Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Teste 1 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

20 de novembro de 2019 Duração: 1h45m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.0 *val.*] 1. (a) Considere a função $f(x) = 3 + 2\ln(x-2)$.

[0.625 *val.*] i) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

[0.375 *val.*] ii) Calcule os valores de $f(3)$ e $f^{-1}(3)$. Comente os resultados.

[0.375 *val.*] (b) i) Calcule o valor numérico da expressão $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

[0.625 *val.*] ii) Resolva a equação $1 + \cos(2x - \pi) = \frac{1}{2}$.

[1.0 *val.*] 2. A equação $e^{x-3} = -x + 3$ tem uma única solução, mas não pode ser determinada analiticamente.

[0.5 *val.*] (a) Recorrendo ao método gráfico, localize a solução da equação.

[0.5 *val.*] (b) Partindo do intervalo indicado na alínea anterior, efectue 2 iterações de um método numérico (bissecção ou Newton) para estimar a solução da equação dada. Indique um majorante para o erro dessa estimativa.

[1.0 *val.*] 3. (a) Recorrendo à definição de primitiva, mostre que

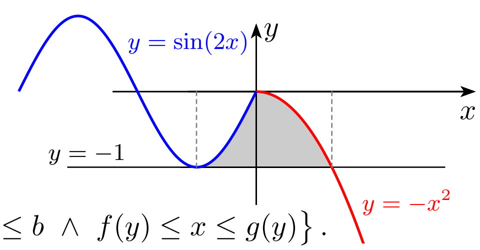
[0.5 *val.*]
$$\int \frac{e^{2x} - e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\,dx = -(1 - e^{2x})^{\frac{1}{2}} - \arcsin(e^x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

[0.5 *val.*] (b) Calcule a primitiva $\displaystyle\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{9 - 9x^2}}\,dx$.

[1.25 *val.*] 4. (a) Calcule o integral definido $\displaystyle\int_1^{27} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

[1.0 *val.*] (b) O cálculo do integral $\displaystyle\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{2}\right)dx$ requer a utilização da técnica de primitivação por partes pelo que não pode, ainda, ser determinado de forma exacta. Determine uma estimativa para o integral, recorrendo à regra dos trapézios e a uma partição uniforme em 5 sub-intervalos.

[4.75 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.



[0.5 *val.*] (a) Defina a região $\mathcal{A}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le y \le b \ \wedge \ f(y) \le x \le g(y)\}$.

[1.5 *val.*] (b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que permitam calcular a área de $\mathcal{A}$

i) em função da variável y; ii) em função da variável x.

[0.25 *val.*] (c) Analise as vantagens e as desvantagens de cada uma das expressões da alínea anterior.

[1.75 *val.*] (d) Usando integrais, indique expressões simplificadas que permitam calcular o volume da região que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo

i) Ox; ii) Oy.

[0.75 *val.*] (e) Indique, justificando, o que representa o integral $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$.

Métodos numéricos para resolução de equações

Método da bissecção: $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$ erro $\leq |x_n - x_{n-1}|$

Método de Newton: $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, $n = 1, 2, \ldots$ erro $\approx |x_n - x_{n-1}|$

Integração numérica

Regra dos trapézios: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\Big[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$

$$\text{erro} \leq \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} \times \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

Regra de Simpson: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\Big[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big]$

