SLCO4A - Aula Prática 9

Sumário

Propriedades da série de Fourier

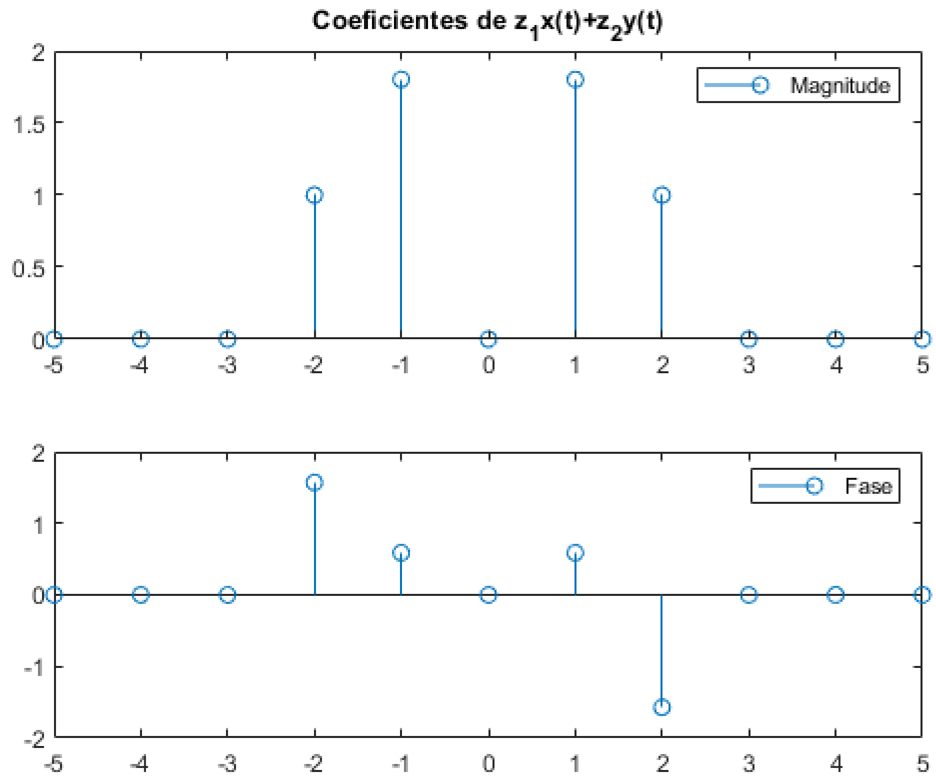
Linearidade

Suponha que os coeficientes da série de Fourier exponencial complexa dos sinais periódicos $x(t)$ e $y(t)$ sejam denotados por a_k e b_k, respectivamente. Além disto z_1 e z_2 denotam dois números complexos. Então,

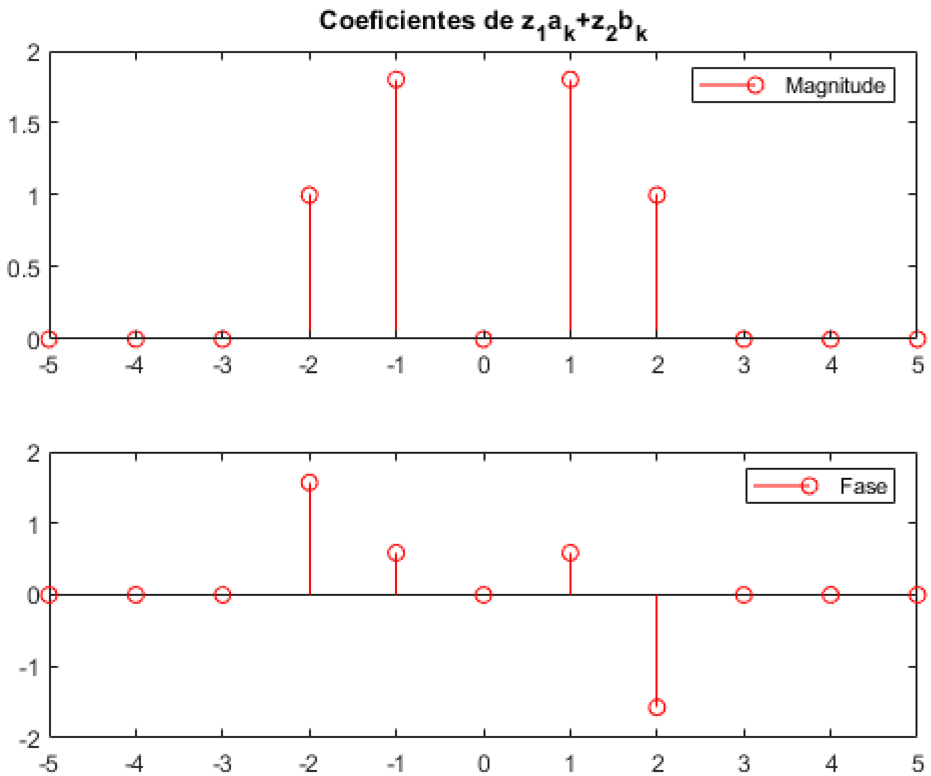
$$z_1 x(t) + z_2 y(t) \leftrightarrow z_1 a_k + z_2 b_k$$

Exercício 1: Considere os sinais periódicos $x(t) = \cos(t)$ e $y(t) = \mathrm{sen}(2t)$ e os escalares $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 2$. Considere 11 termos para o cômputo da série de Fourier.

```
% Prop. Serie Fourier
%Linearidade
%Cálculo z_1x(t)+z_2y(t)
t0=0;
T=2*pi;
w=2*pi/T;
syms t
z1=3+2i; z2=2;
x=cos(t); y=sin(2*t);
f=z1*x+z2*y;
k=-5:5;
left=(1/T)*int(f*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
left=eval(left);
figure
subplot(211);
stem(k,abs(left));
legend('Magnitude');
title('Coeficientes de z_1x(t)+z_2y(t)');
subplot(212);
stem(k,angle(left));
legend('Fase');
```




```
%z_1*ak+z_2*bk
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
b=(1/T)*int(y*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
right=z1*a+z2*b;
figure
subplot(211);
right=eval(right);
stem(k,abs(right),'r');
legend('Magnitude');
title('Coeficientes de z_1a_k+z_2b_k');
subplot(212);
stem(k,angle(right),'r');
legend('Fase');
```



Deslocamento temporal

Um deslocamento temporal de um sinal periódico resulta em uma mudança de fase dos coeficientes da série de Fourier. Então se $x(t) \leftrightarrow a_k$, a relação de deslocamento temporal resulta em

