

# Controle de Posição em Sistema Massa-Mola com Conexão Flexível

Rafael Anacleto Alves de Souza<sup>a,1</sup>, Elvis Correia Lopes dos Santos<sup>a,2</sup> e Guilherme de Oliveira Costa<sup>a,3</sup>

<sup>a</sup>Instituto de Computação, Universidade Federal de Alagoas – Campus A.C. Simões, <sup>1</sup>raas@ic.ufal.br, <sup>2</sup>ecls@ic.ufal.br, <sup>3</sup>goc@ic.ufal.br

Prof. Dr. Icaro Bezerra Queiroz de Araujo

**Resumo**—Este trabalho apresentou o desenvolvimento e análise de um sistema de controle de posição baseado em um modelo massa-mola de duas massas acopladas em série. O estudo teve como objetivo compreender a dinâmica de sistemas mecânicos com acoplamento elástico e implementar um controlador proporcional-integral (PI) capaz de estabilizar a posição da segunda massa sob influência de forças externas. A modelagem matemática é fundamentada nas Leis de Newton, resultando em um sistema de equações diferenciais de quarta ordem que descreve o comportamento das massas. A função de transferência foi obtida no domínio da Laplace, permitindo a análise da resposta do sistema em malha aberta e o projeto do controlador PI. Simulações foram realizadas no MATLAB/Simulink utilizando parâmetros reais obtidos experimentalmente:  $M_1 = 0.109\text{Kg}$ ,  $M_2 = 0.115\text{Kg}$ ,  $K_1 = 196\text{N/m}$ ,  $K_2 = 196\text{N/m}$ ,  $b_1 = 0.5\text{N} \cdot \text{s/m}$  e  $b_2 = 0.5\text{N} \cdot \text{s/m}$ . Os resultados demonstraram o comportamento oscilatório típico do sistema massa-mola e confirmaram a eficácia do controlador PI na redução do erro de posição e na melhoria da estabilidade dinâmica.

**Keywords**—sistema massa-mola, controle de posição, acoplamento elástico, resposta dinâmica, two-mass system, PI

## 1. Introdução

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e análise de um modelo matemático para um sistema de controle de posição com acoplamento flexível. O protótipo, de configuração vertical, é composto por duas massas em cascata: a primeira massa ( $M_1$ ) é suspensa por uma mola ( $K_1$ ) e acoplada à segunda massa ( $M_2$ ) por uma segunda mola ( $K_2$ ). O controle de posição da massa inferior ( $M_2$ ) será realizado por um servo motor que atua na parte superior do sistema, sendo a posição monitorada por um sensor a laser.

Em sistemas industriais como braços robóticos e máquinas-ferramenta, a flexibilidade nos acoplamentos mecânicos introduz vibrações que degradam a precisão e podem levar à instabilidade. Portanto, a modelagem como um sistema de duas massas, em vez de uma massa única, é essencial para capturar essa dinâmica complexa e projetar controladores eficazes.

## 2. Descrição do Sistema

O sistema proposto neste projeto adota uma configuração vertical com duas massas acopladas, montadas em um arranjo em cascata. A primeira massa ( $M_1$ ) é suspensa por uma mola ( $K_1$ ). O ponto de suspensão desta mola é movimentado verticalmente por um sistema de engrenagem e correia, acionado por um servo motor (modelo DS3230MG). Esta primeira massa está acoplada à segunda massa ( $M_2$ ) por uma mola de ligação ( $K_2$ ), deixando  $M_2$  suspensa. A rotação do motor atua no conjunto superior, provocando o deslocamento vertical de todo o sistema.

O objetivo do controle é a posição da massa inferior ( $M_2$ ), que é medida continuamente por um sensor a laser posicionado na base da estrutura.

Para evitar interferências mecânicas e vibrações laterais indesejadas, as massas são fixadas em carrinhos que deslizam ao longo de um trilho vertical. Esta configuração atua como um guia linear, restringindo o movimento transversal para garantir uma trajetória puramente vertical. O atrito gerado pelo deslizamento dos carrinhos no trilho é o principal componente do atrito viscoso ( $b_1$  e  $b_2$ ) considerado no modelo matemático.

