Cálculo Diferencial e Integral III

Resumo

Rafael Rodrigues

LEIC
Instituto Superior Técnico
2023/2024

Contents

1 Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Equações Escalares de 1ª Ordem

1.1.1 Equações Lineares

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

1. Verificar que está escrita na forma linear
2. Determinar o fator integrante: $\mu(t) = \exp\left(\int a(t)\,dt\right)$
3. Determinar y: $y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)b(t)\,dt + C$

1.1.2 Equações Separáveis

$$f(y)\frac{dy}{dt} = g(t) \Leftrightarrow f(y)\,dy = g(t)\,dt$$

1. Verificar que está escrita na forma separável
2. Integrar ambos os membros da igualdade: $\int f(y)\,dy = \int g(t)\,dt + C$

1.1.3 Equações Exatas

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0$$

1. Verificar se a equação é exata: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \exists\ \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\Phi(t,y) = (M,N)$
2. Encontrar um potencial para $\Phi(t,y)$:

$$\begin{cases} \Phi = \int M\,dx \\ \Phi = \int N\,dy \end{cases} \Rightarrow \Phi = C$$

3. Isolar o y

1.1.4 Equações Redutíveis a Exatas

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$$

1. Quando a equação não é exata: $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$
2. Calcular as razões:

$$\frac{M_y - N_t}{N} \quad \text{e} \quad \frac{N_t - M_y}{M}$$

3. Escolher a razão que depender apenas de uma variável e calcular o **fator integrante**:

$$\mu = \exp\left(\int \text{razão escolhida}\right)$$

4. Resolver a **equação exata**: $\mu M(t,y) + \mu N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$

1.2 Equações Diferenciais Ordinárias de Ordem n

1.2.1 Equações Lineares de Ordem n — Caso Homogéneo

TODO

1. Colocar na

1.3 Equações Vetoriais de 1ª Ordem

1.3.1 Equações Vetoriais Lineares — Caso Homogéneo

TODO

1.3.2 Equações Vetoriais Lineares — Caso não Homogéneo

TODO
Exercício 1 e 2 da Aula Prática 5

1.3.3 Exponencial de uma Matriz

TODO
Exercício 1 da Aula Prática 4
Verificação:

- $e^{At}|_{t=0} = I$
- $\dfrac{d}{dt}e^{At}|_{t=0} = A$

1.4 Equações Lineares de Ordem n — Caso não Homogéneo

TODO
Exercícios 1 e 2 da Aula Prática 5

1.5 Existência, Unicidade, Prolongamento de Soluções

TODO
Exercícios 3, 4 e 5 da Aula Prática 5
Exercícios 1 e 2 da Aula Prática 6 (Ficha 5b)

2 Teoremas da Divergência e de Stokes

2.1 Superfícies em $\mathbb{R}^3$

2.1.1 Definição de Superfície

TODO

2.1.2 Reta Normal

- No caso de uma parametrização $g(u, v)$:

$$\vec{N} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial u} \\ \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- No caso de um conjunto de nível $G(x, y, z) = 0$:

$$\vec{N} = \vec{\nabla} G$$

O **vetor normal unitário** é dado por:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{||\vec{N}||}$$

2.1.3 Plano Tangente

A equação de um plano tangente a uma superfície num ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dada por:

$$\vec{N} \cdot (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0$$

2.2 Integrais de Superfície

$$\iint_S f(x, y, z)\ dS = \iint_D f(g(u, v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du\, dv$$

- Área

$$A = \iint_S dS$$

- Massa

$$M = \iint_S \sigma\, dS$$

- Centro de Massa:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S x(g(u, v))\, \sigma\, dS \qquad \text{(coordenada } x\text{)}$$

2.3 Operadores Diferenciais

2.3.1 Divergência

$$\text{div}F = \vec{\nabla} \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1,\ F_2,\ F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

2.3.2 Rotacional

$$\text{rot}F = \vec{\nabla} \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

2.4 Fluxo de um Campo Vetorial

$$\iint_S F \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D F(g(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}\right) du\, dv$$

1. Parametrizar a superfície

2.4.1 Teorema de Divergência

Seja S a **superfície fechada**, orientada **positivamente** (p/ fora), fronteira de uma região sólida E.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_E \text{div}\vec{F}\, dV$$

2.5 Teorema de Stokes

Seja S uma **superfície orientada**, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada e com orientação positiva.

$$\oint_C \vec{F}\ dg = \iint_S \text{rot}\vec{F}\ dS = \iint_D \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{N}\, du\, dv$$

