Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência 1 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

23 de novembro de 2016 Duração: 1h30m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

1. Considere a função $f(x) = \pi\sqrt{2}\csc\left(\frac{\pi}{4}\right) + \arcsin(4x-1)$.

[1.25 *val.*] (a) Calcule o valor de $f\left(\frac{1}{8}\right)$.

[1.0 *val.*] (b) Resolva a equação $f(x) = \frac{3\pi}{2}$.

[1.75 *val.*] (c) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

[1.0 *val.*] 2. Recorrendo à definição de primitiva, mostre que $\displaystyle\int \frac{1-x}{x^2+x}\,dx = \ln|x| - 2\ln|x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

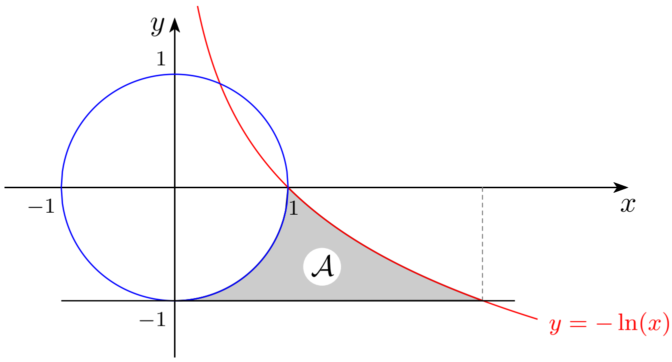
[1.5 *val.*] 3. Calcule a primitiva $\displaystyle\int \frac{1+3x}{1+4x^2}\,dx$.

[2.0 *val.*] 4. Calcule o valor do integral definido $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

[2.5 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$ representada na figura seguinte. Determine as expressões algébricas das curvas representadas e, usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular a área da região $\mathcal{A}$

a) em função da variável x;

b) em função da variável y.



6. Considere a região $\mathcal{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2 - 2 \ \wedge\ x \leq -y^2 \ \wedge\ y \geq x\right\}$.

[1.0 *val.*] (a) Represente graficamente a região $\mathcal{B}$.

[2.5 *val.*] (b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam os volumes dos sólidos que se obtêm pela rotação da região $\mathcal{B}$ em torno do eixo

(i) Ox;

(ii) Oy.

[1.5 *val.*] (c) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro de $\mathcal{B}$.

[1.5 *val.*] 7. (a) Justifique que o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ é impróprio e determine a sua natureza.

[2.5 *val.*] (b) Relativamente aos integrais $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$, determine o valor lógico das seguintes proposições:

i) O integral definido é igual a $\ln(2)$.

ii) O integral impróprio é convergente.

Coimbra Institute of Engineering
Department of Physics and Mathematics

Calculus I - Informatics Engineering

November 23rd, 2016 1h30m

---

1. Considerer the function $f(x) = \pi\sqrt{2}\csc\left(\frac{\pi}{4}\right) + \arcsin(4x-1)$.

[1.25 *val.*] (a) Determine the value of $f\left(\frac{1}{8}\right)$.

[1.0 *val.*] (b) Solve the equation $f(x) = \frac{3\pi}{2}$.

[1.75 *val.*] (c) Characterize the inverse function f^{-1} (domain, codomain and analytical expression).

[1.0 *val.*] 2. Using the definition of indefinite integral (or anti-derivative), prove that

$$\int \frac{1-x}{x^2+x}\,dx = \ln|x| - 2\ln|x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

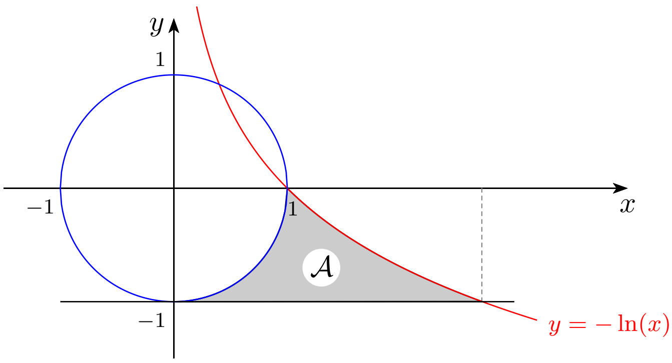
[1.5 *val.*] 3. Using integration techniques, determine $\displaystyle\int \frac{1+3x}{1+4x^2}\,dx$.