$$\text{erro} \leq \frac{(b-a)^5}{180\,n^4} \times \max_{[a,b]} |f''''(x)|$$

x	$\sqrt{x}$	x^2	e^x	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
−1.00	–	1.00	0.37	–	−1.00	−0.84	0.54
−0.90	–	0.81	0.41	–	−1.11	−0.78	0.62
−0.80	–	0.64	0.45	–	−1.25	−0.72	0.70
−0.75	–	0.56	0.47	–	−1.33	−0.68	0.73
−0.70	–	0.49	0.50	–	−1.43	−0.64	0.76
−0.60	–	0.36	0.55	–	−1.67	−0.56	0.83
−0.50	–	0.25	0.61	–	−2.00	−0.48	0.88
−0.40	–	0.16	0.67	–	−2.50	−0.39	0.92
−0.30	–	0.09	0.74	–	−3.33	−0.30	0.96
−0.25	–	0.06	0.78	–	−4.00	−0.25	0.97
−0.20	–	0.04	0.82	–	−5.00	−0.20	0.98
−0.10	–	0.01	0.90	–	−10.00	−0.10	1.00
0.00	0.00	0.00	1.00	–	–	0.00	1.00
0.10	0.32	0.01	1.11	−2.30	10.00	0.10	1.00
0.20	0.45	0.04	1.22	−1.61	5.00	0.20	0.98
0.25	0.50	0.06	1.28	−1.39	4.00	0.25	0.97
0.30	0.55	0.09	1.35	−1.20	3.33	0.30	0.96
0.40	0.63	0.16	1.49	−0.92	2.50	0.39	0.92
0.50	0.71	0.25	1.65	−0.69	2.00	0.48	0.88
0.60	0.77	0.36	1.82	−0.51	1.67	0.56	0.83
0.70	0.84	0.49	2.01	−0.36	1.43	0.64	0.76
0.75	0.87	0.56	2.12	−0.29	1.33	0.68	0.73
0.80	0.89	0.64	2.23	−0.22	1.25	0.72	0.70
0.90	0.95	0.81	2.46	−0.11	1.11	0.78	0.62
1.00	1.00	1.00	2.72	0.00	1.00	0.84	0.54

Coimbra Institute of Engineering
Department of Physics and Mathematics

Calculus I - Informatics Engineering - test 1

November 20th, 2019 1h45m

[2.0 *val.*] 1. (a) Consider the function $f(x) = 3 + 2\ln(x-2)$.

i) Define the inverse function f^{-1} (domain, codomain and analytical expression).

ii) Determine $f(3)$ and $f^{-1}(3)$. Comment the results.

(b) i) Perform the numerical value of $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

ii) Solve the equation $1 + \cos(2x - \pi) = \frac{1}{2}$.

[1.0 *val.*] 2. The equation $e^{x-3} = -x + 3$ has one single solution, but can not be determined using analytical techniques.

(a) Using graphical method, locate the solution.

(b) Using the interval from paragraph (a), perform 2 iterations of a numerical method (bisection or Newton) to estimate the solution. Present an upper bound for the error of this estimate.

[1.0 *val.*] 3. (a) Using indefinite integral definition, prove that

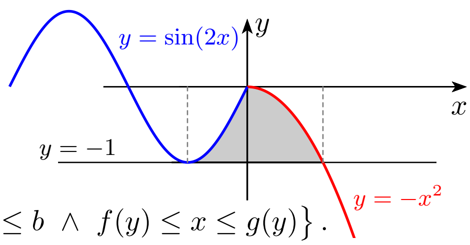
$$\int \frac{e^{2x} - e^{x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx = -(1 - e^{2x})^{\frac{1}{2}} - \arcsin(e^{x}) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Determine the indefinite integral $\displaystyle\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{9 - 9x^2}}\, dx$.

[2.25 *val.*] 4. (a) Determine the definite integral $\displaystyle\int_1^{27} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3}}\, dx$.

(b) The value of the definite integral $\displaystyle\int_1^{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx$ requires integration by parts technique so it cannot, yet, be determined exactly. Using trapezoidal rule and an uniform partition with 5 sub-intervals, determine an estimate for the definite integral.

[4.75 *val.*] 5. Consider the region $\mathcal{A}$ presented in the following figure.



(a) Define region $\mathcal{A}$ using the form $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leq y \leq b \ \wedge \ f(y) \leq x \leq g(y)\right\}$.

(b) Using definite integrals, determine simplified analytical expressions that allow to determine the area of region $\mathcal{A}$

i) using the variable y; ii) using the variable x.

(c) Analyze the advantages and disadvantages of each of the expressions of the previous paragraph.

(d) Using definite integrals, define simplified expressions that allow to determine the volume of solids obtained by rotating the region $\mathcal{A}$ about

i) x-axis; ii) y-axis.

(e) Explain, justifying, what represents the definite integral $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$.

