

Controle de Posição em Sistema Massa-Mola com Conexão Flexível

Rafael Anacleto Alves de Souza^{a,1}, Elvis Correia Lopes dos Santos^{a,2}, Guilherme de Oliveira Costa^{a,3} e Pedro de Carvalho Cedrim^{a,4}

^aInstituto de Computação, Universidade Federal de Alagoas – Campus A.C. Simões, ¹raas@ic.ufal.br, ²ecls@ic.ufal.br, ³goc@ic.ufal.br, ⁴pcc@ic.ufal.br

Prof. Dr. Icaro Bezerra Queiroz de Araujo

Resumo—O projeto tem como objetivo o estudo e implementação de um sistema de controle de posição em uma configuração massa-mola com duas massas acopladas por molas, representando situações práticas de sistemas com ligação elástica entre atuador e carga.

O problema central consiste em manter a posição controlada da massa de saída, mesmo diante das oscilações e acoplamentos internos do sistema. Para isso, pretende-se desenvolver um modelo matemático, realizar simulações computacionais.

O foco é a obtenção do modelo matemático que descreve a dinâmica do sistema e sua simulação em malha aberta, servindo de base para o projeto e implementação do controlador de posição.

Keywords—sistema massa-mola, controle de posição, controle PI, acoplamento elástico, resposta dinâmica, two-mass system

1. Descrição do Sistema

O sistema massa-mola proposto neste projeto adota uma configuração vertical, composta por uma única massa posicionada entre duas molas. A mola superior está conectada a uma haste, acoplada a uma engrenagem acionada por um motor de corrente contínua (DC), enquanto a mola inferior é fixada à base do sistema. A rotação do motor atua sobre a engrenagem, deformando a mola superior e, com isso, provocando o deslocamento vertical da massa.

O controle da posição da massa é realizado por meio de um sensor a laser posicionado na base do sistema, responsável por medir continuamente a distância da massa em relação à referência fixa. Esse sinal de realimentação é utilizado por um controlador proporcional-integral (PI), que ajusta a tensão aplicada ao motor com base no erro entre a posição medida e a posição desejada.

Para evitar interferências mecânicas e vibrações laterais indesejadas, a massa se movimenta dentro de um cilindro plástico transparente que atua como guia passivo. Esse cilindro não entra em contato direto com a massa, apenas restringe seu movimento transversal, mantendo a estabilidade da trajetória vertical sem introduzir atrito significativo.

A montagem do sistema foi pensada para minimizar problemas comuns em estruturas horizontais, como o atrito entre a base e os elementos móveis. A disposição vertical também facilita a atuação gravitacional e a análise do sistema em termos de energia potencial, amortecimento e resposta transitória sob diferentes condições de rigidez das molas.

Embora o modelo mostrado nas Figuras e não tenha sido utilizado diretamente neste projeto, ele serviu como base conceitual e visual para o desenvolvimento de um sistema massa-mola simplificado, construído do zero.

2. Revisão Bibliográfica

Nesta seção são apresentados estudos relacionados ao controle de sistemas massa-mola com acoplamento flexível, bem como abordagens utilizadas para sua modelagem matemática e implementação de controladores. Os trabalhos revisados fornecem embasamento teórico para o desenvolvimento do protótipo e da estratégia de controle utilizada neste projeto.

Sasidhar et al. [3] propõem a fabricação e análise experimental de um aparato físico voltado à caracterização de molas, com foco na determinação da rigidez (k) em regimes de compressão e tração. O sistema desenvolvido consiste em uma estrutura vertical com base em

aço doce e uma régua milimetrada para medição da deflexão, sendo aplicadas massas em um gancho tipo “S” para obtenção da relação força versus deslocamento. Embora o estudo seja conduzido em malha aberta, os autores validam a Lei de Hooke experimentalmente ao demonstrar a linearidade entre força aplicada e extensão da mola, utilizando a equação $k = \frac{F}{y}$. Além disso, o artigo revisa diversos trabalhos relevantes à dinâmica de sistemas massa-mola, incluindo a análise de vibração forçada em estruturas com múltiplos graus de liberdade e aplicações na biomecânica e engenharia civil.