[2.0 *val.*] 4. Determine the value of the definite integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

[2.5 *val.*] 5. Consider the region $\mathcal{A}$ represented in the following figure. Determine the analytical expressions of all the curves and, using integrals, define simplified expressions that allow to calculate the area of region $\mathcal{A}$

a) using the variable x;

b) using the variable y.



6. Consider the region $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2 - 2 \ \wedge\ x \leq -y^2 \ \wedge\ y \geq x\}$.

[1.0 *val.*] (a) Perform a graphical representation of region $\mathcal{B}$.

[2.5 *val.*] (b) Using integrals, define simplified expressions that allow to calculate the volume of solids obtained by rotating the region $\mathcal{A}$ about

i. x-axis;

ii. y-axis.

[1.5 *val.*] (c) Using integrals, define a simplified expression that allows to calculate perimeter of region $\mathcal{B}$.

[1.5 *val.*] 7. (a) Identify and calculate the improper integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

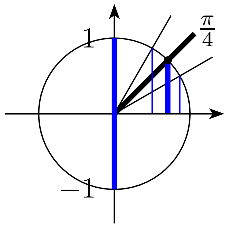
[2.5 *val.*] (b) For the integrals $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$ and $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx$, say (and justify) whether it is true or false:

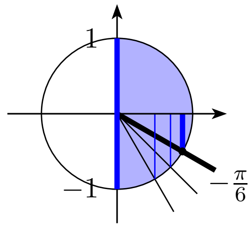
i) The value of the definite integral is $\ln(2)$.

ii) The improper integral is convergent.

1. (a) Tendo em conta a definição de cossecante e o contradomínio da função arco seno, tem-se

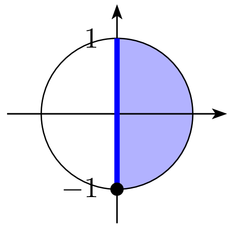
$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \arcsin\left(\frac{4}{8}-1\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{11\pi}{6}$$





(b) Tendo em conta o resultado de $\pi\sqrt{2}\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$ já calculado na alínea (a) e o domínio da função arco seno, tem-se

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{3\pi}{2} &\Leftrightarrow 2\pi + \arcsin(4x-1) = \frac{3\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \arcsin(4x-1) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 4x-1 = -1 \\ &\Leftrightarrow x = 0\,. \end{aligned}$$

(c) Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} ? & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\longleftrightarrow}} & ? \\ ? = x & \longleftrightarrow & y = 2\pi + \arcsin(4x-1) \end{array}$$

O domínio de f é definido a partir do domínio da função arco seno, pelo que

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} :\ -1 \leq 4x-1 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} :\ 0 \leq 4x \leq 2\} = \left[0,\ \frac{1}{2}\right].$$

A função inversa tem expressão analítica definida por

$$\begin{aligned} y = 2\pi + \arcsin(4x-1) &\Leftrightarrow y - 2\pi = \arcsin(4x-1) \\ &\overset{\text{na restrição!}}{\Leftrightarrow} \sin(y-2\pi) = 4x-1 \\ &\Leftrightarrow 1 + \sin(y-2\pi) = 4x \\ &\Leftrightarrow \frac{1+\sin(y-2\pi)}{4} = x\,. \end{aligned}$$

Finalmente, tendo em conta a expressão da função inversa e a restrição principal da função seno, tem-se

$$D_{f^{-1}} = \left\{y \in \mathbb{R} :\ -\frac{\pi}{2} \leq y - 2\pi \leq \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{y \in \mathbb{R} :\ \frac{3\pi}{2} \leq y \leq \frac{5\pi}{2}\right\} = \left[\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}\right],$$

pelo que

$$\begin{array}{ccc} \left[0,\ \frac{1}{2}\right] & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\longleftrightarrow}} & \left[\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}\right] \\ \frac{1+\sin(y-2\pi)}{4} = x & \longleftrightarrow & y = 2\pi + \arcsin(4x-1) \end{array}$$

