

PO 280 - Otimização Multi-Critério

Rafael Andreolli Prochnow RA:176059

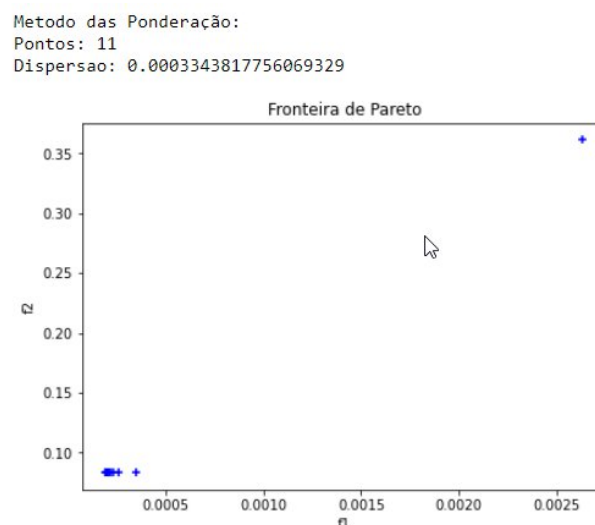
O problema apresentado no trabalho consistem na implementação dos métodos clássicos estudados na disciplina para encontrar quais os ativos (ações) mais adequados para investir. Métodos da Soma Ponderada, ϵ -restrito, Critério Global e Programação por Metas.

Os dados utilizados na elaboração do trabalho foram disponibilizados pela professora. Os dados são compostos por 49 ativos no período 1 de Abril de 2019 até 31 de Março de 2020. Foi pedido que acrescentasse uma ou mais restrições ao problema, sendo assim, de forma aleatória, a soma dos os ativos 2, 9, 15, 21 e 35 deve corresponder a 30% do investimento.

Método das Ponderações

Utilizando o Método das Ponderações visto em sala de aula, foram aplicados valores para a discretização dos pesos nas funções objetivos entre o intervalo de 0 e 1. Foram realizadas três mudanças na frequência do intervalo para observar melhor o comportamento da discretização dos pontos na Fronteira de Pareto e posteriormente comparar com os outros métodos. A primeira frequência utilizada foi com o valor de 0.1 que corresponde a 11 soluções para o problema apresentado, segundo valor utilizado foi de 0.01 com 101 soluções e o terceiro valor foi 0.001 com 1001 soluções. Cada solução obtidas pelo Método foram representadas com um ponto em azul nas Figuras. O resultado das aplicações estão presentes nas Figura 1, 2 e 3.

Figura 1: Método das Ponderações com discretização de 11 pontos na Fronteira de Pareto



Na Figura 1 há um acúmulo de pontos nas áreas de minimização do Lucro (Função Objetivo F1) e Risco (Função Objetivo F2), mas uma menor quantidade de pontos na maximização do Lucro e Risco, isso ocorre pois o Método de Ponderações apresenta limitações na resolução de problemas que não são convexos.

Com o aumento dos pontos na Fronteira de Pareto, Figura 2 e Figura 3, podemos observar a maior dispersão dos pontos na Fronteira que proporciona melhor discretização do problema apresentado na carteira de investimentos. Mesmo com o aumento na dispersão dos pontos, há áreas que não foram localizadas pelo método na Fronteira, reforçando ainda mais a limitação do método anteriormente comentado.

Figura 2: Método das Ponderações com discretização de 101 pontos na Fronteira de Pareto