Apesar de não abordar diretamente técnicas de controle, a revisão bibliográfica do trabalho inclui referências fundamentais para este projeto. Dentre os trabalhos citados por Sasidhar et al. [3], destaca-se um que trata do controle de um sistema duplo massa-mola-amortecedor com abordagens clássicas como P, PI, PID e espaço de estados, além da utilização de ferramentas como diagramas de Bode e Lugar das Raízes — obtidos a partir de funções de transferência derivadas via Transformada de Laplace. Essa referência também discute a construção de uma interface gráfica de simulação, sugerindo o uso de ambientes como MATLAB/Simulink. Com base na abordagem de Sasidhar et al., optou-se por desenvolver um protótipo físico vertical com estrutura simplificada, validando inicialmente a modelagem através da Lei de Hooke e, posteriormente, aplicando estratégias de controle baseadas na literatura identificada.

O estudo de Noeraifah et al. [2] investiga a relação entre massa, constante elástica e energia potencial em sistemas massa-mola por meio de simulações no ambiente virtual PhET. O principal objetivo do trabalho foi validar os princípios da Lei de Hooke sem a necessidade de um aparato físico, utilizando exclusivamente dados quantitativos gerados pela plataforma. Dois experimentos principais foram conduzidos: o primeiro, para determinar a constante elástica da mola aplicando massas conhecidas e analisando a deformação resultante; o segundo, para estimar massas desconhecidas a partir da deformação observada e do valor de k previamente calculado.

A fundamentação teórica do artigo é baseada diretamente na equação de Hooke $F = -k\Delta x$, sendo também utilizada sua forma rearranjada $-k = \frac{mg}{\Delta x}$ para processar os dados. Os autores observaram uma relação linear quase perfeita entre a massa aplicada e o deslocamento da mola (coeficiente de determinação $R^2 = 1$), reforçando a validade do modelo linear mesmo em ambiente virtual. Um dos achados mais notáveis do estudo — embora fisicamente controverso — foi a conclusão de que a constante elástica aumentava proporcionalmente à massa aplicada. Esse resultado pode ser interpretado como um efeito específico do ambiente de simulação, mas ainda assim oferece um ponto relevante para discussão.

Diferente do nosso projeto, o artigo limita-se à análise em malha aberta e não aborda técnicas de controle como PI ou PID, tampouco a aplicação da Transformada de Laplace. No entanto, sua contribuição é importante por demonstrar que ambientes virtuais podem ser utilizados de forma eficaz para validar modelos físicos antes da implementação em hardware. Ao complementar o trabalho de Sasidhar et al. [3], que adotou uma abordagem experimental, o estudo de Noeraifah et al. justifica a utilização da simulação como uma etapa válida e reconhecida na literatura para o desenvolvimento de sistemas de controle baseados em massa-mola.

O estudo de Herho e Kaban [1] representa um avanço significativo na análise quantitativa de sistemas massa-mola-amortecedor com

controle de posição. O artigo realiza uma simulação comparativa entre as linguagens Python e R, focando tanto na modelagem matemática quanto na implementação computacional de controladores. A principal contribuição do trabalho é a aplicação de um controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) em malha fechada, demonstrando desempenho de alto nível com erro de posição inferior a 0,4%.

A modelagem do sistema parte da Segunda Lei de Newton, incorporando a força restauradora da mola ($F_s = -kx$) e a força de amortecimento ($F_d = -d\dot{x}$), resultando na equação diferencial de segunda ordem $m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$. A transformação desse modelo para o domínio do espaço de estados permitiu análises de estabilidade mais robustas, como autovalores, critério de Routh-Hurwitz e estabilidade BIBO.

Além disso, o artigo fornece uma implementação detalhada da lei de controle PID, incluindo a ação integral via aumento do vetor de estados. Os ganhos do controlador ($K_p = 200$, $K_i = 50$, $K_d = 100$) foram ajustados com base em métodos clássicos como Ziegler-Nichols. Essa abordagem prática torna o estudo altamente relevante para o nosso projeto, especialmente para o desenvolvimento de controladores PI/PID. O uso de bibliotecas como NumPy, SciPy e pandas em Python reforça a escolha da nossa ferramenta de simulação e valida seu potencial para aplicações em sistemas de controle dinâmico.