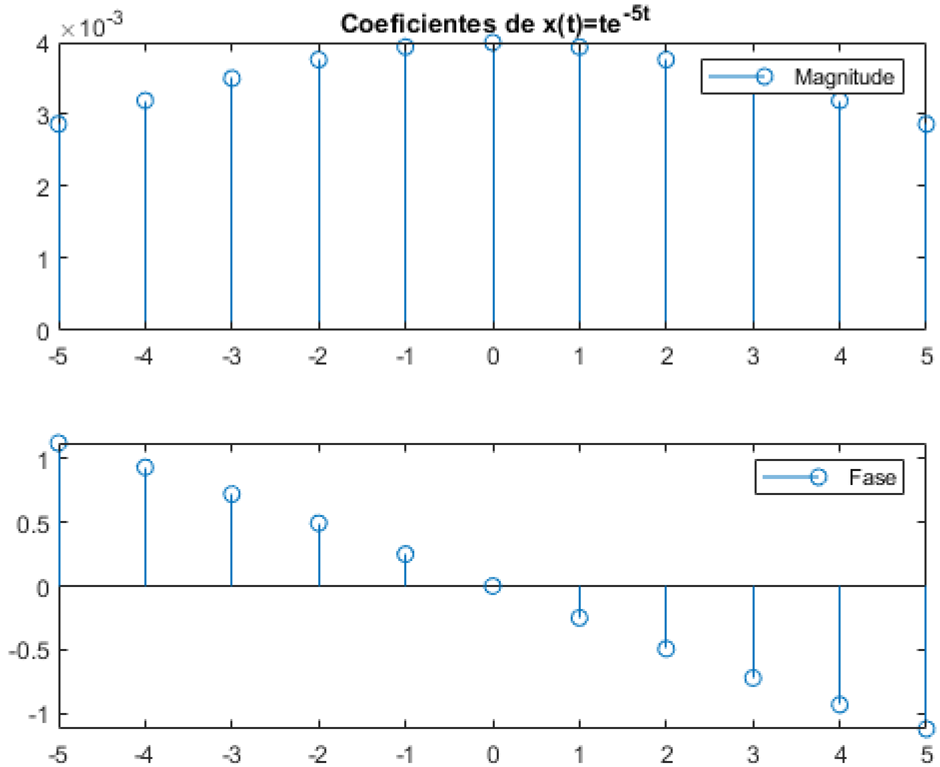
$$x(t-t_1) \leftrightarrow e^{-\mathrm{jk}\omega_0 t_1} a_k$$

Exercício 2: Considere o sinal periódico $x(t) = \mathrm{t}e^{-5t}$, $0 \leq t \leq 10$. Além disto, considere $t_1 = 3$.

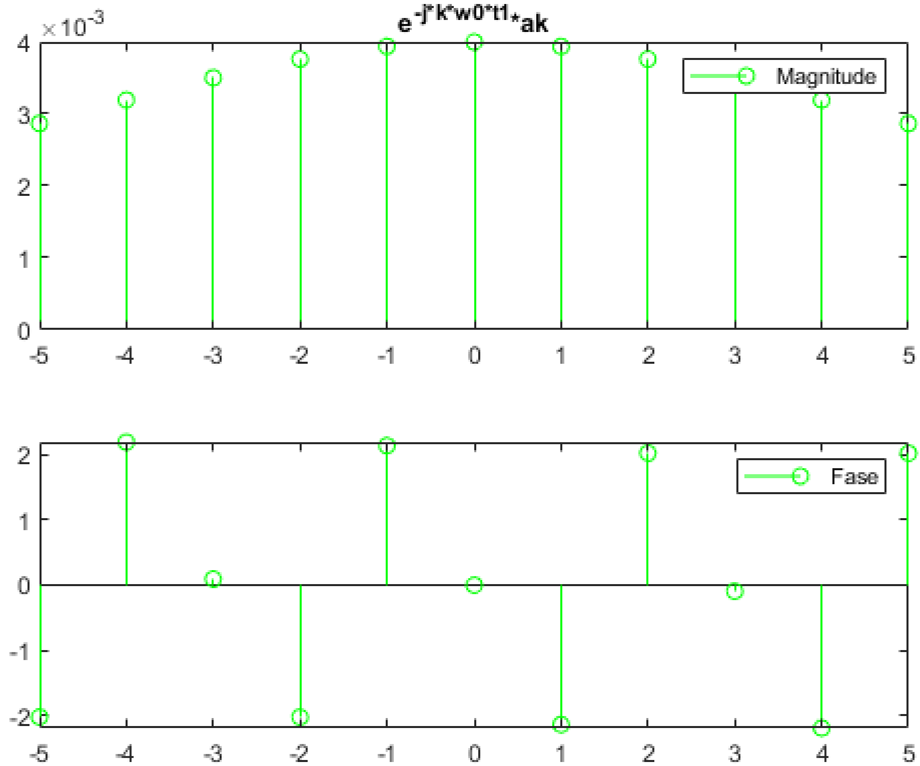
Consequentemente, o sinal $x(t-t_1)$é dado por $x(t-t_1) = x(t-3) = (t-3)e^{-5(t-3)}$. Considere 11 termos para o cômputo da série de Fourier.

```
%deslocamento temporal

t0=0;
T=10;
w=2*pi/T;
syms t
x=t*exp(-5*t);
k=-5:5;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
a1=eval(a);
figure
subplot(211);
```