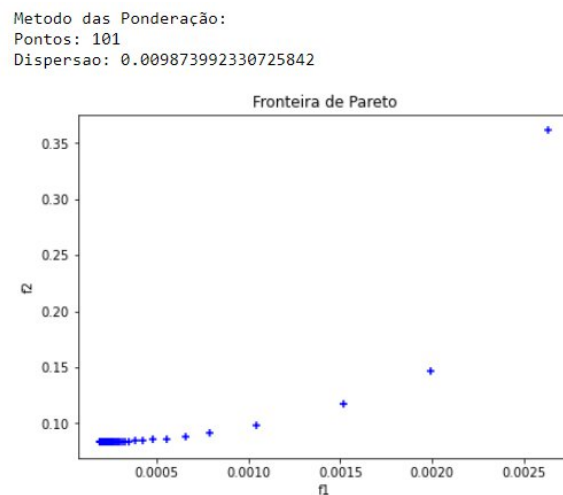
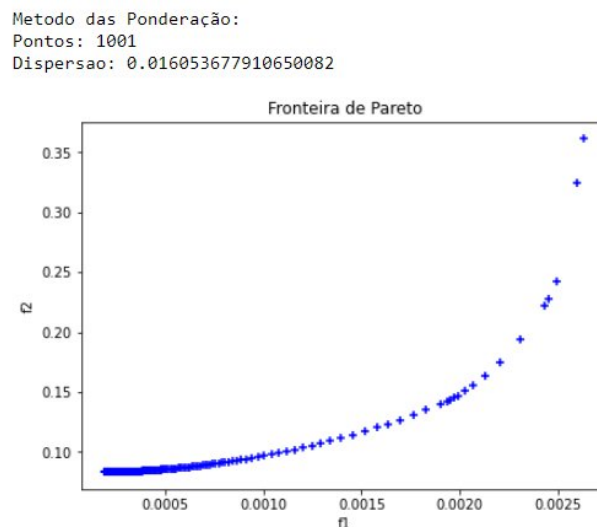


Figura 3: Método das Ponderações com discretização de 1001 pontos na Fronteira de Pareto



Epsilon Restrito

Da mesma forma que aplicamos o Método das Ponderações variando a frequência entre o intervalo de 0 a 1, foram aplicados para o Método Epsilon Restrito, mas variando apenas a frequência para valores entre 0.1 e 0.01. A escolha de não utilizar o terceiro valor para frequência é devido a pequena alteração na dispersão entre os pontos na Fronteira de Pareto, visto que apenas esses dois valores conseguem demonstrar o bem esse comportamento na Figura 4 e Figura 5.

Figura 4: Método Epsilon Restrito com discretização de 11 pontos na Fronteira de Pareto

Método das Epsilon-restrições:
Pontos: 11
Dispersao: 0.08484295287425074

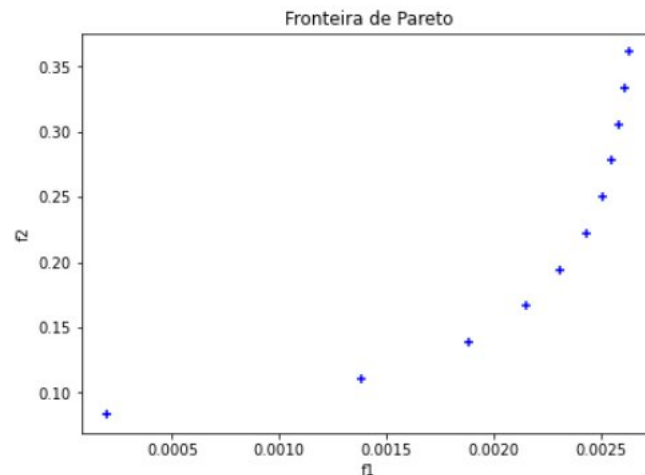
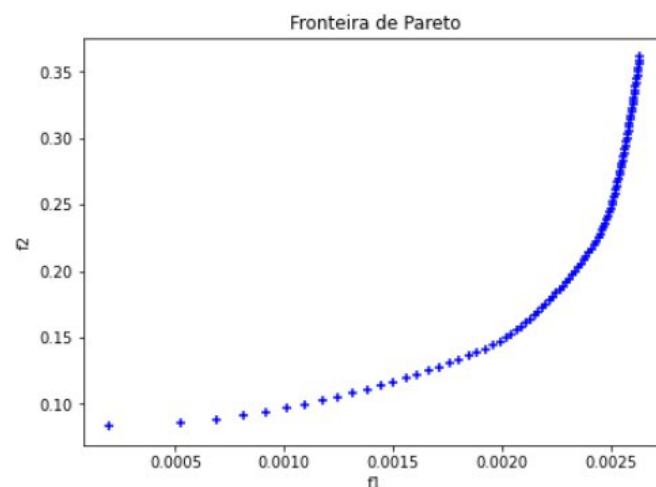


