

5. EQUIVALÊNCIA LÓGICA e IMPLICAÇÃO LÓGICA

5.1. EQUIVALÊNCIA LÓGICA

5.1.1. Definição

Diz-se uma proposição $P(p,q,r,...)$ é logicamente equivalente ou apenas equivalente a uma proposição $Q(p,q,r,...)$, se as tabelas-verdade destas duas proposições são **idênticas**.

Notação: $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$

Portanto, se as proposições $P(p,q,r,...)$ e $Q(p,q,r,...)$ forem ambas tautológicas ou ambas contradições, então são **equivalentes** (\Leftrightarrow).

OBS: O Símbolo “ \leftrightarrow ” é de operação e o símbolo “ \Leftrightarrow ” é de relação.

5.1.2. Propriedades

É imediato que a relação de equivalência lógica entre proposições goza das propriedades reflexiva (R), simétrica (S) e transitiva (T), isto é, simbolicamente:

- (i) (R) $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$
- (ii) (S) Se $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$, então
 $Q(p,q,r,...) \Leftrightarrow P(p,q,r,...)$
- (iii) (T) Se $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$ e
 $Q(p,q,r,...) \Leftrightarrow R(p,q,r,...)$, então
 $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow R(p,q,r,...)$

5.1.3. Exemplos

(1) $\neg(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow p \vee \neg p$, se e somente se, é tautológica:

p	$\neg p$	$(p \wedge \neg p)$	$\neg(p \wedge \neg p)$	\Leftrightarrow	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V

É tautologia, logo são equivalentes. O mesmo acontece com a contradição.

(2) As condicionais “ $p \rightarrow p \wedge q$ ” e “ $p \rightarrow q$ ” têm tabelas-verdade idênticas:

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge p$	$p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Por conseqüência, estas condicionais são equivalentes, isto é, subsiste a equivalência lógica:

$$p \rightarrow p \wedge p \Leftrightarrow p \rightarrow q$$

5.2. IMPLICAÇÃO LÓGICA

5.2.1. Definição

Diz-se que uma proposição $P(p,q,r,...)$ implica logicamente ou apenas implica uma proposição $Q(p,q,r,...)$, se $Q(p,q,r,...)$ é verdadeira (V) todas as vezes que $P(p,q,r,...)$ é **verdadeira** (V).

Notação: $P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$

OBS: O Símbolo “ \rightarrow ” é de operação e o símbolo “ \Rightarrow ” é de relação.

5.2.2. Propriedades

É imediato que a relação de implicação lógica entre proposições goza das propriedades reflexiva(R) e transitiva(T), isto é, simbolicamente:

- (i) (R) $P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$
- (ii) (T) Se $P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$ e
 $Q(p,q,r,...) \Rightarrow R(p,q,r,...)$, então
 $P(p,q,r,...) \Rightarrow R(p,q,r,...)$

5.2.3. Exemplos

(1) As tabelas-verdade das proposições: $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \leftrightarrow q$, são:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

A proposição " $p \wedge q$ " é verdadeira (V) somente na linha 1 e, nesta linha, as proposições " $p \vee q$ " e " $p \leftrightarrow q$ " também são verdadeiras(V). Logo, a primeira proposição implica cada uma das outras duas proposições, isto é:

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q \quad \text{e} \quad p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$$

(2) " $(p \leftrightarrow q) \wedge p$ " implica a proposição " q ", pois, a condicional " $(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ " é tautológica conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Portanto, simbolicamente: $(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

EXERCÍCIOS (valendo pontos para a avaliação/prova)

1) Demonstrar por tabelas-verdade as seguintes equivalências:

a) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \wedge r$

b) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \wedge \neg r \rightarrow \neg q$

3) Provar as implicações:

a) $(\neg p \wedge q) \Rightarrow \neg p$

b) $(p \wedge q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

c) $(p \rightarrow q) \Rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

4) Testes

x	$x > 2$	$x < 8$	$x > 2 \wedge x < 8$	$x > 2 \vee x < 8$
7				
3,14				
2				
-1				
8,57				