

Cálculo Diferencial e Integral III

Resumo

Rafael Rodrigues

LEIC
Instituto Superior Técnico
2023/2024

Contents

1	Equações Diferenciais Ordinárias	2
1.1	Equações Escalares de 1ª Ordem	2
1.1.1	Equações Lineares	2
1.1.2	Equações Separáveis	2
1.1.3	Equações Exatas	2
1.1.4	Equações Redutíveis a Exatas	2
1.2	Equações Diferenciais Ordinárias de Ordem n	3
1.2.1	Equações Lineares de Ordem n	3
1.3	Equações Vetoriais de 1ª Ordem	3
1.3.1	Equações Vetoriais Lineares — Caso Homogéneo	3
1.3.2	Equações Vetoriais Lineares — Caso não Homogéneo	3
1.3.3	Exponencial de uma Matriz	3
1.4	Equações Lineares de Ordem n — Caso não Homogéneo	3
1.5	Existência, Unicidade, Prolongamento de Soluções	3
2	Teoremas da Divergência e de Stokes	4
2.1	Superfícies em \mathbb{R}^3	4
2.1.1	Definição de Superfície	4
2.1.2	Reta Normal	4
2.1.3	Plano Tangente	4
2.2	Integrais de Superfície	4
2.3	Operadores Diferenciais	4
2.3.1	Divergência	4
2.3.2	Rotacional	4
2.4	Fluxo de um Campo Vetorial	5
2.4.1	Teorema de Divergência	5
2.5	Teorema de Stokes	5
2.5.1	Trabalho	5
2.5.2	Potencial Vetorial	5
3	Séries de Fourier	6
3.1	Teorema da Convergência Pontual	6
3.2	Série de Senos	6
3.3	Série de Cossenos	6
4	Introdução às Equações Diferenciais Parciais	7
4.1	Método de Separação de Variáveis	7
5	Extras	8
5.1	Mudança de Variáveis de Integração	8
5.1.1	Coordenadas Polares	8
5.1.2	Coordenadas Cilíndricas	8
5.1.3	Coordenadas Esféricas	8

1 Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Equações Escalares de 1ª Ordem

1.1.1 Equações Lineares

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

1. Verificar que está escrita na forma linear
2. Determinar o fator integrante: $\mu(t) = \exp\left(\int a(t) dt\right)$
3. Determinar y : $y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)b(t) dt + C$

1.1.2 Equações Separáveis

$$f(y) \frac{dy}{dt} = g(t) \Leftrightarrow f(y) dy = g(t) dt$$

1. Verificar que está escrita na forma separável
2. Integrar ambos os membros da igualdade: $\int f(y) dy = \int g(t) dt + C$

1.1.3 Equações Exatas

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow M(t, y) dt + N(t, y) dy = 0$$

1. Verificar se a equação é exata: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \exists \Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \Phi(t, y) = (M, N)$
2. Encontrar um potencial para $\Phi(t, y)$:

$$\begin{cases} \Phi = \int M dx \\ \Phi = \int N dy \end{cases} \Rightarrow \Phi = C$$

3. Isolar o y

1.1.4 Equações Redutíveis a Exatas

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

1. Quando a equação não é exata: $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$

2. Calcular as razões:

$$\frac{M_y - N_t}{N} \quad \text{e} \quad \frac{N_t - M_y}{M}$$

3. Escolher a razão que depender apenas de uma variável e calcular o **fator integrante**:

$$\mu = \exp\left(\int \text{razão escolhida}\right)$$

4. Resolver a **equação exata**: $\mu M(t, y) + \mu N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$

1.2 Equações Diferenciais Ordinárias de Ordem n

1.2.1 Equações Lineares de Ordem n

TODO

$$y(t) = y_G(t) + y_P(t)$$

1. Cálculo de y_G :

- (a) Escrever o **polinómio característico**
- (b) Calcular as suas raízes

2. Cálculo de y_P (caso não homogéneo):

(a)

Raíz	Multiplicidade	Solução
λ	m	$\sum_{n=0}^{m-1} c t^n e^{\lambda t}$
$\alpha \pm i \beta$	m	$\sum_{n=0}^{m-1} c_1 t^n e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 t^n e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

1.3 Equações Vetoriais de 1^a Ordem

1.3.1 Equações Vetoriais Lineares — Caso Homogéneo

TODO

1.3.2 Equações Vetoriais Lineares — Caso não Homogéneo

TODO

Exercício 1 e 2 da Aula Prática 5

1.3.3 Exponencial de uma Matriz

TODO

Exercício 1 da Aula Prática 4

Verificação:

- $e^{At}|_{t=0} = I$
- $\frac{d}{dt} e^{At}|_{t=0} = A$

1.4 Equações Lineares de Ordem n — Caso não Homogéneo

TODO

Exercícios 1 e 2 da Aula Prática 5

1.5 Existência, Unicidade, Prolongamento de Soluções

TODO

Exercícios 3, 4 e 5 da Aula Prática 5

Exercícios 1 e 2 da Aula Prática 6 (Ficha 5b)

