Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

5 de fevereiro de 2018 Duração: 2h30m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.5 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = -e^{-\ln 2} + \frac{3}{2}\cos(4x)$.

(a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
Nota: Se não conseguir simplificar o termo $-e^{-\ln 2}$, *tome o valor* $\frac{1}{4}$.

(b) Calcule $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e justifique que f não é injectiva.

(c) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

[5.5 *val.*] 2. Considere a região limitada do plano, $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ y \leq x \ \wedge \ x \leq 0\}$.

(a) Represente graficamente a região $\mathcal{A}$.

(b) Defina a região $\mathcal{A}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

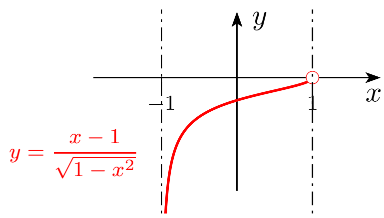
(c) Interprete o significado de $\int_{-\sqrt{2}}^{0} \left(x + \sqrt{4 - x^2}\right) dx$ e justifique, sem calcular o integral, que tem valor $\frac{\pi}{2}$.

(d) Recorrendo a integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular:

i. a área da região $\mathcal{A}$ em função da variável y;

ii. o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy.

[3.5 *val.*] 3. Considere o seguinte gráfico, da função $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$.



(a) Utilizando técnicas de primitivação, mostre que

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} - \arcsin(x) + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

(b) Considere as seguintes expressões:

(I) $\int_{-1}^{0} \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; (II) $\int_{0}^{1} \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; (III) $\int_{2}^{+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

i. Classifique, justificando, as expressões anteriores.

ii. Determine a natureza do integral impróprio.

[7.0 *val.*] 4. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\int \sin^3(x)\sqrt{\sec(x)}\,dx$; (b) $\int \frac{4x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2}\,dx$;

(c) $\int x \operatorname{arctg}(x^2)\,dx$; (d) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$.

[1.5 *val.*] 5. Resolva a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$y' + y\cos(x) = \cos(x),$$

sujeita à condição inicial $y(0) = 2$.

1. (a) Para caracterizar a função f é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} ? & \xrightarrow{\quad f \quad} & ? \\ x & \longrightarrow & y = -e^{-\ln 2} + \dfrac{3}{2}\cos(4x) \end{array}$$

O domínio de f é definido a partir do domínio da função cosseno, pelo que $D_f = \mathbb{R}$.
O contradomínio também pode ser definido a partir do contradomínio da função cosseno. Atendendo à propriedade

$$k\ln(p) = \ln(p^k)\,, \qquad \text{para qualquer } p > 0\,,$$

tem-se

$$f(x) = -e^{-\ln 2} + \frac{3}{2}\cos(4x) = -e^{\ln(2^{-1})} + \frac{3}{2}\cos(4x) = -2^{-1} + \frac{3}{2}\cos(4x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(4x)$$

Assim,

$$\begin{array}{rcccl} -1 & \leq & \cos(4x) & \leq & 1 \\ -\frac{3}{2} & \leq & \frac{3}{2}\cos(4x) & \leq & \frac{3}{2} \\ -\frac{4}{2} & \leq & \underbrace{-\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\cos(4x)}_{f(x)} & \leq & \frac{2}{2} \end{array}$$

donde $CD_f = [-2,\, 1]$.

(b) Tendo em conta os valores do cosseno nos ângulos de referência, tem-se

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos\left(4\,\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos\left(4\,\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Uma vez que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, então f não é injectiva (existem objectos diferentes com a mesma imagem).