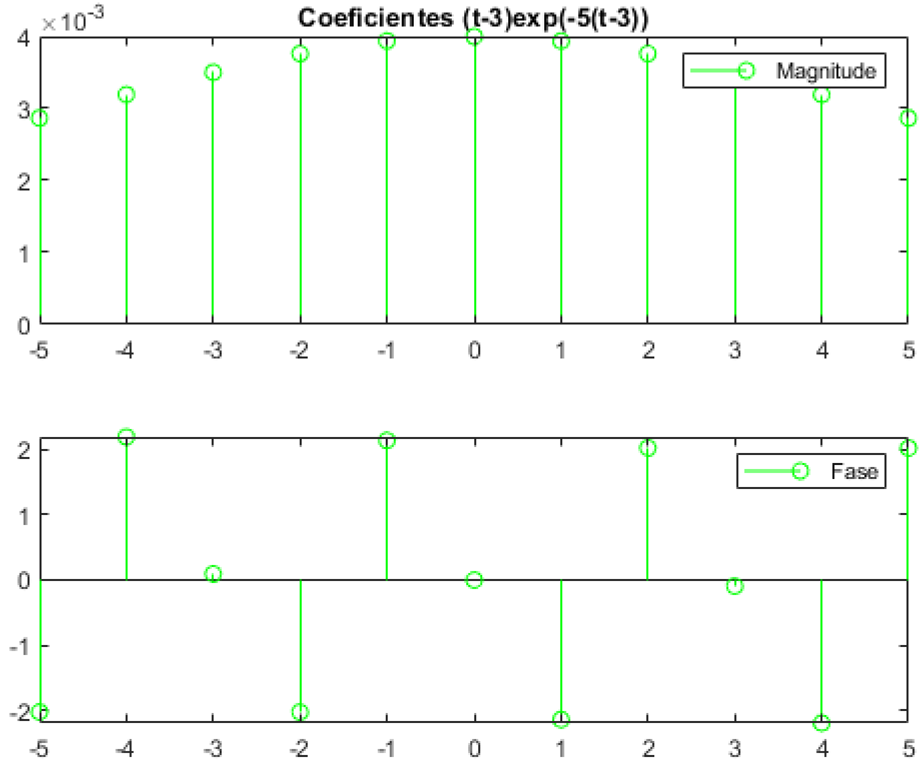
```
stem(k,abs(a1));
title(' Coeficientes de x(t)=te^-^5^t');
legend('Magnitude');
subplot(212);
stem(k,angle(a1));
legend('Fase');
```




```
%Calculando coef. a partir de e^{-j*k*w0*t1}*ak
t1=3;
right=exp(-j*k*w*t1).*a;
right=eval(right);
figure
subplot(211);
stem(k,abs(right),'g');
legend('Magnitude');
title('e^{-j*k*w0*t1}*ak');
subplot(212);
stem(k,angle(right),'g');
legend('Fase');
```




```
%Calculando os coef. de x=(t-3)e^{-5*(t-3)}
x=(t-t1).*exp(-5*(t-t1));
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0+t1,t0+T+t1);
coe=eval(a);
figure
subplot(211);
stem(k,abs(coe),'g');
legend('Magnitude');
title(' Coeficientes (t-3)exp(-5(t-3)) ');
subplot(212);
stem(k,angle(coe),'g');
legend('Fase');
```



Reversão temporal

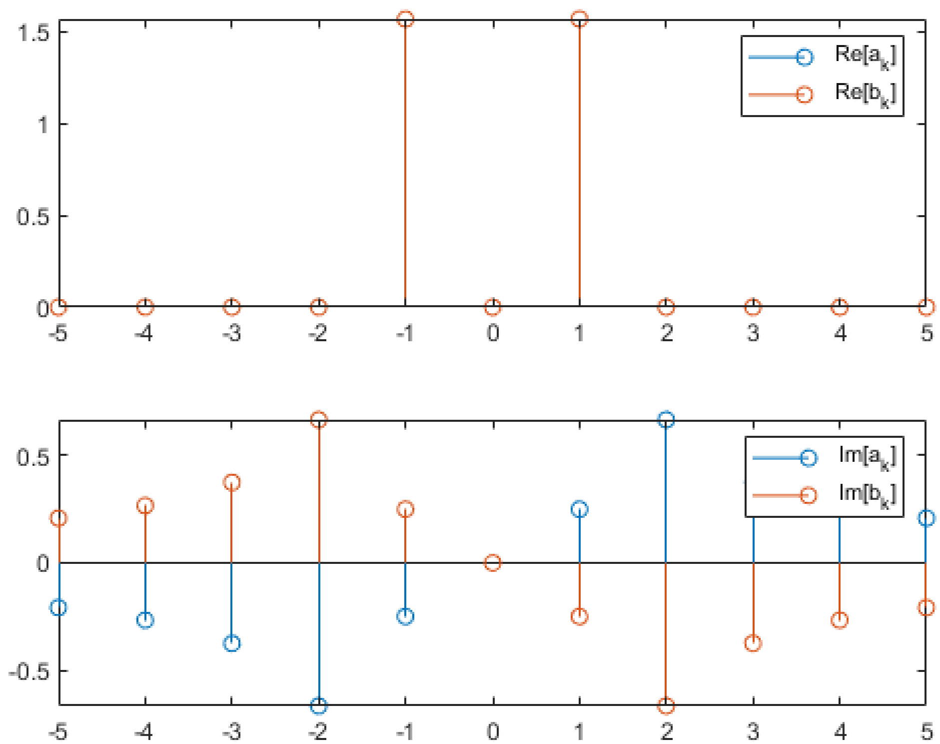
Se $x(t) \leftrightarrow a_k$, a expressão matemática é

$x(-t) \leftrightarrow a_{-k}$

Exercício 3: Considere um sinal periódico dado por $x(t) = t\cos(t), 0 \leq t \leq 2\pi$. Considere 11 termos para o cômputo da série de Fourier.

```
% Reversão temporal

t0=0;
T=2*pi;
w=2*pi/T;
syms t
x=t*cos(t) ;
k=-5:5;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
a1=eval(a);
figure
subplot(211);
stem(k,real(a1));
hold on
subplot(212);
```

```
stem(k,imag (a1));
hold on

%reversão temporal de x(t)
x_=-t*cos(-t) ;
b=(1/T)*int(x_*exp(-j*k*w*t),t,t0-T,t0);
b1=eval(b);
subplot(211);
stem(k,real(b1));
legend('Re[a_k]','Re[b_k]');
subplot(212);
stem(k,imag (b1));
legend('Im[a_k]','Im[b_k]');
```



