
Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

1. Considere a função $f(x) = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\cos(2x - \pi)$.

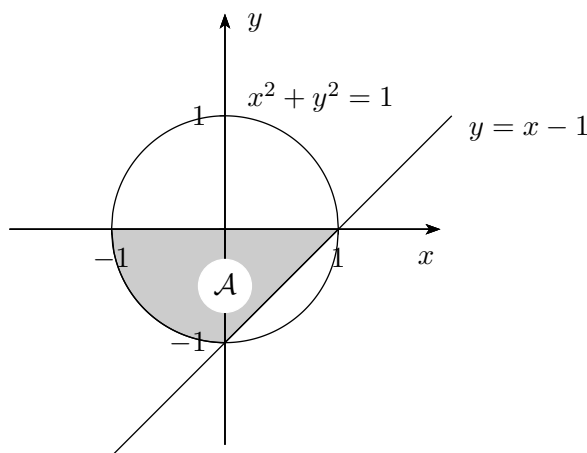
[1.0 val.] (a) Calcule o valor de $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

[0.75 val.] (b) Resolva a equação $f(x) = 0$.

[1.5 val.] (c) Caracterize a função inversa de f , indicando domínio, contradomínio e expressão analítica.

[0.75 val.] (d) Resolva, caso seja possível, a equação $\pi - \arcsin(x - 1) = 0$.

2. Considere a região \mathcal{A} representada na figura seguinte:



[1.0 val.] (a) Identifique, justificando, a região \mathcal{A} na forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \wedge f(y) \leq x \leq g(y)\}$.

[1.5 val.] (b) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular a área de \mathcal{A} .

[2.5 val.] (c) Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular os volumes dos seguintes sólidos de revolução que se obtêm a partir da rotação da região \mathcal{A} em torno

i. do eixo Ox ;

ii. do eixo Oy .

3. Considere a região $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 1 \geq -x^2 \wedge y \leq e^{-x} \wedge -1 \leq x \leq 0\}$.

[1.0 val.] (a) Represente graficamente a região \mathcal{B} .

[2.5 val.] (b) Usando integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular a área de \mathcal{B}

i) em função da variável x ;

ii) em função da variável y .

[1.5 val.] (c) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro de \mathcal{B} .

4. Considere os seguintes integrais:

$$(i) \int_{-3}^{-1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx; \quad (ii) \int_2^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx; \quad (iii) \int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx.$$

[1.0 val.]

(a) Identifique, justificando, qual dos integrais é definido e determine o seu valor.

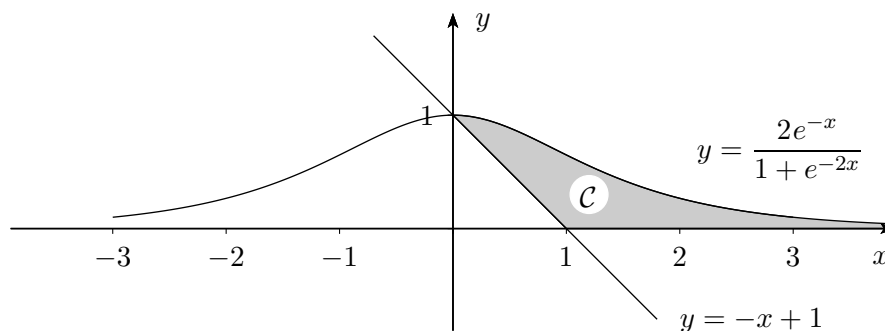
[1.25 val.]

(b) Identifique, justificando, qual dos integrais é impróprio de 2ª espécie e determine a sua natureza.

[1.0 val.]

(c) O que pode concluir da natureza do integral $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx$? Justifique a sua resposta.

5. Considere a região \mathcal{C} representada na figura seguinte:



[1.5 val.]

(a) Usando integrais, identifique, sem calcular, uma expressão simplificada que lhe permita determinar a área da região \mathcal{C} .

[1.25 val.]