A montagem do sistema foi pensada para minimizar problemas comuns em estruturas horizontais, como o atrito entre a base e os elementos móveis. A disposição vertical também facilita a análise do

sistema em termos de energia potencial, amortecimento e resposta transitória sob a atuação da gravidade.

## 3. Revisão Bibliográfica

O sistema massa-mola é um modelo físico fundamental para o estudo de fenômenos como vibrações, oscilações e ondas. Sua dinâmica é primariamente governada pela Lei de Hooke, que descreve a força restauradora da mola como sendo proporcional à sua deformação. Este modelo é amplamente aplicado na análise de sistemas do cotidiano, como suspensões de veículos e no projeto de estruturas como edifícios e pontes, para garantir sua estabilidade. Em sistemas físicos reais, a presença de forças dissipativas, como o atrito, introduz o fenômeno do amortecimento, que causa a redução da amplitude das oscilações ao longo do tempo. [3]

Embora o modelo de massa única seja útil, ele se torna inadequado em diversas aplicações industriais, como máquinas-ferramentas, sistemas de manufatura de semicondutores, braços robóticos flexíveis e laminadores de aço. Nestes casos, atuadores e cargas são frequentemente conectados por acoplamentos flexíveis ou eixos longos de baixa rigidez. Essa flexibilidade introduz uma dinâmica mais complexa, que deve ser modelada como um sistema de duas ou múltiplas massas. A elasticidade no acoplamento pode gerar vibrações que degradam significativamente a precisão do posicionamento e podem até levar à instabilidade do sistema de controle. Além disso, parâmetros como atrito e folgas mecânicas podem variar com o tempo e a temperatura, tornando o controle ainda mais desafiador. [2]

Para sistemas com orientação vertical, como o abordado neste projeto, a força da gravidade é uma consideração adicional. A literatura descreve duas abordagens para lidar com este efeito: a compensação ativa, que utiliza atuadores para gerar forças contrárias à gravidade, e a compensação passiva, que utiliza elementos não energizados. A abordagem passiva é frequentemente preferida por ser mais simples, confiável, de menor custo e por não apresentar os problemas de instabilidade inerentes aos sistemas de controle ativo. Dentre os métodos passivos, destacam-se o uso de contrapesos e o de molas. Para aplicações que exigem baixa inércia e movimentos dinâmicos, os mecanismos baseados em molas são mais vantajosos, pois adicionam muito menos massa ao sistema. Uma técnica para projetar tais mecanismos é a abordagem energética, que busca manter a energia potencial total do sistema (gravitacional e elástica) constante para qualquer configuração. [1]

Esta revisão da literatura, portanto, estabelece a relevância do presente trabalho. Fica evidente o desafio de controlar sistemas de duas massas devido às vibrações induzidas pela flexibilidade do acoplamento e a importância de considerar o efeito da gravidade em configurações verticais. A modelagem matemática e a análise de um sistema massa-mola de duas massas em arranjo vertical considerando o atrito constituem o passo fundamental para o futuro projeto de controladores capazes de suprimir essas vibrações e garantir um controle de posição preciso, um problema de grande interesse na engenharia moderna. [2] [1]

## 4. Modelagem Matemática

Nesta seção, a modelagem é desenvolvida a partir das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) que regem o sistema, considerando os

efeitos do atrito. O sistema consiste em duas massas ( $M_1, M_2$ ) acopladas por molas ( $K_1, K_2$ ) e se movendo em um trilho que introduz atrito. O atrito viscoso do trilho e a resistência do ar são modelados como uma única força de amortecimento proporcional à velocidade, com coeficientes  $b_1$  e  $b_2$  para cada massa, respectivamente.

