

# Controle de Posição em Sistema Massa-Mola com Conexão Flexível

Rafael Anacleto Alves de Souza<sup>a,1</sup>, Elvis Correia Lopes dos Santos<sup>a,2</sup> e Guilherme de Oliveira Costa<sup>a,3</sup>

<sup>a</sup>Instituto de Computação, Universidade Federal de Alagoas – Campus A.C. Simões, <sup>1</sup>[raas@ic.ufal.br](mailto:raas@ic.ufal.br), <sup>2</sup>[ecls@ic.ufal.br](mailto:ecls@ic.ufal.br), <sup>3</sup>[goc@ic.ufal.br](mailto:goc@ic.ufal.br)

Prof. Dr. Icaro Bezerra Queiroz de Araujo

**Resumo**—Este trabalho apresentou o desenvolvimento e análise de um sistema de controle de posição baseado em um modelo massa-mola de duas massas acopladas em série. O estudo teve como objetivo compreender a dinâmica de sistemas mecânicos com acoplamento elástico e implementar um controlador proporcional-integral (PI) capaz de estabilizar a posição da segunda massa sob influência de forças externas. A modelagem matemática é fundamentada nas Leis de Newton, resultando em um sistema de equações diferenciais de quarta ordem que descreve o comportamento das massas. A função de transferência foi obtida no domínio da Laplace, permitindo a análise da resposta do sistema em malha aberta e o projeto do controlador PI. Simulações foram realizadas no MATLAB/Simulink utilizando parâmetros reais obtidos experimentalmente:  $M_1 = 0.109\text{Kg}$ ,  $M_2 = 0.115\text{Kg}$ ,  $K_1 = 196\text{N/m}$ ,  $K_2 = 196\text{N/m}$ ,  $b_1 = 0.5\text{N} \cdot \text{s/m}$  e  $b_2 = 0.5\text{N} \cdot \text{s/m}$ . Os resultados demonstraram o comportamento oscilatório típico do sistema massa-mola e confirmaram a eficácia do controlador PI na redução do erro de posição e na melhoria da estabilidade dinâmica.

**Keywords**—sistema massa-mola, controle de posição, acoplamento elástico, resposta dinâmica, two-mass system, PI

## 1. Introdução

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e análise de um modelo matemático para um sistema de controle de posição com acoplamento flexível. O protótipo, de configuração vertical, é composto por duas massas em cascata: a primeira massa ( $M_1$ ) é suspensa por uma mola ( $K_1$ ) e acoplada à segunda massa ( $M_2$ ) por uma segunda mola ( $K_2$ ). O controle de posição da massa inferior ( $M_2$ ) será realizado por um servo motor que atua na parte superior do sistema, sendo a posição monitorada por um sensor a laser.

Em sistemas industriais como braços robóticos e máquinas-ferramenta, a flexibilidade nos acoplamentos mecânicos introduz vibrações que degradam a precisão e podem levar à instabilidade. Portanto, a modelagem como um sistema de duas massas, em vez de uma massa única, é essencial para capturar essa dinâmica complexa e projetar controladores eficazes.

## 2. Descrição do Sistema

O sistema proposto neste projeto adota uma configuração vertical com duas massas acopladas, montadas em um arranjo em cascata. A primeira massa ( $M_1$ ) é suspensa por uma mola ( $K_1$ ). O ponto de suspensão desta mola é movimentado verticalmente por um sistema de engrenagem e correia, acionado por um servo motor (modelo DS3230MG). Esta primeira massa está acoplada à segunda massa ( $M_2$ ) por uma mola de ligação ( $K_2$ ), deixando  $M_2$  suspensa. A rotação do motor atua no conjunto superior, provocando o deslocamento vertical de todo o sistema.

O objetivo do controle é a posição da massa inferior ( $M_2$ ), que é medida continuamente por um sensor a laser posicionado na base da estrutura.

Para evitar interferências mecânicas e vibrações laterais indesejadas, as massas são fixadas em carrinhos que deslizam ao longo de um trilho vertical. Esta configuração atua como um guia linear, restringindo o movimento transversal para garantir uma trajetória puramente vertical. O atrito gerado pelo deslizamento dos carrinhos no trilho é o principal componente do atrito viscoso ( $b_1$  e  $b_2$ ) considerado no modelo matemático.

