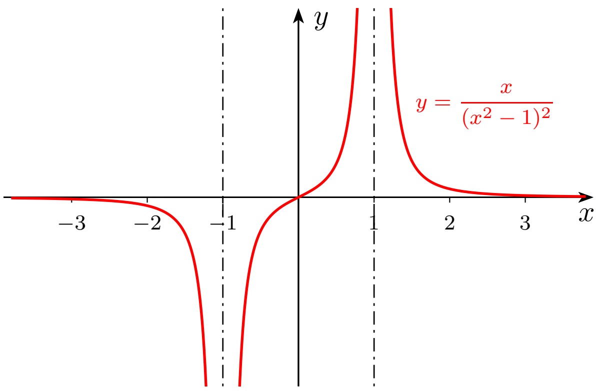
Frequência 2 de Análise Matemática I - Engenharia Informática

19 de dezembro de 2018 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[5.0 *val.*] 1. Considere o seguinte gráfico, da função $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$.



(a) Classifique, justificando, os seguintes integrais:

(I) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$; (III) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$.

(b) Calcule a primitiva $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$.

(c) Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 1ª espécie.

(d) Determine, justificando, a natureza do integral impróprio de 2ª espécie.

(e) O que pode concluir sobre a natureza do integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$?

[6.0 *val.*] 2. Considere a primitiva $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx$.

(a) i. Calcule a primitiva recorrendo à técnica de primitivação de funções racionais.
ii. Calcule a primitiva recorrendo à técnica de primitivação por partes.
iii. Compare as expressões das duas alíneas anteriores.

(b) Recorrendo a uma mudança de variável adequada, mostre que a primitiva $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{(e^x-1)^2}\,dx$ pode reduzir-se à primitiva dada. Determine o resultado, recorrendo à alínea (a).

[5.0 *val.*] 3. Considere a primitiva $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

(a) Calcule a primitiva recorrendo à técnica de primitivação por partes.

(b) Calcule a primitiva recorrendo à técnica de primitivação por substituição.

[4.0 *val.*] 4. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \sin^2(3x)\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-1}\,dx$.

1. (a) Começamos por notar que

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \ (x^2-1)^2 \neq 0\} \ = \ \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq \pm 1\} \ = \ \mathbb{R} \backslash \{-1,\, 1\}$$

Além disso, $f(x)$ é contínua, por ser definida por um quociente de funções contínuas (polinómios).

(I) $]1,\, 2[$ está contido em D_f mas

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{2}{9}\,,$$

pelo que $]1,\, 2[$ é limitado mas $f(x)$ não é limitada nesse intervalo. Logo o integral é impróprio de 2ª espécie.

(II) $[2,\, 3]$ está contido em D_f e é fechado e limitado. Como f é contínua então $f(x)$ também é limitada nesse intervalo. Logo o integral é definido.

(III) $[3,\, +\infty[$ está contido em D_f mas não é limitado. Logo o integral é impróprio de 1ª espécie.

(b) Tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx \ &= \ \int x\,(x^2-1)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2x\,(x^2-1)^{-2}}_{R2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-1)^{-1}}{-1} + c \\ &= \ -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-1} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

(c) O integral impróprio de 1ª espécie é (III) e tem-se,

$$\begin{aligned}\int_3^{+\infty} \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx \ &= \ \lim_{t\to+\infty} \int_3^t \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx \\ &= \ \lim_{t\to+\infty}\Big[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-1}\Big]_3^t \\ &= \ \lim_{t\to+\infty}\Big(-\frac{1}{2}\,\underbrace{\frac{1}{t^2-1}}_{\to 0} + \frac{1}{16}\Big) \\ &= \ \frac{1}{16}\end{aligned}$$

pelo que o integral é convergente.

(d) O integral impróprio de 2ª espécie é (I) e tem-se,

$$\begin{aligned}\int_1^{2} \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx \ &= \ \lim_{t\to1^+} \int_1^2 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx \\ &= \ \lim_{t\to1^+}\Big[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-1}\Big]_t^2 \\ &= \ \lim_{t\to1^+}\Big(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\,\underbrace{\frac{1}{t^2-1}}_{\to+\infty}\Big) \\ &= \ +\infty\end{aligned}$$

pelo que o integral é divergente.

(e) Atendendo a que

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx \ = \ \underbrace{\int_1^2 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx}_{\text{divergente}} + \underbrace{\int_2^3 \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx}_{\text{integral definido}} + \underbrace{\int_3^{+\infty} \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx}_{\text{convergente}}$$

então o integral impróprio (misto) é divergente.

