2. OPERAÇÕES LÓGICAS SOBRE PROPOSIÇÕES

Operações Lógicas são certas operações que, quando pensamos, efetuamos muitas vezes sobre proposições.

Operações Lógicas fundamentais**: negação, conjunção, disjunção, disjunção exclusiva, condicional e bicondicional.**

2.1. NEGAÇÃO (¬) (~) (Não - NOT)

Chama-se negação de uma proposição **p** a proposição representada por "**não p**", cujo valor lógico é a verdade(V) quando **p** é falsa e a falsidade(F) quando **p** é verdadeira.

Simbolicamente, a negação de **p** indica-se pela notação "**¬p**", que se lê: "**não p**".

Tabela da Verdade:

p	¬p
V	**F**
F	**V**

Ou seja, pelas igualdades: ¬V = F, ¬F = V e V(¬p) = ¬V(p)

Ex:

(**1**) **q**: 7 < 3 (F) e ¬q: 7 < 3 (V), portanto, V(¬q) = ¬V(q) = ¬F = V

(**2**) **p**: 2 + 3 = 5 (V) e ¬p: 2 + 3 # 5 (F), portanto, V(¬p) = ¬V(p) = ¬V = F

Na linguagem comum a negação efetua-se, nos casos mais simples, antepondo o advérbio "**não**" ao verbo da proposição dada. Assim, p. ex, a negação da proposição:

p: O Sol é uma estrela. **¬p**: O Sol não é uma estrela.

Ou expressões tais como: "**não é verdade que**", "**é falso que**".

Ex: q: Paulo é policial;
¬q: Não é verdade que Paulo é policial; ou **¬q**: É falso que Paulo é policial.

2.2. CONJUNÇÃO ($\wedge$) (E) (AND)

Chama-se conjunção de duas proposições **p** e **q** a proposição representada por "**p e q**", cujo valor lógico é a verdade(V) quando as proposições **p** e **q** são ambas verdadeiras e a falsidade(F) nos demais casos.

Simbolicamente, a conjunção de duas proposições **p** e **q** é indicada com a notação: "**p $\wedge$ q**", que se lê: "**p e q**".

Tabela da Verdade:

p	q	p $\wedge$ q
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Ou seja, pelas igualdades: V $\wedge$ V = V, V $\wedge$ F = F, F $\wedge$ V = F, F $\wedge$ F = F e
V(p $\wedge$ q) = V(p) $\wedge$ V(q)

Ex:
(**1**) **p**: A neve é branca. (V)
$\neg$**q**: 2 < 5 (V), portanto temos: p $\wedge$ q: A neve é branca **e** 2 < 5 (V).
V(p $\wedge$ q) = V(p) $\wedge$ V(q) = V $\wedge$ V = V.

Outro exemplo:

p	q	p $\wedge$ q
A neve é branca **(V)**	A grama é verde **(V)**	**V**
A neve é branca **(V)**	A grama não é verde **(F)**	**F**
A neve não é branca **(F)**	A grama é verde **(V)**	**F**
A neve não é branca **(F)**	A grama não é verde **(F)**	**F**

2.3. DISJUNÇÃO ($\vee$) (OU) (OR)

Chama-se disjunção de duas proposições **p** e **q** a proposição representada por "**p ou q**", cujo valor lógico é a verdade(V) quando ao menos uma das proposições **p** e **q** é verdadeira e a falsidade(F) quando as proposições **p** e **q** são ambas falsas.

Simbolicamente, a disjunção de duas proposições **p** e **q,** é indicada com a notação: "**p $\vee$ q**", que se lê: "**p ou q**".

Tabela da Verdade:

p	q	$p \vee q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Ou seja, pelas igualdades:
$V \vee V = V$, $V \vee F = V$, $F \vee V = V$, $F \vee F = F$ e $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$

Ex:
(**1**) **p**: Paris é capital da França (V)
q: 9-4=5 (V), portanto temos, $p \vee q$: Paris é capital da França **ou** 9-4=5 (V)

$$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee V = V$$

Outro exemplo:

p	**q**	**$p \vee q$**
A neve é branca **(V)**	A grama é verde **(V)**	**V**
A neve é branca **(V)**	A grama não é verde **(F)**	**V**
A neve não é branca **(F)**	A grama é verde **(V)**	**V**
A neve não é branca **(F)**	A grama não é verde **(F)**	**F**

2.4. DISJUNÇÃO EXCLUSIVA ($\underline{\vee}$) (<u>OU</u>) (<u>OR</u>)

Na linguagem comum a palavra "**ou**" tem dois sentidos. Assim, p. ex: consideremos as duas seguintes proposições compostas:

P: Carlos é médico ou professor (disjunção inclusiva) - **fraca**
Q: Mário é alagoano ou gaúcho (disjunção exclusiva) - **forte**

De um modo geral, chama-se disjunção exclusiva de duas proposições **p** e **q** a proposição representada simbolicamente por "**$p \underline{\vee} q$**", que se lê: "**ou p ou q**" ou "**p ou q**", mas não ambos, cujo valor lógico é a verdade(V) somente quando **p** ou **q** é verdadeira, mas não quando **p** e **q** são ambas verdadeiras, e a falsidade(F) quando **p** e **q** são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Tabela da Verdade:

p	q	$p \veebar q$
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Ou seja, pelas igualdades:
$V \veebar V = F$, $V \veebar F = V$, $F \veebar V = V$, $F \veebar F = F$ e $V(p \veebar q) = V(p) \veebar V(q)$

Outro exemplo:

p	**q**	**$p \veebar q$**
Carlos é paulista **(V)**	Carlos é carioca **(V)**	**F**
Carlos é paulista **(V)**	Carlos não é carioca **(F)**	**V**
Carlos não é paulista **(F)**	Carlos é carioca **(V)**	**V**
Carlos não é paulista **(F)**	Carlos não é carioca **(F)**	**F**

2.5. CONDICIONAL (→) (SE .. ENTÃO) (IF .. THEN)

Chama-se proposição condicional ou apenas condicional uma proposição representada por "**se p então q**", cujo valor lógico é a falsidade(F) no caso em que **p** é verdadeira e **q** é falsa e a verdade(V) nos demais casos.