#### 4.1. Equações Diferenciais Ordinárias

Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada massa, definindo o deslocamento a partir da posição de equilíbrio, obtemos o seguinte sistema de EDOs:

Para a Massa 1 ( $M_1$ ):

A força resultante em  $M_1$  é a soma da força da mola  $K_1$ , da força da mola  $K_2$ , da força de atrito em  $M_1$  e da força externa  $f(t)$ .

$$\sum F_{M_1} = -K_1 x_1(t) - b_1 \dot{x}_1(t) + K_2(x_2(t) - x_1(t)) + f(t) = M_1 \ddot{x}_1(t) \quad (1)$$

Reorganizando a equação, temos:

$$M_1 \ddot{x}_1(t) + b_1 \dot{x}_1(t) + (K_1 + K_2)x_1(t) - K_2 x_2(t) = f(t) \quad (2)$$

Para a Massa 2 ( $M_2$ ):

A força resultante em  $M_2$  é a soma da força da mola  $K_2$  e da força de atrito em  $M_2$ .

$$\sum F_{M_2} = -K_2(x_2(t) - x_1(t)) - b_2 \dot{x}_2(t) = M_2 \ddot{x}_2(t) \quad (3)$$

Reorganizando a equação, temos:

$$M_2 \ddot{x}_2(t) + b_2 \dot{x}_2(t) + K_2 x_2(t) - K_2 x_1(t) = 0 \quad (4)$$

#### 4.2. Obtenção da Função de Transferência

Para encontrar a função de transferência  $G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)}$ , aplicamos a Transformada de Laplace nas EDOs, assumindo condições iniciais nulas:

Para a EDO da Massa 1:

$$(M_1 s^2 + b_1 s + K_1 + K_2)X_1(s) - K_2 X_2(s) = F(s) \quad (5)$$

Para a EDO da Massa 2:

$$-K_2 X_1(s) + (M_2 s^2 + b_2 s + K_2)X_2(s) = 0 \quad (6)$$

Da equação [6], podemos isolar  $X_1(s)$ :

$$X_1(s) = \frac{(M_2 s^2 + b_2 s + K_2)}{K_2} X_2(s) \quad (7)$$

Agora, substituímos esta expressão para  $X_1(s)$  na equação [5]:

$$(M_1 s^2 + b_1 s + K_1 + K_2) \left[ \frac{(M_2 s^2 + b_2 s + K_2)}{K_2} X_2(s) \right] - K_2 X_2(s) = F(s) \quad (8)$$

Fatorando  $X_2(s)$  e reorganizando os termos, encontramos a função de transferência final:

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{K_2}{(M_1 s^2 + b_1 s + K_1 + K_2)(M_2 s^2 + b_2 s + K_2) - K_2^2} \quad (9)$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (10)$$

onde o numerador é  $N(s) = \frac{K_2}{M_1 M_2}$  e o denominador  $D(s)$  é um polinômio de quarta ordem  $D(s) = s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ , cujos

coeficientes são:

$$a_3 = \frac{b_2}{M_2} + \frac{b_1}{M_1} \quad (11)$$

$$a_2 = \frac{K_2}{M_2} + \frac{K_1}{M_1} + \frac{b_1 b_2 K_2}{M_1^2 M_2} \quad (12)$$

$$a_1 = \frac{b_1 K_2 + K_1 b_2 + K_2 b_2}{M_1 M_2} \quad (13)$$

$$a_0 = \frac{K_1 K_2}{M_1 M_2} \quad (14)$$



Figura 1. Diagrama de blocos do sistema em malha aberta

#### 4.3. Consideração sobre a Gravidade

Para a configuração vertical, a força de gravidade ( $F_G = M \cdot g$ ) atua constantemente em ambas as massas. Este efeito é responsável por estabelecer a posição de equilíbrio estático do sistema, ou seja, a gravidade estica as molas até um novo ponto de repouso. O modelo dinâmico e as EDOs foram desenvolvidas para deslocamentos ( $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ ) a partir deste ponto de equilíbrio. Como a força da gravidade é constante, ela é cancelada pelas forças estáticas das molas no ponto de equilíbrio, e por isso o termo  $g$  não aparece na função de transferência dinâmica.

