Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência 1 de Análise Matemática I - Engenharia Informática

15 de novembro de 2017 Duração: 1h30m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

[4.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = -1 - 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

(a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

(b) Calcule $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$.

(c) Determine os zeros de f.

(d) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

(e) Resolva, caso seja possível, a equação $\arcsin(x-1) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

[1.0 *val.*] 2. Recorrendo à definição de primitiva, mostre que

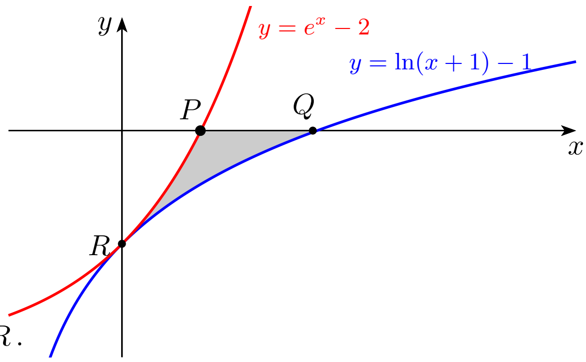
$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

[1.5 *val.*] 3. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{\tan(3x)}}{\cos^2(3x)}\,dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{9+4\,e^{2x}}\,dx$.

[2.0 *val.*] 4. Justifique convenientemente que a expressão $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+5\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ corresponde a um integral definido e calcule o seu valor.

[5.5 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada na figura seguinte.



(a) Determine as coordenadas dos pontos P, Q e R.

(b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular a área da região

(i) em função da variável x;

(ii) em função da variável y.

(c) Recorrendo a integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Ox.

[6.0 *val.*] 6. Considere a região limitada do plano, $\mathcal{B}$, definida pelas curvas $y = -x^2 - 1$ e $x = y + 3$.

(a) Esboce a região $\mathcal{B}$.

(b) Defina a região $\mathcal{B}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

(c) Recorrendo a integrais, calcule a área da região $\mathcal{B}$.

(d) Recorrendo a integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{B}$ em torno do eixo Oy.

(e) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro de $\mathcal{B}$.

1. (a) Para caracterizar a função f é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} ? & \xrightarrow{\quad f \quad} & ? \\ x & \longrightarrow & y = -1 - 2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) \end{array}$$

O domínio de f é definido a partir do domínio da função seno, pelo que $D_f = \mathbb{R}$.
O contradomínio também pode ser definido a partir do contradomínio da função seno. Assim,

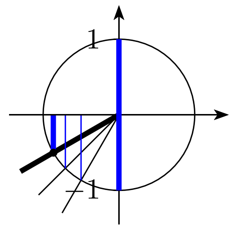
$$\begin{array}{rcccr} -1 & \leq & \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) & \leq & 1 \\ -2 & \leq & 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) & \leq & 2 \\ 2 & \geq & -2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) & \geq & -2 \\ 1 & \geq & \underbrace{-1 - 2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)}_{f(x)} & \geq & -3 \end{array}$$

donde $CD_f = [-3, 1]$.

(b) Tendo em conta os valores do seno nos ângulos de referência, tem-se

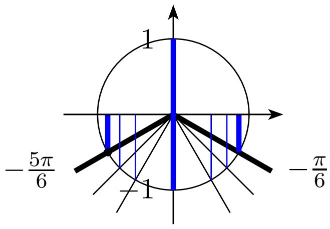
$$f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -1 - 2\sin\left(3\,\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -1 - 2\sin\left(\frac{43\pi}{6}\right) = -1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$\frac{43\pi}{6} = 7\pi + \frac{\pi}{6}$



(c) Recorrendo ao círculo trigonométrico e aos ângulos de referência, tem-se

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 - 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad 3x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k\,2\pi \ \vee \ 3x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + k\,2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\,2\pi \ \vee \ 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} + k\,2\pi \\ &\Leftrightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{6} + k\,2\pi \ \vee \ 3x = -\frac{\pi}{2} + k\,2\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{18} + k\,\frac{2\pi}{3} \ \vee \ x = -\frac{\pi}{6} + k\,\frac{2\pi}{3}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

(d) Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} ? & \xleftrightarrow[f^{-1}]{\quad f \quad} & ? \\ ? = x & \longleftrightarrow & y \;=\; -1 - 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}$$

O contradomínio de f já foi determinado na alínea (a). O domínio da alínea (a) tem que ser restringido, de modo a garantir a injectividade da função. Tendo em conta a restrição de injectividade do seno, tem-se

$$D_f \;=\; \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} \leq 3x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}\right\} \;=\; \left[-\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}\right].$$

