Cálculo Diferencial e Integral III

Resumo

Rafael Rodrigues

LEIC
Instituto Superior Técnico
2023/2024

Contents

1 Equações Diferenciais Ordinárias **2**

1.1 Equações Escalares de 1ª Ordem . . . 2

1.1.1 Equações Lineares . . . 2

1.1.2 Equações Separáveis . . . 2

1.1.3 Equações Exatas . . . 2

1.1.4 Equações Redutíveis a Exatas . . . 2

1.2 Equações Vetoriais Lineares . . . 3

1.2.1 Exponencial de uma Matriz . . . 3

1.2.2 Caso Homogéneo . . . 4

1.2.3 Caso não Homogéneo . . . 4

1.3 Equações Diferenciais Lineares de Ordem Superior . . . 5

1.3.1 Caso Homogéneo . . . 5

1.3.2 Caso não Homogéneo . . . 5

1.4 Existência, Unicidade, Prolongamento de Soluções . . . 6

1.4.1 Teorema de Picard . . . 6

2 Teoremas da Divergência e de Stokes **7**

2.1 Superfícies em $\mathbb{R}^3$ . . . 7

2.1.1 Definição de Superfície . . . 7

2.1.2 Reta Normal . . . 7

2.1.3 Plano Tangente . . . 7

2.2 Integrais de Superfície . . . 7

2.3 Operadores Diferenciais . . . 7

2.3.1 Divergência . . . 7

2.3.2 Rotacional . . . 7

2.4 Fluxo de um Campo Vetorial . . . 8

2.4.1 Teorema de Divergência . . . 8

2.5 Teorema de Stokes . . . 8

2.5.1 Trabalho . . . 8

2.5.2 Potencial Vetorial . . . 8

3 Transformadas de Laplace **9**

3.1 Tabela . . . 9

4 Séries de Fourier **10**

4.1 Teorema da Convergência Pontual . . . 10

4.2 Série de Senos . . . 10

4.3 Série de Cossenos . . . 10

5 Equações Diferenciais Parciais **11**

5.1 Método das Características (EDPs de 1ª Ordem) . . . 11

5.1.1 Caso homogéneo . . . 11

5.1.2 Caso não homogéneo . . . 11

5.2 Método de Separação de Variáveis (EDPs de 2ª Ordem) . . . 12

6 Extras **13**

6.1 Mudança de Variáveis de Integração . . . 13

6.1.1 Coordenadas Polares . . . 13

6.1.2 Coordenadas Cilíndricas . . . 13

6.1.3 Coordenadas Esféricas . . . 13

1 Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Equações Escalares de 1ª Ordem

1.1.1 Equações Lineares

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t)$$

1. Verificar que está escrita na forma linear
2. Determinar o fator integrante: $\mu(t) = \exp\left(\int a(t)\, dt\right)$
3. Determinar y: $y(t) = \dfrac{1}{\mu(t)} \displaystyle\int \mu(t)b(t)\, dt + C$

1.1.2 Equações Separáveis

$$f(y)\frac{dy}{dt} = g(t) \Leftrightarrow f(y)\, dy = g(t)\, dt$$

1. Verificar que está escrita na forma separável
2. Integrar ambos os membros da igualdade: $\displaystyle\int f(y)\, dy = \int g(t)\, dt + C$

1.1.3 Equações Exatas

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow M(t,y)\, dt + N(t,y)\, dy = 0$$

1. Verificar se a equação é exata: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \exists\ \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\Phi(t,y) = (M, N)$
2. Encontrar um potencial para $\Phi(t,y)$:

$$\begin{cases} \Phi = \int M\, dx \\ \Phi = \int N\, dy \end{cases} \Rightarrow \Phi = C$$