(c) Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & ? & \xleftrightarrow{\quad f \quad} & ? & \\ ? = f^{-1}(y) = & x & \xleftrightarrow{\quad f^{-1} \quad} & y & = f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(4x) \end{array}$$

O contradomínio de f já foi determinado na alínea (a), $CD_f = [-2,\, 1]$. O domínio da alínea (a) tem que ser restringido, de modo a garantir a injectividade da função. Tendo em conta a restrição de injectividade do cosseno, tem-se

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 4x \leq \pi\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\} = \left[0,\, \frac{\pi}{4}\right].$$

A função inversa tem expressão analítica definida por

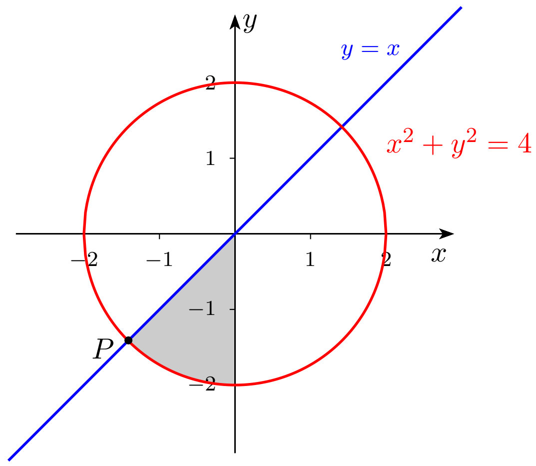
$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos(4x) \quad &\Leftrightarrow \quad y+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cos(4x) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2y+1}{3} = \cos(4x) \\ &\overset{\text{na restrição!}}{\Leftrightarrow} \quad \arccos\left(\frac{2y+1}{3}\right) = 4x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\arccos\left(\frac{2y+1}{3}\right) = x\,. \end{aligned}$$

Tem-se então

$$\left[0,\, \frac{\pi}{4}\right] \quad \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\longleftrightarrow}} \quad [-2,\, 1]$$

$$\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{2y+1}{3}\right) = f^{-1}(y) = x \quad \longleftrightarrow \quad y = f(x) = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos(4x)$$

2. (a) Tendo em conta que as curvas representam uma circunferência e duas rectas, tem-se



(b) Comecemos por determinar as coordenadas do ponto P :

$$\begin{cases} y = x \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2+x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Então $P(-\sqrt{2},\, -\sqrt{2})$. Note-se, ainda, que a circunferência define duas funções de x:

$$x^2+y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4-x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2}$$

Então,

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, -\sqrt{2} \le x \le 0 \,\wedge\, -\sqrt{4-x^2} \le y \le x\right\}$$

(c) Atendendo à alínea anterior, o integral representa a área de $\mathcal{A}$ em função da variável x:

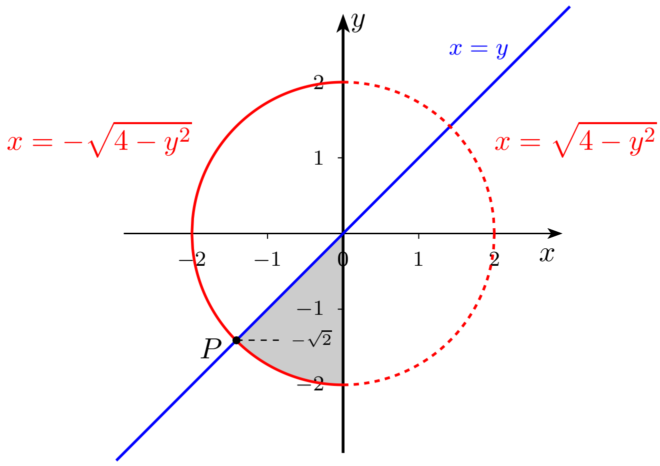
$$\text{Área}(\mathcal{A}) = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \Big(\underbrace{x}_{f_{superior}} - \big(\underbrace{-\sqrt{4-x^2}}_{f_{inferior}}\big) \Big)\, dx = \int_{-\sqrt{2}}^{0} x+\sqrt{4-x^2}\, dx$$

Uma vez que a região corresponde a $frac18$ de círculo então a área é dada por $\frac{\pi r^2}{8} = \frac{\pi \cdot 2^2}{8} = \frac{\pi}{2}$.
Logo é esse o valor do integral anterior.