Numerical methods for equations

Bisection method: $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$ error $\leq |x_n - x_{n-1}|$

Newton's method: $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \ldots$ error $\approx |x_n - x_{n-1}|$

Numerical integration

Trapezoidal rule: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\Big[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$

$$\text{error} \leq \frac{(b-a)^3}{12\,n^2} \times \max_{[a,b]} |f''(x)|$$

Simpson's rule: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\Big[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big]$

$$\text{error} \leq \frac{(b-a)^5}{180\,n^4} \times \max_{[a,b]} |f''''(x)|$$

x	$\sqrt{x}$	x^2	e^x	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
−1.00	–	1.00	0.37	–	−1.00	−0.84	0.54
−0.90	–	0.81	0.41	–	−1.11	−0.78	0.62
−0.80	–	0.64	0.45	–	−1.25	−0.72	0.70
−0.75	–	0.56	0.47	–	−1.33	−0.68	0.73
−0.70	–	0.49	0.50	–	−1.43	−0.64	0.76
−0.60	–	0.36	0.55	–	−1.67	−0.56	0.83
−0.50	–	0.25	0.61	–	−2.00	−0.48	0.88
−0.40	–	0.16	0.67	–	−2.50	−0.39	0.92
−0.30	–	0.09	0.74	–	−3.33	−0.30	0.96
−0.25	–	0.06	0.78	–	−4.00	−0.25	0.97
−0.20	–	0.04	0.82	–	−5.00	−0.20	0.98
−0.10	–	0.01	0.90	–	−10.00	−0.10	1.00
0.00	0.00	0.00	1.00	–	–	0.00	1.00
0.10	0.32	0.01	1.11	−2.30	10.00	0.10	1.00
0.20	0.45	0.04	1.22	−1.61	5.00	0.20	0.98
0.25	0.50	0.06	1.28	−1.39	4.00	0.25	0.97
0.30	0.55	0.09	1.35	−1.20	3.33	0.30	0.96
0.40	0.63	0.16	1.49	−0.92	2.50	0.39	0.92
0.50	0.71	0.25	1.65	−0.69	2.00	0.48	0.88
0.60	0.77	0.36	1.82	−0.51	1.67	0.56	0.83
0.70	0.84	0.49	2.01	−0.36	1.43	0.64	0.76
0.75	0.87	0.56	2.12	−0.29	1.33	0.68	0.73
0.80	0.89	0.64	2.23	−0.22	1.25	0.72	0.70
0.90	0.95	0.81	2.46	−0.11	1.11	0.78	0.62
1.00	1.00	1.00	2.72	0.00	1.00	0.84	0.54

1. (a) i) Começamos por notar que a função f é injectiva e portanto é invertível. Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D_f \;=\; CD_{f^{-1}} \;=\; ? & \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & CD_f \;=\; D_{f^{-1}} \;=\; ? \\ ? = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = y = 3 + 2\ln(x-2) \end{array}$$

O contradomínio da função inversa coincide com o domínio da função original pelo que, tendo em conta o domínio do logaritmo, tem-se

$$CD_{f^{-1}} \;=\; D_f \;=\; \big\{x \in \mathbb{R} :\; x - 2 > 0\big\} \;=\; \big\{x \in \mathbb{R} :\; x > 2\big\} \;=]2, +\infty[\,.$$

A função inversa tem expressão analítica dada por

$$\begin{aligned} y \;=\; 3 + 2\ln(x-2) \;&\Leftrightarrow\; y - 3 \;=\; 2\ln(x-2) \\ &\Leftrightarrow\; \frac{y-3}{2} \;=\; \ln(x-2) \\ &\Leftrightarrow\; e^{\frac{y-3}{2}} \;=\; x - 2 \\ &\Leftrightarrow\; 2 + e^{\frac{y-3}{2}} \;=\; x\,. \end{aligned}$$

e, consequentemente, tem domínio

$$D_{f^{-1}} \;=\; \mathbb{R}\,.$$

Tem-se então

$$\begin{array}{ccc} D_f \;=\; CD_{f^{-1}} \;=\;]2, +\infty[& \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & CD_f \;=\; D_{f^{-1}} \;=\; \mathbb{R} \\ 2 + e^{\frac{y-3}{2}} = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = y = 3 + 2\ln(x-2) \end{array}$$

ii) Tendo em conta a expressão da função $f(x)$, tem-se

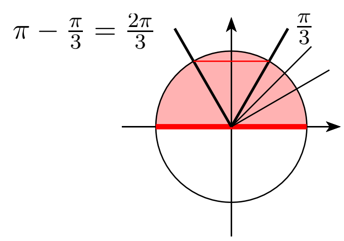
$$f(3) \;=\; 3 + 2\ln(3-2) \;=\; 3 + 2\ln(1) \;=\; 3 + 0 \;=\; 3$$

e portanto, por definição de função inversa ($y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$), tem-se também