2. De acordo com a definição de primitiva, basta mostrar que

$$\Big(\ln|x| - 2\ln|x+1| + c\Big)' = \frac{1-x}{x^2+x}\,.$$

Então

$$\begin{aligned}\Big(\ln|x| - 2\ln|x+1| + c\Big)' &= (\ln|x|)' - 2(\ln|x+1|)' + 0 = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\cdot(x+1)} - 2\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\cdot x} \\ &= \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{2x}{x(x+1)} = \frac{x+1-2x}{x^2+x} = \frac{1-x}{x^2+x}\,.\end{aligned}$$

3. Tem-se

$$\begin{aligned}\int \frac{1+3x}{1+4x^2}\,dx &= \int \Big(\frac{1}{1+4x^2} + \frac{3x}{1+4x^2}\Big)\,dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx + 3\int \frac{x}{1+4x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2}{1+(2x)^2}}_{R19}\,dx + \frac{3}{8}\int \underbrace{\frac{8x}{1+4x^2}}_{R5}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\arctan(2x) + \frac{3}{8}\ln|1+4x^2| + c\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

4. Tem-se

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int_1^2 \Big(\frac{1}{x^{\frac13}} + \frac{x^{\frac12}}{x^{\frac13}}\Big)\,dx = \int_1^2 \underbrace{x^{-\frac13}\cdot 1}_{R2}\,dx + \int_1^2 x^{\frac12-\frac13}\,dx = \left[\frac{x^{\frac23}}{\frac23}\right]_1^2 + \int_1^2 \underbrace{x^{\frac16}\cdot 1}_{R2}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\Big(\sqrt[3]{4}-1\Big) + \left[\frac{x^{\frac76}}{\frac76}\right]_1^2 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{3}{2} + \frac{6}{7}\Big(\sqrt[6]{2^7}-1\Big) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{3}{2} + \frac{12}{7}\sqrt[6]{2} - \frac{6}{7}\,.\end{aligned}$$

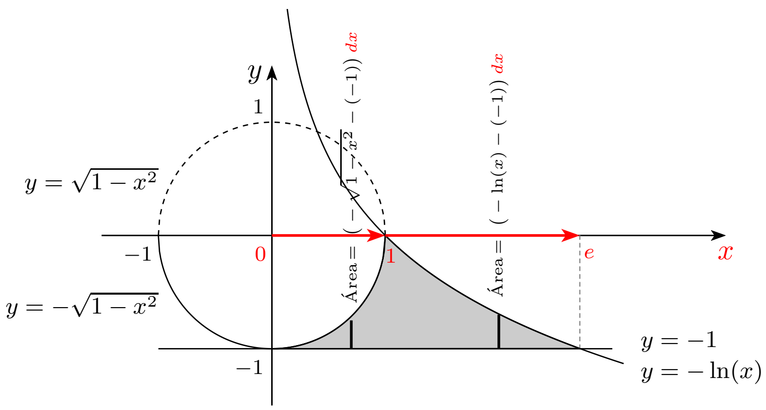
5. Começamos por notar que, além da curva identificada na figura, a região é limitada pela circunferência $x^2+y^2=1$ e pela recta $y=-1$.

   (a) Começamos por descrever as curvas que limitam a região, em função da variável x. Nesse caso, tem-se

$$i)\quad x^2+y^2=1 \;\Leftrightarrow\; y = \pm\sqrt{1-x^2}\,,$$

$$ii)\quad y = -\ln(x)\,,$$

   e então



   pelo que

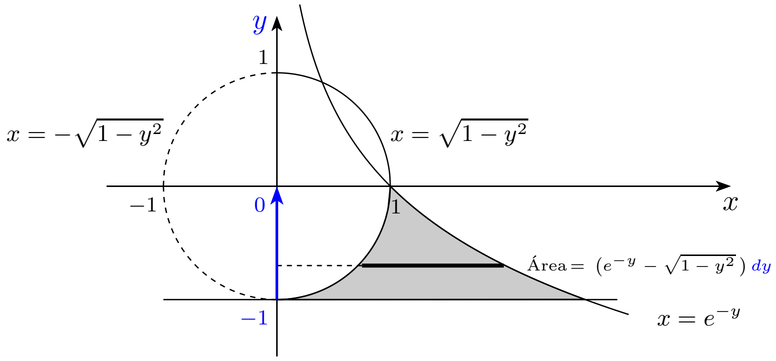
$$\begin{aligned}\text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_0^1 \big(-\sqrt{1-x^2}-(-1)\big)\,dx + \int_1^e \big(-\ln(x)-(-1)\big)\,dx \\ &= \int_0^1 \big(1-\sqrt{1-x^2}\,\big)\,dx + \int_1^e \big(1-\ln x\big)\,dx\,.\end{aligned}$$

