

4. TAUTOLOGIA, CONTRADIÇÃO e CONTINGÊNCIA

4.1. TAUTOLOGIA

Uma Tautologia (ou proposições logicamente verdadeira) é toda proposição composta que é verdadeira, quaisquer que sejam os valores lógicos de suas proposições componentes, ou seja, uma proposição cuja tabela da verdade contém somente **V** na coluna principal, isto é, cuja última coluna da sua tabela da verdade encerra-se somente com a letra **V**(verdade).

Exemplos:

(1) A proposição “ $\neg(p \wedge \neg p)$ ” (**Princípio da não contradição**, ou seja, uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo) é tautológica, conforme se vê pela sua tabela da verdade:

| p | $\neg p$ | $p \wedge \neg p$ | $\neg(p \wedge \neg p)$ |
|-----|----------|-------------------|-------------------------|
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |

Portanto, **dizer que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre verdadeiro.**

(2) A proposição “ $p \vee \neg p$ ” (**Princípio do terceiro excluído**, ou seja, toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro) é tautológica, como imediatamente se vê pela sua tabela da verdade:

| p | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ |
|-----|----------|-----------------|
| V | F | V |
| F | V | V |

Portanto, **dizer que uma proposição ou é verdadeira ou é falsa é sempre verdadeiro.**

Exemplos de proposições compostas que são tautológicas:

(1) $P(p,q) = p \vee \neg(p \wedge q)$

| p | q | $p \wedge q$ | $\neg(p \wedge q)$ | $p \vee \neg(p \wedge q)$ |
|-----|-----|--------------|--------------------|---------------------------|
| V | V | V | F | V |
| V | F | F | V | V |
| F | V | F | V | V |
| F | F | F | V | V |

(2) $P(p,q) = p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

| p | q | $p \wedge q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ |
|---|---|--------------|-----------------------|------------------------------------------------|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | F | F | V |
| F | F | F | V | V |

(3) $P(p,q,r) = [(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

| p | q | r | | [(p | → | q) | → | r] | → | [p | → | (q | → | r)] |
|---|---|---|--|-----|---|----|---|----|----------|----|---|----|---|-----|
| V | V | V | | V | V | V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | | V | V | V | F | F | V | V | F | V | F | F |
| V | F | V | | V | F | F | V | V | V | V | V | F | V | V |
| V | F | F | | V | F | F | V | F | V | V | V | F | V | F |
| F | V | V | | F | V | V | V | V | V | F | V | V | V | V |
| F | V | F | | F | V | V | F | F | V | F | V | V | F | F |
| F | F | V | | F | V | F | V | V | V | F | V | F | V | V |
| F | F | F | | F | V | F | F | F | V | F | V | F | V | F |
| | | | | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 |

4.2. CONTRADIÇÃO

Uma Contradição (ou proposições logicamente falsas) é toda proposição composta que é falsa, quaisquer que sejam os valores lógicos de suas proposições componentes, ou seja, uma proposição cuja tabela da verdade contém somente **F**'s na coluna principal, isto é, cuja última coluna da sua tabela da verdade encerra-se somente com a letra **F**(falsidade).

Como uma Tautologia é sempre verdadeira(V), a negação de uma Tautologia é sempre falsa(F), ou seja, é uma Contradição, e vice-versa.

Portanto, $P(p,q,r,...)$ é uma Tautologia se e somente se $\neg P(p,q,r,...)$ é uma Contradição, e $P(p,q,r,...)$ é uma Contradição se e somente se $\neg P(p,q,r,...)$ é uma Tautologia.

Exemplos de proposições compostas que são Contradições:

(1) $P(p) = p \wedge \neg p$

| p | $\neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|----------|-------------------|
| V | F | F |
| F | V | F |

Portanto, dizer que uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre falso.

$$(2) P(p) = p \leftrightarrow \neg p$$

| p | $\neg p$ | $p \leftrightarrow \neg p$ |
|---|----------|----------------------------|
| V | F | F |
| F | V | F |

$$(3) P(p,q) = (p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$$

| p | q | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $\neg(p \vee q)$ | $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ |
|---|---|--------------|------------|------------------|--------------------------------------|
| V | V | V | V | F | F |
| V | F | F | V | F | F |
| F | V | F | V | F | F |
| F | F | F | F | V | F |

$$(4) P(p,q) = \neg p \wedge (p \wedge \neg q)$$

| p | q | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ | $\neg p \wedge (p \wedge \neg q)$ |
|---|---|----------|----------|-------------------|-----------------------------------|
| V | V | F | F | F | F |
| V | F | F | V | V | F |
| F | V | V | F | F | F |
| F | F | V | V | F | F |

4.3. CONTINGÊNCIA

Uma Contingência (ou proposições indeterminadas) é toda proposição composta cuja na última coluna da sua tabela da verdade figuram as letras V e F cada uma pelo menos uma vez, isto é, é toda proposição composta que não é Tautologia e nem Contradição.

Exemplos de proposições compostas que são Contingências:

$$(1) P(p) = p \rightarrow \neg p$$

| p | $\neg p$ | $p \rightarrow \neg p$ |
|---|----------|------------------------|
| V | F | F |
| F | V | V |

(2) $P(p, q) = p \vee q \rightarrow p$

| P | q | $p \vee q$ | $p \vee q \rightarrow p$ |
|---|---|------------|--------------------------|
| V | V | V | V |
| V | F | V | V |
| F | V | V | F |
| F | F | F | V |

(3) $P(x = 3, x = y) = x = 3 \wedge (x \neq y \rightarrow x \neq 3)$

| $x = 3$ | $x = y$ | $x \neq 3$ | $x \neq y$ | $x \neq y \rightarrow x \neq 3$ | $x = 3 \wedge (x \neq y \rightarrow x \neq 3)$ |
|---------|---------|------------|------------|---------------------------------|------------------------------------------------|
| V | V | F | F | V | V |
| V | F | F | V | F | F |
| F | V | V | F | V | F |
| F | F | V | V | V | F |

EXERCÍCIOS (valendo pontos para a avaliação/prova)

1. Determinar quais das seguintes proposições são Tautológicas, Contradições, ou Contingentes:

- a) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
- b) $\neg p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$
- c) $p \rightarrow [q \rightarrow (q \rightarrow p)]$
- d) $[(p \rightarrow q) \leftrightarrow q] \rightarrow p$
- e) $p \vee \neg q \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$
- f) $\neg p \vee \neg q \rightarrow (p \rightarrow q)$
- g) $p \rightarrow (p \vee q) \vee r$
- h) $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q \vee r)$