**Algoritmos e Estruturas de Dados 2021/2022**

**Multi-Ordered Binary Trees**

**Segundo Trabalho Prático da disciplina de AED. Professores: Tomás Oliveira e Silva; Pedro Lavrador**

**Trabalho Realizado por: 102435 Rafael Remígio 50%; 104360 João Correia 50%;**

**Índice**

**Introdução1**

Escrever título do capítulo (nível 2)2

Escrever título do capítulo (nível 3)3

**Escrever título do capítulo (nível 1)4**

Escrever título do capítulo (nível 2)5

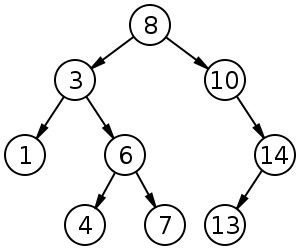
Escrever título do capítulo (nível 3)6

Introdução

Uma das áreas mais importantes da Ciência da Computação e no desenvolvimento de Software é o armazenamento e processamento de informação de forma eficaz e pouco dispendiosa. Diferentes tipos de estruturas de dados oferecem diversas vantagens e desvantagens. Neste trabalho focaremos apenas em Árvores Binárias, nas vantagens da sua utilização tal como na implementação de diversos algoritmos para percorrer e criar estas Árvores.

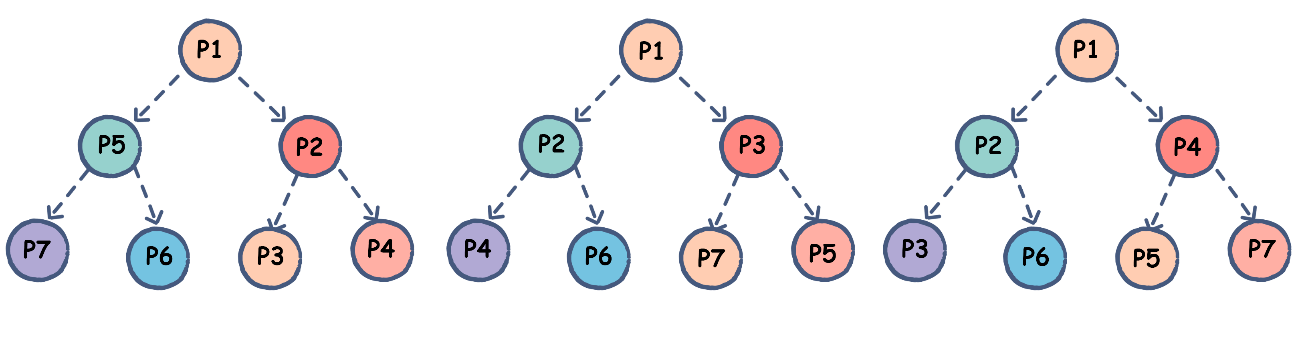
Árvore Binária:

Neste caso falaremos de Árvores Binárias de Busca que podem ser definidas por um conjunto de Nós onde cada node possuí a seguinte informação

* Dados a guardar
* Ponteiro para o ramo da esquerda (left child)
* Ponteiro para o ramo da direita (right child)
* Ponteiro para o Parente **(Opcional)**
* Todos os Nós da subárvore da esquerda possuem um valor inferior ao da raiz e todos os Nós da subárvore da direita possuem um valor superior ao da raiz

Neste trabalho prático foi nos pedido a organização em árvores binarias de Nós com três campos:

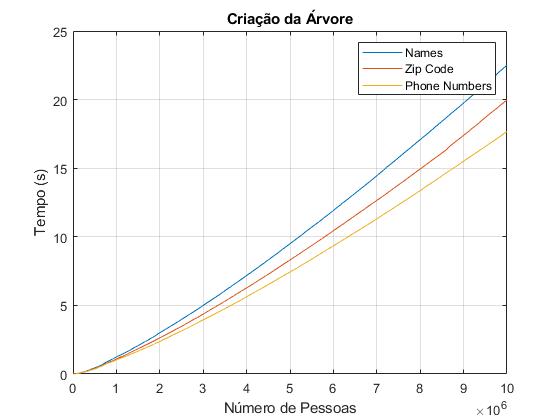
* Nome
* Zip Code
* Número de Telefone

É necessária a criação de 3 árvores, uma por cada campo, sendo que deve ser possível percorrer, pesquisar e saber o tamanho de cada Árvore criada.

Inserção de elementos

A operação de inserção deve ter em cuidado os princípios da árvore binária de busca, sendo então necessário adicionar novos nodes sempre como folhas da árvore.

* Percorremos a árvore recursivamente comparando o valor adicionar com o valor do node onde nos encontramos. Caso o node tiver um valor maior que o node atual tentamos adicionar à direita caso contrário tentamos adicionar a esquerda. Desde modo o node é sempre inserido numa posição de folha não pondo em causa a estrutura da árvore
* A comparação é realizada relativamente ao campo específico através de uma função que recebe as duas Pessoas e o índex relativo há arvore que estamos a criar comparando destes modos os campos desejados. Se os campos forem iguais a função irá comparar outro campo.
* As três árvores diferentes são criadas através de um array de ponteiros, onde cada índex é referente a uma árvore diferente com diferentes campos a serem comparados

Esta operação tem de complexidade temporal em média O(log(n)) sendo o pior caso O(n). A criação completa da árvore tem de complexidade O(n\*log(n)).

void tree\_insert( tree\_node\_t\*\* rootp, tree\_node\_t\* node,int main\_idx)

{

  if ( \*rootp == NULL){

    \*rootp = node;

    return;

  }

  int c = compare\_tree\_nodes(\*rootp,node,main\_idx);

  if (c < 0)

  {

    tree\_insert(&((\*rootp)->right[main\_idx]), node,main\_idx);

    return;

  }

  else

  {

    tree\_insert(&((\*rootp)->left[main\_idx]), node,main\_idx);

    return;

  }

  return;

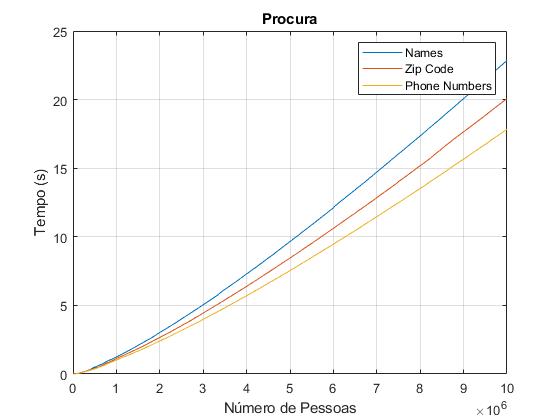
}

Procura

De forma semelhante à inserção na árvore, a procura de elementos também tira proveito das propriedades de árvores binárias de busca.

* Percorremos a árvore recursivamente comparando o valor da pessoa a procurar com o valor do node onde nos encontramos. Se este for igual devolvemos este node, se for maior ou menos movemo-nos para a direita ou esquerda da árvore respetivamente.
* Se encontrarmos um node inexistente, indica que chegamos ao fim da árvore, isto indica que a pessoa que procurávamos não existe dentro de esta árvore
* As três árvores diferentes são procuradas através de um array de ponteiros, onde cada índex é referente a uma árvore diferente com diferentes campos a serem comparados.

A procura tal como a inserção, tem de complexidade temporal em média O(log(n)) sendo o pior caso O(n). A procura de todos os elementos da árvore tem complexidade temporal O(n\*log(n)).



tree\_node\_t\* find(tree\_node\_t\*\* rootp,int main\_idx,tree\_node\_t\* person)

{

  if ((\*rootp) == NULL){

    printf("here");

    return NULL;

  }

  if (compare\_tree\_nodes(\*rootp,person,main\_idx)==0)

  {

    return \*rootp;

  }

  else if (compare\_tree\_nodes(\*rootp,person,main\_idx) > 0)

  {

    return find(&((\*rootp)->left[main\_idx]),main\_idx,person);

  }

  else

  {

    return find(&((\*rootp)->right[main\_idx]),main\_idx,person);

  }

  return NULL;

}

Altura/Profundidade da árvore

O tempo de inserção e procura de itens na árvore é impactado pelo tamanho desta, quão menor for a árvore menor é o caminho a percorrer até chegar a um node específico. Sendo que as pessoas a serem inseridas são dadas por ordem pseudoaleatória o tamanho da árvore não será o mínimo. No melhor caso a árvore terá profundidade log(n).