Portanto, o trabalho de Herho et al. estabelece um modelo de referência para a nossa estratégia de controle, integrando modelagem avançada, simulação de alto desempenho e validação quantitativa. Ele complementa os estudos anteriores, que focaram em aspectos mais físicos ou em simulações simplificadas, ao oferecer uma abordagem holística e aplicada ao controle de sistemas reais.

Com base nos estudos analisados, observa-se uma complementaridade entre abordagens experimentais, simulações virtuais e implementações computacionais, que sustentam o desenvolvimento de sistemas massa-mola com controle de posição. Enquanto trabalhos como os de Sasidhar et al. [3] e Noeraifah et al. [2] reforçam a validade da modelagem física por meio da Lei de Hooke em diferentes contextos, o estudo de Herho e Kaban [1] demonstra a aplicabilidade de estratégias de controle mais avançadas em ambiente de simulação. Dessa forma, a revisão bibliográfica oferece uma base sólida tanto para a construção do protótipo físico quanto para a escolha das ferramentas de modelagem e controle adotadas neste projeto.

3. Materiais e Métodos

3.1. Descrição Física do Sistema

O sistema massa-mola proposto neste projeto adota uma configuração vertical, desenvolvida com o objetivo de reduzir interferências causadas por atrito e vibrações laterais, comuns em arranjos horizontais. A estrutura física é composta por uma única massa móvel posicionada entre duas molas lineares: a mola superior está acoplada a uma haste metálica conectada a uma engrenagem acionada por um motor de corrente contínua (DC), enquanto a mola inferior está fixada à base da estrutura.

A atuação do motor gera uma rotação controlada da engrenagem, que, por sua vez, deforma a mola superior e provoca a movimentação vertical da massa. Essa movimentação ocorre ao longo de um eixo central delimitado por um cilindro plástico, que guia a massa e minimiza oscilações laterais sem contato direto com a superfície interna, eliminando o atrito mecânico indesejado.

A posição vertical da massa será monitorada por um sensor a laser instalado na base do sistema, permitindo a obtenção de dados de deslocamento em tempo real. O objetivo principal é implementar um controle de posição baseado em um controlador proporcional-integral (PI), ajustando a tensão fornecida ao motor para manter a massa na altura desejada com precisão.

Essa estrutura, construída do zero, foi inspirada conceitualmente no modelo de referência da Figura, porém adaptada para um formato simplificado e mais adequado à realidade do projeto. A nova aborda-

gem facilita a montagem, reduz perdas por atrito e torna o sistema mais estável para fins de controle e medição.

3.2. Componentes e Equipamentos Utilizados

A Tabela apresenta os principais componentes utilizados no desenvolvimento do sistema massa-mola proposto, incluindo elementos mecânicos, atuadores, sensores e dispositivos auxiliares.

A seleção dos componentes considerou critérios de custo-benefício, disponibilidade no mercado nacional, compatibilidade com o sistema proposto e facilidade de integração com plataformas de controle como o Arduino.

A seguir, são descritos outros elementos essenciais do projeto, cuja obtenção será feita por reaproveitamento de materiais ou fabricação própria:

- **Corpo do sistema e estrutura base:** confeccionados em madeira, fornecendo suporte rígido e estável para os demais componentes.
- **Massa de teste:** componente central do sistema, posicionado entre as duas molas. Será fabricada por meio de impressão 3D, com dimensões ajustadas ao comportamento desejado.
- **Engrenagem e haste:** impressas em 3D e acopladas ao eixo do motor DC, são responsáveis pela conversão do movimento rotacional do motor em deformação na mola superior.
- **Cilindro plástico guia:** adaptado a partir de uma garrafa PET, atua como guia vertical para limitar vibrações laterais da massa, sem interferência por atrito.

A metodologia adotada para o desenvolvimento do sistema foi fundamentada em três frentes principais discutidas na literatura. Primeiramente, a fabricação do protótipo físico segue a abordagem experimental proposta por Sasidhar et al. [3], com a construção de uma estrutura vertical capaz de validar empiricamente os modelos teóricos. Em paralelo, o uso de sensores e controladores eletrônicos visa possibilitar a etapa de simulação e análise dinâmica do sistema, conforme ilustrado no estudo de Noeraifah et al. [2], que demonstra a eficácia do uso de ambientes virtuais para testes prévios. Por fim, a estrutura de controle será baseada na estratégia proposta por Herho e Kaban [1], com inspiração direta na implementação de controladores PI/PID e na análise quantitativa da resposta do sistema. Essa fundamentação garante que o projeto esteja alinhado às boas práticas descritas na literatura científica recente.