Escalonamento temporal

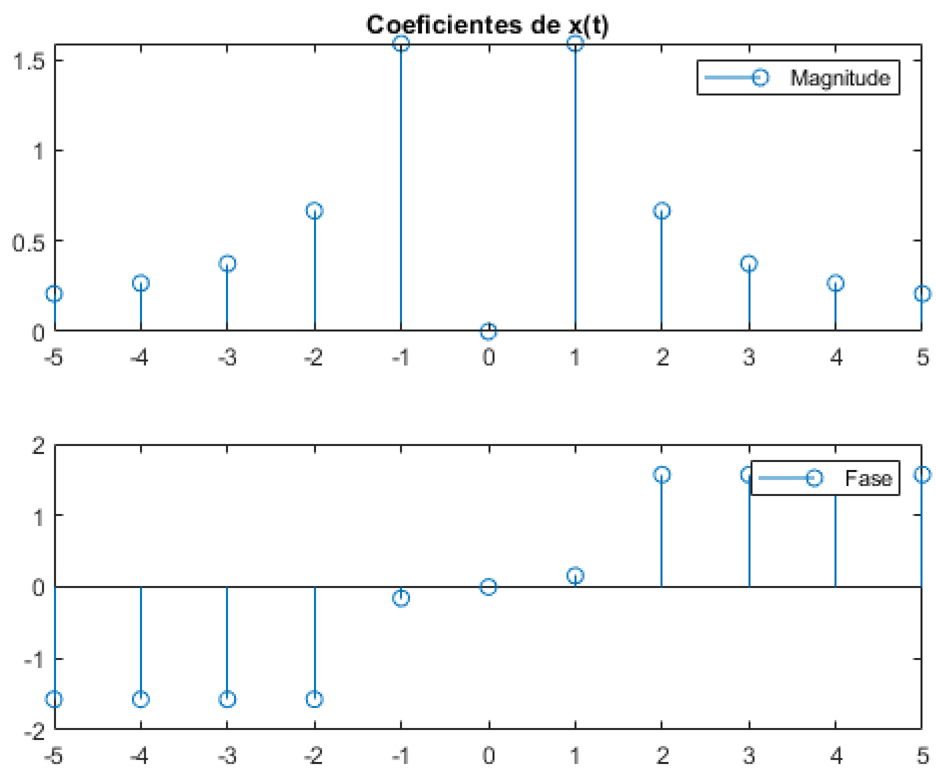
Os coeficientes da série de Fourier de uma versão escalonada $x(\lambda\, t)$ de $x(t)$não muda, exceto o período fundamental da versão escalonada que torna-se $\frac{T}{\lambda}$ e o período fundamental torna-se $\lambda\,\omega_0$.

$x(\lambda\, t) \leftrightarrow a_k$

Exercício 4: Considere um sinal periódico dado por $x(t) = t\cos(t), 0 \le t \le 2\pi$. Efetue um escalonamento $\lambda = 2$. Considere 11 termos para o cômputo da série de Fourier.

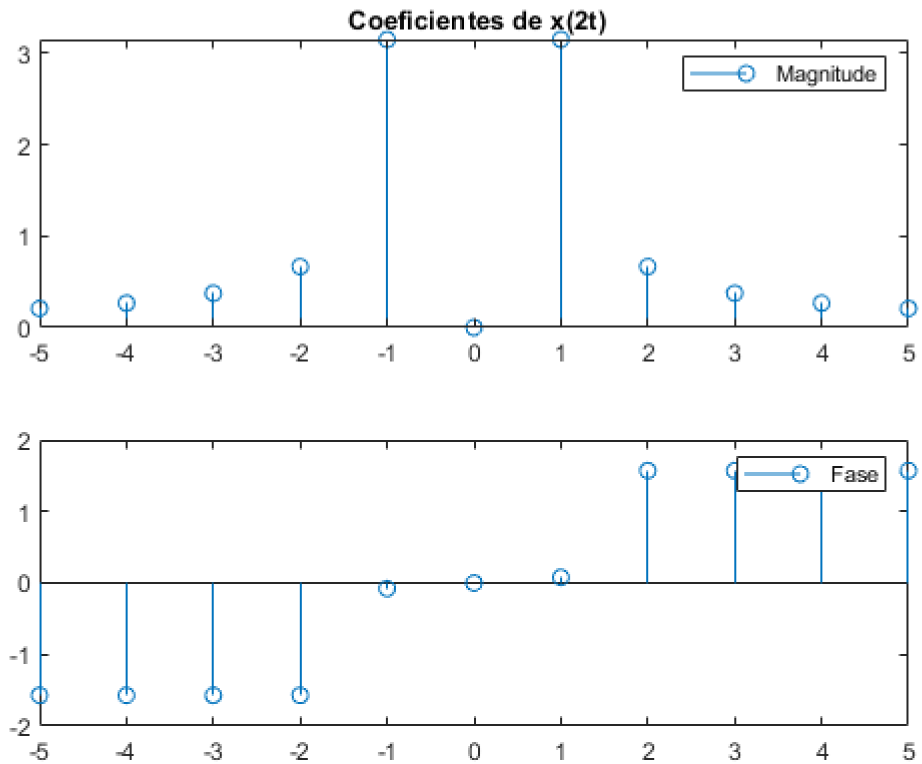
```
% Time scaling
```

```
syms t
t0=0;
T=2*pi;
w=2*pi/T;
x=t*cos(t) ;
k=-5:5;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
a1=eval(a);
figure
subplot(211);
stem(k,abs(a1));
legend('Magnitude');
title('Coeficientes de x(t)');
subplot(212);
stem(k,angle(a1));
legend('Fase');
```




```
%Escalonamento de x(t)
lambda=2;
w=2*pi*lambda/T;
x= lambda*t*cos(lambda*t) ;
k=-5:5;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
a1=eval(a);
figure
```

```
subplot(211);
stem(k,abs(a1));
legend('Magnitude');
title(' Coeficientes de x(2t)');
subplot(212);
stem(k,angle(a1));
legend('Fase');
```



Multiplicação de sinais

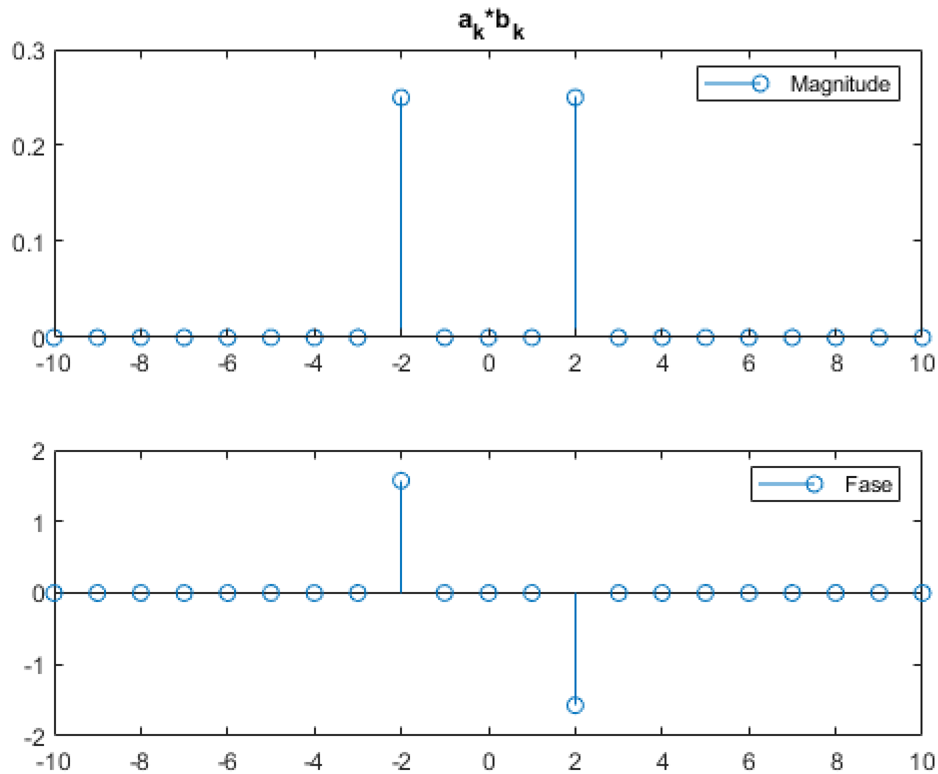
Os coeficientes da série de Fourier do produto de dois sinais é igual a convolução dos coeficientes da Série de Fourier de cada sinal. Suponha que $x(t) \leftrightarrow a_k$ e $y(t) \leftrightarrow b_k$. Então,