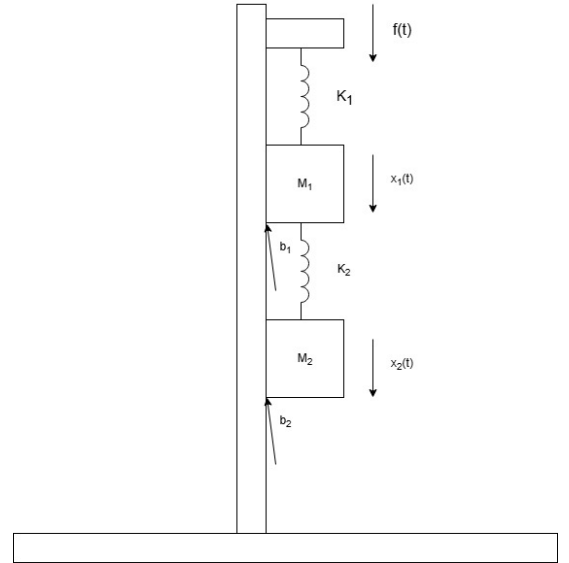


Figura 2. Modelagem do sistema massa-mola

### 5. Análise do Modelo

#### 5.1. Característica da Função de Transferência

O Ganho Estático, que representa a resposta do sistema em regime estacionário a uma entrada constante, é calculado fazendo  $s = 0$  na função de transferência:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_2/(M_1 M_2)}{K_1 K_2/(M_1 M_2)} = \frac{1}{K_1} \quad (15)$$

Utilizando o valor experimental  $K_1 = 196 \text{ N/m}$ , o ganho estático teórico é:

$$G(0) = \frac{1}{196} \approx 0.0051 \text{ m/N} \quad (16)$$

Este resultado indica que, para uma força de entrada do tipo degrau unitário (1N), o deslocamento da Massa 2 em regime estacionário será de aproximadamente  $0.0051m$ . Este valor é confirmado pela simulação em malha aberta que mostra o sistema estabilizando em  $0.0051m$ . O sistema é do Tipo 0, pois não possui polos na origem, o que justifica a necessidade de um controlador de ação integral para eliminar o erro em regime estacionário para uma entrada degrau.

## 5.2. Análise de Estabilidade

A estabilidade do sistema em malha aberta é determinada pelos polos da função de transferência, que são as raízes do polinômio característico do denominador:

$$\Delta(s) = D(s) = s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \quad (17)$$

O polinômio característico agora é um polinômio de quarta ordem completo, com termos de todas as potências de  $s$ . Consequentemente, para quaisquer valores físicos positivos dos parâmetros ( $M$ ,  $b$ ,  $K$ ), os polos da função de transferência possuirão parte real negativa, deslocando-se do eixo imaginário para o semiplano esquerdo do plano  $s$ .

Isso garante que o sistema em malha aberta seja estável. O comportamento dinâmico esperado para uma entrada degrau é, portanto, uma resposta oscilatória amortecida, na qual o deslocamento da massa converge para um valor de regime estacionário após um período transitório. A localização exata dos polos e, por conseguinte, as características da resposta transitória – como a frequência de oscilação amortecida e o tempo de acomodação – dependem dos valores numéricos de todos os parâmetros físicos do sistema ( $M_1, M_2, b_1, b_2, K_1, K_2$ ).

## 6. Simulação Computacional

Para validar o comportamento dinâmico previsto pelo modelo matemático, foi realizada uma simulação computacional utilizando o software MATLAB/Simulink. Na simulação, foram utilizados os parâmetros reais obtidos experimentalmente:  $M_1 = 0.109Kg$ ,  $M_2 = 0.115Kg$ ,  $K_1 = 196N/m$ ,  $K_2 = 196N/m$ ,  $b_1 = 0.5N \cdot s/m$  e  $b_2 = 0.5N \cdot s/m$ .