3. Isolar o y

1.1.4 Equações Redutíveis a Exatas

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$$

1. Quando a equação não é exata: $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial t}$
2. Calcular as razões:

$$\frac{M_y - N_t}{N} \quad \text{e} \quad \frac{N_t - M_y}{M}$$

3. Escolher a razão que depender apenas de uma variável e calcular o **fator integrante**:

$$\mu = \exp\left(\int \text{razão escolhida}\right)$$

4. Resolver a **equação exata**: $\mu M(t,y) + \mu N(t,y)\dfrac{dy}{dt} = 0$

1.2 Equações Vetoriais Lineares

Valores Próprios

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda_1)(d-\lambda_2)-cd=0$$

Vetores Próprios

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$[A-\lambda_1 I]\cdot \vec{v}_1 = 0 \quad \text{e} \quad [A-\lambda_2 I]\cdot \vec{v}_2 = 0$$

- $\lambda_1 = \lambda_2$

$$[A-\lambda I]\cdot \vec{v}_1 = 0 \quad \text{e} \quad [A-\lambda I]\cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

- $\lambda = a \pm bi$

$$[A-(a\pm bi)\,I]\cdot \vec{v} = 0$$

1.2.1 Exponencial de uma Matriz

- Diretas

  1. Matriz Diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\beta t} \end{bmatrix}$$

  2. Bloco de Jordan

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & e^{\alpha t}t & \cdots & e^{\alpha t}\frac{t^n}{n!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & e^{\alpha t}t \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix}$$

- Indiretas

$$e^{At} = S\cdot e^{\Lambda t}\cdot S^{-1}$$

  1. Calcular os **valores próprios** de A:

     (a) Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

     (b) Se $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

     (c) Se $\lambda = a \pm bi$:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{(a+bi)t} & 0 \\ 0 & e^{(a-bi)t} \end{bmatrix}$$

  2. Calcular os **vetores próprios** de A:

$$S = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{\det}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

1.2.2 Caso Homogéneo

$$X' = AX \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}[\vec{v}_1] + c_2 e^{\lambda_2 t}[\vec{v}_2]$$

- $\lambda_1 = \lambda_2$

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}[\vec{v}_1] + c_2 e^{\lambda_1 t}[t\vec{v}_1 + \vec{v}_2]$$

- $\lambda = a \pm bi$

$$X(t) = c_1[\mathrm{Re}] + c_2[\mathrm{Im}]$$

Solução com Matriz Exponencial

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot X(t_0)$$

1.2.3 Caso não Homogéneo

$$X' = AX + b(t) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$$

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \cdot b(s)\, ds$$

1.3 Equações Diferenciais Lineares de Ordem Superior

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = f(t)$$

1.3.1 Caso Homogéneo

$$f(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = y_H$$

1. Escrever na forma em que $a_n = 0$
2. Escrever o **polinómio aniquilador**

$$P(D)y = 0 \Leftrightarrow \left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0\right) y = 0$$

3. Escrever o **polinómio característico**

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow P^n + a_{n-1}P^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

4. Calcular as raízes do polinómio característico para encontrar as **bases** das soluções
5. Escrever a solução do problema como combinação linear das bases

1.3.2 Caso não Homogéneo

$$f(t) \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = y_H + y_P$$

1. Calcular y_H como se de um caso homogéneo se tratasse
2. Determinar o **polinómio aniquilador** de $f(t)$

$$P(D)f(t) = 0$$

3. Multiplicar ambos os lados da equação pelo polinómio, obtendo uma nova equação homogénea
4. Calcular y_P resolvendo a nova equação homogénea
5. Juntar as duas soluções, verificando que não existe repetição de termos.
   Caso exista, multiplicar por t, $t^2, \ldots$
6. Achar as constantes de y_P pelo métodos dos coeficientes indeterminados

TODO

Raíz	Multiplicidade	Base da Solução
λ	m	$\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1} c\, t^n e^{\lambda t}$
$a \pm b\, i$	m	$\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1} c_1\, t^n e^{at}\cos(bt) + c_2\, t^n e^{at}\sin(bt)$

1.4 Existência, Unicidade, Prolongamento de Soluções

1.4.1 Teorema de Picard

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

O Teorema de Picard garante que o problema tem **solução única** se $f(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas na vizinhança de (x_o, y_o).