(b) Para calcular a área em função da variável y precisamos de descrever as curvas em função dessa variável. Nesse caso, tem-se

$$i) \quad x^2+y^2=1 \;\Leftrightarrow\; x \;=\; \pm\sqrt{1-y^2}\,,$$

$$ii) \quad y=-\ln(x) \;\Leftrightarrow\; -y=\ln(x) \;\Leftrightarrow\; x=e^{-y}\,,$$

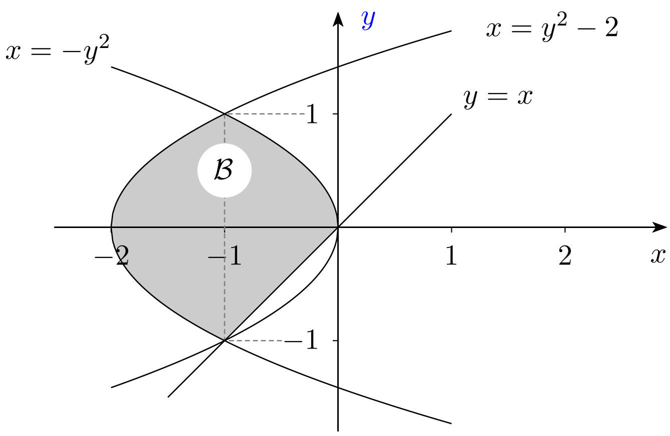
pelo que



e então a área é dada por

$$\text{Área}(\mathcal{A}) \;=\; \int_{-1}^{0}\left(e^{-y}-\sqrt{1-y^2}\right)dy\,.$$

6. (a) A região $\mathcal{B}$ tem a seguinte representação.

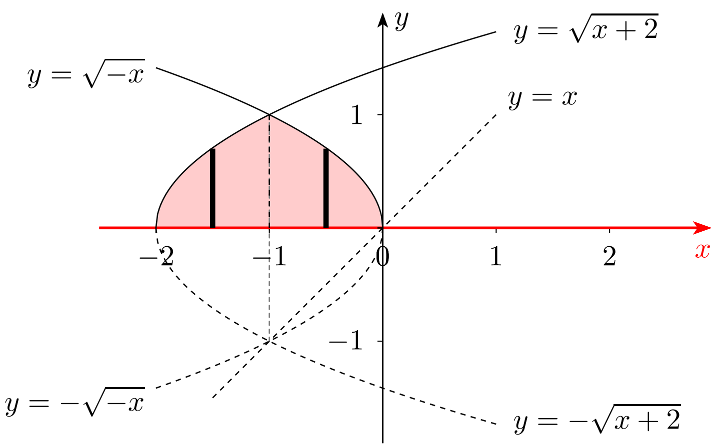


(b) i. Começamos por notar que as curvas dadas são definidas, em função de y, pelas seguintes expressões:

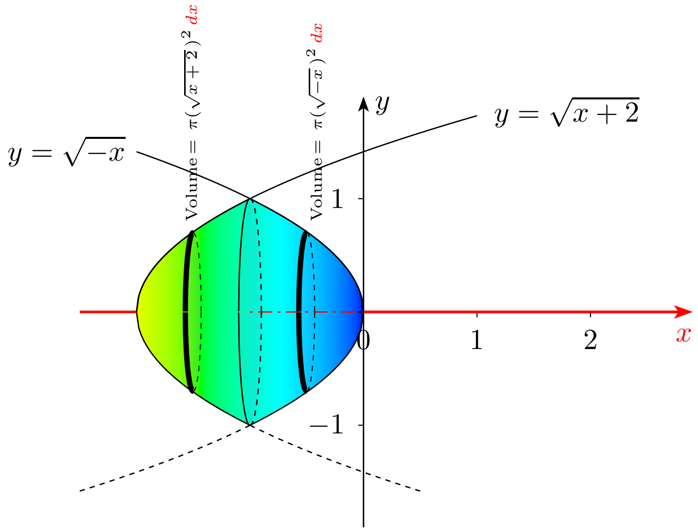
$$i) \quad x \;=\; y^2-2 \;\Leftrightarrow\; x+2 \;=\; y^2 \;\Leftrightarrow=\; y=\pm\sqrt{x+2}$$

$$ii) \quad x \;=\; -y^2 \;\Leftrightarrow\; -x \;=\; y^2 \;\Leftrightarrow\; y \;=\; \pm\sqrt{-x}$$