* A altura da árvore é descoberta percorrendo de forma recursiva todos os nodes até chegarmos a um node inexistente, retornando então 0, e retornando o máximo da altura da subárvore esquerda e da direita mais 1.
* O algoritmo da descoberta do tamanho de uma árvore tem de complexidade computacional O(n)

**<insert gráfico>**

int tree\_depth(tree\_node\_t\*\* root, int main\_idx)

{

  if ( \*root == NULL){

    return 0;

  }

  int leftheight = tree\_depth(&((\*root)->left[main\_idx]),main\_idx);

  int rightheight = tree\_depth(&((\*root)->right[main\_idx]),main\_idx);

  if (leftheight > rightheight)

  {

    return leftheight + 1;

  }

  else{

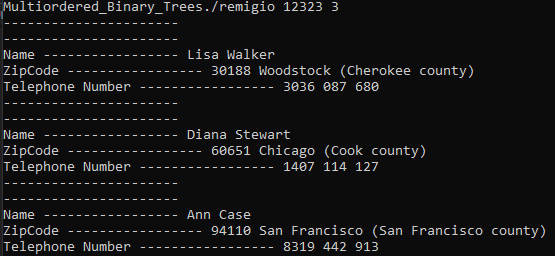
    return rightheight + 1 ;

  }

}

Listagem

A listagem das diferentes pessoas por ordem relativa a um respetivo campo pode ser feita de diversas formas de modo a conseguir diferentes tipos de listagens. Neste problema decidimos implementar 3 diferentes listagens, uma **listagem por largura (breadth)**, uma **listagem por altura de pré-ordem(preorder)** e uma **listagem por altura ordem simétrica(inorder).**

* **Breadth search –** Implementada através da utilização da estrutura de dados fila (queue), onde visitamos as Pessoas no fim da fila e adicionamos nós no final da fila.****

void traverse\_breadth\_first(tree\_node\_t \*link,int main\_idx)

{

  queue q1;

  init\_queue(&q1);

  enqueue(&q1,link);

  while(q1.head != NULL)

  {

    link = dequeue(&q1);

    if(link != NULL)

    {

      visit\_node(link);

      enqueue(&q1,link->left[main\_idx]);

      enqueue(&q1,link->right[main\_idx]);

    }

  }

}

// queue implementation

typedef struct node {

    tree\_node\_t\* val;

    struct node \*next;

} node\_q;

typedef struct queue

{

    node\_q\* head;

    node\_q\* tail;

} queue;

void init\_queue(queue\* q){

    q->head = NULL;

    q->tail = NULL;

}

void enqueue(queue\* q, tree\_node\_t\* value) {

    // create new node

    node\_q \* new\_node = malloc(sizeof(node\_q));

    if (new\_node==NULL) { return;}    //if malloc fails

    new\_node->val = value;

    new\_node->next = NULL;

    // if there is a tail we just connect that tail to this node

    if (q->tail != NULL){

        q->tail->next = new\_node;

    }

    q->tail = new\_node;

    // if there is no head we set this one also as head

    if (q->head == NULL) {

        q->head = new\_node;

    }

    return;

}

tree\_node\_t\* dequeue(queue\* q) {

    if (q->head == NULL) {return NULL;}

    node\_q \* tmp = q->head;

    tree\_node\_t\* result = tmp->val;

    q->head = q->head->next;

    if (q->head == NULL){

        q->tail = NULL;

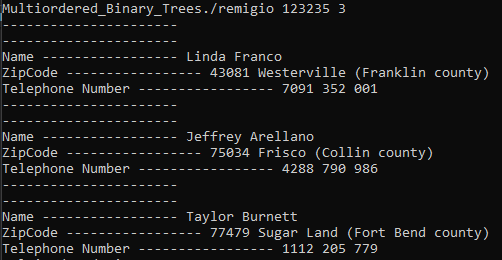
    }

    free(tmp);

    return result;

}

* **Depth pre-order search –** Percorre-se recursivamente todos os nós visitando primeiro a atual raiz, seguida da subárvore à esquerda e depois a subárvore à direita.

****

int list\_pre\_order(tree\_node\_t\* node,int main\_idx)

{

  if (node !=NULL){

    visit\_node(node);

    if (node->left[main\_idx] != NULL){

      list\_pre\_order(node->left[main\_idx],main\_idx);

    }

    if (node->right[main\_idx] != NULL){

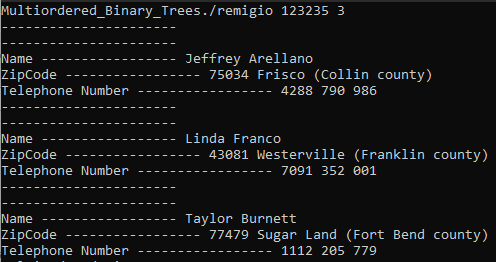
      list\_pre\_order(node->right[main\_idx],main\_idx);

    }

  }

  return 1;

}

* **Depth in-order search –** Semelhante à anterior com diferença que vistamos toda a subárvore a esquerda, depois a raiz atual e finalmente toda a subárvore a direita. Esta listagem tem a particularidade de listar os ****Nós por ordem crescente.

int list\_in\_order(tree\_node\_t\* node,int main\_idx)

{

  if (node !=NULL){

    if (node->left[main\_idx] != NULL){

      list\_in\_order(node->left[main\_idx],main\_idx);

    }

        visit\_node(node);

    if (node->right[main\_idx] != NULL){

      list\_in\_order(node->right[main\_idx],main\_idx);

    }

  }

  return 1;

}

Número de Folhas

O número de folhas de uma árvore é calculado percorrendo todos os nós até encontrarmos uma folha, isto é, encontrar uma pessoa onde o ponteiro para a esquerda e para direita são nulos, onde então retornamos 1.

<INSERT GRAPH HERE>

int leafCount(tree\_node\_t\*\* rootp,int main\_idx)

{

  if ( \*rootp == NULL){

    return 0;

  }

  if ((\*rootp)->left[main\_idx] == NULL && (\*rootp)->right[main\_idx] == NULL)

  {

    return 1;

  }

  else

  {

    return leafCount(&(\*rootp)->left[main\_idx],main\_idx) + leafCount(&(\*rootp)->right[main\_idx],main\_idx);

  }

}

Pessoas com atributos iguais

De forma semelhante a procura de nós, podemos também pesquisar pessoas com nomes, números de telefone e zip codes específicos. A comparação é feita entre o conjunto de caracteres e o atributo da pessoa. Dependendo do valor dessa comparação percorremos a árvore pelos ramos até chegarmos a primeira pessoa com um campo igual. Quando encontramos uma igualdade testamos para os seus filhos se os campos também são iguais ao conjunto de caracteres movemo-nos para esse nó, se não desprezamos esse nó.

int compareCamp(char \*camp,tree\_node\_t\* node,int main\_idx){

  switch (main\_idx)

  {

  case 0:

      return strcmp((node)->name,camp);

    break;

  case 1:

      return strcmp((node)->zip\_code,camp);

    break;

  case 2:

      return strcmp((node)->telephone\_number,camp);

    break;

  }

}

void sameType(tree\_node\_t\*\* rootp,char \* camp,int main\_idx){

  if ((\*rootp)==NULL){return;}

  int c = compareCamp(camp,\*rootp,main\_idx);

  if (c == 0)

  {

    visit\_node(\*rootp);

    if ((\*rootp)->left[main\_idx] != NULL){

      if (compareCamp(camp,((\*rootp)->left[main\_idx]),main\_idx) == 0){

         sameType(&((\*rootp)->left[main\_idx]),camp,main\_idx);

      }

    }

    if ((\*rootp)->right[main\_idx] != NULL){

      if (compareCamp(camp,((\*rootp)->right[main\_idx]),main\_idx) == 0){

        sameType(&((\*rootp)->right[main\_idx]),camp,main\_idx);

      }

    }

  }

  else if (c > 0)

  {

    sameType(&((\*rootp)->left[main\_idx]),camp,main\_idx);

  }

  else

  {

    sameType(&((\*rootp)->right[main\_idx]),camp,main\_idx);

  }

  return;

}

<insert image of exemple here>

Novo atributo da estrutura Pessoa

Decidimos adicionar à estrutura Pessoa o atributo “social security number”, para isto é necessário gerar um conjunto de caracteres pseudo-aleatórios com o formato

* “%d%d%d %d%d %d%d%d”, onde %d representa um algarismo de 0 a 9 inclusive.