Caso alguma destas verificações falhe o teorema não é aplicável, sendo assim possível existirem várias soluções sem o contradizer.

2 Teoremas da Divergência e de Stokes

2.1 Superfícies em $\mathbb{R}^3$

2.1.1 Definição de Superfície

TODO

2.1.2 Reta Normal

- No caso de uma parametrização $g(u, v)$:

$$\vec{N} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial u} \\ \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- No caso de um conjunto de nível $G(x, y, z) = 0$:

$$\vec{N} = \vec{\nabla} G$$

O **vetor normal unitário** é dado por:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{||\vec{N}||}$$

2.1.3 Plano Tangente

A equação de um plano tangente a uma superfície num ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dada por:

$$\vec{N} \cdot (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0$$

2.2 Integrais de Superfície

$$\iint_S f(x, y, z)\ dS = \iint_D f(g(u, v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du\, dv$$

- Área

$$A = \iint_S dS$$

- Massa

$$M = \iint_S \sigma\, dS$$

- Centro de Massa:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S x(g(u, v))\, \sigma\, dS \qquad \text{(coordenada } x\text{)}$$

2.3 Operadores Diferenciais

2.3.1 Divergência

$$\text{div}F = \vec{\nabla} \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1,\ F_2,\ F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

2.3.2 Rotacional

$$\text{rot}F = \vec{\nabla} \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

2.4 Fluxo de um Campo Vetorial

$$\iint_S F \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D F(g(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right) du\, dv$$

1. Parametrizar a superfície

2.4.1 Teorema de Divergência

Seja S a **superfície fechada**, orientada **positivamente** (p/ fora), fronteira de uma região sólida E.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_E \mathrm{div} \vec{F}\, dV$$

2.5 Teorema de Stokes

Seja S uma **superfície orientada**, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada e com orientação positiva.

$$\oint_C \vec{F}\ dg = \iint_S \mathrm{rot} \vec{F}\ dS = \iint_D \mathrm{rot} \vec{F} \cdot \vec{N}\, du\, dv$$

2.5.1 Trabalho

$$W = \oint_C F\, dg = \int_a^b F\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\, dt$$

2.5.2 Potencial Vetorial

Diz-se que $\vec{G}$ é potencial vetorial de $\vec{F}$ se $\vec{F} = \mathrm{rot}\, \vec{G}$

1. Verificar que $\mathrm{div}\, \vec{F} = 0$
2. Resolver a equação $\vec{F} = \mathrm{rot}\, \vec{G}$:

$$\begin{aligned} &\left(\vec{F_1},\, \vec{F_2},\, \vec{F_3}\right) = \mathrm{rot}\, \vec{G} \\ \Leftrightarrow &\left(\vec{F_1},\, \vec{F_2},\, \vec{F_3}\right) = \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z},\, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x},\, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

3. Assumir que uma das componentes de G é nulo, (ex. G_2):

$$\left(\vec{F_1},\, \vec{F_2},\, \vec{F_3}\right) = \left(\frac{\partial G_3}{\partial y},\, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x},\, -\frac{\partial G_1}{\partial y} \right)$$

4. Integrar as outras componente em ordem à variável corresponde ao componente anulado (ex. y):

$$\int \vec{F_1}\, dy = \int \frac{\partial G_3}{\partial y}\, dy$$

$$\int \vec{F_3}\, dy = \int -\frac{\partial G_1}{\partial y}\, dy$$

3 Transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t)\, dt$$

3.1 Tabela

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$	$F(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{f(t)\right\}$, $s > \alpha$
1	m
e^{at}	m
e^{at}	m
e^{at}	m
e^{at}	m
e^{at}	m

Função Heaviside

$$H_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

$$1 - H_a(t) = \begin{cases} 0, & t > a \\ 1, & t < a \end{cases}$$

$$H_a(t) - H_b(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & a < t < b \\ 0, & t > b \end{cases}$$