A montagem do sistema foi pensada para minimizar problemas comuns em estruturas horizontais, como o atrito entre a base e os elementos móveis. A disposição vertical também facilita a análise do

sistema em termos de energia potencial, amortecimento e resposta transitória sob a atuação da gravidade.

## 3. Revisão Bibliográfica

O sistema massa-mola é um modelo físico fundamental para o estudo de fenômenos como vibrações, oscilações e ondas. Sua dinâmica é primariamente governada pela Lei de Hooke, que descreve a força restauradora da mola como sendo proporcional à sua deformação. Este modelo é amplamente aplicado na análise de sistemas do cotidiano, como suspensões de veículos e no projeto de estruturas como edifícios e pontes, para garantir sua estabilidade. Em sistemas físicos reais, a presença de forças dissipativas, como o atrito, introduz o fenômeno do amortecimento, que causa a redução da amplitude das oscilações ao longo do tempo. [3]

Embora o modelo de massa única seja útil, ele se torna inadequado em diversas aplicações industriais, como máquinas-ferramentas, sistemas de manufatura de semicondutores, braços robóticos flexíveis e laminadores de aço. Nestes casos, atuadores e cargas são frequentemente conectados por acoplamentos flexíveis ou eixos longos de baixa rigidez. Essa flexibilidade introduz uma dinâmica mais complexa, que deve ser modelada como um sistema de duas ou múltiplas massas. A elasticidade no acoplamento pode gerar vibrações que degradam significativamente a precisão do posicionamento e podem até levar à instabilidade do sistema de controle. Além disso, parâmetros como atrito e folgas mecânicas podem variar com o tempo e a temperatura, tornando o controle ainda mais desafiador. [2]

Para sistemas com orientação vertical, como o abordado neste projeto, a força da gravidade é uma consideração adicional. A literatura descreve duas abordagens para lidar com este efeito: a compensação ativa, que utiliza atuadores para gerar forças contrárias à gravidade, e a compensação passiva, que utiliza elementos não energizados. A abordagem passiva é frequentemente preferida por ser mais simples, confiável, de menor custo e por não apresentar os problemas de instabilidade inerentes aos sistemas de controle ativo. Dentro os métodos passivos, destacam-se o uso de contrapesos e o de molas. Para aplicações que exigem baixa inércia e movimentos dinâmicos, os mecanismos baseados em molas são mais vantajosos, pois adicionam muito menos massa ao sistema. Uma técnica para projetar tais mecanismos é a abordagem energética, que busca manter a energia potencial total do sistema (gravitacional e elástica) constante para qualquer configuração. [1]

Esta revisão da literatura, portanto, estabelece a relevância do presente trabalho. Fica evidente o desafio de controlar sistemas de duas massas devido às vibrações induzidas pela flexibilidade do acoplamento e a importância de considerar o efeito da gravidade em configurações verticais. A modelagem matemática e a análise de um sistema massa-mola de duas massas em arranjo vertical considerando o atrito constituem o passo fundamental para o futuro projeto de controladores capazes de suprimir essas vibrações e garantir um controle de posição preciso, um problema de grande interesse na engenharia moderna. [2] [1]

## 4. Modelagem Matemática

Nesta seção, a modelagem é desenvolvida a partir das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) que regem o sistema, considerando os

efeitos do atrito. O sistema consiste em duas massas ( $M_1, M_2$ ) acopladas por molas ( $K_1, K_2$ ) e se movendo em um trilho que introduz atrito. O atrito viscoso do trilho e a resistência do ar são modelados como uma única força de amortecimento proporcional à velocidade, com coeficientes  $b_1$  e  $b_2$  para cada massa, respectivamente.