Simplesmente adaptamos a geração de números pseudo-aleatórios já previamente disponibilizada para gerar os números de telemóvel

É então só necessário adicionar este conjunto de caracteres à estrutura Pessoa e acrescentar um ponteiro a cada conjunto de ponteiros de modo a gerar árvores com este campo.

A função de comparação é então também modificada para poder fazer a comparação com este campo.

typedef struct tree\_node\_s

{

  char name[MAX\_NAME\_SIZE + 1];                         // index 0 data item

  char zip\_code[MAX\_ZIP\_CODE\_SIZE + 1];                 // index 1 data item

  char telephone\_number[MAX\_TELEPHONE\_NUMBER\_SIZE + 1]; // index 2 data item

  char security\_number[MAX\_SECURITY\_NUMBER\_SIZE + 1];

  struct tree\_node\_s \*left[4];                          // left pointers (one for each index) ---- left means smaller

  struct tree\_node\_s \*right[4];                         // right pointers (one for each index) --- right means larger

}

tree\_node\_t;

int compare\_tree\_nodes(tree\_node\_t \*node1,tree\_node\_t \*node2,int main\_idx){

    int i,c;

    for(i = 0;i < 4;i++)

    {

      if(main\_idx == 0)

        c = strcmp(node1->name,node2->name); // compara nome

      else if(main\_idx == 1)

        c = strcmp(node1->zip\_code,node2->zip\_code); // compara zip

      else if(main\_idx == 2)

        c = strcmp(node1->telephone\_number,node2->telephone\_number); // compara numero

      else

        c = strcmp(node1->security\_number,node2->security\_number); // compara sec numero

      if(c != 0)

        return c; // different on this index, so return (sao diferentes, retorna c)

      main\_idx = (main\_idx == 3) ? 0 : main\_idx + 1; // advance to the next index (sao iguais, bora para o prox)

    }

    return 0;

  }

void random\_security\_number(char security\_number[MAX\_SECURITY\_NUMBER\_SIZE + 1])

{

  int n1 = aed\_random() % 1000; // 000..999

  int n2 = aed\_random() % 100;        //  00..99

  int n3 = aed\_random() % 10000;        //  0000..9999

  if(snprintf(security\_number,MAX\_SECURITY\_NUMBER\_SIZE + 1,"%03d-%02d-%04d",n1,n2,n3) >= MAX\_SECURITY\_NUMBER\_SIZE + 1)

  {

    fprintf(stderr,"security number too large (%04d) (%03d (%03d)\n",n1,n2,n3);

    exit(1);

  }

}

Número de nós numa altura/profundidade especifica e posição

Para um melhor entendimento e avaliação da estrutura das árvores binárias criadas, achamos relevante a criação de uma função capaz de mostrar o número de nós a profundidades especificas tal como a posição especifica de uma certa Pessoa. Estas funções seguem a mesma estrutura das funções anteriores.

* **Número de nós a profundidade especifica –** nesta função percorremos todos os nodes começando na raiz, tanto para a esquerda como para a direita, decrementando a variável da profundidade até chegarmos ao fim de uma ramificação ou a variável da profundidade chegar a 0, isto é encontrar um nó nessa especifica profundida, então retornando 1.

int deapthNodes(tree\_node\_t\*\* rootp, int main\_idx,int depth)

{

  if ( \*rootp == NULL){

    return 0;

  }

  if (depth == 0){

    return 1;

  }

  return deapthNodes(&(\*rootp)->left[main\_idx],main\_idx,depth-1) + deapthNodes(&(\*rootp)->right[mainx\_idx],main\_idx,depth-1);

}

**<exemplo>**

* **Posição especifica de nó –** tal como a função de procura anteriormente falada, procuramos um nó específico na árvore da mesma forma, sendo que desta vez passamos também a variável do caminho percorrido até este ser encontrado. Quando esta pessoa é encontrada, escrevemos a sua posição em relação ao caminho percorrido.

tree\_node\_t\* node\_depth(tree\_node\_t\*\* rootp,int main\_idx, tree\_node\_t\* person,int rights, int lefts)

{

  if (compare\_tree\_nodes(\*rootp,person,main\_idx)==0)

  {

    printf("The position is at %d rigths and %d lefts, and has depth %d",rights,lefts,rights + lefts);

    return \*rootp;

  }

  else if (compare\_tree\_nodes(\*rootp,person,main\_idx) > 0)

  {

    return node\_depth(&((\*rootp)->left[main\_idx]),main\_idx,person,rights,lefts+1);

  }

  else

  {

    return node\_depth(&((\*rootp)->right[main\_idx]),main\_idx,person,rights +1,lefts);

  }

  return NULL;

}

**exemplo>**

Árvores equilibradas

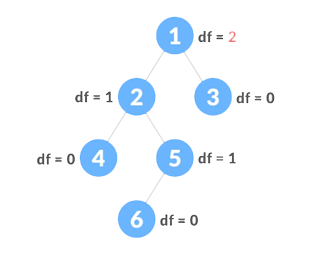
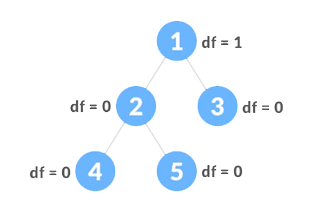
Como anteriormente falado o tempo de adição e procura é maioritariamente afetado pela estrutura da árvore. A estrutura ideal para inserção e remoção é uma árvore equilibrada, isto é, uma árvore onde todos os Nós possuem a **diferença entre a subárvores direita e esquerda não difere mais que 1**. O tempo de adição e procura numa árvore possui sempre **complexidade O(log(n))** enquanto que numa árvore não equilibrada o pior caso pode ser O(n).

Sabendo estas vantagens, como criamos árvores equilibradas?, mais especificamente, as usadas por nós, **árvores AVL** (criada por [Georgy Adelson-Velsky](https://pt.wikipedia.org/wiki/Georgy_Adelson-Velsky) e [Yevgeniy Landis](https://pt.wikipedia.org/wiki/Yevgeniy_Landis)).

Os 3 componentes na criação destas árvores é a inserção como previamente efetuada, a descoberta do valor de equilíbrio, e as rotações necessárias.

Descoberta do equilíbrio de uma árvore

A descoberta do equilíbrio de uma árvore é simplesmente a diferença da altura da subárvore esquerda com a subárvore direita. Este equilíbrio é aquilo que dita a necessidade de rotações ou se a árvore se encontra balanceada.

****A altura de cada árvore é algo que podemos descobrir através da função falada anteriormente, o problema desta implementação é que se torna incrivelmente dispendiosa visto que isto exige percorrer por todos os nós existentes da subárvore. Por esta razão decidimos implementar na própria estrutura da pessoa o tamanho da árvore da qual este é raiz. Isto feito começando com a altura em 0 e incrementando 1 sempre que adicionamos um item a sua subárvore. Deste modo a recolha do tamanha de cada subárvore passa a ter O(1).