### 6.1. Análise dos Resultados da Simulação

Os resultados da simulação, apresentados nas Figuras 3 e 4.

A Figura 3 demonstra a resposta do deslocamento  $X_2(t)$  a uma entrada degrau unitária. O gráfico confirma a análise teórica: o sistema exibe um comportamento oscilatório amortecido, com um sobressinal significativo, e converge para o valor de regime estacionário de  $0.0051m$ , conforme previsto pelo ganho estático  $G(0) = \frac{1}{K_1}$ .

A Figura 4 mostra a resposta do sistema a um impulso unitário. O sistema é deslocado de seu equilíbrio e retorna a ele através de uma oscilação amortecida, com a amplitude decaindo até zero. A convergência em ambos os casos valida o caráter estável do sistema em malha aberta, como previsto pela presença dos termos de amortecimento ( $b_1$  e  $b_2$ ) no modelo.

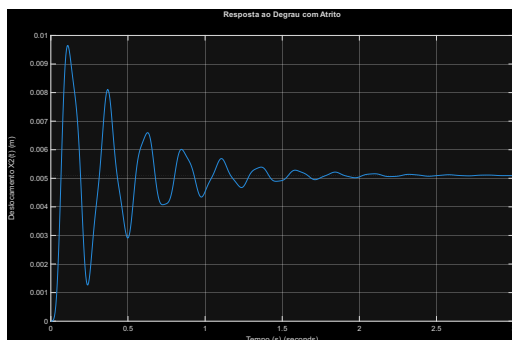


Figura 3. Resposta ao Degrau

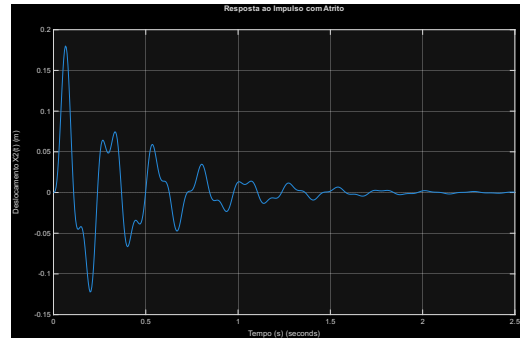


Figura 4. Resposta ao Impulso

## 7. Montagem do Protótipo

A montagem do protótipo físico foi realizada conforme a descrição da Seção 2. Utilizou-se uma estrutura vertical com trilhos para restringir o movimento das massas ( $M_1$  e  $M_2$ ) a uma trajetória vertical, minimizando vibrações laterais. As massas foram implementadas como carrinhos deslizantes, e as molas ( $K_1$  e  $K_2$ ) foram conectadas em cascata. Na parte superior, um servo motor acoplado a um sistema de correia e engrenagem permite aplicar a força de controle  $f(t)$  ao mover o ponto de suspensão de  $K_1$ . Para a medição da saída, um sensor a laser foi posicionado na base da estrutura, monitorando continuamente a posição  $x_2(t)$  da massa inferior.

### 7.1. Componentes e Estrutura Final

[Aqui vai ser a descrição do sistema montado e a explicação, terá também a foto do protótipo montado.]

### 7.2. Esquemas Elétricos e Mecânicos

[Possíveis diagramas técnicos da montagem, podendo ter o esquema elétrico do circuito, mostrando as ligações entre o Arduino, o sensor, servo motor e a fonte de alimentação.]

[Inserir também um desenho técnico ou CAD da montagem mecânica.]

## 8. Coleta de Dados Experimentais

Esta seção descreve a metodologia empregada para obter os dados experimentais da planta real, tanto para a caracterização dos seus parâmetros quanto para a validação da resposta dinâmica.