2.5.1 Trabalho

$$W = \oint_C F\, dg = \int_a^b F\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\, dt$$

2.5.2 Potencial Vetorial

Diz-se que $\vec{G}$ é potencial vetorial de $\vec{F}$ se $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{G}$

1. Verificar que $\text{div}\,\vec{F} = 0$
2. Resolver a equação $\vec{F} = \text{rot}\,\vec{G}$:

$$\begin{aligned} \left(\vec{F_1},\, \vec{F_2},\, \vec{F_3}\right) &= \text{rot}\,\vec{G} \\ \Leftrightarrow \left(\vec{F_1},\, \vec{F_2},\, \vec{F_3}\right) &= \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z},\, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x},\, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

3. Assumir que uma das componentes de G é nulo, (ex. G_2):

$$\left(\vec{F_1},\, \vec{F_2},\, \vec{F_3}\right) = \left(\frac{\partial G_3}{\partial y},\, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x},\, -\frac{\partial G_1}{\partial y}\right)$$

4. Integrar as outras componente em ordem à variável corresponde ao componente anulado (ex. y):

$$\int \vec{F_1}\, dy = \int \frac{\partial G_3}{\partial y}\, dy$$

$$\int \vec{F_3}\, dy = \int -\frac{\partial G_1}{\partial y}\, dy$$

3 Séries de Fourier

Sendo $f(x)$ uma função f com extensão periódica $\bar{f}$ com período $2L$:

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$\cos(x) = -\cos(x)$ (par)	$\cos(n\pi) = (-1)^n$	$\int_a^b \cos(*x) = \left[\frac{\sin(*x)}{*}\right]_a^b$
$\sin(x) = -\sin(-x)$ (ímpar)	$\sin(n\pi) = 0$	$\int_a^b \sin(*x) = \left[-\frac{\cos(*x)}{*}\right]_a^b$

3.1 Teorema da Convergência Pontual

$$SFf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ é um ponto de continuidade de } f \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{se } x \text{ é um ponto de descontinuidade de } f \\ \frac{f(-L^+)+f(L^-)}{2} & \text{se } x = -L \text{ ou } x = L \end{cases}$$

3.2 Série de Senos

Quando a função $f(x)$ é **ímpar**:

$$S_{\sin}f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

3.3 Série de Cossenos

Quando a função $f(x)$ é **par**:

$$S_{\cos}f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, dx$$

Integral por partes

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

4 Introdução às Equações Diferenciais Parciais

4.1 Método de Separação de Variáveis

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

$$\text{Condição de fronteira (CF):}\ \ u(t,0) = u(t,\pi) = 0\ \ (t \text{ variável})$$

$$\text{Condição inicial (CI):}\ \ u(0,x) = f(x)\ \ (t \text{ fixo} = 0)$$

1. Substituir $u(t,x)$ na equação diferencial por $T(t)X(x)$

2. Separar as variáveis dos dois lados da igualdade:

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}$$

3. Igualar os dois lados da equação a lambda (λ):

$$\frac{T'}{T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

4. Analisar as condições de fronteira, sabendo que $T(t) \neq 0$:

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \ \Rightarrow\ X(0) = X(\pi) = 0$$

5. Construir os dois problemas (EDOs)a resolver:

$$\text{P1:} \quad \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{se } x \in]0,\pi[$$

$$\text{P2:} \quad \frac{T'}{T} = \lambda \ \Leftrightarrow\ T' = \lambda T \ \Leftrightarrow\ T' - \lambda T = 0 \ \Rightarrow P(R) = R - \lambda = 0$$

6. Resolver P1 testando as várias possibilidades para λ:
   - $\lambda = 0$
   - $\lambda > 0$
   - $\lambda < 0$

7. Resolver P2 para os valores de λ obtidos anteriormente

8. Combinar os resultados obtidos, obtendo a solução do PVF:

$$u_k(t,x) = T_k(t)X_k(t) \ \Rightarrow\ u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k X_k$$

9. Calcular as constantes c_k utilizando a condição inicial:

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k = \text{CI}$$

10. Substituir os valores obtidos em $u(t,x)$

5 Extras

5.1 Mudança de Variáveis de Integração

5.1.1 Coordenadas Polares

$$\iint f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\, dr\, d\theta$$

5.1.2 Coordenadas Cilíndricas

$$\iiint f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \cdot r\, dz\, dr\, d\theta$$

5.1.3 Coordenadas Esféricas

$$\iiint f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \cdot r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$