A função inversa tem expressão analítica definida por

$$\begin{aligned} y \;=\; -1 - 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad y + 1 \;=\; -2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y+1}{-2} \;=\; \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \\ &\overset{\text{na restrição!}}{\Leftrightarrow} \quad \arcsin\left(-\frac{y+1}{2}\right) \;=\; 3x - \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} + \arcsin\left(-\frac{y+1}{2}\right) \;=\; 3x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}\arcsin\left(-\frac{y+1}{2}\right) \;=\; x\,. \end{aligned}$$

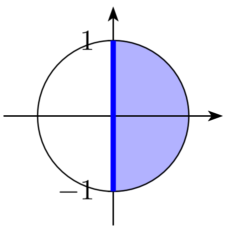
Assim, tem-se

$$\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}\right] & \xleftrightarrow[f^{-1}]{\quad f \quad} & [-3,\, 1] \\ \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}\arcsin\left(-\frac{y+1}{2}\right) \;=\; x & \longleftrightarrow & y \;=\; -1 - 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}$$

(e) Tendo em conta que

$$\begin{aligned} \arcsin(x-1) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \;=\; \frac{\pi}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \arcsin(x-1) - \frac{2\pi}{3} \;=\; \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad \arcsin(x-1) \;=\; \pi \end{aligned}$$

a equação é impossível, porque π não pertence ao contradomínio do arco seno (o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$).



2. Basta notar que

$$\begin{aligned} \left(x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c\right)' \;&=\; \left(x\arcsin(x)\right)' + \left(\sqrt{1-x^2}\right)' + c' \\ &=\; (x)'\arcsin(x) + x\left(\arcsin(x)\right)' + \left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' + 0 \\ &=\; \arcsin(x) + x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\,(1-x^2)'\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &=\; \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\,(-2x)\,\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &=\; \arcsin(x) + \cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} - \cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} \\ &=\; \arcsin(x) \end{aligned}$$

3. (a) Tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{\tan(3x)}}{\cos^2(3x)}\,dx &= \int \frac{1}{\cos^2(3x)}\,e^{\tan(3x)}\,dx = \int \sec^2(3x)\,e^{\tan(3x)}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int \underbrace{3\,\sec^2(3x)\,e^{\tan(3x)}}_{R3}\,dx = \frac{1}{3}e^{\tan(3x)}+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

(b) Tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{9+4\,e^{2x}}\,dx &= \int \frac{e^x}{9\left(1+\frac{4\,e^{2x}}{9}\right)}\,dx = \int \frac{1}{9}\,\frac{e^x}{1+\left(\frac{2\,e^x}{3}\right)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{9}\,\frac{3}{2}\int \underbrace{\frac{\frac{2}{3}\,e^x}{1+\left(\frac{2\,e^x}{3}\right)^2}}_{R19}\,dx = \frac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\,e^x}{3}\right)+c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

4. Começamos por observar que o domínio da função $f(x)=\frac{1+5\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ é

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\, x\geq 0\ \wedge\ \sqrt{x}\neq 0\right\} =]0,+\infty[\,.$$

Uma vez que $I=[1,\,2]$ é um subconjunto de D_f e a função f é contínua em I (um intervalo fechado e limitado), então o intervalo de integração e a função são ambos limitados, pelo que o integral é definido. Assim,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1+5\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^2 \frac{1+5\,x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{5\,x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx \\ &= \int_1^2 \left(x^{-\frac{1}{2}}+5\,x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right)dx = \int_1^2 \Big(\underbrace{x^{-\frac{1}{2}}}_{R2}+5\,\underbrace{x^{-\frac{1}{6}}}_{R2}\Big)\,dx \\ &= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+5\,\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}}\right]_1^2 = \left[2\,\sqrt{x}+6\,\sqrt[6]{x^5}\right]_1^2 \\ &= 2\,\sqrt{2}+6\,\sqrt[6]{2^5}-(2+6) = 2\,\sqrt{2}+6\,\sqrt[6]{2^5}-8\,.\end{aligned}$$

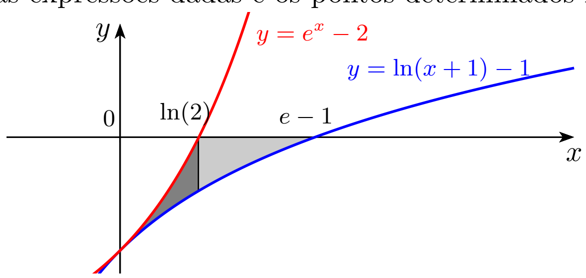
5. (a) Basta notar que os pontos P, Q e R correspondem a intersecções da curvas dadas com os eixo coordenados. Então:

P: tem-se $e^x-2=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln(2)$. $P=\big(\ln(2),\,0\big)$;

Q: tem-se $\ln(x+1)-1=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=1 \Leftrightarrow x+1=e^1 \Leftrightarrow x=e^1-1$. $Q=\big(e-1,\,0\big)$;

R: para $x=0$ tem-se $e^0-2=1-2=-1$. $R=\big(0,\,-1\big)$.

