

Cálculo Diferencial e Integral I

Resumo

Rafael Rodrigues

LEIC
Instituto Superior Técnico
2023/2024

Contents

1	NÚMEROS REAIS:	
	REVISÕES E PROPRIEDADES	3
1.1	Propriedades dos Números Reais	3
1.1.1	Propriedades Básicas das Operações	3
1.1.2	Majorantes e Minorantes	3
1.1.3	Supremo e Ínfimo	3
1.1.4	Máximo e Mínimo	4
1.2	Módulo	4
1.2.1	Propriedades do Módulo	4
1.2.2	Inequações com Módulos	4
1.2.3	Vizinhança	4
1.3	Método de Indução	4
1.3.1	Demonstração	5
1.4	Somatórios	5
1.4.1	Propriedades do Somatório	5
2	FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL:	
	LIMITE E CONTINUIDADE	6
2.1	Classes de funções elementares	6
2.2	Funções Injetivas e suas Inversas	6
2.3	Limite de uma função num ponto	6
2.4	Propriedades do Limite de Funções num Ponto	6
2.5	Limites Relativos e Laterais	6
2.6	Limites na recta acabada	6
2.7	Continuidade de Funções Reais de Variável Real	6
2.8	Algumas Propriedades Locais das Funções Contínuas	6
2.9	Propriedades Globais das Funções Contínuas	6
3	CÁLCULO DIFERENCIAL	7
4	PRIMITIVAÇÃO	8
4.1	Definição de Primitiva e Aplicações	8
4.2	Primitivas Imediatas	8
4.3	Primitivas Quase-Imediatas	8
4.4	Primitivação por Partes	8
4.5	Primitivas de Funções Racionais	8
4.6	Primitivação por Substituição	8
4.7	Primitivação de Funções Polinomiais de Senos e Cossenos	8
4.8	Primitivação de Funções Racionais de Senos e Cossenos	8
4.9	Resolução de equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis	8
5	CÁLCULO INTEGRAL	9
5.1	Motivação para a Noção de Integral	9
5.2	Partições, Somas Inferiores e Superiores	9
5.3	Integral Superior e Inferior	9
5.4	Funções Integráveis e Nao-Integráveis	9
5.5	Critérios de integrabilidade e exemplos	9
5.6	Propriedades do integral	9
5.7	Integral Indefinido	9

5.8	Teorema Fundamental do Calculo. Regra de Barrow	9
5.9	Algumas aplicações do integral	9
6	SUCESSÕES E SÉRIES	10
6.1	SUCESSÕES	10
6.1.1	Introdução e exemplos	10
6.1.2	Limite de uma Sucessão	10
6.1.3	Propriedades do Limite de Sucessões	10
6.1.4	Sucessões Monótonas e Limitadas	10
6.1.5	Escala de Sucessões	10
6.2	SÉRIES NUMÉRICAS	10
6.2.1	Introdução e exemplos	10
6.2.2	Operações algébricas sobre séries	10
6.2.3	Condição necessária para convergência	10
6.2.4	Séries de Termos Não-Negativos e Critérios de Convergência	10
6.2.5	Convergência Simples e Absoluta	10
6.2.6	Séries Alternadas e Critérios de Convergência	10
6.3	SÉRIES DE POTÊNCIAS	10
6.3.1	Definições e resultados gerais	10
6.3.2	Séries de Taylor	10

1 NÚMEROS REAIS: REVISÕES E PROPRIEDADES

1.1 Propriedades dos Números Reais

- Números Naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Números Inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Números Racionais: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

1.1.1 Propriedades Básicas das Operações

1. Propriedades da Soma:

- Propriedade Comutativa: $a + b = b + a$
- Propriedade Associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Elemento Neutro: $a + 0 = 0 + a = a$
- Elemento Simétrico: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

2. Propriedades da Produto

- Propriedade Comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
- Propriedade Associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Elemento Neutro: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- Elemento Inverso: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \quad \left(\frac{1}{a} = a^{-1} \right)$
- Propriedade Distributiva: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

3. Propriedades da Relação (Ordem)

- Relação de ordem: ?
- Compatibilidade da Soma: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Compatibilidade do Produto: $a \leq b$ e $c > 0$ então $ac \leq bc$

1.1.2 Majorantes e Minorantes

Seja $A \subset \mathbb{R}$:

- A diz-se *majorado* se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para qualquer $x \in A$ (ou seja, $A \subseteq]-\infty, b]$). Neste caso, b diz-se um majorante de A .
- A diz-se *minorado* se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$, para qualquer $x \in A$ (ou seja, $A \subseteq [a, +\infty[$). Neste caso, a diz-se um minorante de A .
- A diz-se *limitado* se é majorado e minorado. Neste caso, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x \leq b$, para qualquer $x \in A$ (ou seja $A \subset [a, b]$).

1.1.3 Supremo e Ínfimo

Seja $A \subset \mathbb{R}$:

- Chama-se *supremo* de A ($\sup A$) ao menor dos majorantes de A , se existir.
- Chama-se *ínfimo* de A ($\inf A$) ao maior dos minorantes de A , se existir.