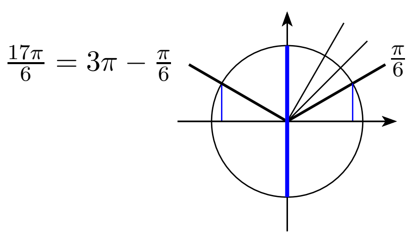
$$f^{-1}(3) \;=\; 3\,.$$

(b) i) Tendo em conta a restrição principal do cosseno, tem-se

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \;=\; \sin\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)$$



$$= \;\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)$$



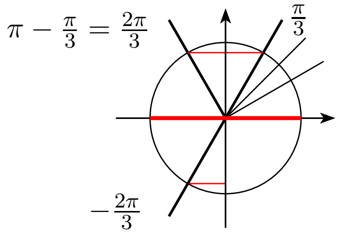
$$= \;\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \;\frac{1}{2}\,.$$

.

ii) Recorrendo ao círculo trigonométrico e aos ângulos de referência, tem-se

$$1+\cos(2x-\pi) = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \cos(2x-\pi) = -\frac{1}{2}$$



$$\Leftrightarrow\; 2x-\pi = \frac{2\pi}{3}+k\,2\pi \;\vee\; 2x-\pi = -\frac{2\pi}{3}+k\,2\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}$$

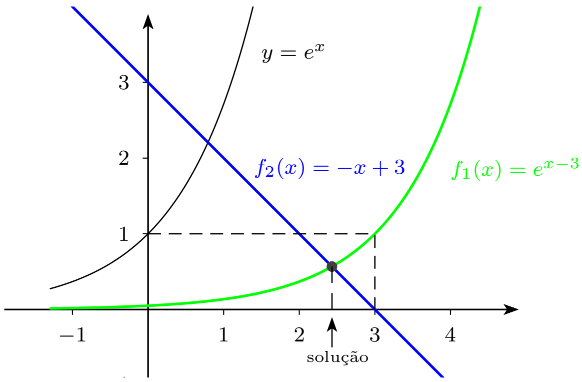
$$\Leftrightarrow\; 2x = \frac{5\pi}{3}+k\,2\pi \;\vee\; 2x = \frac{\pi}{3}+k\,2\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{5\pi}{6}+k\,\pi \;\vee\; x = \frac{\pi}{6}+k\,\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

2. (a) Tendo em conta que

$$e^{x-3} = -x+3$$

as soluções da equação correspondem às abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções $f_1(x)=e^{x-3}$ e $f_2(x)=-x+3$. Então, a solução pertence ao intervalo $[2,3]$:



(b) Tendo em conta que

$$e^{x-3} = -x+3 \;\Leftrightarrow\; e^{x-3}+x-3 = 0\,,$$

vamos considerar a função $f(x)=e^{x-3}+x-3$.

Recorrendo ao método da bissecção, tem-se

n	$[a,\,b]$	x_n	erro máximo	$f(a)$	$f(x_n)$	$f(b)$
1	$[2,\,3]$	2.5	0.5	$f(2)=e^{-1}-1\simeq -0.63$	$f(2.5)=e^{-0.5}-0.5\simeq 0.11$	$f(3)=e^{0}-0=1$
2	$[2,\,2.5]$	2.25	0.25	$f(2)\simeq -0.63$	$f(2.25)=e^{-0.75}-0.75\simeq -0.28$	$f(2.5)\simeq 0.11$

Então, $\overline{x} = 2.25$ é uma aproximação para a solução, com erro máximo 0.25.

Recorrendo ao método de Newton, tem-se $f'(x)=e^{x-3}+1$ e

n		x_n	erro
0		3	–
1	$3-\frac{f(3)}{f'(3)} = 3-\frac{e^0+0}{e^0+1} = 3-\frac{1}{2} =$	2.5	$\lvert 3-2.5\rvert = 0.5$
2	$2.5-\frac{f(2.5)}{f'(2.5)} = 2.5-\frac{e^{-0.5}-0.5}{e^{-0.5}+1} \simeq 2.5-\frac{0.61-0.5}{0.61+1} \simeq$	2.43	$\lvert 2.5-2.43\rvert = 0.07$

Então, $\overline{x} = 2.43$ é uma aproximação para a solução, com erro máximo 0.07.