(d) i. Comecemos por explicitar as curvas que limitam a região, em função da variável y:

- $x^2+y^2=4 \Leftrightarrow x^2=4-y^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4-y^2}$
- $y=x \Leftrightarrow x=y$

Então,



pelo que

$$\begin{aligned}
\text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \Big(\underbrace{0}_{f_{superior}} - (\underbrace{-\sqrt{4-y^2}}_{f_{inferior}}) \Big)\, dy + \int_{-\sqrt{2}}^{0} \Big(\underbrace{0}_{f_{superior}} - \underbrace{y}_{f_{inferior}} \Big)\, dy \\
&= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \sqrt{4-y^2}\, dy - \int_{-\sqrt{2}}^{0} y\, dy\,.
\end{aligned}$$

ii. Para o cálculo do volume do sólido que se obtém pela rotação da região em torno no eixo Oy é necessário ter em conta as funções que definem os contornos exterior e o interior. Essas expressões já foram determinadas na alínea anterior, pelo que

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy}) &= \pi \int_{-2}^{-\sqrt{2}} (\underbrace{-\sqrt{4-y^2}}_{f_{exterior}})^2 - (\underbrace{0}_{f_{interior}})^2\, dy + \pi \int_{-\sqrt{2}}^{0} (\underbrace{y}_{f_{exterior}})^2 - (\underbrace{0}_{f_{interior}})^2\, dy \\
&= \pi \int_{-2}^{-\sqrt{2}} (4-y^2)\, dy + \pi \int_{-\sqrt{2}}^{0} y^2\, dy
\end{aligned}$$

3. (a) Tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{R18}\, dx \\
&= \int x\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx - \arcsin(x) + c \\
&= -\frac{1}{2} \int \underbrace{-2\,x\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{R2}\, dx - \arcsin(x) + c \\
&= -\frac{1}{2}\, \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \arcsin(x) + c \\
&= -\sqrt{1-x^2} - \arcsin(x) + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Começamos por notar que a função $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}$ tem domínio

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \underbrace{\sqrt{1-x^2} \neq 0}_{x\neq\pm1} \wedge \underbrace{1-x^2 \geq 0}_{-1\leq x\leq 1}\} =]-1,1[\,,$$

como também é visível no gráfico apresentado. Além disso, f é contínua no seu domínio.

i. I) O intervalo de integração $I=[-1,\,0]$ é <u>limitado</u> mas não está contido em D_f, porque $x=-1$ não pertence a D_f. Uma vez que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) \;=\; -\infty \quad \text{(conforme se verifica pelo gráfico dado)}\,,$$

então f <u>não é limitada</u> em $I=[-1,\,0]$. Então o integral (I) é impróprio de 2Âª espécie.

II) O intervalo de integração $I=[0,\,1]$ é <u>limitado</u> mas não está contido em D_f, porque $x=1$ não pertence a D_f. Porém

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) \;=\; 0 \quad \text{(conforme se verifica pelo gráfico dado)}\,,$$

é finito, pelo que f <u>é limitada</u> em $I=[0,\,1]$. Então o integral (II) é definido.

III) Nenhum dos pontos do intervalo de integração $I=[2,\,+\infty[$ pertence a D_f, pelo que o integral (III) não te sentido matemático (não está definido).

ii. De acordo com a alínea anterior, o único integral impróprio é (I). Então,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \lim_{t\to -1^+} \int_{t}^{0} \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \lim_{t\to -1^+} \Big[-\sqrt{1-x^2} - \arcsin(x)\Big]_t^0\,, \quad \text{pela alínea (a)} \\
&= \lim_{t\to -1^+} -\sqrt{1} - \underbrace{\arcsin(0)}_{=0} - \Big(-\underbrace{\sqrt{1-t^2}}_{\to 0} - \underbrace{\arcsin(t)}_{\to -\frac{\pi}{2}}\Big) \\
&= -1-\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Uma vez que o resultado é finito, então o integral é convergente.