2. (a) i. Nenhuma das regras de primitivação imediata é, para já, aplicável. Uma vez que se trata de fracção racional (quociente de polinómios), a primitivação será então calculada recorrendo à decomposição da fracção numa soma de elementos simples (Tabelas de Matemática, página 8). A fracção é própria (grau do numerador$=1$, grau do denominador$=2$) pelo que essa decomposição tem por base a factorização do denominador. Como

$$(x-1)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x=1 \vee x=1}_{\text{raiz múltipla}},$$

a factorização real do denominador é definida por

$$(x-1)^2 \;=\; (x-1)(x-1)\,.$$

A raiz dupla $x=1$ determina duas fracções simples:

$$\frac{x}{(x-1)^2} \;=\; \frac{A_1}{\underbrace{x-1}_{\cdot(x-1)}}+\frac{A_2}{(x-1)^2} \;=\; \frac{A_1\,(x-1)^2+A_2}{(x-1)^2}\,.$$

Da igualdade entre os numeradores, resulta que

$$\begin{array}{c|rcl} & x & = & A_1\,(x-1)^2+A_2 \\ \hline x=1 & 1 & = & 0+A_2 \\ x=0 & 0 & = & -A_1+A_2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_2=1 \\ A_1=A_2=1 \end{array} \right.$$

A decomposição da fracção numa soma de elementos simples é assim definida por

$$\frac{x}{(x-1)^2} \;=\; \frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\,,$$

pelo que a primitivação pode agora ser feita recorrendo a essa decomposição e a primitivação imediata:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx \;&=\; \int \frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\,dx \\
&=\; \int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx+\int \underbrace{(x-1)^{-2}}_{R2}\,dx \\
&=\; \ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+c \\
&=\; \ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

ii. Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx \;=\; \int \underbrace{x}_{d}\,\underbrace{(x-1)^{-2}}_{p}\,dx$$

cálculos auxiliares:

- $\int \underbrace{(x-1)^{-2}}_{R2}\,dx=\frac{(x-1)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x-1}+c$
- $(x)'=1$

$$\begin{aligned}
&=\; x\left(-\frac{1}{x-1}\right)-\int 1\,\left(-\frac{1}{x-1}\right)dx \\
&=\; -\frac{x}{x-1}+\int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx \\
&=\; -\frac{x}{x-1}+\ln|x-1|+k\,, \quad k\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

iii. Atendendo a que

$$\begin{aligned}
-\frac{x}{x-1}+\ln|x-1|+k &= -\frac{x-1+1}{x-1}+\ln|x-1|+k\\
&= -\frac{x-1}{x-1}-\frac{1}{x-1}+\ln|x-1|+k\\
&= -1-\frac{1}{x-1}+\ln|x-1|+k\\
&= -\frac{1}{x-1}+\ln|x-1|+\underbrace{k-1}_{=c}
\end{aligned}$$

então os resultados das alíneas (a) e (b) representam a mesma família de funções.

(b) Recorrendo à mudança de variável associada ao caso 6 da página 4 das Tabelas de Matemática, $R(a^{rx},\, a^{sx},\ldots)$, (com $a=e$) tem-se

$$m \;=\; m.d.c.\,\{1,\,2\} \;=\; 1\,,$$

pelo que

$$\text{m.v. } \boxed{e^x=t}\,,\;\; t\in\mathbb{R}_0^+ \text{ (para garantir a invertibilidade da m.v)}$$

e ainda

$$e^x=t \;\rightarrow\; x=\ln(t) \;\rightarrow\; x'=\frac{1}{t}$$

Assim, tem-se

$$\int \frac{e^{2x}}{(e^x-1)^2}\,dx \;\overset{\text{m.v}}{=}\; \int \frac{t^2}{(t-1)^2}\,\frac{1}{t}\,dt \;=\; \int \frac{t}{(t-1)^2}\,dt\,.$$

Esta primitiva já foi calculada nas alíneas anteriores. Recorrendo, por exemplo, ao resultado da alínea (a), tem-se então

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}}{(e^x-1)^2}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{t}{(t-1)^2}\,dt\\
&= \ln|t-1|-\frac{1}{t-1}+c\\
&\overset{\text{m.v}}{=} \ln|e^x-1|-\frac{1}{e^x-1}+c\,,\qquad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

3. (a) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx \;=\; \int \underbrace{x^2}_{d}\,\underbrace{x\,(1-x^2)^{\frac12}}_{p}\,dx$$

cálculos auxiliares:

