Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA – PÓS LABORAL

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Relatório Atividade 1

Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias e Problemas de Valor Inicial através de Métodos Numéricos

Rafael Filipe Martins Alves | 2014013189

Coimbra, 03 de Maio de 2020

ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO

Este relatório tem como objetivo mostrar passo a passo a realização do trabalho da Atividade 1 (métodos numéricos para resolução de EDO/PVI). Para procedermos à execução do mesmo usamos a ferramenta fundamental, como ambiente de desenvolvimento, a aplicação MATLAB.

Numa primeira fase, vamos começar a abordar a definição de PVI (Problema de Valor Inicial), e posteriormente analisaremos as fórmulas e os algoritmos dos diferentes métodos de resolução de PVI abordados.

Iremos apresentar, ao longo do desenvolvimento desta atividade, exemplos de aplicações e os respetivos testes dos métodos analisados e alguns exercícios resolvidos com a aplicação desenvolvida.

1.1 ENUNCIADO DA ACTIVIDADE PROPOSTA

Pretende-se com esta atividade assimilar estratégias e técnicas para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias e Problemas de Valor Inicial, através de métodos numéricos.

Para tal, é pedido que seja desenvolvido um programa em linguagem MATLAB que aplique as técnicas lecionadas na unidade curricular de AM2 (Análise de Matemática 2).

Os métodos que iremos implementar são:

- Euler
- Euler Melhorado
- Runge-Kutta de Ordem 2
- Runge-Kutta de Ordem 4
- Utilização da função ODE45
- Adams (Pesquisa de outro método)

A aplicação deverá ser implementada através de uma interface de texto e de uma GUI, ambas devem seguir as diretrizes ditadas pelo docente da disciplina.

1.2 DEFINIÇÃO DE PVI

Teoricamente existe uma resolução analítica de um PVI (Problema de Valor Inicial), normalmente a solução é de difícil obtenção, por isso, utilizam-se métodos numéricos.

Seja *y* uma função de x e n um número inteiro positivo, então uma relação de igualdade que envolva $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ é chamada uma equação diferencial ordinária.

Uma função *f* é solução de uma equação diferencial se a substituição de *y* por *f* resulta em uma identidade para todo *x* em algum intervalo.

Associados a $y(n) = f(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, podem existir condições cujo número coincide com a ordem da equação diferencial ordinária. Se tais condições se referem a um único x, tem-se um Problema de Valor Inicial – PVI.

$$\boxed{\begin{aligned} &y' = f(ti, yi) \\ &y(a) = ya \\ &t \in [a, b] \end{aligned}}$$

2 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE PVI

2.1 MÉTODO DE EULER

2.1.1 FÓRMULAS

$$y_i + 1 = y_i + hf(t_i, y_i), i = 0,1,2 \ldots., n - 1$$

2.1.2 ALGORITMO/FUNÇÃO

```
h := (b-a)/n
t := a:h:b
y(1) := y0
para i := 1 até n-1
y(i+1) := y(i) + h * f(t(i), y(i))
```

2.2 MÉTODO DE EULER MELHORADO OU MODIFICADO

2.2.1 FÓRMULAS

$$y_{(n+1)} = y_n + hf(t_i, y_i)$$

$$y_{(n+1)} = y_n + h\frac{f(t_i, y_i) + f\big(t_{(n+1)}, y_{(n+1)}\big)}{2}$$

2.2.2 ALGORITMO/FUNÇÃO

```
h = (b-a)/n;
t = a:h:b;
y = zeros(1,n+1);
y(1) = y0;
para i=1:n
    y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i));
```

2.3 MÉTODO DE RK2

2.3.1 FÓRMULAS

$$k1 = hf(t_i, y_i)$$

$$k2 = hf(t_i + 1, y_i + k1)$$

$$y_i + 1 = y_i + \frac{1}{2}(k1 + k2), \quad i = 0,1,2, \dots, n - 1$$

2.3.2 ALGORITMO/FUNÇÃO

```
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=y0;
para i=1:n
    k1=h*f(t(i),y(i));
    k2=h*f(t(i+1),y(i)+k1);
    y(i+1)=y(i)+(k1+k2)/2;
```

2.4 MÉTODO DE RK4

2.4.1 FÓRMULAS

$$k1 = hf(t_i, y_i);$$

$$k2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k1\right);$$

$$k3 = hf(t_i + \frac{1}{2}, y_i + \frac{1}{2}\ k2);$$

$$k4 = hf(t_i + h, y_i + k3)$$

$$y_i + 1 = y_i + \frac{1}{6}(k1 + 2k2 + 2k3 + k4), \quad i = 0,1,2,\dots,n-1$$

2.4.2 ALGORITMO/FUNÇÃO

```
h=(b-a)/n;
t=a:h:b;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=y0;
para i=1:n
    k1=h*(f(t(i), y(i)));
    k2=h*f(t(i)+ h/2,y(i)+(1/2*k1));
    k3=h*f(t(i)+ h/2,y(i)+(1/2*k2));
    k4=h*f(t(i)+ h,y(i)+k3);
    y(i+1)=y(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
```

2.5 FUNÇÃO ODE45 DO MATLAB

A função ODE45 é uma função utilizada pelo MATLAB para a resolução numérica de equações diferencias ordinária (EDO) com valores iniciais.