### 8.1. Metodologia de Caracterização dos Parâmetros

Os parâmetros do modelo foram determinados por uma combinação de medição direta e validação por simulação:

- **Massa ( $M_1$  e  $M_2$ ):** Os valores  $M_1 = 0.109Kg$  e  $M_2 = 0.115Kg$  foram obtidos através da pesagem direta dos conjuntos de carrinhos e massas acopladas.
- **Constantes Elásticas ( $K_1$  e  $K_2$ ):** Os valores  $K_1 = 196N/m$  e  $K_2 = 196N/m$  foram determinados estaticamente. Aplicou-se a Lei de Hooke ( $F = k \cdot x$ ), medindo-se o deslocamento da mola para diferentes forças (massas) conhecidas e realizando uma regressão linear para encontrar o coeficiente angular  $K$ .
- **Coeficiente de Atrito ( $b_1$  e  $b_2$ ):** Determinar os coeficientes de atrito viscoso experimentalmente é um desafio, pois o sistema de 4ª ordem possui modos de vibração distintos. Desta forma, optou-se por uma abordagem de estimativa e validação. Foram estimados valores iniciais pequenos, mas não-nulos ( $b_1 = 0.5Ns/m$  e  $b_2 = 0.5Ns/m$ ), para representar o atrito presente nos trilhos. Esta estimativa foi então validada na Seção 9, onde a resposta simulada do modelo (utilizando estes valores) foi comparada com a resposta experimental do protótipo, mostrando alta correlação e confirmando que os valores estimados eram uma representação fidedigna do amortecimento real do sistema.

## 8.2. Metodologia do Ensaio em Malha Aberta

Para validar o modelo, foi realizado um ensaio em malha aberta. Um sinal de comando em degrau foi enviado ao servo motor para deslocar o ponto de suspensão superior em uma distância conhecida. Um microcontrolador Arduino foi programado para gerar o sinal de controle e, simultaneamente, registrar os dados do sensor a laser, que mediu a resposta  $x_2(t)$ .

[Detalhar o procedimento do experimento de validação. Falar sobre o sinal de entrada que comanda o servo motor para mover para um distância conhecida.]

[Descrever como o microcontrolador foi programado e como os dados foram exportados para análise posterior.]

## 9. Comparação e Validação do Modelo

A validação do modelo foi realizada comparando a resposta experimental em malha aberta (coletada na Seção 8.2) com a resposta simulada (Seção 6.1). Foi aplicado um degrau de entrada em ambos os sistemas. Ao sobrepor os gráficos (Figura X - [inserir o gráfico comparativo]), observou-se uma forte correlação entre o comportamento simulado e o real. Ambos apresentaram frequência de oscilação e tempos de acomodação similares, e o ganho estático experimental foi compatível com o valor  $\frac{1}{K_1}$  previsto teoricamente. As pequenas discrepâncias foram atribuídas a não-linearidades do atrito (atrito estático, não modelado) e folgas mecânicas. O modelo matemático foi, portanto, considerado uma representação fidedigna da planta para o projeto do controlador.

## 10. Projeto do Controlador

Esta seção usa os dados dos gráficos de malha fechada e LGR.

### 10.1. Requisitos de Desempenho

O controlador de posição foi projetado para atender os seguintes requisitos:

- Tempo de acomodação para 2% ( $T_s$ ): Menor que 5 segundos.
- Sobressinal máximo ( $M_p$ ): Menor que 10%.
- Erro em regime estacionário para entrada degrau ( $e_{ss}$ ): Zero para uma entrada degrau.

### 10.2. Escolha da Técnica e Tipo de Controlador

O sistema em malha aberta é do Tipo 0, o que resulta em um erro de regime estacionário não nulo para uma entrada degrau. Para satisfazer o requisito  $e_{ss} = 0$ , foi necessária a inclusão de um polo na origem, caracterizando um Controlador Proporcional-integral (PI). A forma do controlador PI é:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} \quad (18)$$

A técnica do Lugar Geométrico das Raízes (LGR) foi escolhida para o projeto, pois permite alocar os polos de malha fechada em posições que atendam aos requisitos de resposta transitória ( $T_s$  e  $M_p$ ).

