Cálculo Diferencial e Integral II

Resumo

Rafael Rodrigues

LEIC
Instituto Superior Técnico
2023/2024

Contents

2 Limites e Continuidade

TODO

3 Diferenciabilidade

Derivada de uma função f segundo um vetor v no ponto a:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Uma função f diz-se **diferenciável** num ponto a se:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - Df(a) \cdot (x - a)}{||x - a||} = 0$$

Se f é diferenciável em a então:

$$D_v f(a) = Df(a) \cdot v$$

3.1 Matriz Jacobiana

Para uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$D_f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

3.2 Gradiente

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

3.3 Classe C^1

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se de classe C^1 se as suas derivadas parciais são contínuas.
Se uma função f é de classe C^1 em a então f é **diferenciável** em a.

4 Derivada da Função Composta

4.1 Cálculo da derivada

$$D(g \circ f)(a) = Dg\left(f(a)\right) \cdot Df(a)$$

4.2 Regra da Cadeia

TODO

5 Derivadas de Ordem Superior e Extremos

5.1 Pontos de estacionaridade (ou críticos)

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

5.2 Matriz Hessiana

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Classificação dos pontos críticos:

- det $H_f(x,y) < 0 \ \rightarrow$ ponto em sela (indefinida)
- det $H_f(x,y) > 0 \ \rightarrow$ extremo
  - tr $H_f(x,y) > 0 \ \rightarrow (x,y)$ é um ponto mínimo (definida positiva)
  - tr $H_f(x,y) < 0 \ \rightarrow (x,y)$ é um ponto máximo (definida negativa)
- det $H_f(x,y) > 0 \ \rightarrow$ inconclusivo
  - tr $H_f(x,y) \geq 0 \ \rightarrow (x,y)$ é um ponto mínimo ou ponto de sela (semi-definida positiva)
  - tr $H_f(x,y) \leq 0 \ \rightarrow (x,y)$ é um ponto máximo ou ponto de sela (semi-definida negativa)

5.3 Teorema de Weierstrass

TODO Semana 6
Uma função f num conjunto compacto S tem máximo e mínimo.

6 Função Inversa e Função Implícita

Jacobiano

$$J_f(x,y) = \begin{vmatrix} a = \frac{\partial f_1}{\partial x} & b = \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ c = \frac{\partial f_2}{\partial x} & d = \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = ad - cb$$

6.1 Teorema da Função Inversa

Mostrar que f é localmente invertível em torno dum ponto (a,b):

1. Calcular a matriz jacobiana Df
2. Calcular o determinante de $Df(a,b)$
3. Se det $Df(a,b) \neq 0$ então f tem inversa local C^1 em torno desse ponto

Calcular a derivada da função inversa num ponto (c,d):

1. Verificar que $(c,d) = F(a,b)$
2. Inverter a matriz jacobiana $Df(a,b)$

$$Df^{-1}\left(f(a,b)\right) = Df^{-1}(c,d) = \left[Df(a,b)\right]^{-1}$$

6.2 Teorema da Função Implícita

Mostrar que uma função $F(x_i, \ldots, x_j) = 0$ define x_i como função de x_j $[x_i = f(x_j)]$ num ponto (a,b)

1. Verificar que $F(a,b) = 0$
2. Calcular DF
3. Se $D_{x_i}F(a,b) \neq 0$ então F determina $x_i = f(x_j)$ num ponto (a,b)

Calcular a derivada da função implícita num ponto b:

$$D_{x_i}f(b) = -\left[D_{x_i}F(a,b)\right]^{-1} \cdot D_{x_j}F(a,b)$$

7 Extremos Condicionados

7.1 Multiplicadores de Lagrange

TODO

$$\begin{cases} \nabla f = \sum_i^n \lambda_i \nabla F_i \\ F_1 = 0 \\ \quad \vdots \\ F_n = 0 \end{cases}$$

8 Teorema de Fubini

8.1 Aplicações do Integral

8.1.1 Volume e Centróide

O volume de um sólido é dado por:

$$V_S = \int_S 1$$

O seu **centróide** na coordenada x_i é dado por:

$$\overline{x_i} = \frac{1}{V_S} \cdot \int_S x_i$$

8.1.2 Massa de Sólido e Centro de massa

Para um sólido S e uma **função de densidade de massa** f:

$$M_S = \int_S f$$

O **centro de massa** na coordenada x_i é dado por:

$$\overline{x_i} = \frac{1}{M_S} \cdot \int_S x_i\, f$$

8.1.3 Momento de Inércia

O momento de inércia em relação a um eixo L é dado por:

$$I_L = \int_S f \cdot (\text{distância à lateral})^2$$

Por exemplo para o eixo xx teríamos:

$$I_x = \int_S f \cdot \left(y^2 + z^2\right)$$

9 Mudança de Variáveis de Integração

9.1 Coordenadas Polares

$$\iint f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\, dr\, d\theta$$

9.2 Coordenadas Cilíndricas

$$\iiint f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

9.3 Coordenadas Esféricas

$$\iiint f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

10 Teorema Fundamental do Cálculo e Regra de Leibniz

10.1 Teorema Fundamental do Cálculo

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$$

$$F'(x) = f\left(b(x)\right)\cdot b'(x) - f\left(a(x)\right)\cdot a'(x)$$

10.2 Regra de Leibniz

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$$

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

11 Integrais de Linha

1. Parametrizar em função de t, ou seja, obter $g(t)$
2. Obter a derivada de g, ou seja, $g'(t) = \langle x'(t), y'(t)\rangle$
3. No caso do **campo escalar**, calcular $\|g'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

11.1 Campos Escalares

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f\left(g(t)\right)\cdot \left\|g'(t)\right\|\,dt$$

11.2 Campos Vetoriais

$$W = \int_C F\,dg = \int_a^b F\left(g(t)\right)\cdot g'(t)\,dt$$

Trocar a orientação da curva troca o sinal do integral.

12 Campos Fechados. Campos Gradientes. Teorema Fundamental do Cálculo

12.1 Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha

$$\int_C F\,dg = \int_C \nabla\varphi\,dg = \varphi\left(g(b)\right) - \varphi\left(g(a)\right)$$

12.2 Campos Gradientes e Potenciais Escalares

Um campo vetorial diz-se gradiente se $F = \nabla\varphi$, neste caso a φ chama-se o **potencial escalar** de F.

$$\int_C \nabla\varphi \, dr = 0 \text{ , se a curva é fechada}$$

Para encontrar um potencial escalar:

$$\nabla\varphi = F \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = F_1 \\ \quad\vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = F_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \int F_1 \, dx_1 \\ \quad\vdots \\ \varphi = \int F_n \, dx_n \end{cases}$$

12.3 Campos Fechados e Campos Gradientes

Um campo vetorial diz-se fechado se DF é simétrica:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ ,} \forall \; i \neq j$$

Se um campo vetorial **é gradiente**, então **também é fechado**.

12.4 Condição Necessária e Suficiente para ser Gradiente

13 Homotopia e Teorema de Green

TODO Semana 13

$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dA$$