3. (a) Basta notar que

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\Big(-(1-e^{2x})^{\frac{1}{2}}-\arcsin(e^x)+c\Big)'}_{R4+R3} \\
&= -\underbrace{\Big((1-e^{2x})^{\frac{1}{2}}\Big)'}_{R7}-\underbrace{\Big(\arcsin(e^x)\Big)'}_{R19}+\underbrace{(c)'}_{R1} \\
&= -\frac{1}{2}(1-e^{2x})^{-\frac{1}{2}}\underbrace{\Big(1-e^{2x}\Big)'}_{R4+R3}-\frac{\overbrace{(e^x)'}^{R9}}{\sqrt{1-(e^x)^2}}+0 \\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-e^{2x})^{\frac{1}{2}}}\Big(\underbrace{(1)'}_{R1}-\underbrace{(e^{2x})'}_{R9}\Big)-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\Big(0-2\,e^{2x}\Big)-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \\
&= \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \\
&= \frac{e^{2x}-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

(b) Tem-se

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{9-9x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{9\,(1-x^2)}}\arcsin(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{9}}\int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)\,dx}_{R2} \\
&= \frac{1}{3}\,\frac{\big(\arcsin(x)\big)^2}{2}+c = \frac{1}{6}\,\arcsin^2(x)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

4. (a) Tem-se

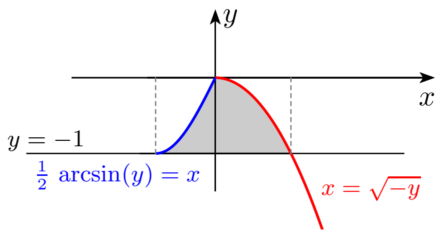
$$
\begin{aligned}
\int_1^{27}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3}}\,dx &= \int_1^{27}\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx \\
&= \int_1^{27}\frac{1}{x}+x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \int_1^{27}\underbrace{\frac{1}{x}}_{R5}\,dx+\int_1^{27}\underbrace{x^{-\frac{7}{6}}\cdot 1}_{R2}\,dx \\
&= \left[\ln|x|+\frac{x^{-\frac{1}{6}}}{-\frac{1}{6}}\right]_1^{27} \\
&= \ln(27)-6\,\frac{1}{\sqrt[6]{27}}-\Big(\ln(1)-6\,\frac{1}{\sqrt[6]{1}}\Big) \\
&= \ln(27)-\frac{6}{\sqrt{3}}+6\,.
\end{aligned}
$$

(b) Considerando a regra dos trapézios e uma partição uniforme do intervalo $[1,2]$ em 5 subintervalos, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \underbrace{\ln\Big(\frac{x}{2}\Big)}_{f(x)}\,dx &\simeq \frac{0.2}{2}\Big(f(1)+2\,f(1.2)+2\,f(1.4)+2\,f(1.6)+2\,f(1.8)+f(2)\Big) \\
&= 0.1\Big(\ln(0.5)+2\,\ln(0.6)+2\,\ln(0.7)+2\,\ln(0.8)+2\,\ln(0.9)+\ln(1)\Big) \\
&\simeq 0.1\Big(-0.69+2\times(-0.51)+2\times(-0.36)+2\times(-0.22)+2\times(-0.11)+0\Big) \\
&= 0.1\Big(-0.69-1.02-0.72-0.44-0.22\Big) \\
&= -0.309
\end{aligned}
$$

5. (a) Comecemos por explicitar as funções que delimitam a região:

- $y = \sin(2x) \;\Leftrightarrow\; \arcsin(y) = 2x \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\arcsin(y) = x\,,$ na restrição principal!
- $y = -x^2 \;\Leftrightarrow\; -y = x^2 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{-y}$



Tem-se então

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -1 \le y \le 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2}\arcsin(y) \le x \le \sqrt{-y}\right\}.$$