2 Teoremas da Divergência e de Stokes

2.1 Superfícies em \mathbb{R}^3

2.1.1 Definição de Superfície

TODO

2.1.2 Reta Normal

- No caso de uma parametrização $g(u, v)$:

$$\vec{N} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial u} \\ \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- No caso de um conjunto de nível $G(x, y, z) = 0$:

$$\vec{N} = \vec{\nabla} G$$

O vetor normal unitário é dado por:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$$

2.1.3 Plano Tangente

A equação de um plano tangente a uma superfície num ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dada por:

$$\vec{N} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

2.2 Integrais de Superfície

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(g(u, v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

- Área

$$A = \iint_S dS$$

- Massa

$$M = \iint_S \sigma \, dS$$

- Centro de Massa:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S x(g(u, v)) \sigma \, dS \quad (\text{coordenada } x)$$

2.3 Operadores Diferenciais

2.3.1 Divergência

$$\operatorname{div} F = \vec{\nabla} \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

2.3.2 Rotacional

$$\operatorname{rot} F = \vec{\nabla} \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

2.4 Fluxo de um Campo Vetorial

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \vec{F}(g(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right) du dv$$

1. Parametrizar a superfície

2.4.1 Teorema de Divergência

Seja S a **superfície fechada**, orientada **positivamente** (p/ fora), fronteira de uma região sólida E .

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} dV$$

2.5 Teorema de Stokes

Seja S uma **superfície orientada**, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada e com orientação positiva.

$$\oint_C \vec{F} dg = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} dS = \iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{N} du dv$$

2.5.1 Trabalho

$$W = \oint_C \vec{F} dg = \int_a^b \vec{F}(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

2.5.2 Potencial Vetorial

Diz-se que \vec{G} é potencial vetorial de \vec{F} se $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{G}$

1. Verificar que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$
2. Resolver a equação $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{G}$:

$$\begin{aligned} (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) &= \operatorname{rot} \vec{G} \\ \Leftrightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) &= \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

3. Assumir que uma das componentes de G é nulo, (ex. G_2):

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) = \left(\frac{\partial G_3}{\partial y}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, -\frac{\partial G_1}{\partial y} \right)$$

4. Integrar as outras componente em ordem à variável corresponde ao componente anulado (ex. y):

$$\begin{aligned} \int \vec{F}_1 dy &= \int \frac{\partial G_3}{\partial y} dy \\ \int \vec{F}_3 dy &= \int -\frac{\partial G_1}{\partial y} dy \end{aligned}$$

3 Séries de Fourier

Seja $f(x)$ uma função f com extensão periódica \bar{f} com período $2L$:

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$\cos(x) = -\cos(x)$ (par)	$\cos(n\pi) = (-1)^n$	$\int_a^b \cos(*x) = \left[\frac{\sin(*x)}{*} \right]_a^b$
$\sin(x) = -\sin(-x)$ (ímpar)	$\sin(n\pi) = 0$	$\int_a^b \sin(*x) = \left[-\frac{\cos(*x)}{*} \right]_a^b$

3.1 Teorema da Convergência Pontual

$$SFf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ é um ponto de continuidade de } f \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{se } x \text{ é um ponto de descontinuidade de } f \\ \frac{f(-L^+) + f(L^-)}{2} & \text{se } x = -L \text{ ou } x = L \end{cases}$$

3.2 Série de Senos

Quando a função $f(x)$ é **ímpar**:

$$S_{\sin}f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

3.3 Série de Cossenos

Quando a função $f(x)$ é **par**:

$$S_{\cos}f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

Integral por partes

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

4 Introdução às Equações Diferenciais Parciais

4.1 Método de Separação de Variáveis

$$u(t, x) = T(t)X(x)$$

Condição de fronteira (CF): $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ (t variável)

Condição inicial (CI): $u(0, x) = f(x)$ (t fixo = 0)

1. Substituir $u(t, x)$ na equação diferencial por $T(t)X(x)$
2. Separar as variáveis dos dois lados da igualdade:

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}$$

3. Igualar os dois lados da equação a lambda (λ):

$$\frac{T'}{T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

4. Analisar as condições de fronteira, sabendo que $T(t) \neq 0$:

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \Rightarrow X(0) = X(\pi) = 0$$

5. Construir os dois problemas (EDOs) a resolver:

$$\text{P1: } \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{se } x \in]0, \pi[$$

$$\text{P2: } \frac{T'}{T} = \lambda \Leftrightarrow T' = \lambda T \Leftrightarrow T' - \lambda T = 0 \Rightarrow P(R) = R - \lambda = 0$$

6. Resolver P1 testando as várias possibilidades para λ :

- $\lambda = 0$
- $\lambda > 0$
- $\lambda < 0$

7. Resolver P2 para os valores de λ obtidos anteriormente

8. Combinar os resultados obtidos, obtendo a solução do PVF:

$$u_k(t, x) = T_k(t)X_k(x) \Rightarrow u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k X_k$$

9. Calcular as constantes c_k utilizando a condição inicial:

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k = \text{CI}$$

10. Substituir os valores obtidos em $u(t, x)$

5 Extras

5.1 Mudança de Variáveis de Integração

5.1.1 Coordenadas Polares

$$\iint f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \, dr \, d\theta$$

5.1.2 Coordenadas Cilíndricas

$$\iiint f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \cdot r \, dz \, dr \, d\theta$$

5.1.3 Coordenadas Esféricas

$$\iiint f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) \cdot r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$$