$x(t)y(t) \leftrightarrow a_k * b_k$

Exercício 5: Considere os sinais periódicos dados por $x(t) = \cos(t)$e $y(t) = \text{sen}(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Avalie os coeficientes do produto $z(t) = x(t)y(t)$. Considere 11 termos para o cômputo da série de Fourier de $x(t)$e $y(t)$.

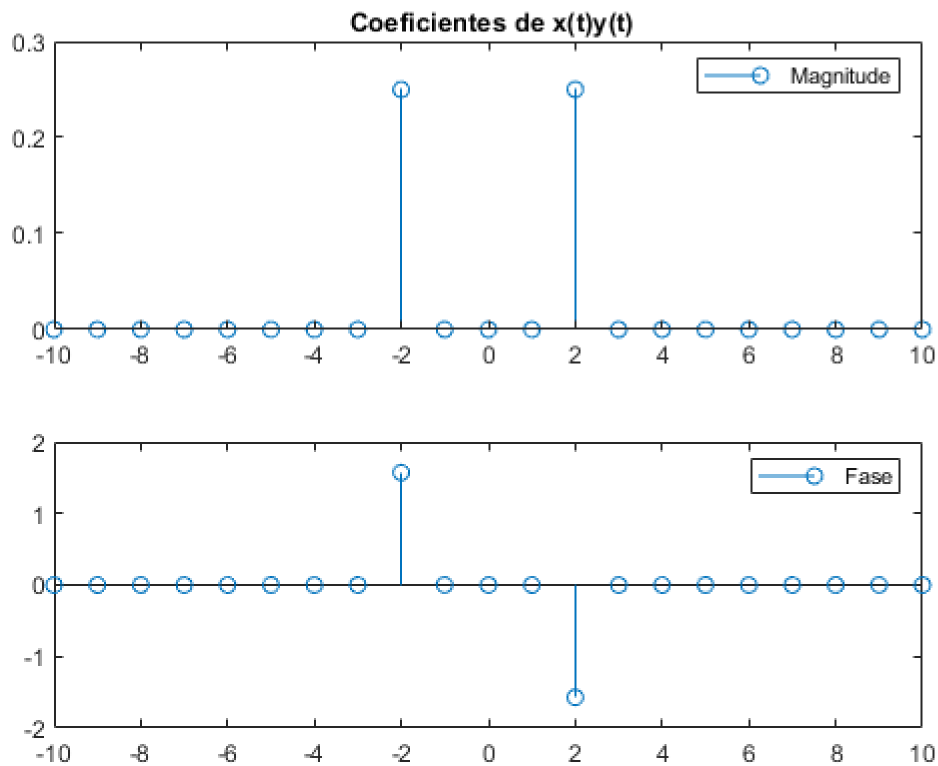
```
% multiplicação de sinais

syms t
t0=0;
T=2*pi;
w=2*pi/T;
x=cos(t);
k=-5:5;
```

```
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
a1=eval(a);
y=sin(t);
b=(1/T)*int(y*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
b1=eval(b);

%Calculo dos coeficientes do produto por meio da conv.
right=conv(a1,b1);
figure
subplot(211);
stem(-10:10,abs(right));
legend('Magnitude');
title(' a_k*b_k');
subplot(212);
stem(-10:10,angle(right));
legend('Fase');
```




```
%Calculo dos coeficientes do produto por meio da mult. temporal
%z(t)=x(t)y(t)
z=x*y;
k=-10:10;
c=(1/T)*int(z*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
c1=eval(c);
figure
subplot(211);
stem(k,abs(c1));
```

```
legend('Magnitude');
title(' Coeficientes de x(t)y(t)');
subplot(212);
stem(k,angle(c1));
legend('Fase');
```



Simetria

Simetria par

Na representação trigonométrica

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,,\ t \in [t_0, t_0 + T]$$

onde os coeficientes da série de Fourier na forma trigonométrica são dados por

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\mathrm{dt}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{dt}$$

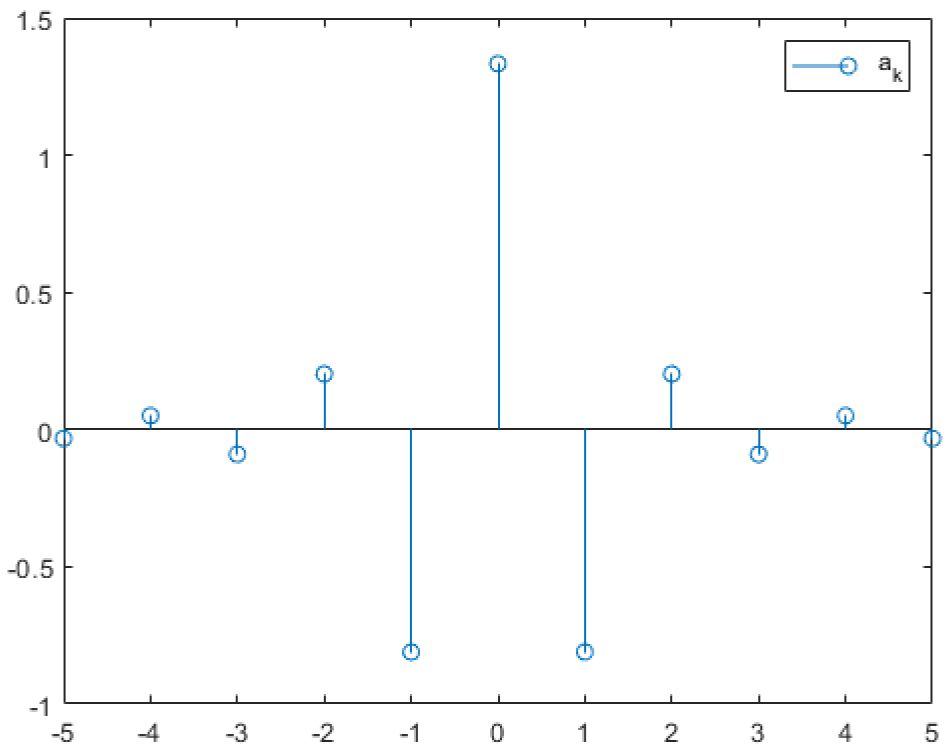
$$c_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\mathrm{dt}$$

Se um sinal $x(t) = x(-t)$ é par, então, $c_n = 0$.