(b) O que pode concluir da medida obtida na alínea anterior? Justifique convenientemente a sua resposta.

CALCULUS I - Informatics Engineering

November 25th, 2015

1h30m

1. Considerer the function $f(x) = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4 \cos(2x - \pi)$.

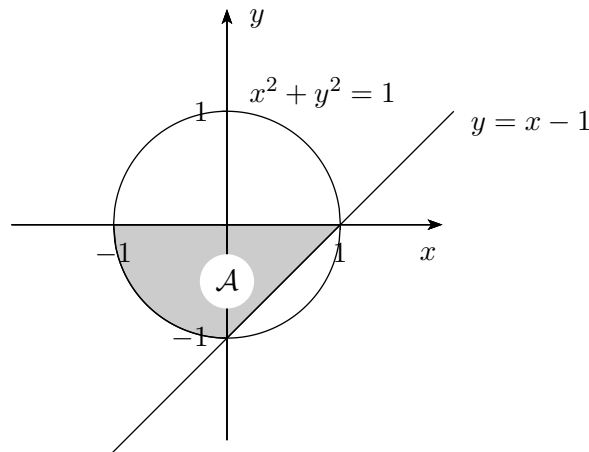
[1.0 val.] (a) Determine the value of $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

[0.75 val.] (b) Solve the equation $f(x) = 0$.

[1.5 val.] (c) Characterize the inverse function of f^{-1} (domain, codomain and analytical expression).

[0.75 val.] (d) Solve, if it is possible, the equation $\pi - \arcsin(x - 1) = 0$.

2. Consider the region \mathcal{A} represented in the following figure:



[1.0 val.] (a) Define the region \mathcal{A} using the form $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \wedge f(y) \leq x \leq g(y)\}$.

[1.5 val.] (b) Using integrals, define a simplified expression that allows to calculate the area of region \mathcal{A} .

[1.5 val.] (c) Using integrals, define simplified expressions that allow to calculate the volume of solids obtained by rotating the region \mathcal{A} about

i. x -axis;

ii. y -axis.

3. Consider the region $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 1 \geq -x^2 \wedge y \leq e^{-x} \wedge -1 \leq x \leq 0\}$.

[1.0 val.] (a) Perform a graphical representation of region \mathcal{B} .

[2.5 val.] (b) Using integrals, define simplified expressions that allow to calculate the area of region \mathcal{B}

i) using variable x ;

ii) using variable y .

[1.5 val.] (c) Using integrals, define a simplified expression that allows to calculate perimeter of region \mathcal{B} .

4. Consider the following integrals:

$$(i) \int_{-3}^{-1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx; \quad (ii) \int_2^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx; \quad (iii) \int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx.$$

[1.0 val.]

(a) Identify and calculate the definite integral.

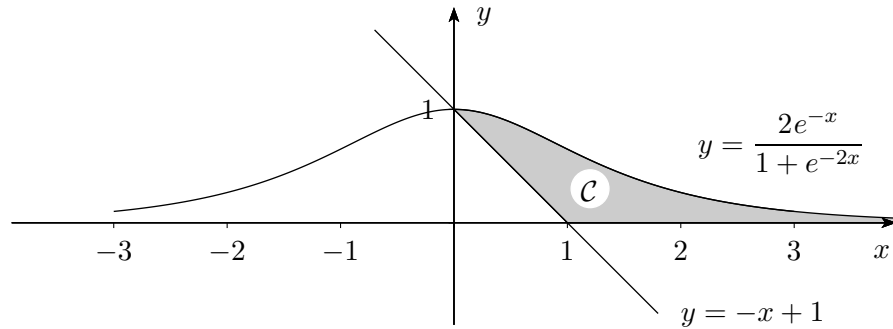
[1.25 val.]

(b) Identify and calculate the improper integral of second type.

[1.0 val.]

(c) Calculate the improper integral $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx$.

5. Consider the region \mathcal{C} represented in the following figure:



[1.5 val.]