### 10.3. Desenvolvimento Matemático do Projeto

O LGR foi traçado para a função de transferência de malha fechada  $C(s)G(s)$ . Após iterações de projeto, os ganhos do controlador PI foram definidos como:

- $K_p = 50$
- $K_i = 200$

A Figura 5 mostra o LGR do sistema compensado. Os marcadores 'x' vermelhos indicam os polos de malha fechada (Polos em MF) resultantes dessa escolha de ganhos. Observa-se que os polos dominantes estão localizados em posições que garantem a estabilidade e uma resposta amortecida, atendendo aos critérios de desempenho.

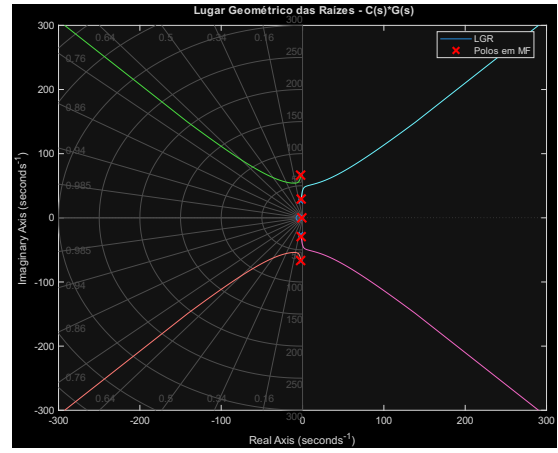


Figura 5. Lugar Geométrico das Raízes

## 11. Simulação do Sistema Controlado

Nesta seção, avalia-se o desempenho do controlador projetado por meio de simulação, utilizando o modelo da planta validado juntamente com o controlador.

### 11.1. Implementação no Ambiente de Simulação

O sistema em malha fechada foi montado no MATLAB/Simulink. O controlador PI  $C(s)$  foi inserido em cascata com a planta  $G(s)$ , e uma realimentação unitária negativa foi implementada.

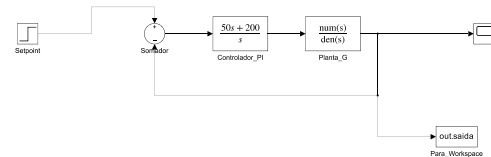


Figura 6. Diagrama de blocos montado no Simulink

### 11.2. Análise dos Resultados da simulação em Malha Fechada

A Figura 7 compara a resposta do sistema em malha aberta (azul) e malha fechada (vermelho) para um degrau unitário. A resposta do sistema em malha aberta ( $G(s)$ ) estabiliza no ganho estático 0.0051, falhando em seguir a referência 1. A resposta em malha fechada ( $T(s)$ ), com o controlador PI ( $K_p = 50$ ,  $K_i = 200$ ), demonstra o sucesso do projeto:

- **Erro de Regime:** O sistema segue a referência e estabiliza em 1 m, confirmando que o erro em regime estacionário é zero ( $e_{ss}=0$ ), como esperado do integrador.
- **Tempo de Acomodação:** O sistema atinge 98% do valor final (entra na faixa  $\pm 2\%$ ) em aproximadamente 4.5 segundos, atendendo ao requisito  $T_s < 5s$ .
- **Sobressinal:** A resposta não apresenta sobressinal ( $M_p = 0\%$ ), atendendo confortavelmente ao requisito  $M_p < 10\%$ .



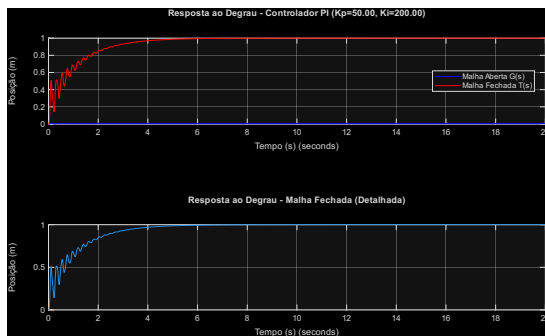


Figura 7. Resposta ao Degrau - Controlador PI

A Figura 8 mostra a resposta a distúrbios. O sistema em malha fechada (vermelho) rejeita o impulso e retorna rapidamente ao ponto de equilíbrio 0, demonstrando robustez e estabilidade.