#### 4.1. Equações Diferenciais Ordinárias

Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada massa, definindo o deslocamento a partir da posição de equilíbrio, obtemos o seguinte sistema de EDOs:

Para a Massa 1 ( $M_1$ ):

A força resultante em  $M_1$  é a soma da força da mola  $K_1$ , da força da mola  $K_2$ , da força de atrito em  $M_1$  e da força externa  $f(t)$ .

$$\sum F_{M_1} = -K_1 x_1(t) - b_1 \dot{x}_1(t) + K_2(x_2(t) - x_1(t)) + f(t) = M_1 \ddot{x}_1(t) \quad (1)$$

Reorganizando a equação, temos:

$$M_1 \ddot{x}_1(t) + b_1 \dot{x}_1(t) + (K_1 + K_2)x_1(t) - K_2x_2(t) = f(t) \quad (2)$$

Para a Massa 2 ( $M_2$ ):

A força resultante em  $M_2$  é a soma da força da mola  $K_2$  e da força de atrito em  $M_2$ .

$$\sum F_{M_2} = -K_2(x_2(t) - x_1(t)) - b_2 \dot{x}_2(t) = M_2 \ddot{x}_2(t) \quad (3)$$

Reorganizando a equação, temos:

$$M_2 \ddot{x}_2(t) + b_2 \dot{x}_2(t) + K_2x_2(t) - K_2x_1(t) = 0 \quad (4)$$

#### 4.2. Obtenção da Função de Transferência

Para encontrar a função de transferência  $G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)}$ , aplicamos a Transformada de Laplace nas EDOs, assumindo condições iniciais nulas:

Para a EDO da Massa 1:

$$(M_1 s^2 + b_1 s + K_1 + K_2)X_1(s) - K_2 X_2(s) = F(s) \quad (5)$$

Para a EDO da Massa 2:

$$-K_2 X_1(s) + (M_2 s^2 + b_2 s + K_2)X_2(s) = 0 \quad (6)$$

Da equação [6], podemos isolar  $X_1(s)$ :

$$X_1(s) = \frac{(M_2 s^2 + b_2 s + K_2)}{K_2} X_2(s) \quad (7)$$

Agora, substituimos esta expressão para  $X_1(s)$  na equação [5]:

$$(M_1 s^2 + b_1 s + K_1 + K_2) \left[ \frac{(M_2 s^2 + b_2 s + K_2)}{K_2} X_2(s) \right] - K_2 X_2(s) = F(s) \quad (8)$$

Fatorando  $X_2(s)$  e reorganizando os termos, encontramos a função de transferência final:

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{K_2}{(M_1 s^2 + b_1 s + K_1 + K_2)(M_2 s^2 + b_2 s + K_2) - K_2^2} \quad (9)$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (10)$$

onde o numerador é  $N(s) = \frac{K_2}{M_1 M_2}$  e o denominador  $D(s)$  é um polinômio de quarta ordem  $D(s) = s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ , cujos

coeficientes são:

$$a_3 = \frac{b_2}{M_2} + \frac{b_1}{M_1} \quad (11)$$

$$a_2 = \frac{K_2}{M_2} + \frac{K_1}{M_1} + \frac{b_1 b_2 K_2}{M_1 M_2} \quad (12)$$

$$a_1 = \frac{b_1 K_2 + K_1 b_2 + K_2 b_2}{M_1 M_2} \quad (13)$$

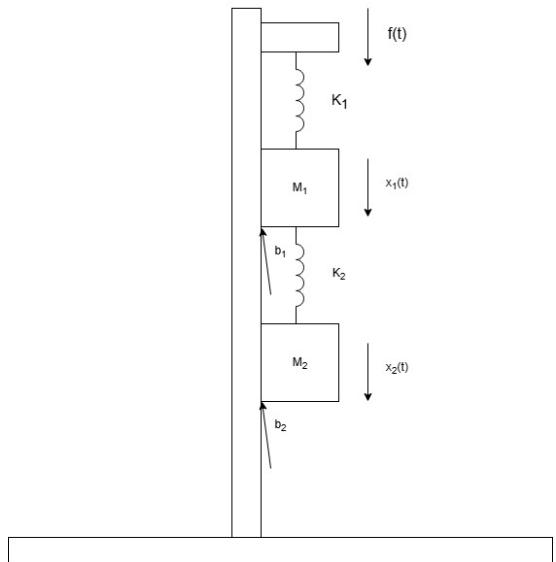
$$a_0 = \frac{K_1 K_2}{M_1 M_2} \quad (14)$$