Figura 5: Método Epsilon Restrito com discretização de 101 pontos na Fronteira de Pareto

Método das Epsilon-restrições:
Pontos: 101
Dispersao: 0.08151225732578707



Diferente do Método Ponderações, observamos no Método Epsilon Restrito melhor distribuição dos pontos na Fronteira de Pareto, independente da variação da quantidade de pontos utilizados. Além disso, observasse maior acumulo de pontos na discretização na maximização do Lucro e Risco e menor discretização na minimização. Esse comportamento ocorre pois o método apresenta mais facilidade na resolução de problemas que não são convexos.

Comparação entre os Métodos das Ponderações e Epsilon Restrito

A comparação dos métodos permite encontrar qual o melhor método para determinado problema apresentado. Anteriormente foram apresentados separadamente cada método com mudanças na quantidades de pontos na Fronteira de Pareto, mas na Figura 6 e Figura 7 os métodos estão juntos, sendo representado pelo ponto em azul o Ponderações e em verde Epsilon Restrito. Foram acrescentados o Método do Critério Global com o ponto preto e a Solução Utópica em vermelho.

Figura 6: Comparação entre os Métodos das Ponderações, Epsilon Restrito, Critério Global e Solução Utópica com discretização de 11 pontos na Fronteira de Pareto

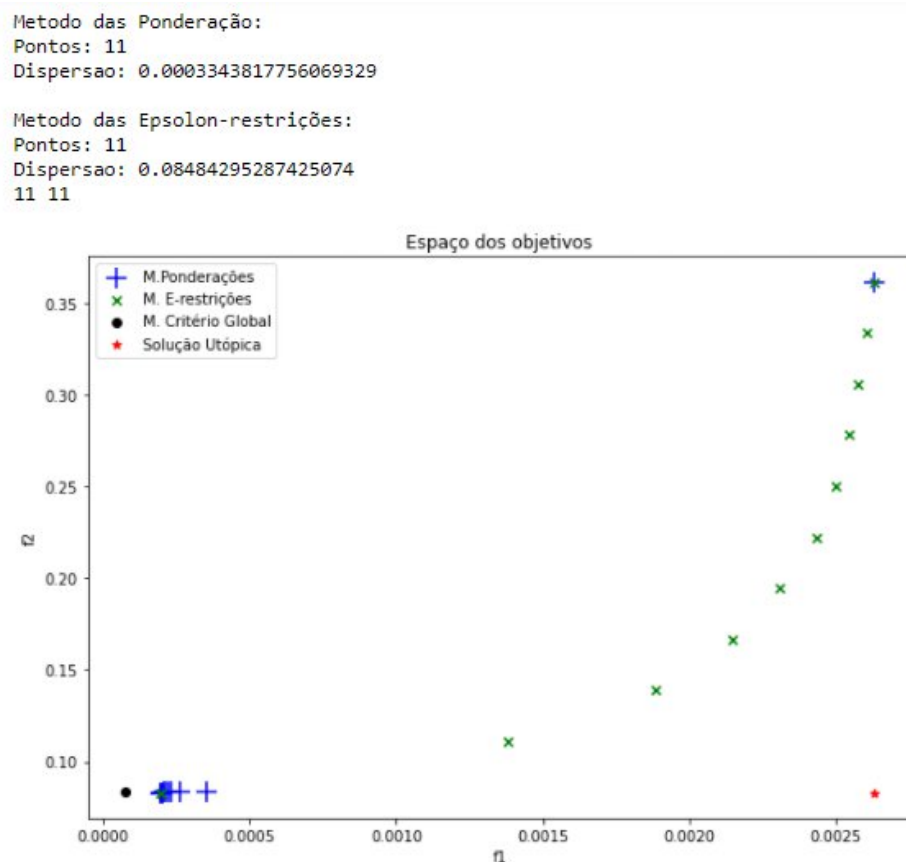
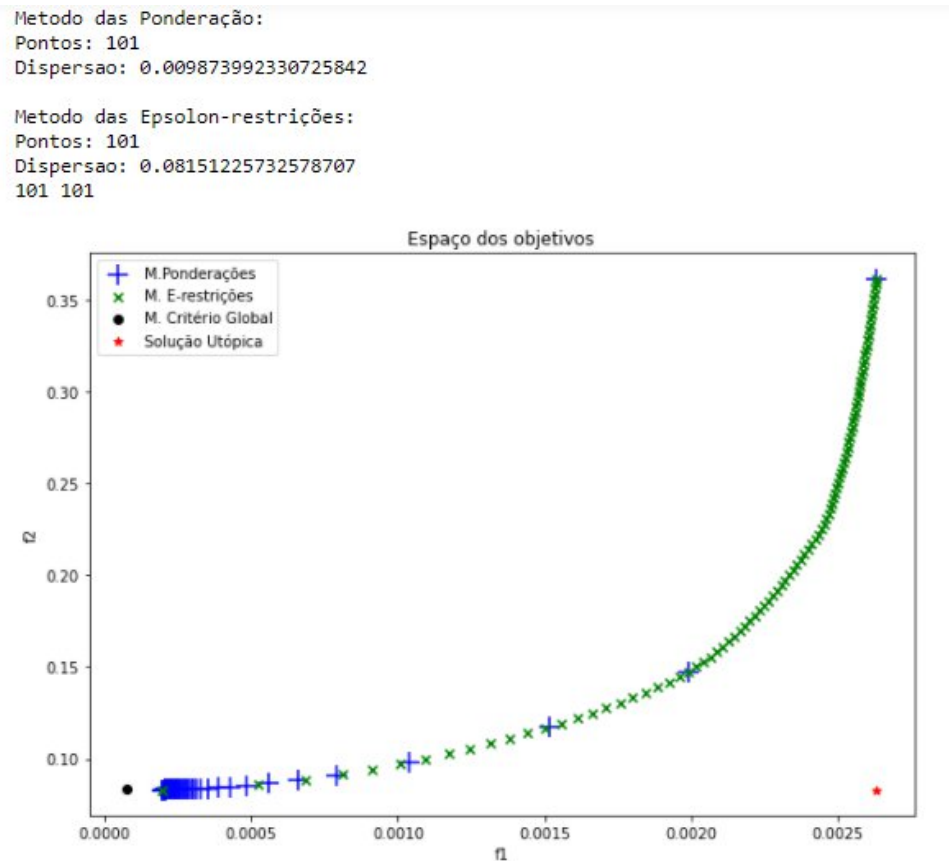