(b) (i) Tendo em conta as expressões dadas e os pontos determinados na alínea anterior, tem-se



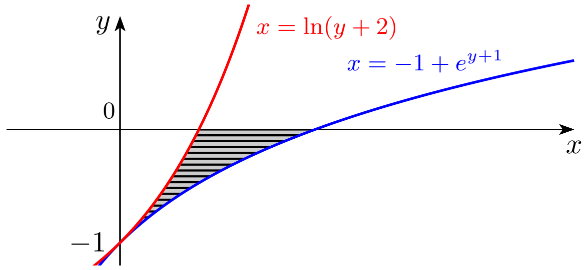
tem-se

$$\text{Área} = \int_0^{\ln(2)} \Big(\underbrace{e^x-2}_{f_{superior}}\Big)-\Big(\underbrace{\ln(x+1)-1}_{f_{inferior}}\Big)\,dx + \int_{\ln(2)}^{e-1} \Big(\underbrace{\ 0\ }_{f_{superior}}\Big)-\Big(\underbrace{\ln(x+1)-1}_{f_{inferior}}\Big)\,dx$$

(ii) Comecemos por explicitar as curvas que limitam a região, em função da variável y:

- $y=e^x-2 \Leftrightarrow y+2=e^x \Leftrightarrow \ln(y+2)=x$
- $y=\ln(x+1)-1 \Leftrightarrow y+1=\ln(x+1) \Leftrightarrow e^{y+1}=x+1 \Leftrightarrow -1+e^{y+1}=x$

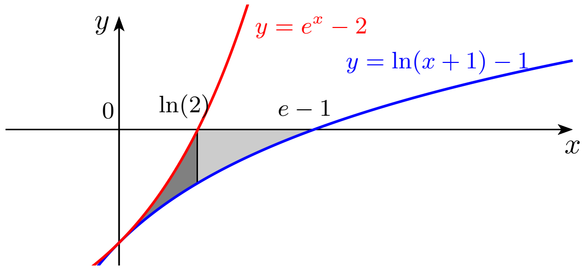
Tem-se então,



pelo que

$$\text{Área} \;=\; \int_{-1}^{0} \big(\underbrace{-1+e^{y+1}}_{f_{superior}}\big) - \big(\underbrace{\ln(y+2)}_{f_{interior}}\big)\,dy$$

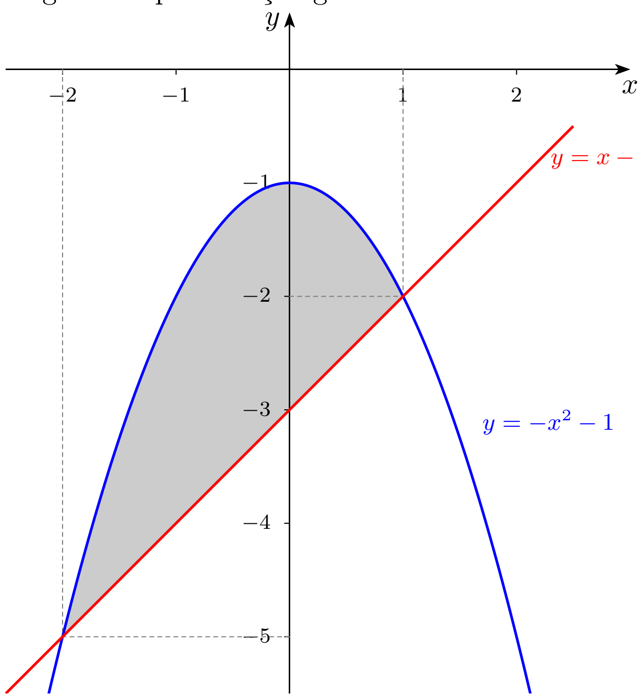
(c) Para o cálculo do volume do sólido que se obtém pela rotação da região em torno no eixo Ox é necessário ter em conta as funções que definem os contornos exterior e o interior. Atendendo à representação,



pelo que

$$\text{Volume}(Ox) \;=\; \pi\int_{0}^{\ln(2)} \big(\underbrace{\ln(x+1)-1}_{f_{exterior}}\big)^2 - \big(\underbrace{e^x-2}_{f_{interior}}\big)^2\,dx + \pi\int_{\ln(2)}^{e-1} \big(\underbrace{\ln(x+1)-1}_{f_{exterior}}\big)^2\,dx$$

6. (a) A região $\mathcal{B}$ tem a seguinte representação gráfica:



