Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I (parte 1) - Engenharia Informática

21 de fevereiro de 2018 Duração: 1h30m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

[4.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{2} - \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

(a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

(b) Calcule $f(\frac{8\pi}{3})$ e $f(\frac{2\pi}{3})$ e justifique que a função não é injectiva.

(c) Determine os zeros da função.

(d) Calcule o valor da expressão $\arccos\left(f(\frac{8\pi}{3})\right)$.

(e) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

[7.0 *val.*] 2. Considere a região limitada do plano,

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -x \;\wedge\; y+2 \geq -x^2 \;\wedge\; -1 \leq x \leq 0\right\}.$$

(a) Represente graficamente a região $\mathcal{A}$.

(b) Recorrendo a integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular:

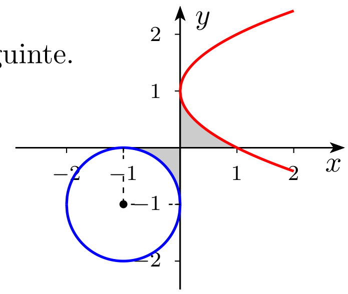
i. a área da região $\mathcal{A}$, em função da variável y;

ii. o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy;

iii. o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Ox.

(c) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro de $\mathcal{A}$.

[5.0 *val.*] 3. Considere a região $\mathcal{B}$ representada na figura seguinte.



(a) Identifique as funções que definem a região $\mathcal{B}$.

(b) Recorrendo a integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular:

i. a área da região $\mathcal{B}$.

ii. o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{B}$ em torno do eixo Ox.

(c) Prove que a área da região $\mathcal{B}$ é igual a $\frac{4}{3} - \frac{\pi}{4}$.

[1.5 *val.*] 4. Recorrendo à técnica de primitivação por decomposição e às regras de primitivação imediata, determine

$$\int \left(\frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 dx.$$

[1.5 *val.*] 5. Considere a primitiva $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - \boxed{\cdot}}}\, dx$.

Complete o espaço assinalado com $\boxed{\cdot}$ por forma a obter três primitivas imediatas distintas. Identifique as regras aplicadas.

[1.0 *val.*] 6. Recorrendo à definição de primitiva, mostre que

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

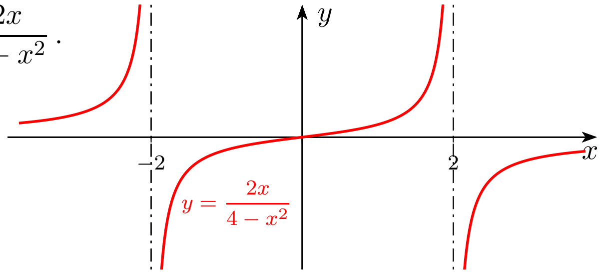
Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I (parte 2) - Engenharia Informática

21 de fevereiro de 2018 — Duração: 1h30m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[5.0 *val.*] 1. Considere o seguinte gráfico, da função $f(x) = \dfrac{2x}{4-x^2}$.



(a) Calcule a primitiva de $f(x)$.

(b) Prove que o integral $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$ é impróprio e determine a sua natureza.

(c) Tendo em conta as seguintes expressões

(I) $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx$; (II) $\displaystyle\int_4^5 f(x)\,dx$,

determine, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

i. O integral definido é igual a 3.

ii. O integral impróprio é convergente.

(d) Tendo em conta as alíneas anteriores, indique a natureza do integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$.

[5.0 *val.*] 2. (a) Recorrendo às técnicas de primitivação de funções trigonométricas, calcule $\displaystyle\int \cos^3 x \sqrt{\operatorname{cosec} x}\,dx$.

(b) Recorrendo à mudança de variável $\boxed{x = \cos t}$, $t \in]0,\pi[$, mostre que o cálculo de

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}}\,dx$$

reduz-se ao cálculo da primitiva da alínea (a).

(c) Recorrendo às alíneas anteriores, calcule $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}}\,dx$.

[10.0 *val.*] 3. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int e^x \sqrt{1+e^x}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int e^{2x} \sqrt{1+e^x}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int x \sin(3x^2)\cos(x^2-1)\,dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{3x^2-8x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx$;

(e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

21 de fevereiro de 2018 Duração: 2h30m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.5 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{2} - \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

(a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

(b) Calcule $f(\frac{8\pi}{3})$ e $f(\frac{2\pi}{3})$ e justifique que a função não é injectiva.

(c) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

[5.5 *val.*] 2. Considere a região limitada do plano,

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le -x \ \wedge \ y+2 \ge -x^2 \ \wedge \ -1 \le x \le 0\right\}.$$

(a) Represente graficamente a região $\mathcal{A}$.

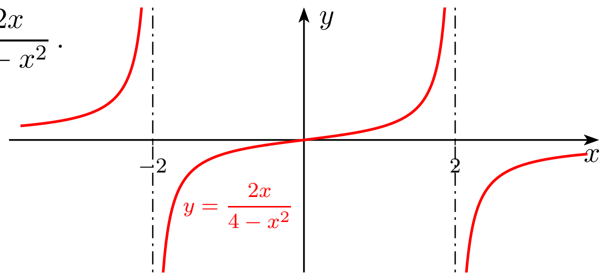
(b) Recorrendo a integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular:

i. a área da região $\mathcal{A}$, em função da variável y;

ii. o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy.

iii. o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Ox.

[2.5 *val.*] 3. Considere o seguinte gráfico, da função $f(x) = \dfrac{2x}{4-x^2}$.



(a) Calcule a primitiva de $f(x)$.

(b) Classifique, justificando, os seguintes integrais:

(I) $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx$; (II) $\displaystyle\int_4^5 f(x)\,dx$,

(c) Determine a natureza do integral (I).

(d) Identifique os valores de a e b que tornam $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ um integral definido.

[8.0 *val.*] 4. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int e^x \sqrt{1+e^x}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int e^{2x} \sqrt{1+e^x}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{3x^2-8x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

[1.5 *val.*] 5. Resolva a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$y' = x - x\,y,$$

sujeita à condição inicial $y\left(\sqrt{2}\right) = 0$.