Figura 7: Comparação entre os Métodos das Ponderações, Epsilon Restrito, Critério Global e Solução Utópica com discretização de 101 pontos na Fronteira de Pareto



Quando falamos de otimização multi-critério, o que queremos é encontrar na Fronteira de Pareto uma grande quantidade de soluções e espalhados de forma homogênea, porque dessa forma podemos oferecer ao decisor um conjunto de possibilidades para tomada de decisão. Esses dois métodos são classificados como a posteriori, por justamente encontrar as soluções do processo de otimização do problema e em seguida o decisor atua na escolha da melhor solução desejada.

O método E-Restrito apresentou melhor desempenho na discretização da Fronteira de Pareto comparado ao método das Ponderações, pois com o mesmo número de pontos foram obtidos menores índices de Dispersão entre os pontos na fronteira e menos espaços sem discretização. A melhora no desempenho do método ocorre por não precisar que a Fronteira seja convexa.

O ponto em vermelho apresenta a Solução Utópica e o ponto preto representa a solução do Método do Critério Global. A distância entre esses dois pontos representa a menor distância entre qualquer outro ponto na Fronteira de Pareto.

Programação por Metas

Outro método aplicado para a carteira de investimentos é a Programação por metas que fornece apenas um resultado na solução do problema. Existem diferentes abordagens para esse método, mas foram aplicados apenas o método clássico e o Lexicographic.

Com o método clássico podemos observar na Figura 8 os resultados presentes para função objetivo, os valores dos desvios negativos e positivos e qual a fração de investimento dos Ativos na quarta casa decimal (não faz sentido utilizar Ativos com resultados menores) a serem investidos para a solução. A visualização do resultado está na Figura 9.

