determinação positiva de qualquer arco côngruo associado ao mesmo ponto.

Exercícios resolvidos

2. Escreva a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos de:

a) $45°$; b) $\frac{3\pi}{4}$ rad.

Resolução:

a) expressão geral: $\alpha + k \cdot 360°$

$\alpha = 45°$

$45° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) expressão geral: $x + 2k\pi$

$x = \frac{3\pi}{4}$ rad

$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

3. Qual é o menor arco não negativo côngruo ao arco de 1320°, ou seja, qual é a 1ª determinação positiva do arco de 1320°?

Resolução:

Devemos obter o menor valor não negativo de α tal que $\alpha + k \cdot 360° = 1320°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Então:

$$\begin{array}{r|l} 1320 & 360 \\ \hline 240 & 3 \end{array} \longrightarrow 1320° = 240° + 360° \cdot 3$$

$240 \to \alpha$, $3 \to k$

Logo, o arco pedido mede 240°.

Para refletir

Qual é o significado de um **número não negativo**?

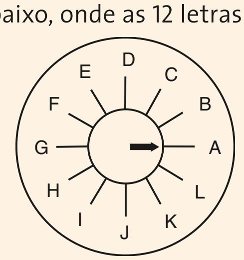
Um número positivo ou zero.

Fique atento!

Neste exercício dizemos que 240° é a 1ª determinação positiva de 1320° ou que 1320° foi reduzido à 1ª volta.

Resolvido passo a passo

4. (Unifor-CE) O dispositivo de segurança de um cofre tem o formato da figura abaixo, onde as 12 letras **A**, **B**, ..., **L** estão igualmente espaçadas (o ângulo central entre duas letras vizinhas é o mesmo) e a posição inicial da seta, quando o cofre se encontra fechado, é a indicada.



Banco de Imagens/Arquivo da editora

Para abrir o cofre, são necessárias três operações (o segredo), girando o disco menor (onde a seta está gravada), de acordo com as seguintes instruções, a partir da posição indicada:

1) $\frac{2}{3}\pi$ no sentido anti-horário.

2) $\frac{3}{2}\pi$ no sentido horário.

3) $\frac{3}{4}\pi$ no sentido anti-horário.

Pode-se, então, afirmar corretamente que o cofre será aberto quando a seta estiver:

a) no ponto médio entre **L** e **A**.

b) na posição **B**.

c) na posição **K**.

d) em algum ponto entre **J** e **K**.

e) na posição **H**.

1. Lendo e compreendendo

a) O que é dado no problema?

São dadas as informações sobre o funcionamento do dispositivo de segurança e as instruções/operações para abrir o cofre.

b) O que se pede?

Pede-se a posição da seta no momento em que se abre o cofre.

2. Planejando a solução

Conhecemos as operações a serem realizadas com o disco menor e o sentido a ser tomado (horário ou anti-horário), então podemos adicionar os valores das operações de sentido anti-horário e subtrair o resultado do valor da operação de sentido horário. E assim identificar a posição em que a seta deve ficar. Nesse caso, estamos considerando o sentido horário como positivo.

3. Executando o que foi planejado

Sentido anti-horário: $\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{17\pi}{12}$

Sentido horário: $\frac{3\pi}{2}$

Ângulos girados: $\frac{3\pi}{2} - \frac{17\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

Assim, ao final do movimento, a seta estará na posição $\frac{\pi}{12}$ rad $= 15°$ no sentido horário, a partir de **A**, ou seja, no ponto médio entre **A** e **L**.

4. Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **a**.

5. Ampliando o problema

a) Certo casal comprou um dispositivo de segurança idêntico ao citado na questão e determinou que o segredo seria composto das letras iniciais do nome dela, dele e do filho, que são, respectivamente, **L**, **H** e **L**. Sendo assim, quais operações serão necessárias para abrir o cofre? (Sabe-se que a seta parte de **A**.)