Para implementar este algoritmo, é necessário indicar a função a utilizar, o intervalo de tempo e o valor inicial.

```
function y=N_ODE45(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/n;
tspan=a:h:b;
[t,y] = ode45(f,tspan,y0);
%Como nao vamos precisar do valor de t neste caso
%podemos substituir o t pelo ~ fica:

    [~,y]=ode45(f,tspan,y
```

Description:

[T,Y] = ode45(odefun,tspan,y0) with tspan = [t0 tf] integrates the system of differential equations y′ = f(t,y)

from time t0 to tf with initial conditions y0. The first input argument, odefun, is a function handle. The function,

f = odefun(t,y), for a scalar t and a column vector y, must return a column vector f corresponding to f(t,y).

Each row in the solution array Y corresponds to a time returned in column vector T. To obtain solutions at the

specific times t0, t1,...,tf(all increasing or all decreasing), use tspan = [t0,t1,...,tf].

Fonte Matlab

3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E TESTE DOS MÉTODOS

3.1 EXERCÍCIO 4 DO TESTE A DE 2015/2016

NOTA: Não consegui concluir algumas alíneas.

3.1.1 PVI - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE 1ª ORDEM E CONDIÇÕES INICIAIS

PVI - Equação Diferencial de 1ª ordem e Condições Iniciais:

$y' = -2 * t * y$, $y(0) = 3$

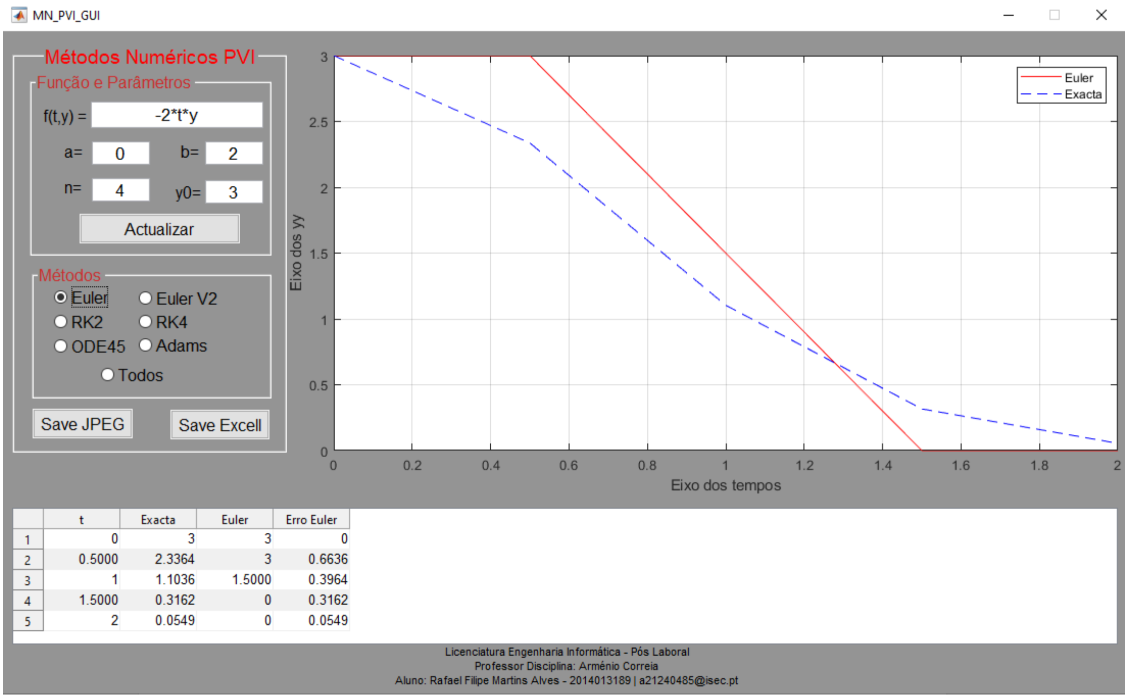
$\mathrm{a} = 0$

$\mathrm{b} = 2$

$\mathrm{n} = 4$

$h = 0{,}5$

3.1.2 EXEMPLOS DE OUTPUT - GUI COM GRÁFICO E TABELA



3.2 PROBLEMA DE APLICAÇÃO

3.2.1 MODELAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Modelação matemática do problema:

$$m\ dV/dt=mg-(kv)^2,k>0$$

$$y'=f[t,y]$$

$$t\in[a,b]$$

$$y(a)=y_0$$

$$v=y$$

$$my'=mg-ky^2 \Leftrightarrow y'=g-k/m\ y^2$$

Substituindo pelos valores:

