

Probabilidade e Estatística

Resumo

Rafael Rodrigues

LEIC
Instituto Superior Técnico
2023/2024

Contents

2	Conceitos básicos de probabilidade	2
2.1	Experiência aleatória, espaço de resultados e acontecimentos	2
2.2	Noção de probabilidade. Probabilidade condicionada e lei da probabilidade total . . .	2
2.3	Teorema de Bayes	2
2.4	Acontecimentos independentes	2
3	Variáveis aleatórias discretas e contínuas	3
3.1	Definição de variável aleatória. Função de distribuição. Função de massa de probabilidade e função de densidade de probabilidade	3
3.2	Valor esperado, moda, variância e quantis	3
3.3	Distribuições de probabilidade mais utilizadas na modelação de dados	3
4	Pares aleatórios	5
4.1	Distribuição conjunta, marginais e condicionais	5
4.2	Independência	5
4.3	Covariância	5
4.4	Correlação	5
5	Complementos das distribuições de probabilidade	6
5.1	Combinações lineares de variáveis aleatórias	6
5.2	Teorema Limite Central	6
5.3	Distribuição assintótica da soma e da média de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas	6
6	Estimação pontual	6
6.1	Estatísticas e estimadores	6
6.2	Método da máxima verosimilhança	6
7	Estimação intervalar	7
7.1	Intervalos de confiança para parâmetros de populações normais	7
7.2	Intervalos de confiança para parâmetros de populações de Bernoulli	7
8	Testes de hipóteses	7
8.1	Testes de hipóteses para parâmetros de populações normais	7
8.2	Testes de hipóteses para a média de uma população normal, com variância desconhecida	7
8.3	Testes de hipóteses para a variância de uma população normal	7
8.4	Testes de hipóteses para parâmetros de populações Bernoulli	7
8.5	Teste de ajustamento do qui-quadrado de Pearson	7
9	Introdução à regressão linear simples	7
9.1	Modelo de regressão linear simples	7
9.2	Intervalos de confiança e testes de hipóteses para os parâmetros β_0 , β_1 e $\beta_0 + \beta_1 x_0$ do modelo de regressão linear simples	7
9.3	Coeficiente de determinação	7

2 Conceitos básicos de probabilidade

2.1 Experiência aleatória, espaço de resultados e acontecimentos

TODO

2.2 Noção de probabilidade. Probabilidade condicionada e lei da probabilidade total

Axiomática de probabilidade

TODO

Teoremas decorrentes

TODO

Probabilidade condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) > 0$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

Teorema da probabilidade composta

TODO

Teorema da probabilidade total

TODO

2.3 Teorema de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) P(B|A_j)}$$

2.4 Acontecimentos independentes

TODO

3 Variáveis aleatórias discretas e contínuas

3.1 Definição de variável aleatória. Função de distribuição. Função de massa de probabilidade e função de densidade de probabilidade

TODO variável aleatória

Função de distribuição

TODO

Variáveis aleatórias discretas

TODO

Variáveis aleatórias contínuas

TODO

3.2 Valor esperado, moda, variância e quantis

Valor esperado de uma variável aleatória

TODO

Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

TODO

Momentos simples e centrais

TODO

Outros parâmetros: Moda e quantis

TODO

3.3 Distribuições de probabilidade mais utilizadas na modelação de dados

Distribuição Uniforme Discreta

TODO

Distribuição Bernoulli

TODO

Distribuição Binomial

TODO

Distribuição Geométrica

$$P(X \geq x) = (1 - p)^{x-1}$$

Distribuição Poisson

TODO

Distribuição Uniforme Contínua

$$P(X > n) = \int_n^{+\infty} f_X(x) dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Distribuição Exponencial

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Distribuição Normal (ou de Gauss)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$E(X) = \mu \quad (\text{média} = \mu)$$

$$V(X) = \sigma^2 \quad (\text{desvio padrão} = \sigma)$$

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad Z \sim N(0, 1) \quad (\text{Distribuição Normal Reduzida})$$

A combinação linear de duas **v.a. independentes** com distribuição normal é uma normal:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$V(aX + bY) = a^2E(X) + b^2E(Y)$$

4 Pares aleatórios

4.1 Distribuição conjunta, marginais e condicionais

Função de distribuição conjunta

TODO

Funções de distribuição marginais

TODO

Distribuição conjunta de um par aleatória

TODO

Distribuições marginais

TODO

Distribuições condicionais

TODO

4.2 Independência

X e Y são v.a. independentes ($X \perp\!\!\!\perp Y$) sse:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Caso exista um zero as variáveis **não são independentes**.

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y)$$

Vetores aleatórios discretos e contínuos

TODO

Valor esperado de uma função de um par aleatório discreto e contínuo

TODO

4.3 Covariância

TODO

4.4 Correlação

TODO

5 Complementos das distribuições de probabilidade

5.1 Combinações lineares de variáveis aleatórias

TODO

5.2 Teorema Limite Central

Para uma sucessão de **v.a. independentes e identicamente distribuídas** (não normais) tem-se:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} \text{ (média)}$$

$$E(S_n) = n E(X_1) = n \mu$$

$$V(S_n) = n V(X_1) = n \sigma^2$$

5.3 Distribuição assintótica da soma e da média de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas

6 Estimação pontual

6.1 Estatísticas e estimadores

Propriedades dos estimadores

Seja $T = T(X_1, \dots, X_n)$ um estimador do parâmetro θ :

$$EQM_{\theta}(T) = E([T - \theta]^2) = V(T) + [E(T) - \theta]^2$$

Quando um estimador é **centrado**, ou seja, $E(T) = \theta$ temos:

$$EQM_{\theta}(T) = V(T)$$

6.2 Método da máxima verosimilhança

TODO

Distribuição qui-quadrado

TODO

Distribuição t-Student

TODO

7 Estimação intervalar

Método pivotal

7.1 Intervalos de confiança para parâmetros de populações normais

Intervalos de confiança para o valor esperado, variância conhecida

Intervalos de confiança para o valor esperado, variância desconhecida

Intervalos de confiança para a variância, valor esperado desconhecido

7.2 Intervalos de confiança para parâmetros de populações de Bernoulli

8 Testes de hipóteses

8.1 Testes de hipóteses para parâmetros de populações normais

8.2 Testes de hipóteses para a média de uma população normal, com variância desconhecida

8.3 Testes de hipóteses para a variância de uma população normal

8.4 Testes de hipóteses para parâmetros de populações Bernoulli

8.5 Teste de ajustamento do qui-quadrado de Pearson

9 Introdução à regressão linear simples

9.1 Modelo de regressão linear simples

9.2 Intervalos de confiança e testes de hipóteses para os parâmetros β_0 , β_1 e $\beta_0 + \beta_1 x_0$ do modelo de regressão linear simples

9.3 Coeficiente de determinação