Figura 8: Resultado da Programação por Metas abordagem clássica

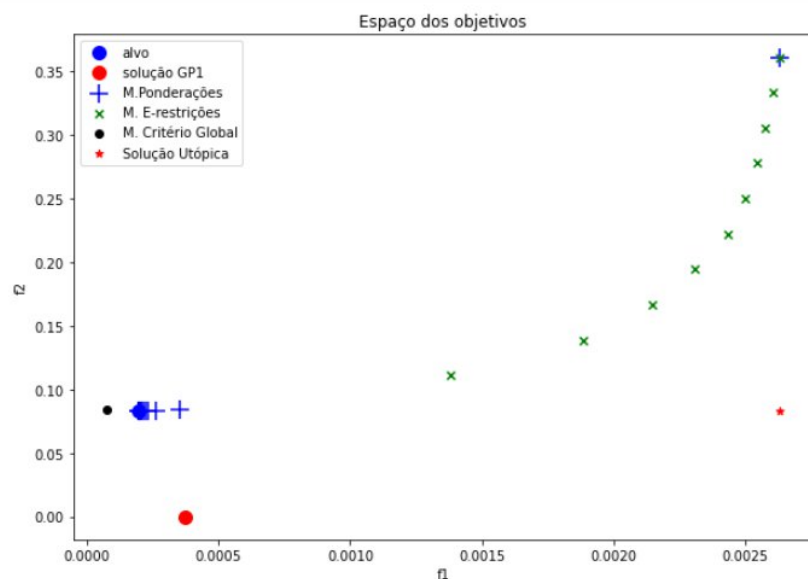
```
f1 = 0.00017916227551447112
f2 = 0.08315000473621051

p1 = 0.0
n1 = 0.0003746097950196621
p2 = 8.14260947537116e-06
n2 = 0.0

O primeiro objetivo é *underachieved* por: 0.0003746097950196621
O segundo objetivo é *overachieved* por: 8.14260947537116e-06

Ativo 7, investimento de 0.1763
Ativo 9, investimento de 0.1074
Ativo 15, investimento de 0.1926
Ativo 34, investimento de 0.1205
Ativo 38, investimento de 0.0619
Ativo 42, investimento de 0.3412
Total de Ativos investidos: 1.0000
```

Figura 9: Programação por Metas abordagem clássica com os Métodos das Ponderações, Epsilon Restrito, Critério Global e Solução Utópica com discretização de 11 pontos na Fronteira de Pareto



Com o Lexicographic podemos observar na Figura 10 os resultados presentes para função objetivo, satisfazendo totalmente Primeira Função de maximização do Lucro, com a fração de investimento dos Ativos a serem investidos para a solução e a visualização do resultado está na Figura 11.

Figura 10: Resultado da Programação por Metas abordagem Lexicographic satisfazendo totalmente Primeira Função

```
f1 = -0.0001954450707874692
f2 = 0.08615406998813367

p1 = 0.0
n1 = 0.0
p2 = 0.0030121882200908573
n2 = 0.0

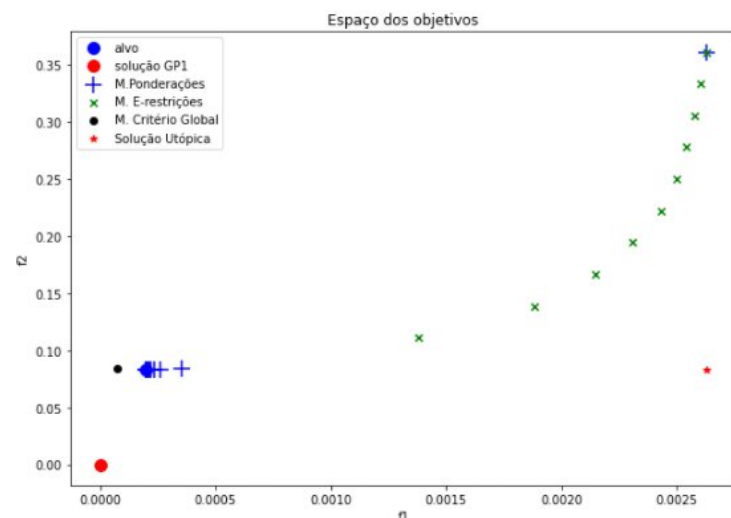
O primeiro objetivo é totalmente satisfeito.
O segundo objetivo é *overachieved* por: 0.0030121882200908573
Somatória dos ativos: <generator object <genexpr> at 0x0000018152E5DB30>

Ativo 1, investimento de 0.0028
Ativo 7, investimento de 0.1403
Ativo 9, investimento de 0.1181
Ativo 15, investimento de 0.1819
Ativo 25, investimento de 0.1054
Ativo 34, investimento de 0.0175
Ativo 38, investimento de 0.0875
Ativo 42, investimento de 0.3465
Total de Ativos investidos: 1.0000
```