- $\int x\,(1-x^2)^{\frac12}\,dx=\frac12\int \underbrace{2x\,(1-x^2)^{\frac12}}_{R2}\,dx=\frac12\,\frac{(1-x^2)^{\frac32}}{\frac32}+c$
- $(x^2)'=2x$

$$\begin{aligned}
&= x^2\,\frac13\,(1-x^2)^{\frac32}-\int 2x\,\frac13\,(1-x^2)^{\frac32}\,dx\\
&= \frac13\,x^2\,(1-x^2)^{\frac32}+\frac13\int \underbrace{-2x\,(1-x^2)^{\frac32}}_{R2}\,dx\\
&= \frac13\,x^2\,(1-x^2)^{\frac32}+\frac13\,\frac{(1-x^2)^{\frac52}}{\frac52}+c\\
&= \frac13\,x^2\,(1-x^2)^{\frac32}+\frac{2}{15}\,(1-x^2)^{\frac52}+c\\
&= \frac13\,x^2\,\sqrt{(1-x^2)^3}+\frac{2}{15}\,\sqrt{(1-x^2)^5}+c\,,\qquad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à mudança de variável associada ao caso 2 da página 4 das Tabelas de Matemática $R(\,x,\,\sqrt{a^2-b^2x^2}\,)$, tem-se

$$\text{m.v.}\ \boxed{x=\sin(t)}\,,\qquad t\in\left]-\tfrac{\pi}{2},\,\tfrac{\pi}{2}\right[\ \text{(para garantir a invertibilidade da m.v.)}$$

e ainda

$$x'=\cos(t)$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \sin^3(t)\,\sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt\\
&= \int \sin^3(t)\,\sqrt{\cos^2(t)}\,\cos(t)\,dt\,,\qquad \text{porque } 1-\sin^2(t)=\cos^2(t)\\
&= \int \sin^3(t)\,\cos(t)\,\cos(t)\,dt\\
&\qquad \text{Nota: na restrição, tem-se } \sqrt{\cos^2(t)}=|\cos(t)|=\cos(t)\\
&= \int \sin^3(t)\cos^2(t)\,dt\\
&\qquad \text{Nota: primitivação de funções trigonometricas, página 7 das Tabelas}\\
&= \int \sin(t)\sin^2(t)\cos^2(t)\,dt\\
&= \int \sin(t)\Big(1-\cos^2(t)\Big)\cos^2(t)\,dt\\
&= \int \sin(t)\Big(\cos^2(t)-\cos^4(t)\Big)\,dt\\
&= \int \sin(t)\cos^2(t)\,dt-\int \sin(t)\cos^4(t)\,dt\\
&= -\int \underbrace{-\sin(t)\cos^2(t)}_{R2}\,dt+\int \underbrace{-\sin(t)\cos^4(t)}_{R2}\,dt\\
&= -\frac{\cos^3(t)}{3}+\frac{\cos^5(t)}{5}+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Uma vez que para $t\in\left]-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right[$ tem-se

$$x=\sin(t)\ \Leftrightarrow\ \arcsin(x)=t\,,$$

então

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3(\arcsin x)+\frac{1}{5}\cos^5(\arcsin x)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

[4.0 *val.*] 4. Calcule as seguintes primitivas:

(a) Recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas descrita no caso 2 da página 6 das Tabelas de Matemática, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(3x)\,dx &= \int \frac{1}{2}\Big(1-\cos(6x)\Big)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int \underbrace{1}_{R1}\,dx-\frac{1}{2}\int \cos(6x)\,dx\\
&= \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\frac{1}{6}\int \underbrace{6\cos(6x)}_{R6}\,dx\\
&= \frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin(6x)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) A fracção é imprópria (grau do numerador= 3, grau do denominador= 1) pelo que a primitivação da fracção é realizada recorrendo à sua decomposição numa soma de elementos simples e o cálculo dessa decomposição começa pela divisão dos polinómios:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & x^3 & & & x-1 \\ \cline{5-5}
-(& x^3 & -x^2 &) & x^2+x+1 \\ \cline{1-4}
 & & x^2 & & \\
 & -(& x^2 & -x \quad) & \\ \cline{1-4}
 & & & x & \\
 & & -(& x \quad -1 \quad) & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & \\
\end{array}
$$

Então

$$\underbrace{\frac{x^3}{x-1}}_{\text{fracção imprópria}} = x^2 + x + 1 + \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\text{fracção própria}},$$

pelo que

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{x-1}\,dx &= \int x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= \int \underbrace{x^2 \cdot 1}_{R2}\,dx + \int \underbrace{x^1 \cdot 1}_{R2}\,dx + \int \underbrace{1}_{R1}\,dx + \int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$