4 Séries de Fourier

Sendo $f(x)$ uma função f com extensão periódica $\bar{f}$ com período $2L$:

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$\cos(x) = -\cos(x)$ (par)	$\cos(n\pi) = (-1)^n$	$\int_a^b \cos(*x) = \left[\frac{\sin(*x)}{*}\right]_a^b$
$\sin(x) = -\sin(-x)$ (ímpar)	$\sin(n\pi) = 0$	$\int_a^b \sin(*x) = \left[-\frac{\cos(*x)}{*}\right]_a^b$

4.1 Teorema da Convergência Pontual

$$SFf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ é um ponto de continuidade de } f \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{se } x \text{ é um ponto de descontinuidade de } f \\ \frac{f(-L^+)+f(L^-)}{2} & \text{se } x = -L \text{ ou } x = L \end{cases}$$

4.2 Série de Senos

Quando a função $f(x)$ é **ímpar**:

$$S_{\sin} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

4.3 Série de Cossenos

Quando a função $f(x)$ é **par**:

$$S_{\cos} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \, dx$$

Integral por partes

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

5 Equações Diferenciais Parciais

5.1 Método das Características (EDPs de 1ª Ordem)

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y)$$

5.1.1 Caso homogéneo

$$c(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

1. Resolver a EDO, isolando a constante C:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad C = g(x,y)$$

2. Escrever a solução:

$$u(x,y) = f(C)$$

5.1.2 Caso não homogéneo

1. Determinar as curvas características:

   (a) resolver a seguinte EDO, isolando a constante C:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)} \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad C = f(x,y)$$

2. Fazer uma mudança de varáveis $(x,y) \to (s,r)$

   (a) Escolher $s = C = f(x,y)$

   (b) Escolher r tal que o jacobiano da transformação seja **não nulo**:

$$J(s,r) = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

   (c) Utilizar a regra da cadeia para simplificar $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$:

   - $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}$
   - $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y}$

3. Substituir na equação original e simplificar, **deve obter-se uma EDO**:

$$a(s,r)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right) + b(s,r)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\right) = c(s,r)$$

4. Resolver a EDO obtida, obtendo-se uma solução na forma $u(s,r)$

5. Inverter a mudança de variáveis:

$$u(s,r) \to u(x,y)$$

5.2 Método de Separação de Variáveis (EDPs de 2ª Ordem)

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$\text{Condição de fronteira (CF): } u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ \ (t \text{ variável})$$

$$\text{Condição inicial (CI): } u(x,0) = f(x) \ \ (t \text{ fixo} = 0)$$

1. Substituir $u(x,t)$ na equação diferencial por $X(x)T(t)$
2. Separar as variáveis dos dois lados da igualdade (deixar X **mais simples**):
$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}$$
3. Igualar os dois lados da equação a lambda (λ):
$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$
4. Analisar as condições de fronteira, sabendo que $T(t) \neq 0$:
$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \ \Rightarrow \ X(0) = X(\pi) = 0$$
5. Construir os dois problemas (EDOs)a resolver:
$$\text{P1: } \quad \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{se } x \in \,]0,\pi[$$
$$\text{P2: } \quad \frac{T'}{T} = \lambda$$
6. Resolver P1 testando as várias possibilidades para λ:
   - $\lambda = 0$
   - $\lambda > 0$
   - $\lambda < 0$
7. Resolver P2 para os valores de λ obtidos anteriormente
8. Combinar os resultados obtidos, obtendo a solução do PVF:
$$u_k(t,x) = T_k(t)X_k(t) \ \Rightarrow \ u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k X_k$$
9. Calcular as constantes c_k utilizando a condição inicial:
$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k = \text{CI}$$
10. Substituir os valores obtidos em $u(t,x)$

6 Extras

6.1 Mudança de Variáveis de Integração

6.1.1 Coordenadas Polares

$$\iint f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

6.1.2 Coordenadas Cilíndricas

$$\iiint f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

6.1.3 Coordenadas Esféricas

$$\iiint f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$