E da representação por série de Fourier complexa obtém-se que $a_k = a_{-k}$.

Exercício 6: Considere o sinal periódico e com simetria par dado por $x(t) = t^2$, $-2 \le t \le 2$. Avalie os coeficientes da série de Fourier para 11 termos.

```
t0=-2;
T=4;
w=2*pi/T;
syms t
x=t^2;
k=-5:5;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
figure
stem(k,eval(a))
legend('a_k')
```



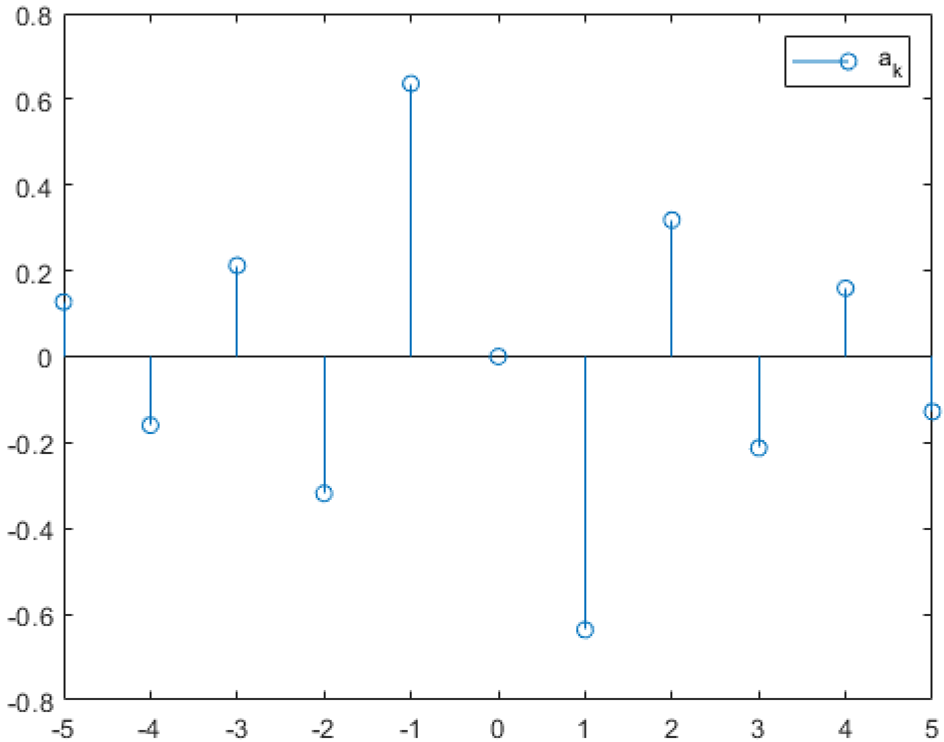
Simetria ímpar

Se um sinal $x(t) = x(-t)$ é ímpar, então, $b_n = 0$.

E da representação por série de Fourier complexa obtém-se que $a_k = -a_{-k}$.

Exercício 7: Considere o sinal periódico e com simetria ímpar dado por $x(t) = t$, $-2 \le t \le 2$. Avalie os coeficientes da série de Fourier para 11 termos.

```
t0=-2;
T=4;
w=2*pi/T;
syms t
x=t;
k=-5:5;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
figure
stem(k,imag(eval(a)))
legend('a_k')
```



Identidade de Parseval

A potência média de um sinal periódico $x(t)$ com período T é igual a soma dos quadrados dos coeficientes da série de Fourier da forma exponencial complexa. A expressão matemática é

$$P_x = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,\mathrm{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Se o sinal for real,

$$P_x = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,\mathrm{dt} = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$$

Exercício 8: Considere o sinal periódico $x(t) = \text{sen}(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Avalie os coeficientes da série de Fourier para 13 termos.

```
% Potencia media de x(t)=sin(t)
syms t
x=sin(t);
T=2*pi;
t0=0;
P=(1/T)*int(abs(x)^2,t0,t0+T);
P=eval(P)
```

```
P = 0.5000
```

```
%Calculo pelo coeficientes da serie de Fourier
w=2*pi/T;
k=-6:6;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t), t,t0,t0+T)
```

a =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5734161139222659\,\pi\,\mathrm{i}}{36028797018963968} & 0 & -\frac{5734161139222659\,\pi\,\mathrm{i}}{36028797018963968} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
eval(a)
```

```
ans = 1×13 complex
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i ···
```

```
P=sum((abs(a)).^2);
eval(P)
```

```
ans = 0.5000
```

```
%Calculo considerando sinal real
a0=(1/T)*int(x,t0,t0+T);
P=a0^2+ 2*sum((abs(a(8:13)).^2));
eval (P)
```

