Cálculo Diferencial e Integral III

Resumo

Rafael Rodrigues

LEIC
Instituto Superior Técnico
2023/2024

Contents

1 Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Equações Escalares de 1ª Ordem

1.1.1 Equações Lineares [1]

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

1. Verificar que está escrita na forma linear
2. Determinar o fator integrante: $\mu(t) = \exp\left(\int a(t)\,dt\right)$
3. Determinar y: $y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int \mu(t)b(t)\,dt + C\right]$

1.1.2 Equações Separáveis [2]

$$f(y)\frac{dy}{dt} = g(t) \Leftrightarrow f(y)\,dy = g(t)\,dt$$

1. Verificar que está escrita na forma separável
2. Integrar ambos os membros da igualdade: $\int f(y)\,dy = \int g(t)\,dt + C$

1.1.3 Equações Exactas [2]

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0$$

1. Verificar se a equação é exata: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \exists\ \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\Phi(t,y) = (M,N)$
2. Encontrar um potencial para $\Phi(t,y)$:
   (a) TODO

1.1.4 Equações Redutíveis a Exactas [2]

TODO

1.2 Equações Diferenciais Ordinárias de Ordem n

1.2.1 Equações Lineares de Ordem n — Caso Homogéneo [3]

TODO

1. Colocar na

1.3 Equações Vetoriais de 1ª Ordem

1.3.1 Equações Vetoriais Lineares — Caso Homogéneo [3]

TODO

1.3.2 Equações Vetoriais Lineares — Caso não Homogéneo [4]

TODO
Exercício 1 e 2 da Aula Prática 5

1.3.3 Exponencial de uma Matriz [4]

TODO
Exercício 1 da Aula Prática 4
Verificação:

- $e^{At}|_{t=0} = I$
- $\dfrac{d}{dt}e^{At}|_{t=0} = A$

1.4 Equações Lineares de Ordem n — Caso não Homogéneo [4]

TODO
Exercícios 1 e 2 da Aula Prática 5

1.5 Existência, Unicidade, Prolongamento de Soluções [5]

TODO
Exercícios 3, 4 e 5 da Aula Prática 5
Exercícios 1 e 2 da Aula Prática 6 (Ficha 5b)

2 Teoremas da Divergência e de Stokes

2.1 Superfícies em $\mathbb{R}^3$ [6]

TODO
Exercício 3 da Aula Prática 6 (Ficha 5b)

2.1.1 Definição de Superfície

2.1.2 Reta Normal

- No caso de uma parametrização $g(u,v)$:

$$\vec{N} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial u} \\ \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- No caso de um conjunto de nível $G(x,y,z) = 0$:

$$\vec{N} = \vec{\nabla} G$$

O **vetor normal unitário** é dado por:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{||\vec{N}||}$$

2.1.3 Plano Tangente

A equação de um plano tangente a uma superfície num ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dada por:

$$\vec{N} \cdot (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0$$

2.2 Integrais de Superfície [7]

TODO

2.3 Operadores Diferenciais [7]

2.3.1 Divergência

$$\text{div} F = \vec{\nabla} \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1,\ F_2,\ F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

2.4 Rotacional

$$\text{rot} F = \vec{\nabla} \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

2.5 Fluxo de um Campo Vetorial

TODO

$$\iint_S F \cdot \vec{n}\ dS = \iint_T F(g(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right)\ dudv$$

2.5.1 Teorema de Divergência [8]

TODO

$$\iint_S F \cdot \vec{n}\ dS = \iiint_V \mathrm{div} F\ dV$$

2.6 Teorema de Stokes [9]

TODO

2.6.1 Potencial Vetorial

TODO

3 Introdução às Equações Diferenciais Parciais

3.1 Método de Separação de Variáveis [10]

TODO

3.2 Séries de Fourier [10]

TODO

3.3 [11]