Controle de Posição em Sistema Massa-Mola com Conexão Flexível

Rafael Anacleto Alves de Souza[a,1], **Elvis Correia Lopes dos Santos**[a,2], **Guilherme de Oliveira Costa**[a,3] **e Pedro de Carvalho Cedrim**[a,4]

[a]*Instituto de Computação, Universidade Federal de Alagoas – Campus A.C. Simões,* [1]`raas@ic.ufal.br`, [2]`ecls@ic.ufal.br`, [3]`goc@ic.ufal.br`, [4]`pcc@ic.ufal.br`

Prof. Dr. Icaro Bezerra Queiroz de Araujo

Resumo—O projeto tem como objetivo o estudo e implementação de um sistema de controle de posição em uma configuração massa-mola com duas massas acopladas por molas, representando situações práticas de sistemas com ligação elástica entre atuador e carga.
O problema central consiste em manter a posição controlada da massa de saída, mesmo diante das oscilações e acoplamentos internos do sistema. Para isso, pretende-se desenvolver um modelo matemático, realizar simulações computacionais.
O foco é a obtenção do modelo matemático que descreve a dinâmica do sistema e sua simulção em malha aberta, servindo de base para o projeto e implementação do controlador de posição.

Keywords—*sistema massa-mola, controle de posição, acoplamento elástico, resposta dinâmica, two-mass system*

1. Modelagem Matemática

Nesta seção, o sistema de duas massas é modelado matematicamente. A abordagem utilizada baseia-se na aplicação das leis de Newton e no uso de impedâncias mecânicas no domínio de Laplace para derivar as equações diferenciais que governam o comportamento dinâmico do sistema. O sistema físico sob análise é representado pela Figura 1.

O modelo considera duas massas, M_1 e M_2, conectadas por uma mola de constante elástica K_2. A massa M_1 está conectada a um ponto fixo por uma mola de constante elástica K_1. Uma força externa Y(t) é aplicada à massa M_1, e a variável de saída de interesse é deslocamento da massa M_2, denotado por $X_2(t)$. Os coeficientes de atrito viscoso para cada massa são representados por A_1 e A_2.

Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada massa e transformando as equações para o domínio de Laplaca, obtemos o seguinte sistema de equações em formato matricial:

$$\begin{bmatrix} M_1s^2 + A_1s + K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & M_2s^2 + A_2s + K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para obter a função transferência $G(s) = \frac{X_2(s)}{Y(s)}$, que relaciona o deslocamento da massa 2 com a força aplicada da massa 1, podemos utilizar a Regra de Cramer. O resultado é a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{Y(s)} = \frac{K_2}{(M_1s^2 + A_1s + K_1 + K_2)(M_2s^2 + A_2s + K_2) - K_2^2} \tag{1}$$

Para uma análise inicial e simplificada do sistema, os coeficientes de atrito viscoso (A_1 e A_2) foram desconsiderados ($A_1 = 0$, $A_2 = 0$). Essa simplificação permite focar na dinâmica fundamental gerada pela interação das massas e molas. A função de transferência simplificada é:

$$G(s) = \frac{K_2}{(M_1s^2 + K_1 + K_2)(M_2s^2 + K_2) - K_2^2} \tag{2}$$

Expandindo o denominador, obtemos:

$$G(s) = \frac{K_2}{M_1M_2s^4 + (M_1K_2 + M_2K_1 + M_2K_2)s^2 + K_1K_2} \tag{3}$$

Utilizando os valores das massas medidas experimentalmente, $M_1 = 87g = 0.087kg$ e $M_2 = 80g = 0.080kg$, função de transferência com os parâmetros K_1 e K_2 a serem determinados é:

$$G(s) = \frac{K_2}{0.00696s^4 + (0.080K_1 + 0.167K_2)s^2 + K_1K_2} \tag{4}$$

O diagrama de blocos do sistema em malha aberta é apresentado na Figura 2.

2. Análise do Modelo

A estabilidade do sistema em malha aberta é determinada pelos polos da função de transferência, que são as raizes do polinômio característico do denominador:

$$\Delta(s) = 0.00696s^4 + (0.080K_1 + 0.167K_2)s^2 + K_1K_2 = 0 \tag{5}$$

Como o polinômio não possui termos de ordem ímpar, os polos do sistema sem amortecimento estarão localizados no eixo imaginário. Isso indica que o sistema em malha abeta é marginalmente estável.

O comportamento dinâmico esperado para uma entrada degrau é uma resposta oscilatória sustentada, composta pela superposição de duas senoides com frequências distintas (modos de vibração), característica de sistemas de duas massas acopladas. A determinação exata dos pontos e das frequências de oscilações depende dos valores das constantes elásticas K_1 e K_2, que serão levantados experimentalmente na próxima etapa do projeto.

3. Simulação Computacional

Para validar o comportamento dinâmico previsto pelo modelo matemático, foi realiada uma simulação computacional utlizando o software MATLAB/Simulink.

Para a simulação, foram adotados valores preliminares para as constantes das molas, baseados em componentes comerciais comuns (ex: $K_1 = 100N/m$ e $K_2 = 150N/m$). É importante resaltar que estes valores serão substituídos pelos valores reais medidos.

3.1. Análise dos Resultados da Simulação

O gráfico da resposta ao degrau (Figura X) mostra um comportamento puramente oscilatório e sem atenuação, como previsto pela análise teórica do modelo não amortecido. Observa-se a superposição de duas frequências de oscilações, confimando a natureza do sistema de segunda ordem com acoplamento. A ausência de amortecimento na simulação leva a uma oscilação perpétua, o que na prática será atenuado por atritos não modelados.

4. Conclusão Parcial

Nesta etapa, o modelo matemático para o sistema de duas massas e duas molas foi obtido com sucesso. A análise da função de transferência indicou que o sistema sem atrito é marginalmente estável e as simulações computacionais confirmaram o comportamento dinâmico oscilatório previsto.

Este modelo matemático em malha aberta servirá como base fundamental para a próxima etapa do projeto, que consistirá na montagem do protótipo físico e na validação experimental. Os dados coletados do sistema real serão comparados com os resultados da simulação para refinar o modelo, se necessário, antes de prosseguir para o projeto de controlador de posição.