Figura 9: Programação por Metas abordagem Lexicographic satisfazendo totalmente Primeira Função

```
Metodo das Ponderações:
Pontos: 11
Dispersao: 0.0003343817756069329

Metodo das Epsilon-restrições:
Pontos: 11
Dispersao: 0.08484295287425074
11 11
```



Com o Lexicographic podemos observar na Figura 12 os resultados presentes para função objetivo, satisfazendo totalmente Segunda Função de Minimização do Risco, com a fração de investimento dos Ativos a serem investidos para a solução e a visualização do resultado está na Figura 13.

Figura 12: Resultado da Programação por Metas abordagem Lexicographic satisfazendo totalmente Segunda Função

```
f1 = 0.00019353591786927944
f2 = 0.08314195204355741

p1 = 0.0
n1 = 0.00038898195700626026
p2 = 0.0
n2 = 0.0

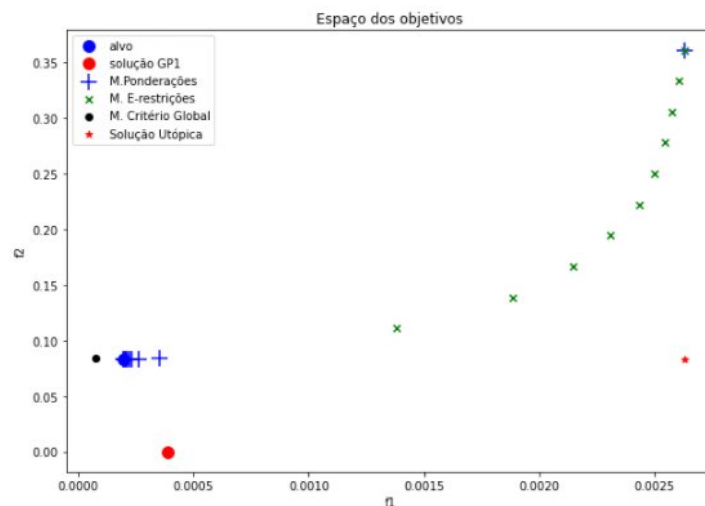
O primeiro objetivo é *underachieved* por: 0.00038898195700626026
O segundo objetivo é totalmente satisfeito.

Ativo 7, investimento de 0.1743
Ativo 9, investimento de 0.1073
Ativo 15, investimento de 0.1927
Ativo 34, investimento de 0.1275
Ativo 38, investimento de 0.0591
Ativo 42, investimento de 0.3392
Total de Ativos investidos: 1.0000
```

Figura 13: Programação por Metas abordagem Lexicographic satisfazendo totalmente Segunda Função

```
Metodo das Ponderações:
Pontos: 11
Dispersao: 0.0003343817756069329

Metodo das Epsilon-restrições:
Pontos: 11
Dispersao: 0.08484295287425074
11 11
```



Utilizando o método Goal Programming com abordagem Lexicographic encontramos os valores para cada função objetivo com diferentes tipos de prioridade, seja na maximização do lucro ou na minimização do risco. Esse método é classificado com a priori, ou seja, diferente dos dois métodos aplicados anteriormente em que o decisor recebe uma grande quantidade de soluções para posteriormente decidir qual Ativo investir, o método Goal Programming fornece apenas uma solução para o decisor.