Ambiente de Simulação e Controle

Para a simulação do sistema massa-mola e implementação da estratégia de controle, será utilizado o ambiente MATLAB/Simulink. Essa ferramenta permite a modelagem matemática por meio de diagramas de blocos, análise da resposta dinâmica do sistema e sintonia de controladores como o PI proposto neste projeto. A escolha pelo MATLAB foi baseada em sua ampla aceitação acadêmica e na referência de trabalhos como o de Herho e Kaban [1], que validam o uso de ambientes computacionais para análise e projeto de sistemas de controle. Além disso, a integração futura com a plataforma Arduino será realizada por meio de bibliotecas compatíveis, permitindo a prototipagem em tempo real.

4. Cronograma de Execução

O desenvolvimento do projeto teve início no mês de julho de 2025 e será conduzido até o final do semestre letivo, com término previsto para novembro. As atividades estão organizadas de forma sequencial, contemplando desde a fundamentação teórica até a construção, simulação e validação do sistema massa-mola com controle de posição.

Durante os meses de julho e agosto, foram realizadas as primeiras definições do projeto, incluindo o escopo do sistema, levantamento bibliográfico, descrição teórica e concepção inicial da solução física e de controle. Nesse período, também foram definidos os materiais

a serem utilizados, bem como o ambiente de simulação adotado, o MATLAB/Simulink.

Em setembro, está prevista a aquisição de componentes e a construção do protótipo físico. Isso envolve a montagem da estrutura de madeira, impressão 3D das peças mecânicas (massa de teste, engrenagem e haste), adaptação do cilindro guia e integração dos elementos eletrônicos (motor, sensor, driver, Arduino).

Simultaneamente, será desenvolvida a modelagem matemática do sistema e sua implementação no ambiente MATLAB/Simulink, visando a validação da dinâmica por meio da simulação. Essa etapa fornecerá suporte à futura aplicação do controlador PI.

Em outubro, serão realizados os testes experimentais com o sistema montado, bem como a calibração do sensor de posição e aplicação do controle PI. Os parâmetros do controlador serão ajustados com base na resposta do sistema, buscando estabilidade e precisão na posição final.

Por fim, no mês de novembro, ocorrerá a coleta e análise dos dados obtidos nos testes físicos e nas simulações. Esses resultados serão utilizados para validar o comportamento do sistema e concluir a redação do relatório final.

Referências

- [1] S. H. S. Herho e S. N. Kaban, «Quantitative Performance Analysis of Spring-Mass-Damper Control Systems: A Comparative Implementation in Python and R», *Indonesian Journal of Applied Mathematics*, vol. 5, n.º 1, pp. 10–26, 2025, Received 13th January 2025; Accepted 9th April 2025; Published 25th April 2025, ISSN: 2774-2016. DOI: 10.35472/indojam.v5i1.2104 URL: https://www.researchgate.net/publication/391156102_Quantitative_Performance_Analysis_of_Spring-Mass-Damper_Control_Systems
- [2] D. W. Noeraifah, Fikri, D. Nurfadilla e A. Malik, «Analysis of the Relationship between Mass and Spring Constant through PhET Simulations», *Al-Khazini: Jurnal Pendidikan Fisika*, vol. 5, n.º 1, pp. 28–35, 2025, ISSN: 2830-3644. DOI: 10.24252/al-khazini.v5i1.43942 URL: https://www.researchgate.net/publication/391139232_Analysis_of_the_Relationship_between_Mass_and_Spring_Constant_through_PheT_Simulations
- [3] M. Sasidhar, B. Sairamkrishna, N. Ramakrishna e B. Praneeth, «Fabrication of Spring Mass System», *International Journal of Emerging Science and Engineering (IJESE)*, vol. 13, n.º 7, 2025, Online, ISSN: 2319-6378. URL: https://www.researchgate.net/publication/392888929_Fabrication_of_Spring_Mass_System