Na rotação da região em torno do eixo Ox é necessário ter em conta a simetria da parte esquerda da figura (relativamente ao eixo Ox) e ainda o facto de a parte superior direita se sobrepor à parte inferior direita aquando da rotação, pelo que vamos apenas considerar o efeito da rotação da região representada na figura seguinte.



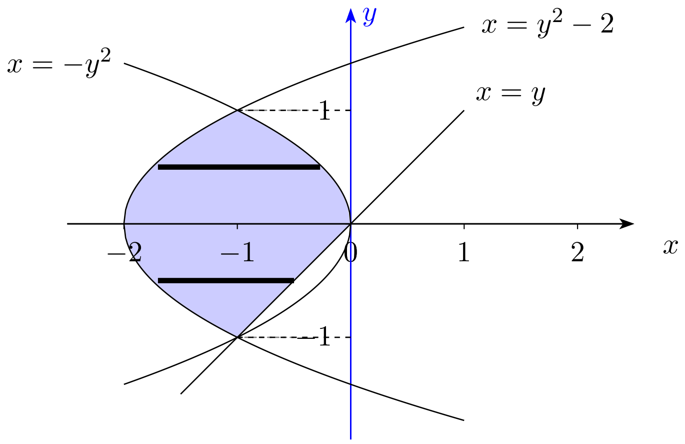
O sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{B}$ em torno do eixo Ox, é o representado na figura seguinte



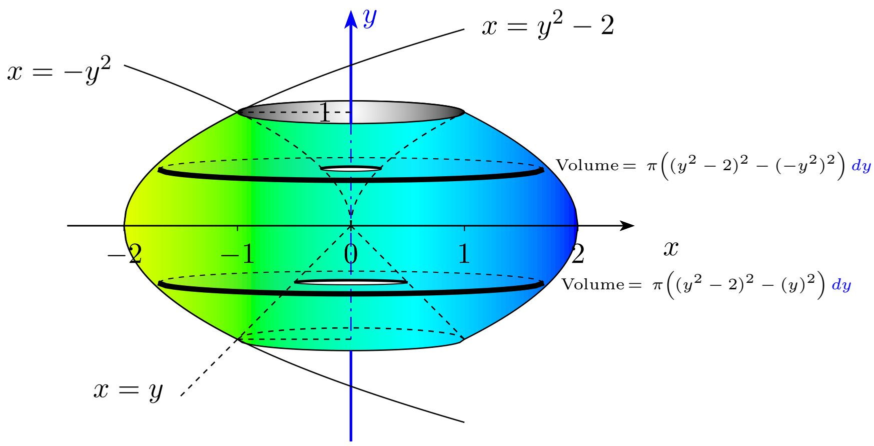
e tem volume dado por

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(\mathcal{A}_{Ox}) &= \int_{-2}^{-1} \pi \Big(\underbrace{\sqrt{x+2}}_{R_{\text{ext}}} \Big)^2 \, dx + \int_{-1}^{0} \pi \, (\underbrace{\sqrt{-x}}_{R_{\text{ext}}})^2 \, dx \\
&= \pi \int_{-2}^{-1} (x+2)\, dx + \pi \int_{-1}^{0} -x \, dx \, .
\end{aligned}$$

ii. Na rotação da região em torno do eixo Oy consideraremos o efeito da rotação de toda a região $\mathcal{B}$, uma vez que não existem sobreposições ou simetrias relativamente a esse eixo,



