

# **Cálculo Diferencial e Integral I**

Resumo

**Rafael Rodrigues**

LEIC  
Instituto Superior Técnico  
2022/2023

# Contents

<b>1</b>	<b>NÚMEROS REAIS:</b>	
	<b>REVISÕES E PROPRIEDADES</b>	<b>3</b>
1.1	Propriedades dos Números Reais . . . . .	3
1.1.1	Propriedades Básicas das Operações . . . . .	3
1.1.2	Majorantes e Minorantes . . . . .	3
1.1.3	Supremo e Ínfimo . . . . .	3
1.1.4	Máximo e Mínimo . . . . .	4
1.2	Módulo . . . . .	4
1.2.1	Propriedades do Módulo . . . . .	4
1.2.2	Inequações com Módulos . . . . .	4
1.2.3	Vizinhança . . . . .	4
1.3	Método de Indução . . . . .	4
1.3.1	Demonstração . . . . .	5
1.4	Somatórios . . . . .	5
1.4.1	Propriedades do Somatório . . . . .	5
<b>2</b>	<b>FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL:</b>	
	<b>LIMITE E CONTINUIDADE</b>	<b>6</b>
2.1	Classes de funções elementares . . . . .	6
2.2	Funções Injetivas e suas Inversas . . . . .	6
2.3	Limite de uma função num ponto . . . . .	6
2.4	Propriedades do Limite de Funções num Ponto . . . . .	6
2.5	Limites Relativos e Laterais . . . . .	6
2.6	Limites na recta acabada . . . . .	6
2.7	Continuidade de Funções Reais de Variável Real . . . . .	6
2.8	Algumas Propriedades Locais das Funções Contínuas . . . . .	6
2.9	Propriedades Globais das Funções Contínuas . . . . .	6
<b>3</b>	<b>CÁLCULO DIFERENCIAL</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>PRIMITIVAÇÃO</b>	<b>8</b>
4.1	Definição de Primitiva e Aplicações . . . . .	8
4.2	Primitivas Imediatas . . . . .	8
4.3	Primitivas Quase-Imediatas . . . . .	8
4.4	Primitivação por Partes . . . . .	8
4.5	Primitivas de Funções Racionais . . . . .	8
4.6	Primitivação por Substituição . . . . .	8
4.7	Primitivação de Funções Polinomiais de Senos e Cossenos . . . . .	8
4.8	Primitivação de Funções Racionais de Senos e Cossenos . . . . .	8
4.9	Resolução de equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis . . . . .	8
<b>5</b>	<b>CÁLCULO INTEGRAL</b>	<b>9</b>
5.1	Motivação para a Noção de Integral . . . . .	9
5.2	Partições, Somas Inferiores e Superiores . . . . .	9
5.3	Integral Superior e Inferior . . . . .	9
5.4	Funções Integráveis e Nao-Integráveis . . . . .	9
5.5	Critérios de integrabilidade e exemplos . . . . .	9
5.6	Propriedades do integral . . . . .	9
5.7	Integral Indefinido . . . . .	9

5.8	Teorema Fundamental do Calculo. Regra de Barrow . . . . .	9
5.9	Algumas aplicações do integral . . . . .	9
<b>6</b>	<b>SUCESSÕES E SÉRIES</b>	<b>10</b>
6.1	SUCESSÕES . . . . .	10
6.1.1	Introdução e exemplos . . . . .	10
6.1.2	Limite de uma Sucessão . . . . .	10
6.1.3	Propriedades do Limite de Sucessões . . . . .	10
6.1.4	Sucessões Monótonas e Limitadas . . . . .	10
6.1.5	Escala de Sucessões . . . . .	10
6.2	SÉRIES NUMÉRICAS . . . . .	10
6.2.1	Introdução e exemplos . . . . .	10
6.2.2	Operações algébricas sobre séries . . . . .	10
6.2.3	Condição necessária para convergência . . . . .	10
6.2.4	Séries de Termos Não-Negativos e Critérios de Convergência . . . . .	10
6.2.5	Convergência Simples e Absoluta . . . . .	10
6.2.6	Séries Alternadas e Critérios de Convergência . . . . .	10
6.3	SÉRIES DE POTÊNCIAS . . . . .	10
6.3.1	Definições e resultados gerais . . . . .	10
6.3.2	Séries de Taylor . . . . .	10