**Árvore não equilibrada**

**Árvore Equilibrada**

int height(tree\_node\_t \*node){

  if (node == NULL){

    return 0;

  }

  return node->height;

}

int getBalance(tree\_node\_t \*N, int main\_idx)

{

    if (N == NULL)

        return 0;

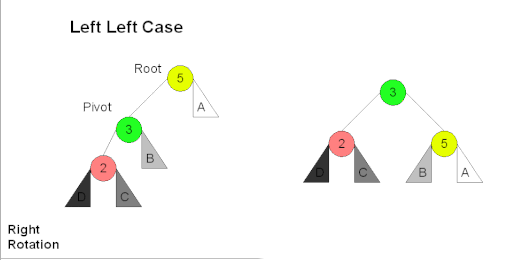
    return height(N->left[main\_idx]) - height(N->right[main\_idx]);

}

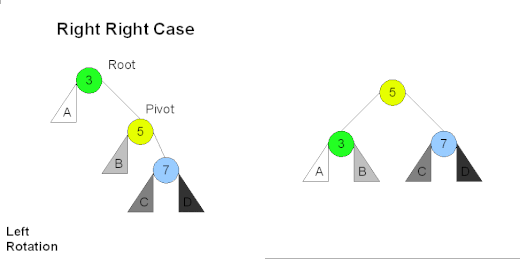
Rotações

Sempre que é inserido ou removido um Nó da árvore é necessário reestruturar a árvore e modo a manter a estrutura de uma árvore equilibrada. Estas rotações podem ser de 4 tipos.

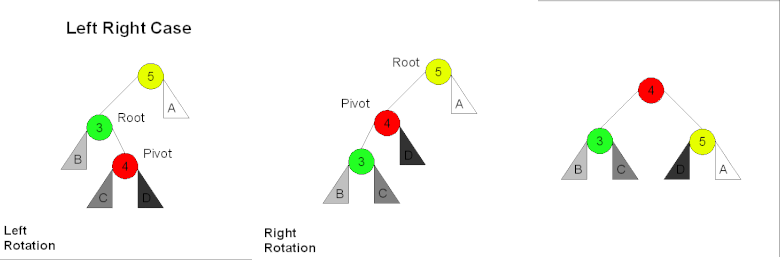
* **Rotação para a direita**

Se o fator de equilíbrio for maior que 1 e se o Nó adicionado pertencer for menor que o filho esquerdo da raiz atual.

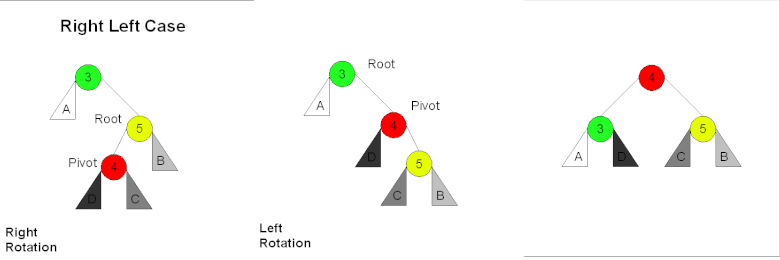
* **Rotação para a esquerda**

Se o fator de equilíbrio for menor que -1 e se o Nó adicionado pertencer for maior que o filho direito da raiz atual.

* **Rotação para a esquerda seguida para a direita**

Se o fator de equilíbrio for menor que -1 e se o Nó adicionado pertencer for menor que o filho direito da raiz atual.

* **Rotação para a direita seguida para a esquerda**

Se o fator de equilíbrio for maior que 1 e se o Nó adicionado pertencer for menor que o filho esquerdo da raiz atual.

typedef struct tree\_node\_s

{

  char name[MAX\_NAME\_SIZE + 1];

  char zip\_code[MAX\_ZIP\_CODE\_SIZE + 1];

  char telephone\_number[MAX\_TELEPHONE\_NUMBER\_SIZE + 1];

  char security\_number[MAX\_SECURITY\_NUMBER\_SIZE + 1];

  struct tree\_node\_s \*left[4];

  struct tree\_node\_s \*right[4];

  int height;       // heigth of the tree from node for AVL trees

}

tree\_node\_t;

int height(tree\_node\_t \*node){

  if (node == NULL){

    return 0;

  }

  return node->height;

}

// A utility function to right rotate subtree rooted with y

// See the diagram given above.

tree\_node\_t \*rightRotate(tree\_node\_t \*y,int main\_idx)

{

    tree\_node\_t \*x = y->left[main\_idx];

    tree\_node\_t \*T2 = NULL;

     if (x ){

       T2 = x->right[main\_idx];

     }

    // Perform rotation

    if (x){

       x->right[main\_idx] = y;

     }

    y->left[main\_idx] = T2;

    y->height = max(height(y->left[main\_idx]),height( y->right[main\_idx]))+1;

    if (x){

      x->height = max(height(x->left[main\_idx]), height(x->right[main\_idx]))+1;

     }

    // Return new root

    return x;

}

// A utility function to left rotate subtree rooted with x

// See the diagram given above.

tree\_node\_t \*leftRotate(tree\_node\_t \*x,int main\_idx)

{

    tree\_node\_t \*y = x->right[main\_idx];

    tree\_node\_t \*T2 = NULL;

     if (y){

       T2 = y->left[main\_idx];

     }

    // Perform rotation

    if (y){

       y->left[main\_idx] = x;

     }

    x->right[main\_idx] = T2;

    x->height = max(height(x->left[main\_idx]), height(x->right[main\_idx]))+1;

    if (y){

       y->height = max(height(y->left[main\_idx]), height(y->right[main\_idx]))+1;

     }

    // Return new root

    return y;

}

// Get Balance factor of node N

int getBalance(tree\_node\_t \*N, int main\_idx)

{

    if (N == NULL)

        return 0;

    return height(N->left[main\_idx]) - height(N->right[main\_idx]);

}

// Recursive function to insert a key in the subtree rooted

// with node and returns the new root of the subtree.

tree\_node\_t\* insert(tree\_node\_t\* node, tree\_node\_t\* person, int main\_idx)

{

    if (node == NULL){

      return person;

    }

    int \*c;

    c = (int \*) malloc(sizeof(int));

    \*c = compare\_tree\_nodes(node,person,main\_idx);

    if (\*c > 0)

    {

       node->left[main\_idx]  = insert(node->left[main\_idx], person, main\_idx);

    }

    else

    {

      node->right[main\_idx]  = insert(node->right[main\_idx], person,main\_idx);

    }

    // increase the height of the tree

    node->height = 1 + max( height(node->right[main\_idx]) ,height( node->left[main\_idx]));

    /\* 3. Get the balance factor of this ancestor

          node to check whether this node became

          unbalanced \*/

    int \*balance;

    balance = (int \*) malloc(sizeof(int));

    \*balance = getBalance(node,main\_idx);

    // If this node becomes unbalanced, then

    // there are 4 cases

    // Left Left Case

    if (\*balance > 1 && compare\_tree\_nodes(person,node->left[main\_idx],main\_idx) < 0)

    {

        return rightRotate(node,main\_idx);

    }

    // Right Right Case

    if (\*balance < -1 && compare\_tree\_nodes(person,node->right[main\_idx],main\_idx)> 0)

        return leftRotate(node,main\_idx);

    // Left Right Case

    if (\*balance > 1 && compare\_tree\_nodes(person,node->left[main\_idx],main\_idx) > 0)

    {

        node->left[main\_idx] =  leftRotate(node->left[main\_idx],main\_idx);

        return rightRotate(node,main\_idx);

    }

    // Right Left Case

    if (\*balance < -1 && compare\_tree\_nodes(person,node->right[main\_idx],main\_idx)< 0)

    {

        node->right[main\_idx] = rightRotate(node->right[main\_idx],main\_idx);

        return leftRotate(node,main\_idx);