1.1.4 Máximo e Mínimo

Definimos o *máximo* e *mínimo* de um conjunto como o maior e o menor dos seus elementos (se existirem). Isto é equivalente a dizer que:

- $\max A = M$ se M é majorante e $M \in A$;
- $\min A = m$ se m é minorante e $m \in A$.

1.2 Módulo

O módulo ou valor absoluto de um número real $x \in \mathbb{R}$ é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

1.2.1 Propriedades do Módulo

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x|^2 = |x^2| = x^2$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $x^2 < a^2 \Leftrightarrow |x| < |a|$

1.2.2 Inequações com Módulos

Geralmente, com expressões algébricas tem-se:

$$\begin{aligned} |f(x)| < g(x) &\Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) > -g(x) \wedge f(x) < g(x) \\ |f(x)| > g(x) &\Leftrightarrow f(x) < -g(x) \vee f(x) > g(x) \end{aligned}$$

1.2.3 Vizinhança

Define-se a *vizinhança* de *centro* a e *raio* $R > 0$,

$$V_R(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < R\} =]a - R, a + R[$$

como o conjunto dos pontos cuja distância a a é inferior a R .

1.3 Método de Indução

Seja $P(n)$ uma proposição para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que:

1. $P(1)$ é verdadeira;
2. sempre que $P(n)$ é verdadeira para *algum* n , então $P(n + 1)$ também é verdadeira.

Então conclui-se que $P(n)$ é verdadeira para *todo* o $n \in \mathbb{N}$.

1.3.1 Demonstração

1. Verificar que $P(1)$ é verdadeiro. (*base de indução*)
2. Assumindo que $P(n)$ é verdadeiro (*hipótese de indução*) provar que $P(n+1)$ é verdadeiro. (*tese*)

1.4 Somatórios

1.4.1 Propriedades do Somatório

- Propriedade aditiva: $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$
- Homogeneidade: $\sum_{k=1}^n (ca_k) = c \sum_{k=1}^n a_k$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$
- Propriedade telescópica: $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$
- $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=p+1}^{p+n} a_{k-p}$ para qualquer $p \in \mathbb{N}$

2 FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL: LIMITE E CONTINUIDADE

2.1 Classes de funções elementares

- Função Polinomial
- Função Racional
- Função Exponencial
- Funções Trigonométricas:
 - Seno:
 - Cosseno:
 - Tangente:
 - Cotangente:
- Funções Hiperbólicas:
 - Seno:
 - Cosseno:
- Função de Heaviside
- Função de Dirichlet
- Função Composta

2.2 Funções Injetivas e suas Inversas

Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *injetiva* se, para qualquer valor do contradomínio $y \in f(D)$, existir

2.3 Limite de uma função num ponto

2.4 Propriedades do Limite de Funções num Ponto

2.5 Limites Relativos e Laterais

2.6 Limites na recta acabada

2.7 Continuidade de Funções Reais de Variável Real

2.8 Algumas Propriedades Locais das Funções Contínuas

2.9 Propriedades Globais das Funções Contínuas

3 CÁLCULO DIFERENCIAL

4 PRIMITIVAÇÃO

- 4.1 Definição de Primitiva e Aplicações
- 4.2 Primitivas Imediatas
- 4.3 Primitivas Quase-Imediatas
- 4.4 Primitivação por Partes
- 4.5 Primitivas de Funções Racionais
- 4.6 Primitivação por Substituição
- 4.7 Primitivação de Funções Polinomiais de Senos e Cossenos
- 4.8 Primitivação de Funções Racionais de Senos e Cossenos
- 4.9 Resolução de equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis

5 CÁLCULO INTEGRAL

- 5.1 Motivação para a Noção de Integral
- 5.2 Partições, Somas Inferiores e Superiores
- 5.3 Integral Superior e Inferior
- 5.4 Funções Integráveis e Nao-Integráveis
- 5.5 Critérios de integrabilidade e exemplos
- 5.6 Propriedades do integral
- 5.7 Integral Indefinido
- 5.8 Teorema Fundamental do Calculo. Regra de Barrow
- 5.9 Algumas aplicações do integral

6 SUCESSÕES E SÉRIES

6.1 SUCESSÕES

6.1.1 Introdução e exemplos

6.1.2 Limite de uma Sucessão

6.1.3 Propriedades do Limite de Sucessões

6.1.4 Sucessões Monótonas e Limitadas

6.1.5 Escala de Sucessões

6.2 SÉRIES NUMÉRICAS

6.2.1 Introdução e exemplos

6.2.2 Operações algébricas sobre séries

6.2.3 Condição necessária para convergência

6.2.4 Séries de Termos Não-Negativos e Critérios de Convergência

6.2.5 Convergência Simples e Absoluta

6.2.6 Séries Alternadas e Critérios de Convergência

6.3 SÉRIES DE POTÊNCIAS

6.3.1 Definições e resultados gerais

6.3.2 Séries de Taylor