# 1 NÚMEROS REAIS: REVISÕES E PROPRIEDADES

## 1.1 Propriedades dos Números Reais

- Números Naturais:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Números Inteiros:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Números Racionais:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

### 1.1.1 Propriedades Básicas das Operações

#### 1. Propriedades da Soma:

- Propriedade Comutativa:  $a + b = b + a$
- Propriedade Associativa:  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Elemento Neutro:  $a + 0 = 0 + a = a$
- Elemento Simétrico:  $a + (-a) = (-a) + a = 0$

#### 2. Propriedades da Produto

- Propriedade Comutativa:  $a \cdot b = b \cdot a$
- Propriedade Associativa:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Elemento Neutro:  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- Elemento Inverso:  $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \quad \left( \frac{1}{a} = a^{-1} \right)$
- Propriedade Distributiva:  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

#### 3. Propriedades da Relação (Ordem)

- Relação de ordem: ?
- Compatibilidade da Soma:  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- Compatibilidade do Produto:  $a \leq b$  e  $c > 0$  então  $ac \leq bc$

### 1.1.2 Majorantes e Minorantes

Seja  $A \subset \mathbb{R}$ :

- $A$  diz-se *majorado* se existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq b$ , para qualquer  $x \in A$  (ou seja,  $A \subseteq ]-\infty, b]$ ). Neste caso,  $b$  diz-se um majorante de  $A$ .
- $A$  diz-se *minorado* se existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $x \geq a$ , para qualquer  $x \in A$  (ou seja,  $A \subseteq [a, +\infty[$ ). Neste caso,  $a$  diz-se um minorante de  $A$ .
- $A$  diz-se *limitado* se é majorado e minorado. Neste caso, existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a \leq x \leq b$ , para qualquer  $x \in A$  (ou seja  $A \subset [a, b]$ ).

### 1.1.3 Supremo e Ínfimo

Seja  $A \subset \mathbb{R}$ :

- Chama-se *supremo* de  $A$  ( $\sup A$ ) ao menor dos majorantes de  $A$ , se existir.
- Chama-se *ínfimo* de  $A$  ( $\inf A$ ) ao maior dos minorantes de  $A$ , se existir.

### 1.1.4 Máximo e Mínimo

Definimos o *máximo* e *mínimo* de um conjunto como o maior e o menor dos seus elementos (se existirem). Isto é equivalente a dizer que:

- $\max A = M$  se  $M$  é majorante e  $M \in A$ ;
- $\min A = m$  se  $m$  é minorante e  $m \in A$ .

## 1.2 Módulo

O módulo ou valor absoluto de um número real  $x \in \mathbb{R}$  é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

### 1.2.1 Propriedades do Módulo

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x|^2 = |x^2| = x^2$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $x^2 < a^2 \Leftrightarrow |x| < |a|$

### 1.2.2 Inequações com Módulos

Geralmente, com expressões algébricas tem-se:

$$\begin{aligned} |f(x)| < g(x) &\Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) > -g(x) \wedge f(x) < g(x) \\ |f(x)| > g(x) &\Leftrightarrow f(x) < -g(x) \vee f(x) > g(x) \end{aligned}$$

### 1.2.3 Vizinhança

Define-se a *vizinhança* de *centro*  $a$  e *raio*  $R > 0$ ,

$$V_R(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < R\} = ]a - R, a + R[$$

como o conjunto dos pontos cuja distância a  $a$  é inferior a  $R$ .

## 1.3 Método de Indução

Seja  $P(n)$  uma proposição para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Suponhamos que:

1.  $P(1)$  é verdadeira;
2. sempre que  $P(n)$  é verdadeira para *algum*  $n$ , então  $P(n + 1)$  também é verdadeira.