    }

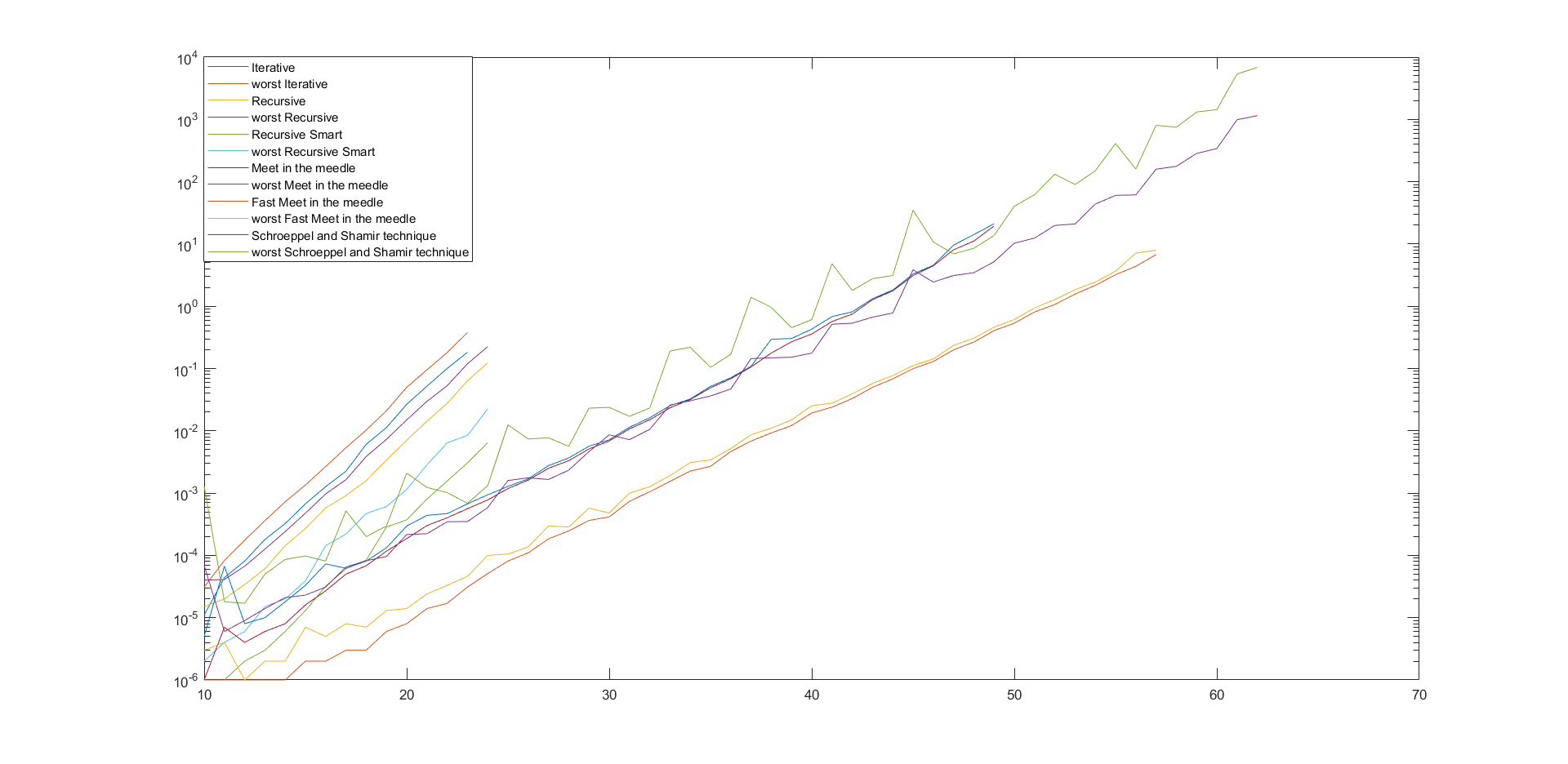
    /\* return the (unchanged) node pointer \*/

    free(c);

    free(balance);

    return node;

}

**Graphs

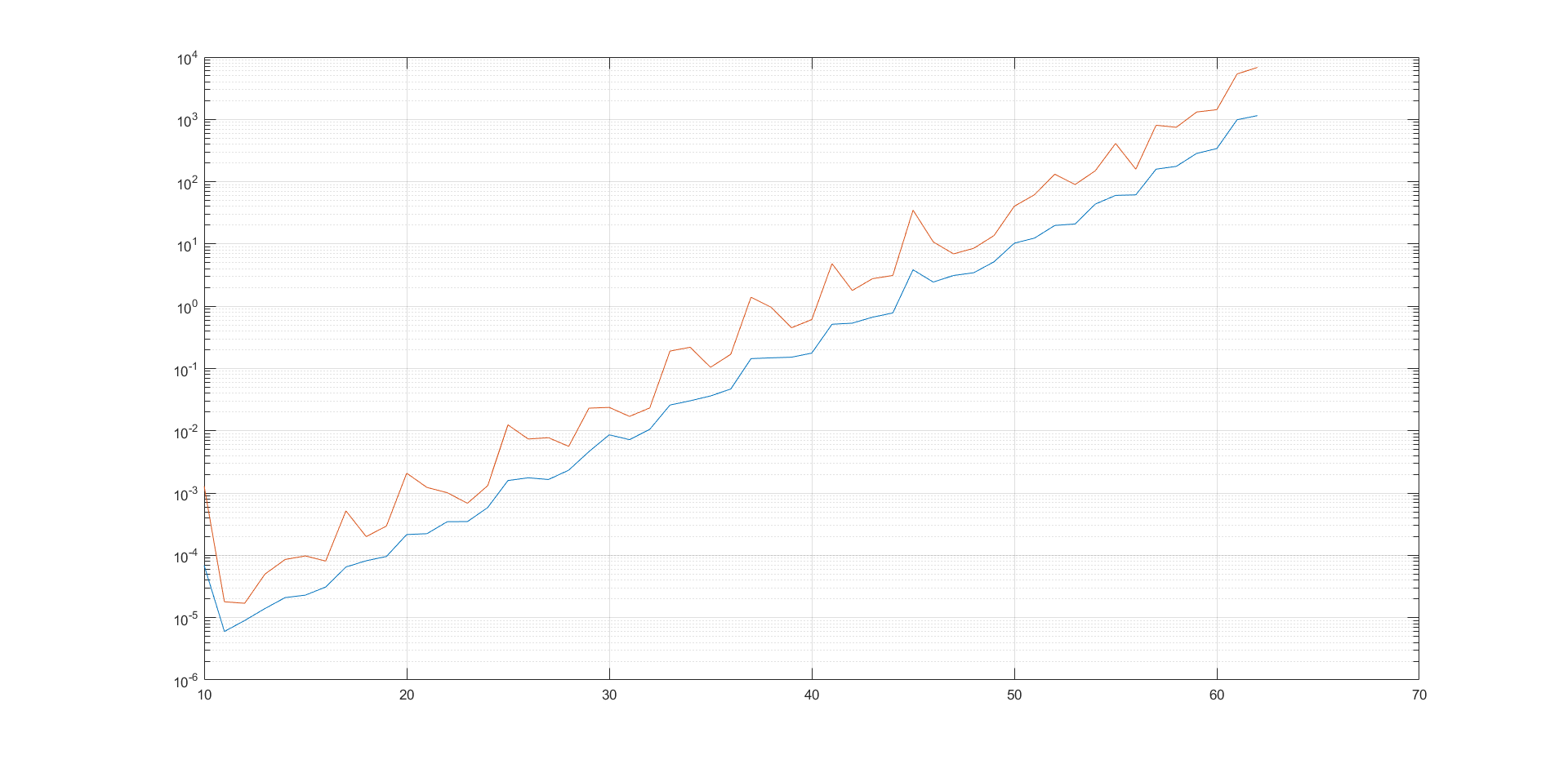
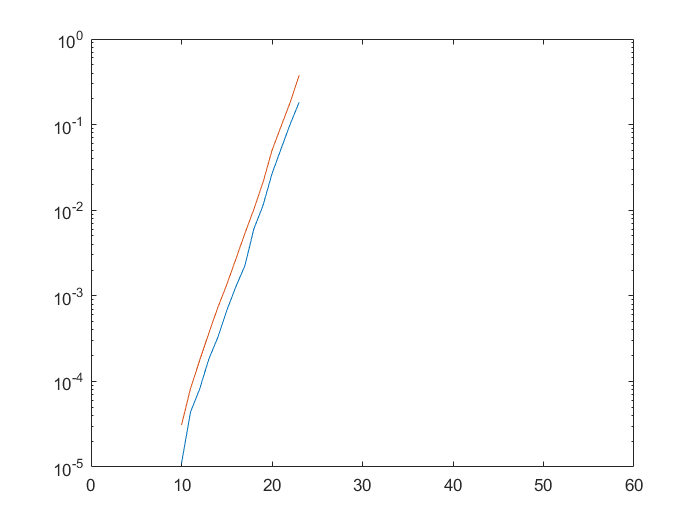
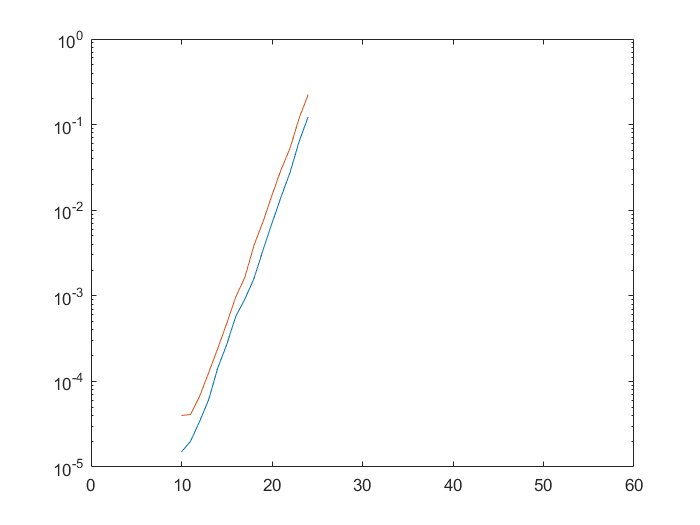