```
ans = 0.5000
```

Critério de aproximação de sinais por série de Fourier

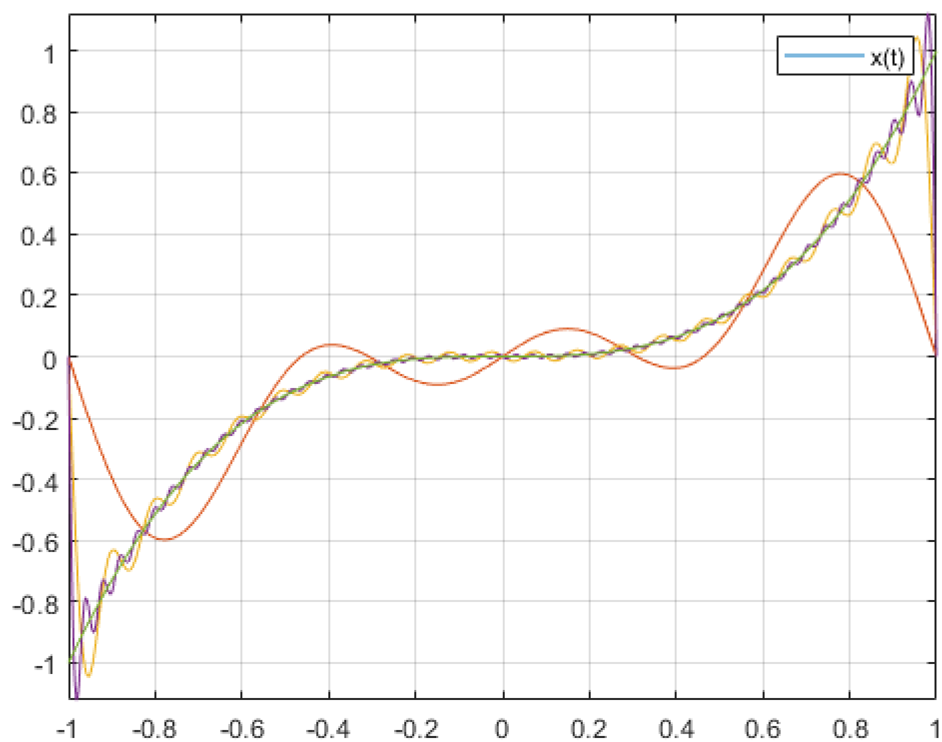
Um critério de "qualidade" de uma aproximação de representação de função por meio de série de Fourier é por meio do valor percentual de potência média que $2K + 1$ componentes dos termos de uma série de Fourier correspondem.

A expressão do percentual de aproximação é

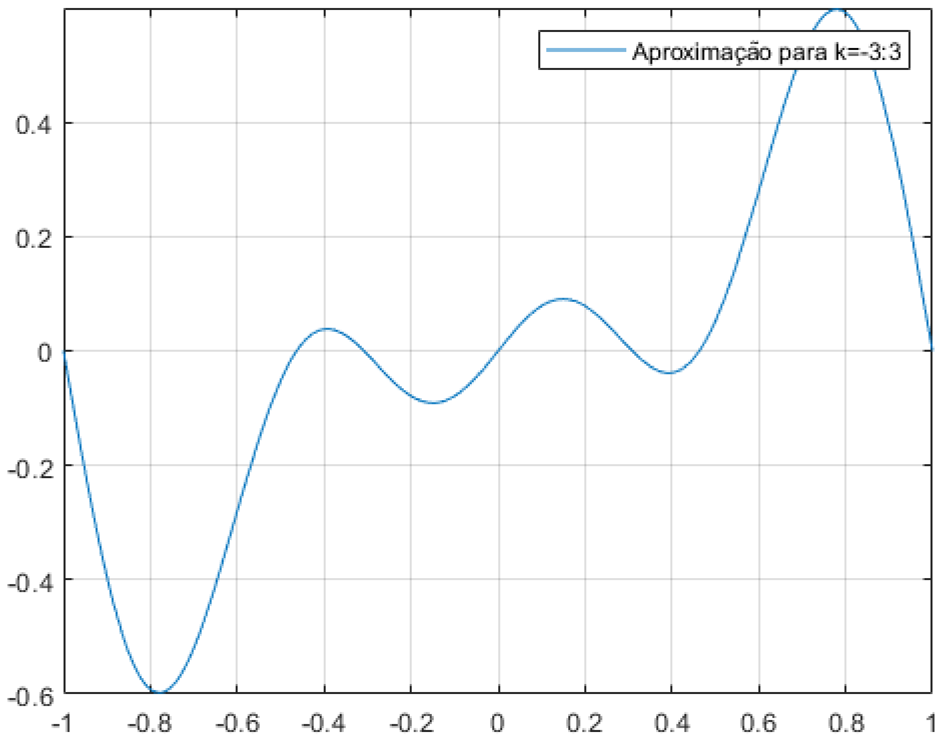
$$\left(\sum_{n=-K}^{K} \frac{|a_n|^2}{P_x}\right) 100\%$$

Exercício 9: Considere o sinal periódico $x(t) = t^3,\ -1 \le t \le 1$. Avalie os coeficientes da série de Fourier para a seguinte quantidade de termos: 7, 41, 101, bem como o percentual de aproximação das funções, respectivamente.

```
% x(t)=t^3 , -1<t<1
syms t
x=t^3;
t0=-1;
T=2;
w=2*pi/T;
Px=(1/T)*int(abs(x)^2,t0,t0+T);
fplot(x,[-1 1]);
grid on
legend('x(t)')
```



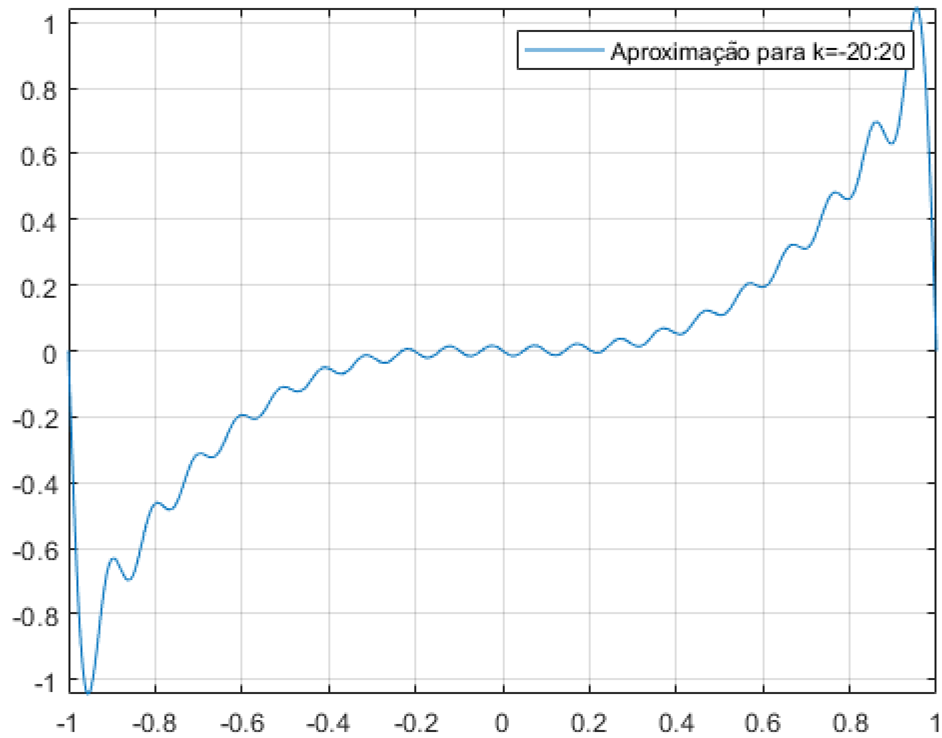