**Figura 1.** Diagrama de blocos do sistema em malha aberta

#### 4.3. Consideração sobre a Gravidade

Para a configuração vertical, a força de gravidade ( $F_G = M \cdot g$ ) atua constantemente em ambas as massas. Este efeito é responsável por estabelecer a posição de equilíbrio estático do sistema, ou seja, a gravidade estica as molas até um novo ponto de repouso. O modelo dinâmico e as EDOs foram desenvolvidas para deslocamentos ( $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ ) a partir deste ponto de equilíbrio. Como a força da gravidade é constante, ela é cancelada pelas forças estáticas das molas no ponto de equilíbrio, e por isso o termo  $g$  não aparece na função de transferência dinâmica.



**Figura 2.** Modelagem do sistema massa-mola

#### 5. Análise do Modelo

##### 5.1. Característica da Função de Transferência

O Ganho Estático, que representa a resposta do sistema em regime estacionário a uma entrada constante, é calculado fazendo  $s = 0$  na função de transferência:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_2 / (M_1 M_2)}{K_1 K_2 / (M_1 M_2)} = \frac{1}{K_1} \quad (15)$$

Utilizando o valor experimental  $K_1 = 196 N/m$ , o ganho estático teórico é:

$$G(0) = \frac{1}{196} \approx 0.0051 m/N \quad (16)$$

Este resultado indica que, para uma força de entrada do tipo degrau unitário ( $1N$ ), o deslocamento da Massa 2 em regime estacionário será de aproximadamente  $0.0051m$ . Este valor é confirmado pela simulação em malha aberta que mostra o sistema estabilizando em  $0.0051m$ . O sistema é do Tipo 0, pois não possui polos na origem, o que justifica a necessidade de um controlador de ação integral para eliminar o erro em regime estacionário para uma entrada degrau.

## 5.2. Análise de Estabilidade

A estabilidade do sistema em malha aberta é determinada pelos polos da função de transferência, que são as raízes do polinômio característico do denominador:

$$\Delta(s) = D(s) = s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \quad (17)$$

O polinômio característico agora é um polinômio de quarta ordem completo, com termos de todas as potências de  $s$ . Consequentemente, para quaisquer valores físicos positivos dos parâmetros ( $M$ ,  $b$ ,  $K$ ), os polos da função de transferência possuirão parte real negativa, deslocando-se do eixo imaginário para o semiplano esquerdo do plano  $s$ .

Isso garante que o sistema em malha aberta seja estável. O comportamento dinâmico esperado para uma entrada degrau é, portanto, uma resposta oscilatória amortecida, na qual o deslocamento da massa converge para um valor de regime estacionário após um período transitório. A localização exata dos polos e, por conseguinte, as características da resposta transitória – como a frequência de oscilação amortecida e o tempo de acomodação – dependem dos valores numéricos de todos os parâmetros físicos do sistema ( $M_1, M_2, b_1, b_2, K_1, K_2$ ).

## 6. Simulação Computacional

Para validar o comportamento dinâmico previsto pelo modelo matemático, foi realizada uma simulação computacional utilizando o software MATLAB/Simulink. Na simulação, foram utilizados os parâmetros reais obtidos experimentalmente:  $M_1 = 0.109Kg$ ,  $M_2 = 0.115Kg$ ,  $K_1 = 196N/m$ ,  $K_2 = 196N/m$ ,  $b_1 = 0.5N \cdot s/m$  e  $b_2 = 0.5N \cdot s/m$ .

### 6.1. Análise dos Resultados da Simulação

Os resultados da simulação, apresentados nas Figuras 3 e 4.

A Figura 3 demonstra a resposta do deslocamento  $X_2(t)$  a uma entrada degrau unitária. O gráfico confirma a análise teórica: o sistema exibe um comportamento oscilatório amortecido, com um sobressinal significativo, e converge para o valor de regime estacionário de  $0.0051m$ , conforme previsto pelo ganho estático  $G(0) = \frac{1}{K_1}$ .