Figura 1. Todos os algoritmos

Figura 2. Schroeppel and Shamir



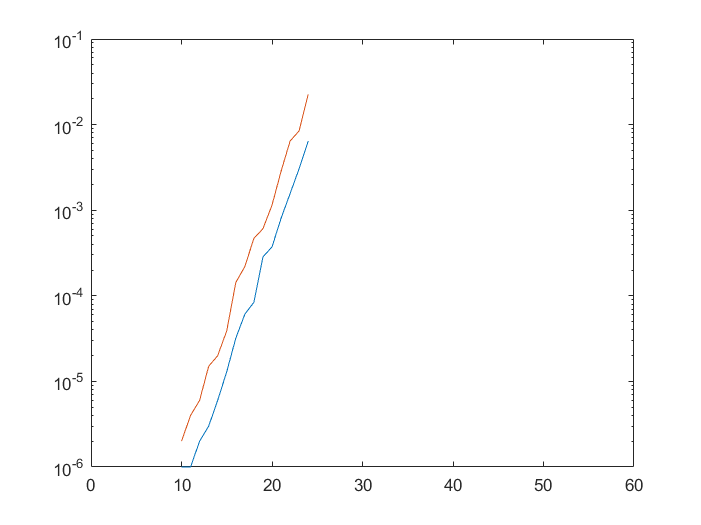
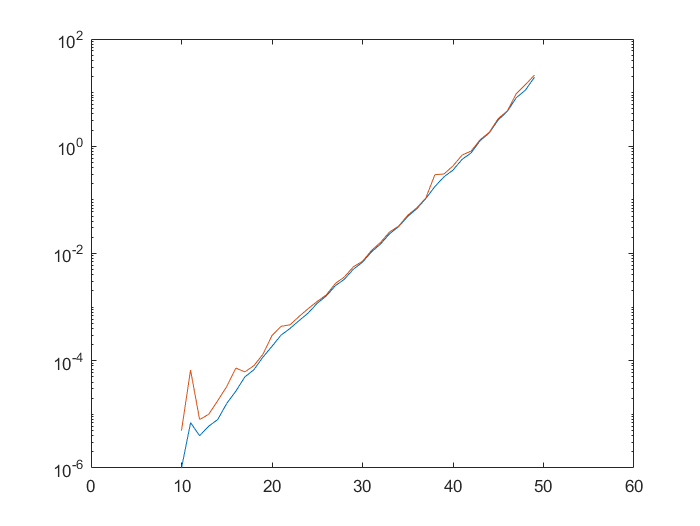