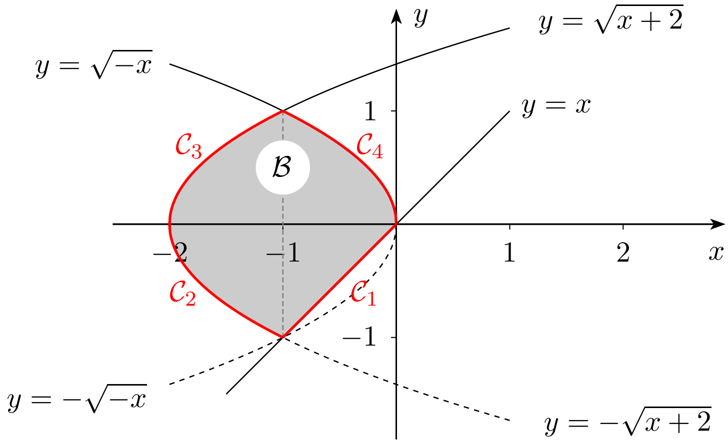
Neste caso, o sólido que se obtém é o representado na figura seguinte



e tem volume

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy}) &= \int_{-1}^{0} \pi \left((\underbrace{y^2-2}_{R_{\text{ext}}})^2 - (\underbrace{y}_{R_{\text{int}}})^2 \right) dy + \int_{0}^{1} \pi \left((\underbrace{y^2-2}_{R_{\text{ext}}})^2 - (\underbrace{-y^2}_{R_{\text{int}}})^2 \right) dy \\ &= \pi \int_{-1}^{0} \left(y^4 - 4y^2 + 4 - y^2 \right) dy + \pi \int_{0}^{1} \left(y^4 - 4y^2 + 4 - y^4 \right) dy\,.\end{aligned}$$

(c) O perímetro da região $\mathcal{B}$ é dado pela soma dos comprimentos das linhas que delimitam a região, isto é, pela soma dos comprimentos das seguintes quatro curvas:



Por simetria é fácil de intuir que

$$\text{Comprimento}(\mathcal{C}_2) = \text{Comprimento}(\mathcal{C}_3) = \text{Comprimento}(\mathcal{C}_4)$$

pelo que

$$\begin{aligned}\text{Perímetro}(\mathcal{B}) &= \text{Comprimento}(\mathcal{C}_1) + 3\,\text{Comprimento}(\mathcal{C}_2) \\ &= \sqrt{1^2+1^2} + \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{x+2}\right)' \right)^2}\, dx \\ &= \sqrt{2} + \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right)^2}\, dx \\ &= \sqrt{2} + \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + \frac{1}{4(x+2)}}\, dx\,.\end{aligned}$$

7. (a) Começamos por notar que o domínio de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ é dado por

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} :\ \sqrt{x^3} \neq 0\ \wedge\ x^3 \geq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} :\ x^3 \neq 0\ \wedge\ x \geq 0 \right\} =]0, +\infty[\,.$$

Note-se ainda que $f(x)$ é contínua em D_f pois é a composição de funções contínuas. Como o intervalo de integração $[1, +\infty[$ é um subconjunto de D_f mas não é limitado, então o integral é impróprio de primeira espécie. Assim,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{1}^{t} \underbrace{x^{-\frac{3}{2}} \cdot 1}_{R2}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_1^t = \lim_{t \to +\infty} -2\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}}}_{\to 0} - 1 \Big) = 2\,,$$

pelo que o integral é convergente.

(b) Começamos por determinar o domínio da função $f(x) = \tan x$:

$$D_f = \left\{x \in \mathrm{I\!R} : x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Note-se ainda que a função é contínua em D_f (função trigonométrica).

i) O integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx$ é definido porque o intervalo de integração $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ é um subconjunto de D_f e é limitado. Neste caso, tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| + \ln|\cos(0)| \\ &= -\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) + \underbrace{\ln(1)}_{=0} = -\big(\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(2)\big) = \ln(2)\,,\end{aligned}$$

pelo que a afirmação é verdadeira.

ii) O integral (ii) é impróprio de 2ª espécie, porque o intervalo de integração $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (não é um subconjunto de D_f, pois $x = \frac{\pi}{2}$ pertence ao intervalo mas não pertence ao domínio de f) é limitado mas f não é limitada em $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx &= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} -\int_0^{t} \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} -\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{t} \\ &= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} -\Big(\underbrace{\ln|\underbrace{\cos t}_{\to 0^+}|}_{-\infty} - \underbrace{\ln|\underbrace{\cos(0)}_{=1}|}_{=0}\Big) = +\infty\,,\end{aligned}$$

pelo que o integral é divergente e portanto a afirmação é falsa.