A Figura 4 mostra a resposta do sistema a um impulso unitário. O sistema é deslocado de seu equilíbrio e retorna a ele através de uma oscilação amortecida, com a amplitude decaendo até zero. A convergência em ambos os casos valida o caráter estável do sistema em malha aberta, como previsto pela presença dos termos de amortecimento ( $b_1$  e  $b_2$ ) no modelo.

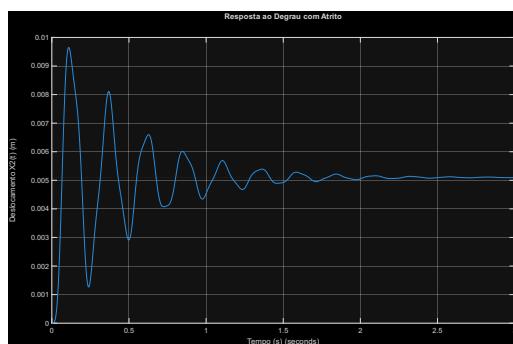


Figura 3. Resposta ao Degrau

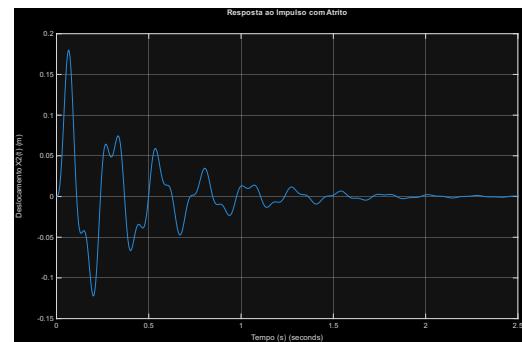


Figura 4. Resposta ao Impulso

## 7. Montagem do Protótipo

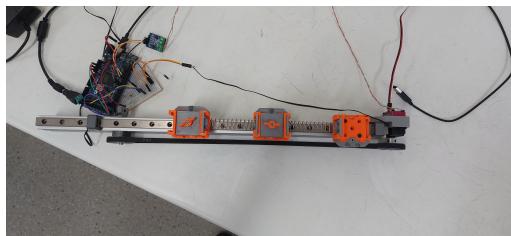
A montagem do protótipo físico foi realizada conforme a descrição da Seção 2. Utilizou-se uma estrutura vertical com trilhos para restringir o movimento das massas ( $M_1$  e  $M_2$ ) a uma trajetória vertical, minimizando vibrações laterais. As massas foram implementadas como carrinhos deslizantes, e as molas ( $K_1$  e  $K_2$ ) foram conectadas em cascata. Na parte superior, um servo motor acoplado a um sistema de correia e engrenagem permite aplicar a força de controle  $f(t)$  ao mover o ponto de suspensão de  $K_1$ . Para a medição da saída, um sensor a laser foi posicionado na base da estrutura, monitorando continuamente a posição  $x_2(t)$  da massa inferior.

### 7.1. Componentes e Estrutura Final

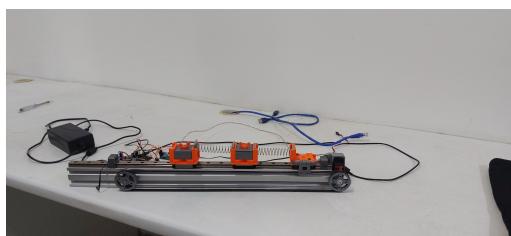
A estrutura final do protótipo foi implementada inicialmente para uma configuração vertical, porém sendo feito testes e percebendo um bom funcionamento na horizontal, conforme apresentado nas Figuras 5 e 6. Esta abordagem foi escolhida para facilitar a montagem, a observação dinâmica e a medição de parâmetros.