$$y'=32-0{,}125/5\ y^2$$

$$t\in[0,5]$$

$$y(0)=0$$

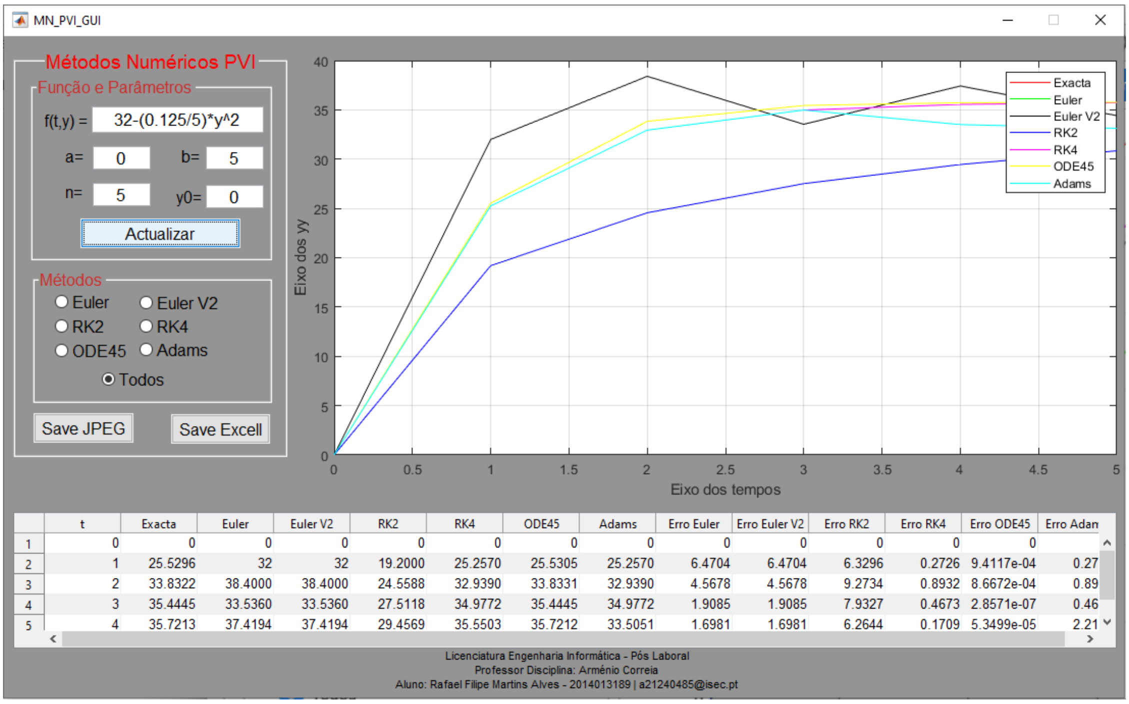
$$dA/dt=A(2{,}128-0{,}0432A)$$

$$y^{\prime}=f[t,y]$$
$$t \in [a,b]$$
$$y(a)=y_0$$
$$A=y$$

Substituindo os valores:

$$y^{\prime}=y(2{,}128-0{,}0432y)$$
$$t \in [0,5]$$
$$y(0)=0{,}24$$

3.2.2 RESOLUÇÃO ATRAVÉS DA APLICAÇÃO CRIADA



Alínea f)

```
function y = NEuler(f,a,b,n,y0)
h=(b-a)/_n__;
t=a:_h_:b;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=_y0__;
for i=1:n
y(i+1)=__y(i)____+__h__*f(t(i),y(i));
end
```

```
function y = NRK2(f,a,b,n,y0)
h=___(b-a)/n___________;
t=____a:h:b__________;
y=___zeros(1,n+1)___________;
y(1)=___y0__;
for i=_1__:__n_,
      k1=____h*f(t(i),y(i))____________________;
      k2=_____h*f(t(i+1),y(i)+k1___________________;
      y(_i+1__)=___y(i)+(k1+k2)/2_________________;
end
```

CONCLUSÃO

Concluindo a atividade apresento agora algumas considerações finais sobre o trabalho realizado.

Ao longo da sua execução verifiquei as vantagens reais da utilização de métodos numéricos como ferramenta fundamental e indispensável para a resolução de ***Problema de Valores Iniciais*** de uma forma rápida e eficaz, reforçando assim a ideia de que a criação de algoritmos que permitam resolver este e outros tipos de problema, são uma constante na vida de um/a Engenheiro/a.

Durante o desenvolvimento deste trabalho surgiram algumas dificuldades na execução em algumas tarefas, tanto a nível de programação e adaptação no ***MATLAB*** como na correta interpretação das questões apresentadas. Contudo, com a ajuda da página da disciplina ("https://moodle.isec.pt/moodle/course/view.php?id=8003") e os fóruns de ajuda os problemas encontrados foram concluídos com sucesso.