Então conclui-se que  $P(n)$  é verdadeira para *todo* o  $n \in \mathbb{N}$ .

### 1.3.1 Demonstração

1. Verificar que  $P(1)$  é verdadeiro. (*base de indução*)
2. Assumindo que  $P(n)$  é verdadeiro (*hipótese de indução*) provar que  $P(n+1)$  é verdadeiro. (*tese*)

## 1.4 Somatórios

### 1.4.1 Propriedades do Somatório

- Propriedade aditiva:  $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$
- Homogeneidade:  $\sum_{k=1}^n (ca_k) = c \sum_{k=1}^n a_k$  para qualquer constante  $c \in \mathbb{R}$
- Propriedade telescópica:  $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$
- $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=p+1}^{p+n} a_{k-p}$  para qualquer  $p \in \mathbb{N}$

## 2 FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL: LIMITE E CONTINUIDADE

### 2.1 Classes de funções elementares

- Função Polinomial
- Função Racional
- Função Exponencial
- Funções Trigonométricas:
  - Seno:
  - Cosseno:
  - Tangente:
  - Cotangente:
- Funções Hiperbólicas:
  - Seno:
  - Cosseno:
- Função de Heaviside
- Função de Dirichlet
- Função Composta

### 2.2 Funções Injetivas e suas Inversas

Uma função  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *injetiva* se, para qualquer valor do contradomínio  $y \in f(D)$ , existir

### 2.3 Limite de uma função num ponto

### 2.4 Propriedades do Limite de Funções num Ponto

### 2.5 Limites Relativos e Laterais

### 2.6 Limites na recta acabada

### 2.7 Continuidade de Funções Reais de Variável Real

### 2.8 Algumas Propriedades Locais das Funções Contínuas

### 2.9 Propriedades Globais das Funções Contínuas

### 3 CÁLCULO DIFERENCIAL



## 4 PRIMITIVAÇÃO

- 4.1 Definição de Primitiva e Aplicações
- 4.2 Primitivas Imediatas
- 4.3 Primitivas Quase-Imediatas
- 4.4 Primitivação por Partes
- 4.5 Primitivas de Funções Racionais
- 4.6 Primitivação por Substituição
- 4.7 Primitivação de Funções Polinomiais de Senos e Cossenos
- 4.8 Primitivação de Funções Racionais de Senos e Cossenos
- 4.9 Resolução de equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis

## 5 CÁLCULO INTEGRAL

- 5.1 Motivação para a Noção de Integral
- 5.2 Partições, Somas Inferiores e Superiores
- 5.3 Integral Superior e Inferior
- 5.4 Funções Integráveis e Nao-Integráveis
- 5.5 Critérios de integrabilidade e exemplos
- 5.6 Propriedades do integral
- 5.7 Integral Indefinido
- 5.8 Teorema Fundamental do Calculo. Regra de Barrow
- 5.9 Algumas aplicações do integral

## 6 SUCESSÕES E SÉRIES

### 6.1 SUCESSÕES

#### 6.1.1 Introdução e exemplos

#### 6.1.2 Limite de uma Sucessão

#### 6.1.3 Propriedades do Limite de Sucessões

#### 6.1.4 Sucessões Monótonas e Limitadas

#### 6.1.5 Escala de Sucessões

### 6.2 SÉRIES NUMÉRICAS

#### 6.2.1 Introdução e exemplos

#### 6.2.2 Operações algébricas sobre séries

#### 6.2.3 Condição necessária para convergência

#### 6.2.4 Séries de Termos Não-Negativos e Critérios de Convergência

#### 6.2.5 Convergência Simples e Absoluta

#### 6.2.6 Séries Alternadas e Critérios de Convergência

### 6.3 SÉRIES DE POTÊNCIAS

#### 6.3.1 Definições e resultados gerais

#### 6.3.2 Séries de Taylor