- Base e Guia Linear:** A fundação do protótipo é um perfil de alumínio extrudado que atua como guia linear. Este trilho restringe o movimento dos carrinhos a um único grau de liberdade (longitudinal), garantindo um deslocamento com baixo atrito.
- Massas ( $M_1$  e  $M_2$ ):** O sistema dinâmico sob estudo é composto por duas massas principais. Estas são representadas pelos dois carrinhos impressos em 3D (peças laranja) que estão conectados entre si por uma mola. Conforme o modelo, o carrinho central é a Massa 1 ( $M_1$ ) e o carrinho da extremidade oposta ao motor é a Massa 2 ( $M_2$ ). Cada carrinho possui pequenas esferas que servem como rolamentos para deslizar suavemente sobre o trilho.
- Acionamento e Transmissão:** O acionamento é feito por um servo motor (modelo DS3230MG) fixado em uma das extremidades. Para conectar o motor ao sistema, um terceiro carrinho (o mais próximo do motor) é utilizado. A massa desse carrinho é considerada desprezível em relação às massas principais, e sua única função é atuar como o elo de ligação mecânica para a correia de borracha do motor. A força de controle  $f(t)$  é, portanto, aplicada a este carrinho, que por sua vez traciona a Mola 1 ( $K_1$ ).
- Controlador e Eletrônica:** O sistema é gerenciado por um microcontrolador Arduino, que se comunica com o servo motor e o sensor de posição. O sistema é alimentado por uma fonte de energia externa.

O funcionamento do protótipo baseia-se no acionamento do servo motor em uma extremidade, que aplica uma força em um dos carrinhos. Essa força é então propagada para as massas subsequentes através das molas flexíveis. O desafio do controle é, portanto, atuar na primeira massa para controlar a posição da última massa, gerenciando as vibrações e atrasos introduzindo pelos acoplamentos elásticos.



**Figura 5.** Visão superior do protótipo



**Figura 6.** Visão lateral do protótipo

## 8. Coleta de Dados Experimentais

Esta seção descreve a metodologia empregada para obter os dados experimentais da planta real, tanto para a caracterização dos seus parâmetros quanto para a validação da resposta dinâmica.

### 8.1. Metodologia de Caracterização dos Parâmetros

Os parâmetros do modelo foram determinados por uma combinação de medição direta e validação por simulação:

- **Massa ( $M_1$  e  $M_2$ ):** Os valores  $M_1 = 0.109\text{Kg}$  e  $M_2 = 0.115\text{Kg}$  foram obtidos através da pesagem direta dos conjuntos de carinhos e massas acopladas.
- **Constantes Elásticas ( $K_1$  e  $K_2$ ):** Os valores  $K_1 = 196\text{N/m}$  e  $K_2 = 196\text{N/m}$  foram determinados estaticamente. Aplicou-se a Lei de Hooke ( $F = k \cdot x$ ), medindo-se o deslocamento da mola para diferentes forças (massas) conhecidas e realizando uma regressão linear para encontrar o coeficiente angular  $K$ .
- **Coeficiente de Atrito ( $b_1$  e  $b_2$ ):** Determinar os coeficientes de atrito viscoso experimentalmente é um desafio, pois o sistema de 4<sup>a</sup> ordem possui modos de vibração distintos. Desta forma, optou-se por uma abordagem de estimativa e validação. Foram estimados valores iniciais pequenos, mas não-nulos ( $b_1 = 0.5\text{Ns/m}$  e  $b_2 = 0.5\text{Ns/m}$ ), para representar o atrito presente nos trilhos. Esta estimativa foi então validada na Seção 9, onde a resposta simulada do modelo (utilizando estes valores) foi comparada com a resposta experimental do protótipo, mostrando alta correlação e confirmando que os valores estimados eram uma representação fidedigna do amortecimento real do sistema.

### 8.2. Metodologia do Ensaio em Malha Aberta

Para validar o modelo, foi realizado um ensaio em malha aberta no protótipo físico. O objetivo foi coletar a resposta real do sistema a uma entrada conhecida para compará-la com a resposta simulada.

O procedimento de validação consistiu em aplicar um sinal de entrada do tipo degrau ao sistema. Isso foi feito programando o servo motor (DS3230MG) para mover o ponto de suspensão superior em uma distância fixa e conhecida de forma abrupta e, em seguida, manter essa nova posição. A força exercida pela mola  $K_1$ , agora esticada, atuou como a entrada de força no restante do sistema.

