Cálculo Diferencial e Integral II

Resumo

Rafael Rodrigues

LEIC
Instituto Superior Técnico
2023/2024

Contents

1 Limites e Continuidade

TODO

2 Diferenciabilidade

TODO

2.1 Gradiente

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

3 Derivada da Função Composta

3.1 Matriz Jacobiana

Para uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$D_f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

3.2 Cálculo da derivada

$$D(g \circ f)(a) = Dg\left(f(a)\right) \cdot Df(a)$$

3.3 Regra da Cadeia

4 Derivadas de Ordem Superior e Extremos

4.1 Pontos de estacionaridade (ou críticos)

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

4.2 Matriz Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & b = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ c = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & d = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = ad - cb$$

Classificação dos pontos críticos:

- $H_f(x,y) < 0 \;\to$ ponto em sela (indefinida)
- $H_f(x,y) > 0 \;\to$ extremo
  - $a, d > 0 \;\to (x,y)$ é um ponto mínimo (definida positiva)
  - $a, d < 0 \;\to (x,y)$ é um ponto máximo (definida negativa)
- $H_f(x,y) > 0 \;\to$ inconclusivo
  - $a, d \geq 0 \;\to (x,y)$ é um ponto mínimo ou ponto de sela (semi-definida positiva)
  - $a, d \leq 0 \;\to (x,y)$ é um ponto máximo ou ponto de sela (semi-definida negativa)

4.3 Teorema de Weierstrass

TODO Semana 6
Uma função f num conjunto compacto S tem máximo e mínimo.

5 Função Inversa e Função Implícita

5.1 Jacobiano

$$J_f(x,y) = \begin{vmatrix} a = \frac{\partial f_1}{\partial x} & b = \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ c = \frac{\partial f_2}{\partial x} & d = \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = ad - cb$$

TODO

6 Extremos Condicionados

6.1 Multiplicadores de Lagrange

TODO

$$\begin{cases} \nabla f = \sum_i^n \lambda_i \nabla F_i \\ F_1 = 0 \\ \quad\vdots \\ F_n = 0 \end{cases}$$

7 Teorema de Fubini

7.1 Aplicações do Integral

7.1.1 Volume e Centróide

O volume de um sólido é dado por:

$$V_S = \int_S 1$$

O seu **centróide** na coordenada x_i é dado por:

$$\overline{x_i} = \frac{1}{V_S} \cdot \int_S x_i$$

7.1.2 Massa de Sólido e Centro de massa

Para um sólido S e uma **função de densidade de massa** f:

$$M_S = \int_S f$$

O **centro de massa** na coordenada x_i é dado por:

$$\overline{x_i} = \frac{1}{M_S} \cdot \int_S x_i \, f$$

7.1.3 Momento de Inércia

O momento de inércia em relação a um eixo L é dado por:

$$I_L = \int_S f \cdot (\text{distância à lateral})^2$$

Por exemplo para o eixo xx teríamos:

$$I_x = \int_S f \cdot \left(y^2 + z^2\right)$$

8 Mudança de Variáveis de Integração

8.1 Coordenadas Polares

$$\iint f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) \cdot r\, dr\, d\theta$$

8.2 Coordenadas Cilíndricas

$$\iiint f\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right) \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$$

8.3 Coordenadas Esféricas

$$\iiint f\left(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi\right) \cdot r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

9 Regra de Leibniz

TODO Semana 11

10 Integrais de Linha

1. Parametrizar em função de t, ou seja, obter $g(t)$
2. Obter a derivada de g, ou seja, $g'(t) = \langle x'(t), y'(y)\rangle$
3. No caso do campo escalar, calcular $\|g'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

10.1 Campos Escalares

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f\left(g(t)\right) \cdot \left\|g'(t)\right\|\, dt$$

10.2 Campos Vetoriais

$$W = \int_C F\, dg = \int_a^b F\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\, dt$$

Trocar a orientação da curva troca o sinal do integral.

11 Campos Fechados. Campos Gradientes. Teorema Fundamental do Cálculo

11.1 Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha

$$\int_C F\, dg = \int_C \nabla\varphi\, dg = \varphi\left(g(b)\right) - \varphi\left(g(a)\right)$$

11.2 Campos Gradientes e Potenciais Escalares

Um campo vetorial diz-se gradiente se $F = \nabla\varphi$, neste caso a φ chama-se o **potencial escalar** de F.

$$\int_C \nabla\varphi \, dr = 0 \text{ , se a curva é fechada}$$

Para encontrar um potencial escalar:

$$\nabla\varphi = F \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = F_1 \\ \quad\vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = F_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \int F_1 \, dx_1 \\ \quad\vdots \\ \varphi = \int F_n \, dx_n \end{cases}$$

11.3 Campos Fechados e Campos Gradientes

Um campo vetorial diz-se fechado se DF é simétrica:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ ,} \forall \; i \neq j$$

Se um campo vetorial **é gradiente**, então **também é fechado**.

11.4 Condição Necessária e Suficiente para ser Gradiente

12 Homotopia e Teorema de Green

TODO Semana 13

$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dA$$