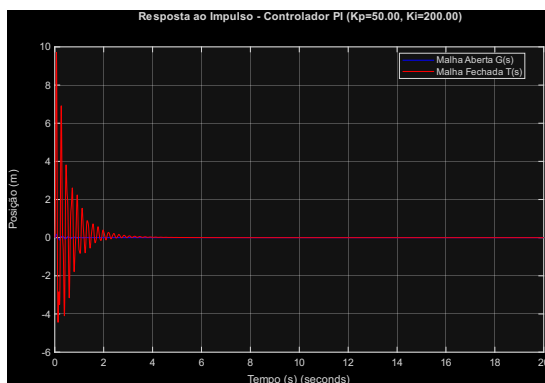


Figura 8. Resposta ao Impulso - Controlador PI

## 12. Implementação e Testes no Protótipo

Esta seção descreve o processo de implementação do controlador projetado no microcontrolador (Arduino) e os resultados dos testes realizados no protótipo físico.

### 12.1. Implementação do Controlador Embarcado

[Descreva como a lei de controle foi discretizada e implementada no código, qual frequência de amostragem utilizada no loop de controle.]

### 12.2. Resultados dos Testes Experimentais em Malha Fechada

[Gráfico do protótipo real, agora em malha fechada e com o controlador, a uma entrada degrau. Coletar os dados do sensor a laser durante os testes.]

[Colocar um gráfico da resposta ao degrau experimental do sistema em malha fechada.]

### 12.3. Comparação entre Desempenho Simulado e Real

[Sobrepor os gráficos da resposta simulada com o da resposta experimental. Fazer uma análise de semelhanças e diferenças no desempenho. Descutir as possíveis razões para as discrepâncias.]

[Fazer um gráfico comparativo das respostas simulada e experimental em malha fechada.]

## 13. Análise Crítica e Conclusão Final

Este trabalho detalhou o processo completo de modelagem, simulação, projeto de controle e implementação para um sistema de posição massa-mola de dois graus de liberdade. O modelo matemático de quarta ordem, derivado das Leis de Newton, provou ser uma representação fidedigna da planta, validado pela correlação entre simulações e dados experimentais.

A análise do modelo identificou o sistema como Tipo 0, guiando o projeto de um controlador PI para atender aos requisitos de desempenho. O controlador projetado ( $K_p = 50$ ,  $K_i = 200$ ) foi validado em simulação, demonstrando capacidade de eliminar o erro em regime estacionário e atender aos critérios de tempo de acomodação ( $T_s \approx 4.5s$ ) e sobressinal ( $M_p = 0\%$ ).

A implementação do controlador discretizado em um protótipo físico confirmou a eficácia do projeto. O sistema controlado foi capaz de seguir a referência de posição, validando o ciclo de projeto. As limitações observadas, como atrito não-linear e ruído, abrem espaço para trabalhos futuros, como a implementação de controladores mais avançados ou observadores de estado para estimar as velocidades, que não foram medidas diretamente.

## Referências

- [1] Q. Lu, C. Ortega e O. Ma, «Passive Gravity Compensation Mechanisms: Technologies and Applications», 2011.
- [2] M. Fitri, M. Yakub e A. Q. B.A.Aminudin, «Comparative Study on Control Method for Two-Mass Systems», *International Journal on Advanced Science Engineering Information Technology*, vol. 2, n.º 3, pp. 63–68, 2012, ISSN: 2088-5334.
- [3] C. Silveira, «Sistema massa-mola: 5 Curiosidades que Você Precisa Saber», *Vibra Varejo*, 2025.