4. (a) Tem-se

$$\begin{aligned}
\int \sin^3(x)\,\sqrt{\sec(x)}\,dx &= \int \sin^3(x)\,\big(\cos(x)\big)^{-\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \int \sin(x)\,\sin^2(x)\,\big(\cos(x)\big)^{-\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \int \sin(x)\,\big(1-\cos^2(x)\big)\,\big(\cos(x)\big)^{-\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \int \sin(x)\,\big(\cos(x)\big)^{-\frac{1}{2}} - \sin(x)\,\big(\cos(x)\big)^{\frac{3}{2}}\,dx \\
&= -\int \underbrace{-\sin(x)\,\big(\cos(x)\big)^{-\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx - (-1)\int \underbrace{-\sin(x)\,\big(\cos(x)\big)^{\frac{3}{2}}}_{R2}\,dx \\
&= -\frac{\big(\cos(x)\big)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\big(\cos(x)\big)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c \\
&= -2\,\sqrt{\cos(x)} + \frac{2}{5}\,\sqrt{\cos^5(x)} + c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) A função é uma fracção própria (grau do numerador < grau do denominador) mas a primitiva ainda não pode ser calculada recorrendo a primitivas elementares, pelo que vamos efectuar a decomposição da fracção numa soma de elementos simples. As raízes do denominador são dadas por

$$x^3+x^2=0 \Leftrightarrow x^2\,(x+1)=0 \vee x+1=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee x+1=0 \Leftrightarrow \underbrace{x=0 \;\vee\; x=0}_{\text{raiz múltipla}} \vee\, x=-1\,.$$

Então,

$$\frac{4x^2+3x+2}{x^3+x^2} \;=\; \underbrace{\frac{A}{x}}_{\cdot x\,(x+1)} + \underbrace{\frac{B}{x^2}}_{\cdot (x+1)} + \underbrace{\frac{C}{x+1}}_{\cdot x^2} = \frac{A\,x\,(x+1)+B\,(x+1)+C\,x^2}{x^3+x^2}\,.$$

Tendo em conta a igualdade entre os numeradores, tem-se agora

$$\begin{array}{r|rcl}
 & 4x^2+3x+2 & = & A\,x\,(x+1)+B\,(x+1)+C\,x^2 \\ \hline
x=0 & 2 & = & 0+B+0 \\
x=-1 & 3 & = & 0+0+C \\
x=1 & 9 & = & 2A+2B+C
\end{array}
\quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} B=2 \\ C=3 \\ 9=2A+4+3 \quad\Rightarrow\quad A=1 \end{cases}$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é então definida por

$$\frac{4x^2+3x+2}{x^3+x^2} = \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x+1}\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2+3x+2}{x^3+x^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x+1}\right)dx \\
&= \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{R5}\,dx \,+\, 2\int \underbrace{x^{-2}}_{R2}\,dx \,+\, 3\int \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{R5}\,dx \\
&= \ln|x| + 2\,\frac{x^{-1}}{-1} + 3\,\ln|x+1| + c \\
&= \ln|x| - \frac{2}{x} + 3\,\ln|x+1| + c\,,\ \ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,(x^2)\,dx = \int \underbrace{x}_{p}\,\underbrace{\mathrm{arctg}\,(x^2)}_{d}\,dx$$

cálculos auxiliares:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \int x\,dx &=& \frac{x^2}{2} \\ (\mathrm{arctg}\,(x^2))' &=& \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} \;=\; \frac{2x}{1+x^4} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{PP}{=} \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,(x^2) - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{2x}{1+x^4}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,(x^2) - \frac{1}{4}\int \underbrace{\frac{4\,x^3}{1+x^4}}_{R5}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,(x^2) - \frac{1}{4}\,\ln(1+x^4) + c\,,\ \ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(d) Recorrendo à seguinte mudança de variável (Tabelas de Matemática, página 4)),

$$\text{m.v.}\ \boxed{x \,=\, 2\,\sec t}\,,\qquad t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\,,$$