O microcontrolador foi programado em C++ através do Arduino IDE. Um loop de amostragem foi criado para registrar continuamente a posição da Massa 2,  $x_2(t)$ , lida pelo sensor a laser. Cada

leitura de posição foi pareada com seu respectivo registro de tempo, obtido através da função millis().

## 9. Projeto do Controlador

Esta seção usa os dados dos gráficos de malha fechada e LGR.

### 9.1. Requisitos de Desempenho

O controlador de posição foi projetado para atender os seguintes requisitos:

- Tempo de acomodação para 2% ( $T_s$ ): Menor que 5 segundos.
- Sobressinal máximo ( $M_p$ ): Menor que 10%.
- Erro em regime estacionário para entrada degrau ( $e_{ss}$ ): Zero para uma entrada degrau.

### 9.2. Escolha da Técnica e Tipo de Controlador

O sistema em malha aberta é do Tipo 0, o que resulta em um erro de regime estacionário não nulo para uma entrada degrau. Para satisfazer o requisito  $e_{ss} = 0$ , foi necessária a inclusão de um polo na origem, caracterizando um Controlador Proporcional-integral (PI). A forma do controlador PI é:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} \quad (18)$$

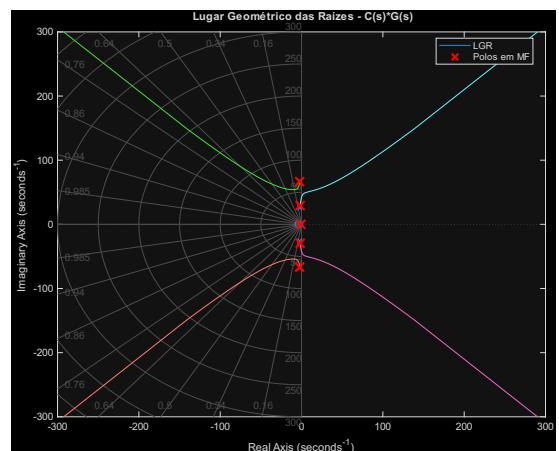
A técnica do Lugar Geométrico das Raízes (LGR) foi escolhida para o projeto, pois permite alocar os polos de malha fechada em posições que atendam aos requisitos de resposta transitória ( $T_s$  e  $M_p$ ).

### 9.3. Desenvolvimento Matemático do Projeto

O LGR foi traçado para a função de transferência de malha fechada  $C(s)G(s)$ . Após iterações de projeto, os ganhos do controlador PI foram definidos como:

- $K_p = 50$
- $K_i = 200$

A Figura 7 mostra o LGR do sistema compensado. Os marcadores 'x' vermelhos indicam os polos de malha fechada (Polos em MF) resultantes dessa escolha de ganhos. Observa-se que os polos dominantes estão localizados em posições que garantem a estabilidade e uma resposta amortecida, atendendo aos critérios de desempenho.



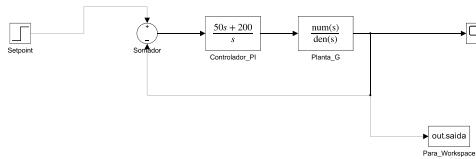
**Figura 7.** Lugar Geométrico das Raízes

## 10. Simulação do Sistema Controlado

Nesta seção, avalia-se o desempenho do controlador projetado por meio de simulação, utilizando o modelo da planta validado juntamente com o controlador.

### 10.1. Implementação no Ambiente de Simulação

O sistema em malha fechada foi montado no MATLAB/Simulink. O controlador PI  $C(s)$  foi inserido em cascata com a planta  $G(s)$ , e uma realimentação unitária negativa foi implementada.