Figura 4. Algoritmo Recursivo

Figura 3. Algoritmo Iterativo

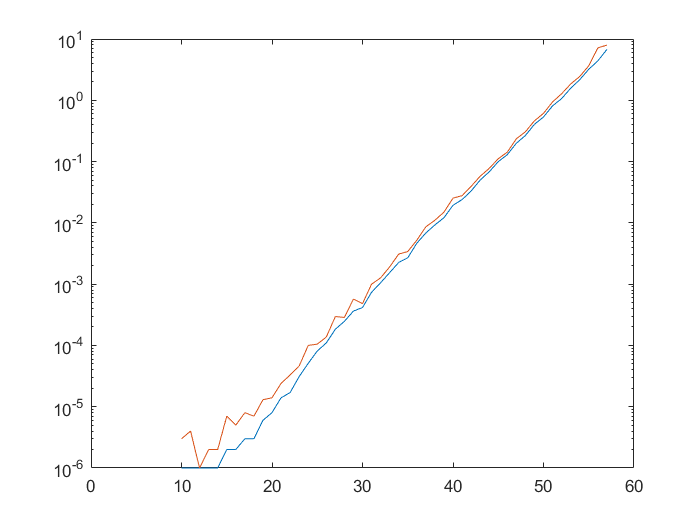


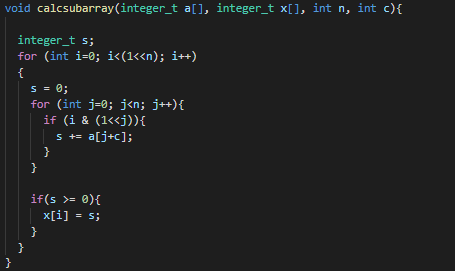
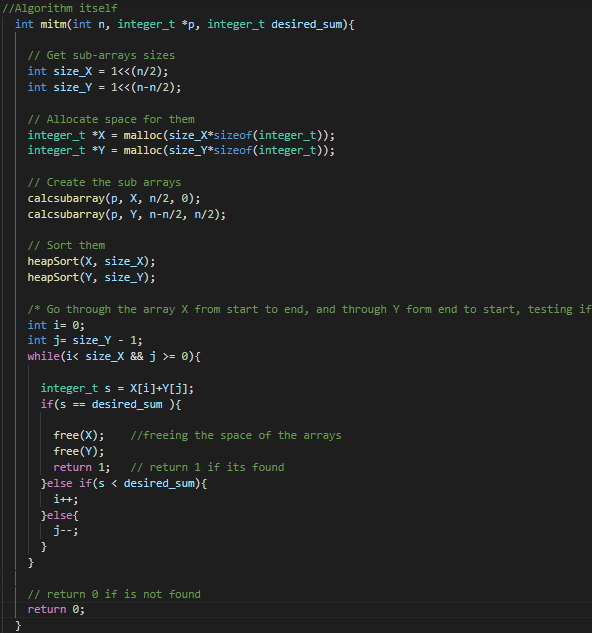
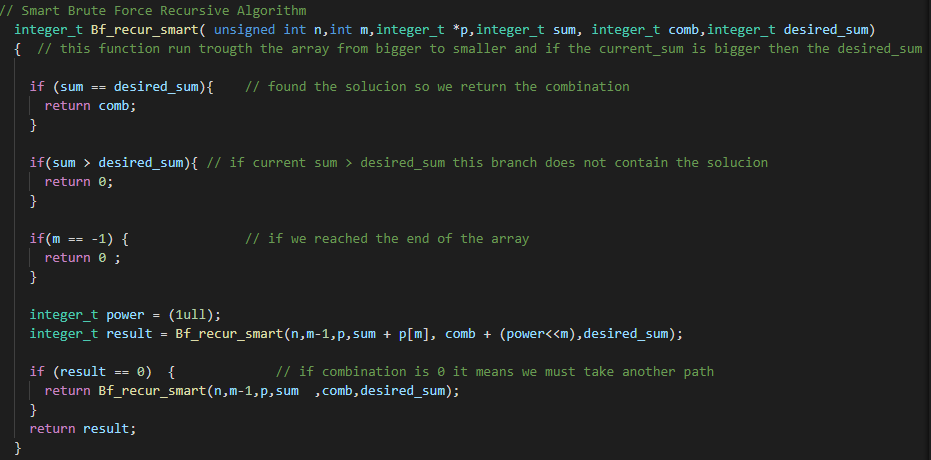
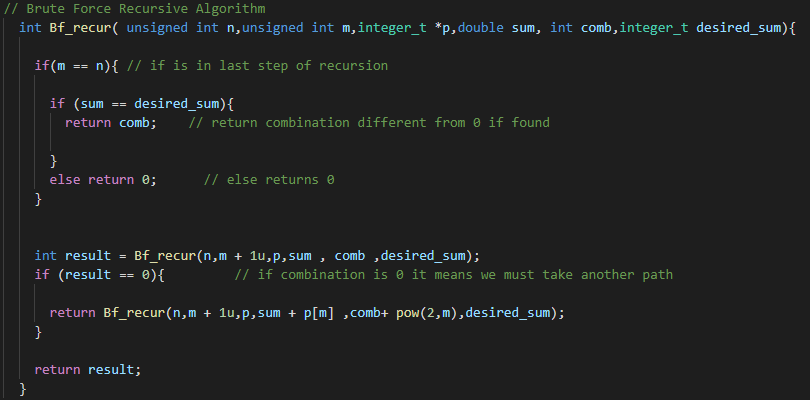
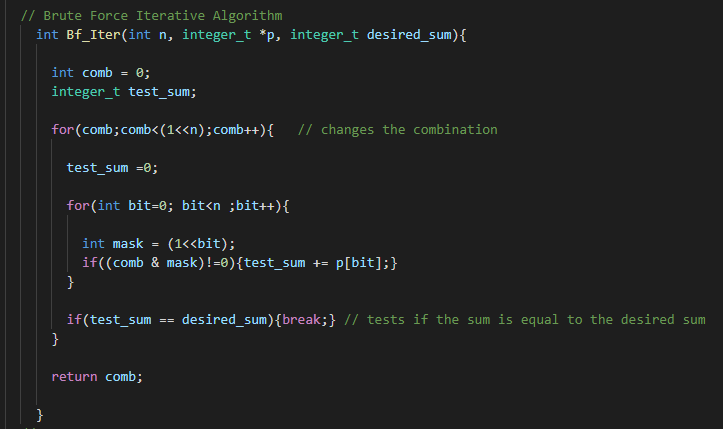
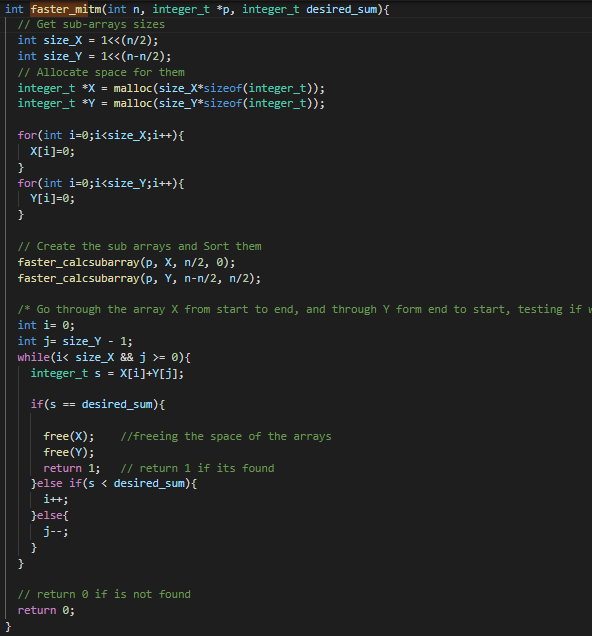
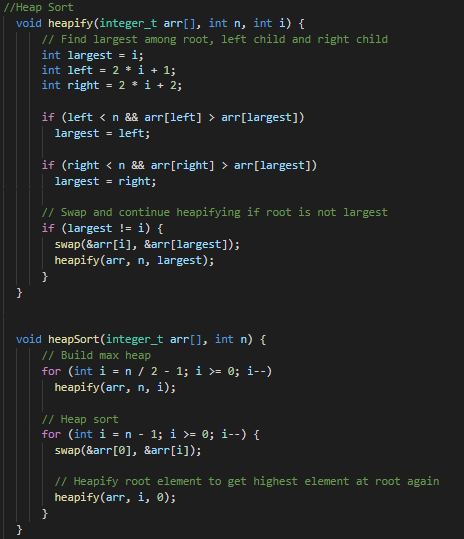
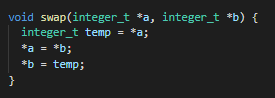
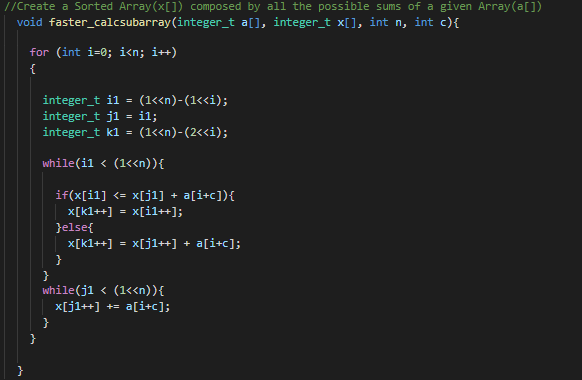
Figura 6. Algoritmo Meet in the Middle