tem-se

$$x' \,=\, 2\,\sec t\,\tan t$$

e ainda $|\tan t| = \tan t$ (porque o cosseno é positivo no intervalo $]0,\frac{\pi}{2}]$), pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\,\sqrt{x^2-4}}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{1}{\cancel{2\,\sec t}\,\sqrt{(2\,\sec t)^2-4}}\,\cancel{2\,\sec t}\,\tan t\,dt \\
&= \int \frac{\tan t}{\sqrt{4\,\sec^2 t-4}}\,dt \;=\; \int \frac{\tan t}{\sqrt{4\,(\sec^2 t-1)}}\,dt \\
&= \int \frac{\tan t}{\sqrt{4}\,\sqrt{\tan^2 t}}\,dt\,, \qquad \text{porque } \sec^2 t-1=\tan^2 t \\
&= \int \frac{\cancel{\tan t}}{2\,\cancel{|\tan t|}}\,dt\,, \qquad \text{porque } |\tan t|=\tan t \\
&= \int \underbrace{\frac{1}{2}}_{R1}\,dt \;=\; \frac{1}{2}\,t+c\,,\ \ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Atendendo novamente à mudança de variável considerada, tem-se

$$\begin{aligned} x = 2\,\sec t\,, \quad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad &\Leftrightarrow \quad x \;=\; \frac{2}{\cos t} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x} \;=\; \cos t \\ &\Leftrightarrow \quad \arccos\left(\frac{2}{x}\right) \;=\; t \quad \text{(na restrição indicada!)} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\,\sqrt{x^2-4}}\,dx \quad &\overset{\text{m.v}}{=} \quad \frac{1}{2}\,t + c \\ &\overset{\text{m.v}}{=} \quad \frac{1}{2}\,\arccos\left(\frac{2}{x}\right) + c\,,\;\; c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5. A equação pode ser interpretada como uma equação de variáveis separáveis, e nesse caso tem-se

$$\begin{aligned} y' + y\,\cos(x) \;=\; \cos(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y' \;=\; -y\,\cos(x) + \cos(x) \\ &\Leftrightarrow \quad y' \;=\; (-y+1)\,\cos(x)\,, \quad \text{EDO de variáveis separáveis} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} \;=\; (-y+1)\,\cos(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{-y+1}\,dy \;=\; \cos(x)\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad -\int \underbrace{\frac{-1}{-y+1}}_{R5}\,dy \;=\; \int \underbrace{\cos(x)}_{R6}\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad -\ln|-y+1| \;=\; \sin(x) + c\,,\;\; c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Tendo em conta a condição inicial $y(0) \;=\; 2\,,$ tem-se agora

$$y(0) \;=\; 2 \quad \Rightarrow \quad -\ln|-2+1| \;=\; \sin(0) + c \Leftrightarrow -\ln(1) \;=\; 0 + c \Leftrightarrow c \;=\; 0$$

pelo que a solução do problema é definida (implicitamente) por $-\ln|-y+1| \;=\; \sin(x)\,.$

A equação também poder ser interpretada como uma equação linear, e nesse caso tem-se

$$\begin{aligned} y' + y\,\cos(x) \;=\; \cos(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y' + \cos(x)\,y \;=\; \cos(x)\,, \quad \text{EDO linear} \\ & \quad \text{F.I. } e^{\int \cos(x)\,dx} \;=\; e^{\sin(x)} \\ &\overset{\times e^{\sin(x)}}{\Leftrightarrow} \quad y'\,e^{\sin(x)} + \cos(x)\,e^{\sin(x)}\,y \;=\; \cos(x)\,e^{\sin(x)} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(y\,e^{\sin(x)}\right)' \;=\; \cos(x)\,e^{\sin(x)} \\ &\Leftrightarrow \quad y\,e^{\sin(x)} \;=\; \int \underbrace{\cos(x)\,e^{\sin(x)}}_{R3} \\ &\Leftrightarrow \quad y\,e^{\sin(x)} \;=\; e^{\sin(x)} + k \\ &\Leftrightarrow \quad y \;=\; 1 + k\,e^{-\sin(x)}\,,\;\; k \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Tendo em conta a condição inicial $y(0) \;=\; 2\,,$ *tem-se agora*

$$y(0) \;=\; 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \;=\; 1 + k\,e^{-\sin(0)} \Leftrightarrow 0 \;=\; 1 + k \Leftrightarrow k \;=\; -1$$

pelo que a solução do problema é definida (explicitamente) por $y \;=\; 1 - e^{-\sin(x)}\,.$