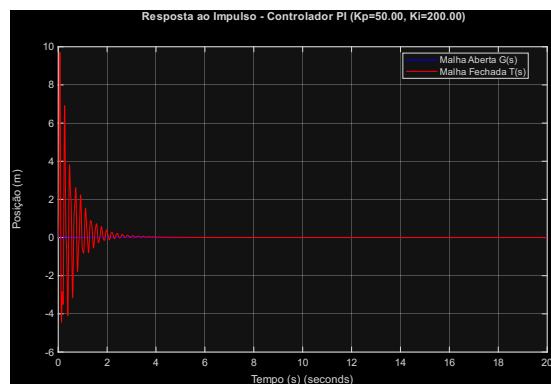


**Figura 8.** Diagrama de blocos montado no Simulink

### 10.2. Análise dos Resultados da simulação em Malha Fechada

A Figura 9 compara a resposta do sistema em malha aberta (azul) e malha fechada (vermelho) para um degrau unitário. A resposta do sistema em malha aberta ( $G(s)$ ) estabiliza no ganho estático 0.0051, falhando em seguir a referência 1. A resposta em malha fechada ( $T(s)$ ), com o controlador PI ( $K_p = 50, K_i = 200$ ), demonstra o sucesso do projeto:

- **Erro de Regime:** O sistema segue a referência e estabiliza em 1 m, confirmando que o erro em regime estacionário é zero ( $e_{ss=0}$ ), como esperado do integrador.
- **Tempo de Acomodação:** O sistema atinge 98% do valor final (entra na faixa  $\pm 2\%$ ) em aproximadamente 4.5 segundos, atendendo ao requisito  $T_s < 5$  s.
- **Sobressinal:** A resposta não apresenta sobressinal ( $M_p = 0\%$ ), atendendo confortavelmente ao requisito  $M_p < 10\%$ .



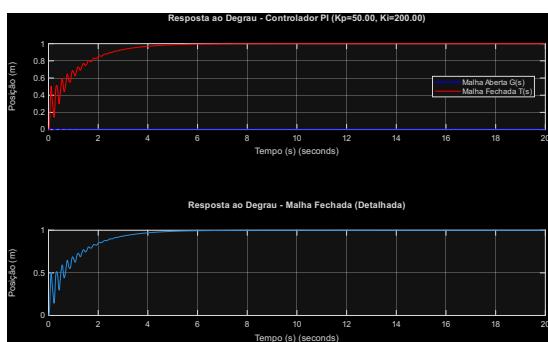
**Figura 10.** Resposta ao Impulso - Controlador PI

### 11. Análise Crítica e Conclusão Final

Este trabalho detalhou o processo completo de modelagem, análise e projeto de controle para um sistema de posição massa-mola de dois graus de liberdade. O modelo matemático de quarta ordem, derivado das Leis de Newton, foi minuciosamente analisado, indentificando o sistema como Tipo 0 e da natureza estável, porém subamortecida. A simulação em malha aberta confirmou o comportamento dinâmico oscilatório e o ganho estático previsto pelo modelo.

A análise do modelo orientou o projeto de um controlador Proporcional-Integral (PI), escolhido especificamente para atender aos requisitos de precisão de erro zero em regime estacionário, tempo de acomodação inferior a 5 segundos e sobressinal máximo de 10%.

O controlador projetado, com ganhos  $K_p = 50$  e  $K_i = 200$ , foi validado com sucesso no ambiente de simulação (MATLAB/Simulink). Os resultados da simulação em malha fechada demonstraram a total capacidade do projeto em atender a todos os requisitos propostos, alcançando um tempo de acomodação de aproximadamente 4.5 segundos e um sobressinal de 0%. O estudo conclui, portanto, o ciclo de projeto e análise teórica, fornecendo um modelo de controlador robusto e validado em simulação.



**Figura 9.** Resposta ao Degrau - Controlador PI

A Figura 10 mostra a resposta a distúrbios. O sistema em malha fechada (vermelho) rejeita o impulso e retorna rapidamente ao ponto de equilíbrio 0, demonstrando robustez e estabilidade.

## Referências

- [1] Q. Lu, C. Ortega e O. Ma, «Passive Gravity Compensation Mechanisms: Technologies and Applications», 2011.
- [2] M. Fitri, M. Yakub e A. Q. B.A.Aminudin, «Comparative Study on Control Method for Two-Mass Systems», *International Journal on Advanced Science Engineering Information Technology*, vol. 2, n.º 3, pp. 63–68, 2012, ISSN: 2088-5334.
- [3] C. Silveira, «Sistema massa-mola: 5 Curiosidades que Você Precisa Saber», *Vibra Varejo*, 2025.