Simbolicamente, a condicional de duas proposições **p** e **q** é indicada com a notação: "**p → q**", que se lê de uma das seguintes maneiras:

(**i**) **p** é condição suficiente para **q**
(**ii**) **q** é condição necessária para **p**

Na condicional "**p → q**", diz-se que **p** é o antecedente e q o conseqüente. O símbolo "**→"** é chamado símbolo de implicação.
O valor lógico da condicional de duas proposições

Tabela da Verdade:

p	q	$p \rightarrow q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

Ou seja, pelas igualdades:
$V \rightarrow V = V$, $V \rightarrow F = F$, $F \rightarrow V = V$, $F \rightarrow F = V$ e $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q)$

Ex:

(**1**) **p**: Galois morreu em duelo (V)
q: pi é um número real (V)
p → q: **Se** Galois morreu em duelo, **então** pi é um número real (V)

$$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow V = V$$

(**2**) **p**: O mês de Maio tem 31 dias (V)
q: A Terra é plana (F)
p → q: **Se** o mês de Maio tem 31 dias, **então** a Terra é plana (F)

$$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow F = F$$

(**3**) **p**: Dante escreveu os Lusíadas (F)
q: Cantor criou a Teoria dos Conjuntos (V)
p → q: **Se** Dante escreveu os Lusíadas, **então** Cantor criou a Teoria dos Conjuntos (V)

$$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow V = V$$

(**4**) **p**: Santos Dummont nasceu no Ceará (F)
q: O ano tem nove meses (F)
p → q: **Se** Santos Dummont nasceu no Ceará, **então** o ano tem nove meses (V)

$$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow F = V$$

NOTA: Uma condicional **p → q** não afirma que o conseqüente **q** se deduz ou é conseqüência do antecedente **p**. Assim, p. ex., as condicionais:

7 é um número ímpar → Brasília é uma cidade
3+5 = 9 → Santos Dummont nasceu no Ceará

Não estão a afirmar, de modo nenhum, que o fato de “Brasília ser uma cidade” se deduz do fato de “7 ser um número ímpar” ou que a proposição “Santos Dummont nasceu no Ceará” é conseqüência da proposição “3+5 = 9”. O que uma condicional afirma é unicamente uma relação entre os valores lógicos do antecedente e de conseqüente de acordo com a tabela da verdade anterior.

Outro exemplo:

p	q	p → q
Se o leite é branco **(V)**	**Então** o céu é azul **(V)**	**V**
Se o leite é branco **(V)**	**Então** o céu não é azul **(F)**	**F**
Se o leite não é branco **(F)**	**Então** o céu é azul **(V)**	**V**
Se o leite não é branco **(F)**	**Então** o céu não é azul **(F)**	**V**

2.6. BICONDICIONAL (↔) (SE E SOMENTE SE) (IF ONLY IF)

Chama-se proposição bicondicional uma proposição representada por "**p se e somente se q**", cujo valor lógico é a verdade(V) quando **p** e **q** são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade(F) nos demais casos.
Simbolicamente, a bicondicional de duas proposições **p** e **q** é indicada com a notação: **p** ↔ **q**, que também se lê de uma das seguintes maneiras:

(**i**) **p** é condição necessária e suficiente para **q**
(**ii**) **q** é condição necessária e suficiente para **p**

O valor lógico da bicondicional de duas proposições

Tabela da Verdade:

p	q	p ↔ q
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Ou seja, igualdades:
V ↔ V = V, V ↔ F = F, F ↔ V = F, F ↔ F = V e V(p ↔ q) = V(p) ↔ V(q)

Ex:

(**1**) **p**: Roma fica na Europa (V)
q: A neve é branca (V)
p ↔ **q**: Roma fica na Europa **se e somente se** a neve é branca (V)
V(p ↔ q) = V(p) ↔ V(q) = V ↔ V = V

(**2**) **p**: Lisboa é capital de Portugal (V)
q: tag pi/4 = 3 (F)
p ↔ **q**: Lisboa é capital de Portugal **se e somente se** tag pi/4 = 3 (F)
V(p ↔ q) = V(p) ↔ V(q) = V ↔ F = F

(**3**) **p**: Vasco da Gama descobriu o Brasil (F)
q: Tiradentes foi enforcado (V)
p ↔ q: Vasco da Gama descobriu o Brasil **se e somente se** Tiradentes foi enforcado (F)

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow V = F$$

(**4**) **p**: A Terra é plana (F)
q: 2 é um número ímpar (F)
p ↔ q: A Terra é plana **se e somente se** 2 é um número ímpar (V)

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow F = V$$

Outro exemplo:

p	→	**q**	**p ↔ q**
O CEP é 19800-000 **(V)**	**SE E SOMENTE SE**	A cidade for Assis **(V)**	**V**
O CEP é 19800-000 **(V)**	**SE E SOMENTE SE**	A cidade não for Assis **(F)**	**F**
O CEP não é 19800-000 **(F)**	**SE E SOMENTE SE**	A cidade for Assis **(V)**	**F**
O CEP não é 19800-000 **(F)**	**SE E SOMENTE SE**	A cidade não for Assis **(F)**	**V**