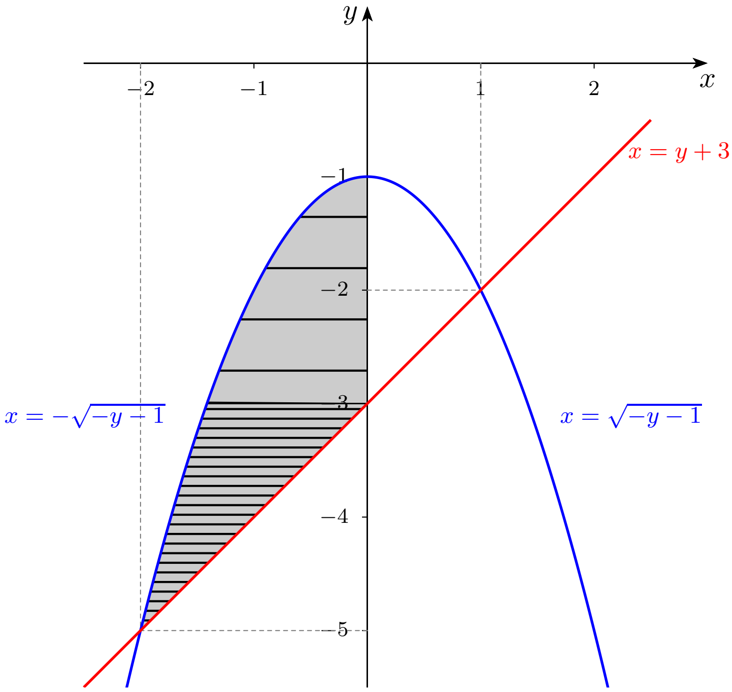
(b) Tendo em conta a representação da alínea anterior, tem-se

$$\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \,-2 \le x \le 1 \;\wedge\; x-3 \le y \le -x^2-1\}\,.$$

(c) Tem-se

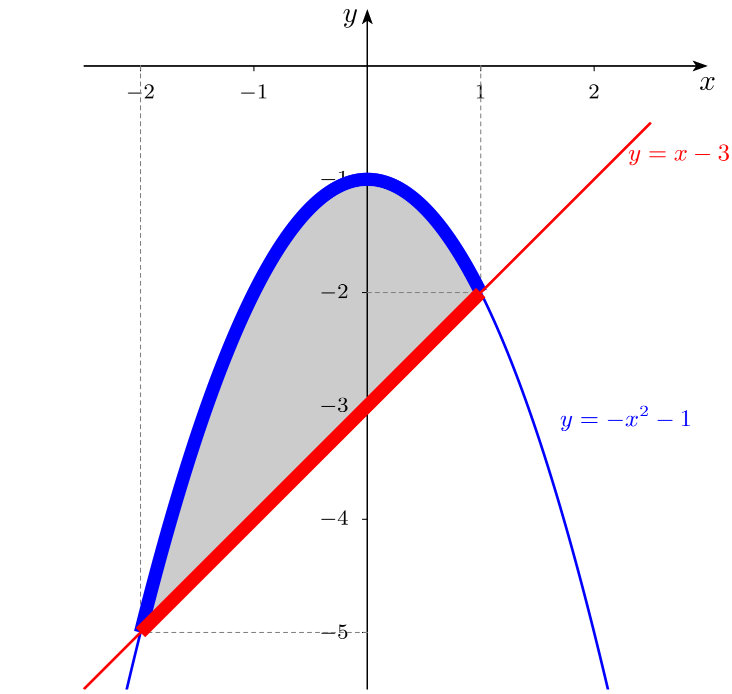
$$\begin{aligned}\text{Área} \;&=\; \int_{-2}^{1}\big(\underbrace{-x^2-1}_{f_{superior}}\big) - \big(\underbrace{x-3}_{f_{inferior}}\big)\,dx\\ &=\; \int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)\,dx \;=\; \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1} \;=\; -\frac{1^3}{3}-\frac{1}{2}+2-\left(\frac{8}{3}-2-4\right) \;=\; \frac{27}{6}\end{aligned}$$

(d) Na rotação da região em torno do eixo Oy é necessário ter em conta as sobreposições. Uma vez que, na rotação, a parte esquerda da região se sobrepõe à parte direita, tem-se



$$\text{Volume} = \pi \int_{-5}^{-3} \Big(\underbrace{-\sqrt{-y-1}}_{f_{exterior}}\Big)^2 - \big(\underbrace{y+3}_{f_{interior}}\big)^2\,dy + \pi \int_{-3}^{-1} \Big(\underbrace{-\sqrt{-y-1}}_{f_{exterior}}\Big)^2\,dy$$

(e) Tendo em conta a representação da região, tem-se



$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + [(\underbrace{-x^2-1}_{f})']^2}\,dx + \sqrt{3^2+3^2} \\ &= \int_{-2}^{-1} \sqrt{1+4x^2}\,dx + \sqrt{18} \end{aligned}$$