```
% Aproximação por SF e percentual de aproximação
% 7 termos
k=-3:3;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
xx7=sum(a.*exp(j*k*w*t));
figure
fplot(xx7,[-1 1]);
grid on
legend('Aproximação para k=-3:3')
```




```
% Pa=(abs(a)).^2;
% percentage=sum(Pa/Px);
% eval(percentage)
% or alternatively
Pa=sum((abs(a)).^2);
per=Pa/Px;
eval(per)
```

```
ans = 0.6101
```

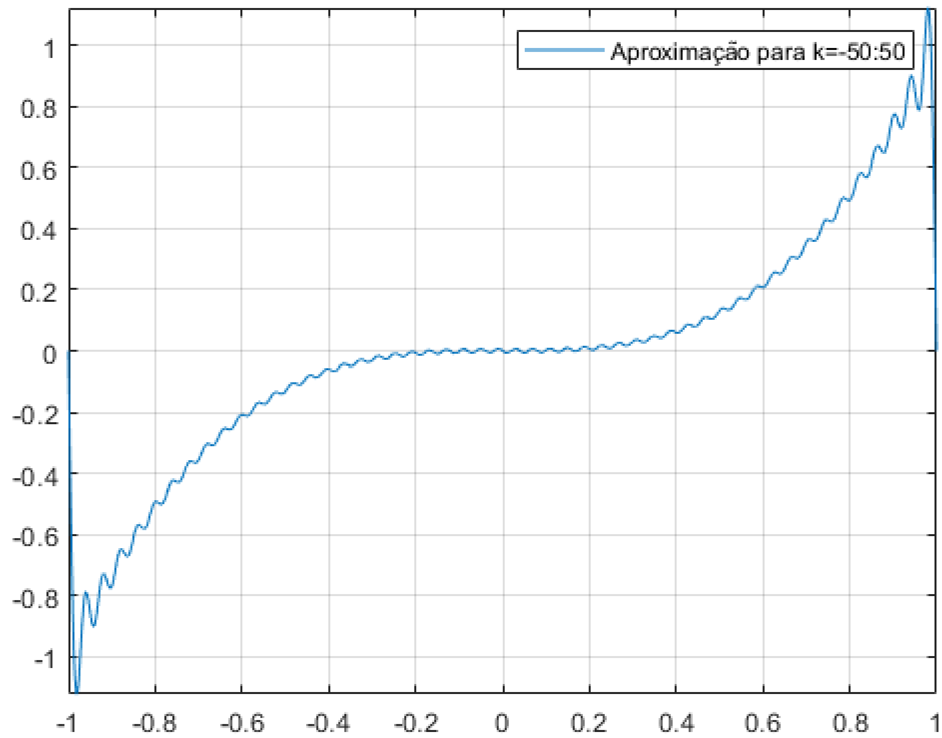
```

%41 termos
k=-20:20;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t), t,t0,t0+T);
xx41=sum(a.*exp(j*k*w*t));
figure
fplot(xx41,[-1 1]);
grid on
legend( 'Aproximação para k=-20:20');
```




```
Pa=sum((abs(a)).^2);
per=Pa/Px;
eval(per)
```

```
ans = 0.9309
```

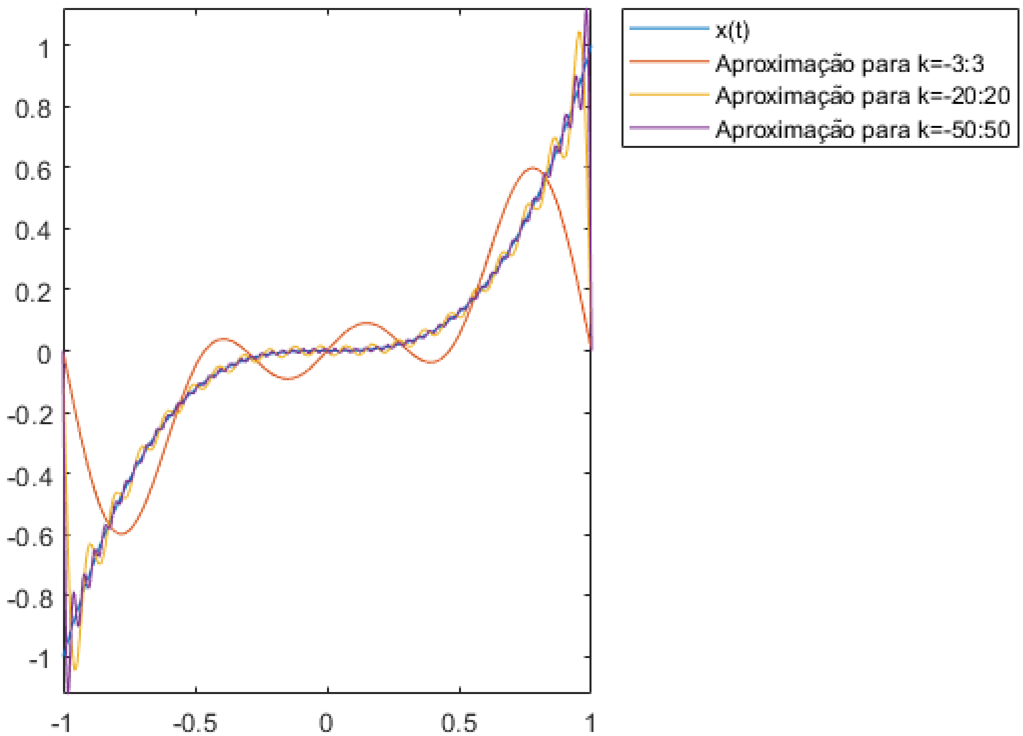
```

%101 termos
k=-50:50;
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t),t,t0,t0+T);
xx101=sum(a.*exp(j*k*w*t));
figure
fplot(xx101,[-1 1]);
grid on
legend('Aproximação para k=-50:50');
```




```
Pa=sum((abs(a)).^2);
per=Pa/Px;
eval(per)
```

```
ans = 0.9719
```

```
figure
fplot(x,[-1 1]);
hold on
fplot(xx7,[-1 1]);
fplot(xx41,[-1 1]);
fplot(xx101,[-1 1]);
legend('x(t)','Aproximação para k=-3:3','Aproximação para k=-20:20','Aproximação
para k=-50:50','Location','bestoutside')
```



x(t)
Aproximação para k=-3:3
Aproximação para k=-20:20
Aproximação para k=-50:50
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1