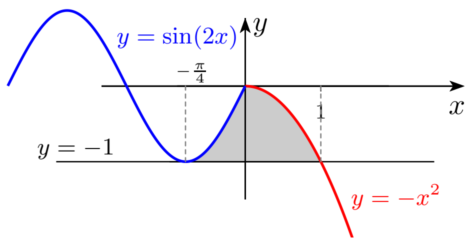
(b) i. Atendendo à alínea anterior, tem-se imediatamente

$$\text{Área}(\mathcal{A}) \;=\; \int_{-1}^{0} \underbrace{\sqrt{-y}}_{f_{sup}} - \underbrace{\frac{1}{2}\arcsin(y)}_{f_{inf}}\, dy$$

ii. Comecemos por determinar os valores dos extremos de integração:

- $\sin(2x) = -1 \;\Leftrightarrow\; 2x = -\frac{\pi}{2} + k\,2\pi \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{\pi}{4} + k\,\pi\,,\; k \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{4}$
- $-x^2 = -1 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 1$

Atendendo à representação dada, tem-se então

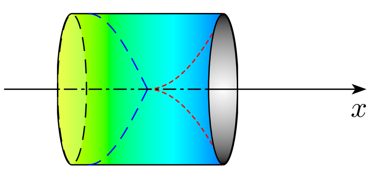


$$\begin{aligned}\text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \underbrace{\sin(2x)}_{f_{sup}} - \underbrace{(-1)}_{f_{inf}}\, dx + \int_{0}^{1} \underbrace{-x^2}_{f_{sup}} - \underbrace{(-1)}_{f_{inf}}\, dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin(2x) + 1\, dx + \int_{0}^{1} -x^2 + 1\, dx\end{aligned}$$

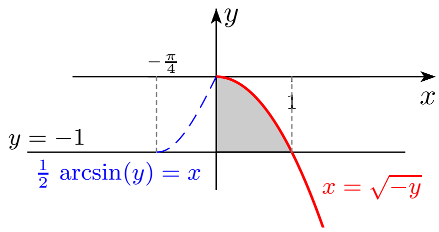
(c) A expressão da alínea b(i) tem a vantagem de envolver apenas um integral, mas tem a desvantagem de esse integral envolver uma função que não tem primitiva imediata (o arco seno). A expressão da alínea b(ii) tem a desvantagem de envolver dois integrais, mas tem a vantagem de todas as funções desses integrais admitirem primitivas imediatas.

(d) i. O volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Ox é dado por

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{A}_{Ox}) &= \pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \Big(\underbrace{-1}_{R_{ext}}\Big)^2 - \Big(\underbrace{\sin(2x)}_{R_{int}}\Big)^2\, dx + \pi\int_{0}^{1} \Big(\underbrace{-1}_{R_{ext}}\Big)^2 - \Big(\underbrace{-x^2}_{R_{int}}\Big)^2\, dx \\ &= \pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} 1 - \sin^2(2x)\, dx + \pi\int_{0}^{1} 1 - x^4\, dx\,.\end{aligned}$$

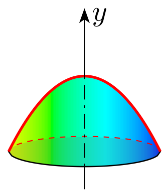


ii. Na rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy o sólido gerado pela parte esquerda vai ficar embutido no sólido gerado pela parte direita, pelo que temos que considerar apenas a rotação desta última:

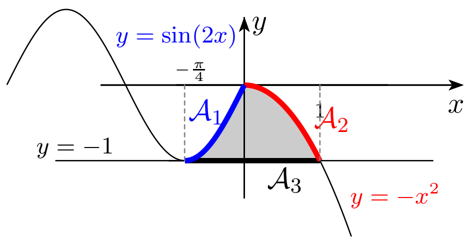


Assim,

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy}) &= \pi\int_{-1}^{0}\Big(\underbrace{\sqrt{-y}}_{R_{ext}}\Big)^2-\Big(\underbrace{0}_{R_{int}}\Big)^2\,dy\\ &= \pi\int_{-1}^{0}-y\,dy\,.\end{aligned}$$



(e) O integral representa o comprimento da fronteira $\mathcal{A}_2$:



$$\text{Comprimento}(\mathcal{A}_2) \;=\; \int_0^1\sqrt{1+\big[(-x^2)'\big]^2}\,dx \;=\; \int_0^1\sqrt{1+\big[-2x\big]^2}\,dx \;=\; \int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx\,.$$