Figura 5. Algoritmo Branch and Bound

Figura 7. Algoritmo Faster Meet in the Middle

Código utilizado

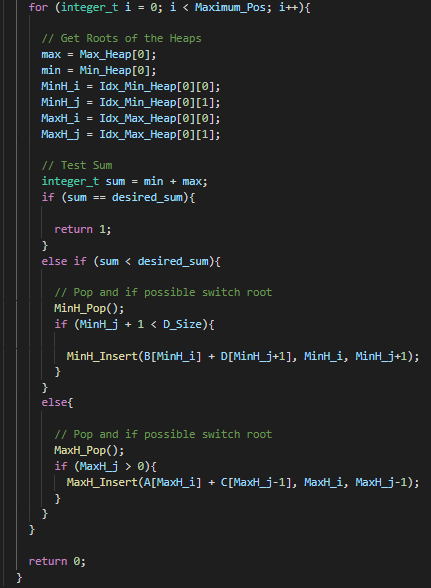
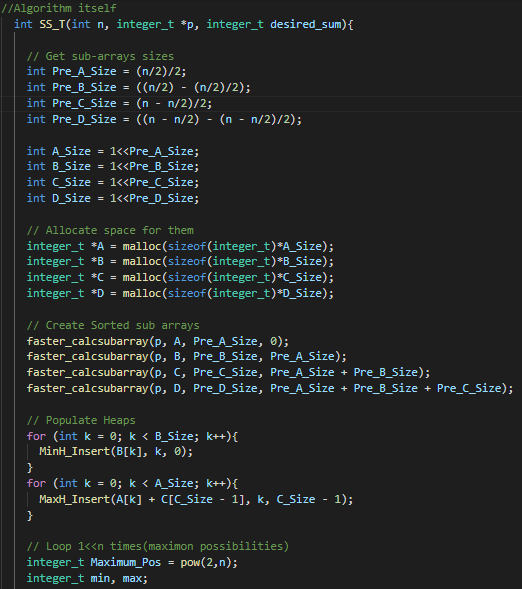
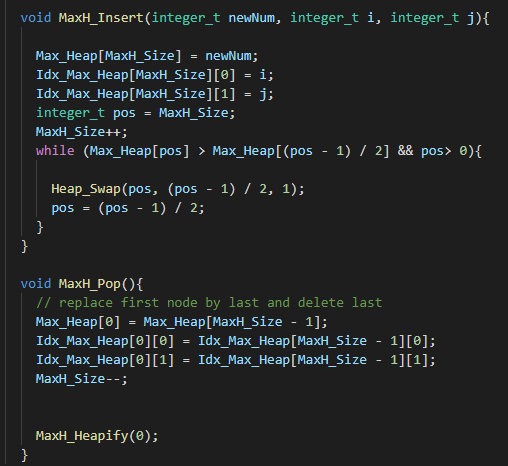
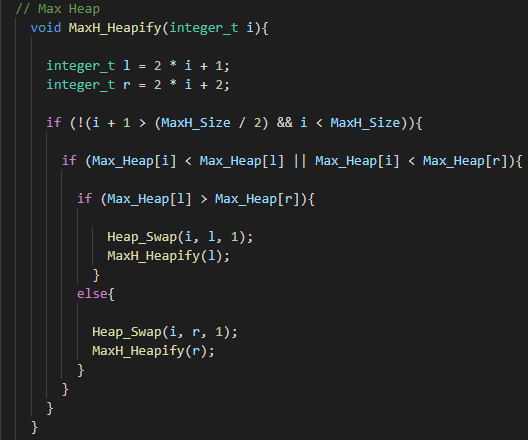
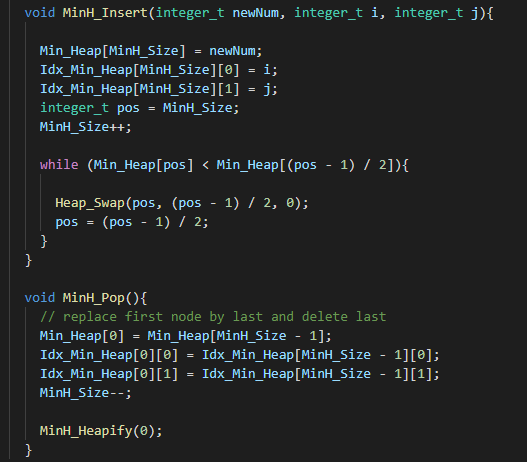
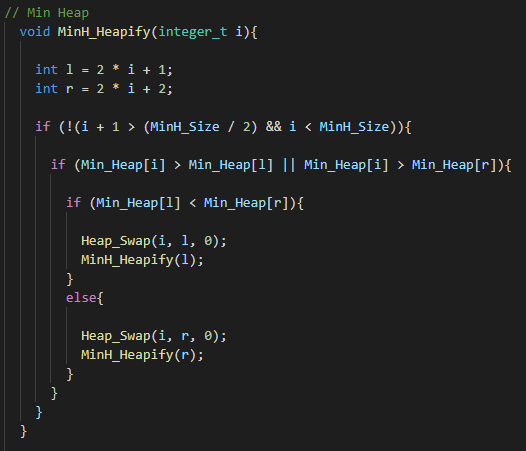
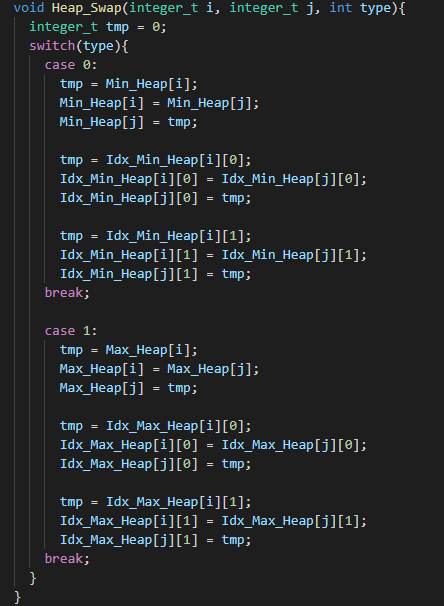
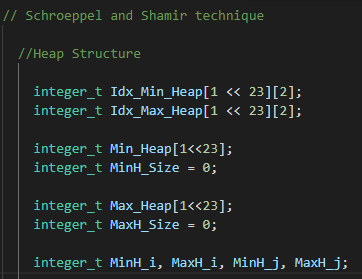
**Brute Forces**

 **

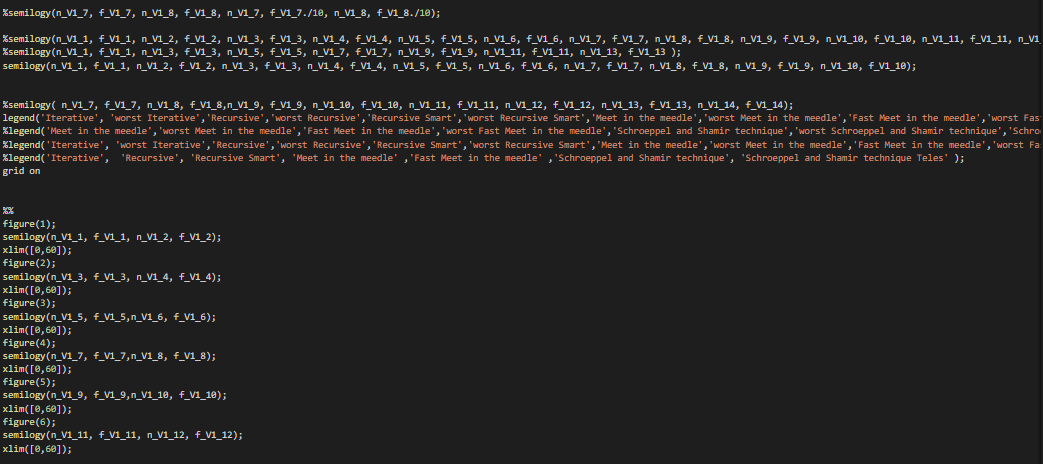
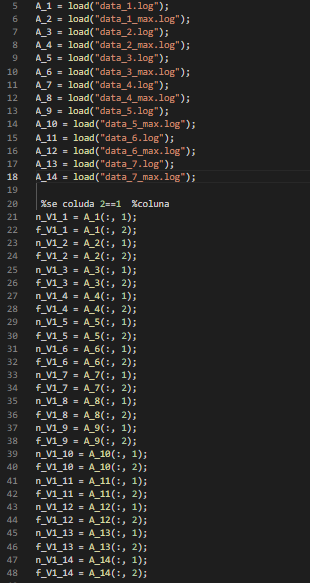
**Meet in the middle**

**Faster Meet in the middle**

**Schroeppel and Shamir**

**

Código Matlab

**

Algumas Soluções Obtidas

**Rafael Remígio 102435 João Correia 104360**

Primeiras 8 soluções para n = 40

1001111010110010001010101000110011101001

0011001111011001100011001010111111011100

0110111000111101011011110110110110000101

0000000001111111010010111010010101101000

1000011011000101101000010111011000110111

0000110111010101001001111100110100110101

1100010011000010001010000001111111010000

1011001100001011110111010111100100000010

Primeira solução n = 57

101010101010111111001000110000010010100100110111110011111

Primeiras 8 soluções para n = 40

1110101110001100011111110001011001111110

0001111101011010110010100001100011110111

0011101001000000011000111111011000001101

1111000100010011101010101110000111001100

1101111010010000110000110000111101011011

1101011011000001110011001011111011100000

0010100101011000101001110001000101110111

0110010001111100110001110001011010010000

Primeira solução n = 57

010001010010010010100100011101001101011101100001101101111

**Bibliografia/Webgrafia**

1. Optimal Sequential Multi-Way Number Partitioning Richard E. Korf, Ethan L. Schreiber, and Michael D. Moffitt
2. Shamir's Attack on the Basic Merkle-Hellman Knapsack Cryptosystem
3. <https://rjlipton.wpcomstaging.com/2012/12/19/branch-and-bound-why-does-it-work/>
4. <https://en.wikipedia.org/>