Girar 30° no sentido horário, girar mais 120° no sentido horário e, por fim, 120° no sentido anti-horário.

b) *Desafio em equipe*

Montem equipes encarregadas de criar segredos em um dispositivo similar ao da questão, seguindo os mesmos modelos de instruções. Depois de criarem os segredos, troquem os projetos entre si e se desafiem a conseguir abrir o cofre mais rapidamente. O que o fizer no menor tempo será o vencedor.

8. Escreva no caderno a expressão geral dos arcos congruentes a:

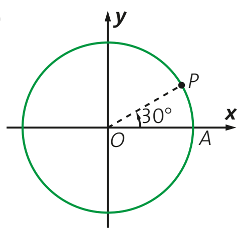
a) $60°$ $60° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) $120°$ $120° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$

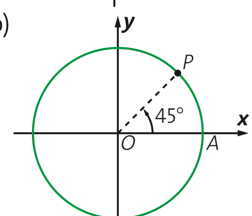
c) $\frac{5\pi}{4}$ rad $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{11\pi}{6}$ rad $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

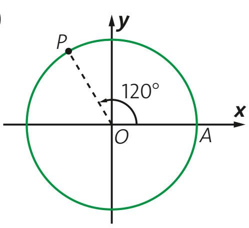
9. Dê a expressão geral, em radianos, dos arcos de extremidades nos pontos indicados, considerando a origem em A:

a)


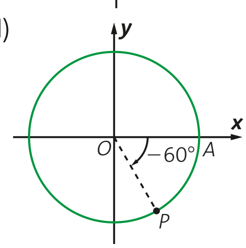
$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

b)


$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

c)


$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d)


$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

10. Encontrem a 1ª determinação, ou seja, o menor valor não negativo côngruo ao arco de:

a) $780°$ $60°$

b) $1140°$ $60°$

c) $-400°$ $320°$

d) $\frac{15\pi}{2}$ rad $\frac{3\pi}{2}$ rad

e) $\frac{10\pi}{3}$ rad $\frac{4\pi}{3}$ rad

f) $\frac{9\pi}{2}$ rad $\frac{\pi}{2}$ rad

11. Respondam no caderno:

a) Convertendo $\frac{7\pi}{4}$ rad em graus, quanto obtemos? $315°$

b) Qual é o comprimento de um arco correspondente a um ângulo central de $60°$ contido em uma circunferência de raio $r = 1{,}5$ cm? $\frac{\pi}{2}$ cm

c) Quanto mede o menor arco não negativo côngruo de $2\,650°$? $130°$

d) Qual é a expressão geral dos arcos côngruos de $\frac{14\pi}{3}$? $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

12. (PUC-MG) Ao projetar prédios muito altos, os engenheiros devem ter em mente o movimento de oscilação, que é típico de estruturas de arranha-céus. Se o ponto mais alto de um edifício de 400 m descreve um arco de $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$, a medida do arco descrito por esse ponto, em metros, é:

a) π.

b) $\frac{3\pi}{4}$.

c) $\frac{4\pi}{3}$.

x d) $\frac{10\pi}{9}$.

e) $\frac{11\pi}{10}$.

13. *História*

Em 1792, durante a Revolução Francesa, houve na França uma reforma de pesos e medidas que culminou na adoção de uma nova unidade de medida de ângulos. Essa unidade dividia o ângulo reto em 100 partes iguais, chamadas **grados**. Um grado (1 gr) é, então, a unidade que divide o ângulo reto em 100 partes iguais, e o minuto divide o grado em 100 partes, bem como o segundo divide o minuto também em 100 partes. Tudo isso para que a unidade de medição de ângulos ficasse em conformidade com o sistema métrico decimal. A ideia não foi muito bem-sucedida, mas até hoje encontramos na maioria das calculadoras científicas as três unidades: grau, radiano e grado.

Com base no texto acima, respondam no caderno:

a) A quantos grados equivale meia volta de circunferência? E uma volta inteira? 200 grados; 400 grados

b) Em qual quadrante termina o arco trigonométrico de 250 gr? No 3º quadrante.

c) A quantos grados equivale 1 rad? $\frac{200}{\pi}$ grados

d) A quantos graus equivale 1 gr? $0{,}9°$