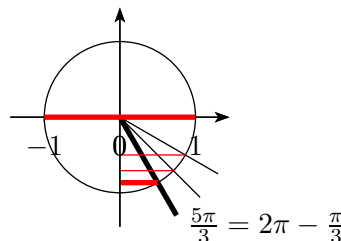
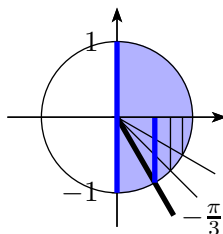
(a) Using integrals, define a simplified expression that allows to calculate the area of region \mathcal{C} .

[1.25 val.]

(b) Is it finite the area of the region \mathcal{C} ? Justify.

1. (a) Tendo em conta o contra-domínio da função arco seno, tem-se

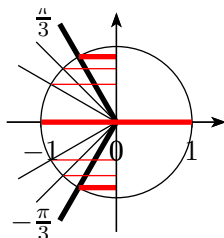
$$\begin{aligned} f\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{6}{\pi} \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4 \cos\left(\frac{8\pi}{3} - \pi\right) \\ &= \frac{6}{\pi} \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{6}{\pi} \left(-\frac{\pi}{3}\right) - 4 \frac{1}{2} \\ &= -2 - 2 \\ &= -4. \end{aligned}$$

- (b) Tendo em conta o resultado de $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ já calculado na alínea (a) e o domínio da função arco seno, tem-se

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{6}{\pi} \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4 \cos(2x - \pi) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2 - 4 \cos(2x - \pi) = 0 \\ &\Leftrightarrow -4 \cos(2x - \pi) = 2 \\ &\Leftrightarrow \cos(2x - \pi) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2x - \pi = \frac{2\pi}{3} + k 2\pi \vee 2x - \pi = -\frac{2\pi}{3} + k 2\pi \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{3} + k 2\pi \vee 2x = \frac{\pi}{3} + k 2\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k \pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k \pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- (c) Para caracterizar a função inversa é necessário definir o seu domínio, o seu contradomínio e a sua expressão analítica, isto é, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} ? & \xleftrightarrow{f} & ? \\ & \xleftarrow{f^{-1}} & \\ ? = x & \longleftrightarrow & y = -2 - 4 \cos(2x - \pi) \end{array}$$

O domínio de f é definido a partir da restrição principal da função cosseno, pelo que

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 2x - \pi \leq \pi\} = \{x \in \mathbb{R} : \pi \leq 2x \leq 2\pi\} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\} = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

A função inversa tem expressão analítica definida por

$$\begin{aligned}
 y = -2 - 4 \cos(2x - \pi) &\Leftrightarrow y + 2 = -4 \cos(2x - \pi) \\
 &\Leftrightarrow \frac{y + 2}{-4} = \cos(2x - \pi) \\
 &\stackrel{\text{na restrição!}}{\Leftrightarrow} \arccos\left(\frac{y + 2}{-4}\right) = 2x - \pi \\
 &\Leftrightarrow \pi + \arccos\left(\frac{y + 2}{-4}\right) = 2x \\
 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{y + 2}{-4}\right) = x.
 \end{aligned}$$

Finalmente, tendo em conta a expressão da função inversa e o domínio da função arco cosseno, tem-se

$$\begin{aligned}
 CD_f = D_{f^{-1}} &= \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{y+2}{-4} \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R} : 4 \geq y + 2 \geq -4\} \\
 &= \{y \in \mathbb{R} : 2 \geq y \geq -6\} = [-6, 2]
 \end{aligned}$$

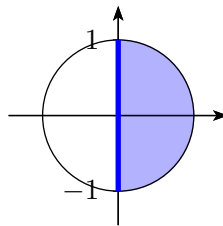
pelo que

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] &\stackrel{f}{\longleftrightarrow} [-6, 2] \\
 \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{y + 2}{-4}\right) = x &\longleftrightarrow y = -2 - 4 \cos(2x - \pi)
 \end{aligned}$$

(d) Como

$$\pi - \arcsin(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \pi = \arcsin(x - 1),$$

mas o contradomínio da função arco seno é dado por $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,



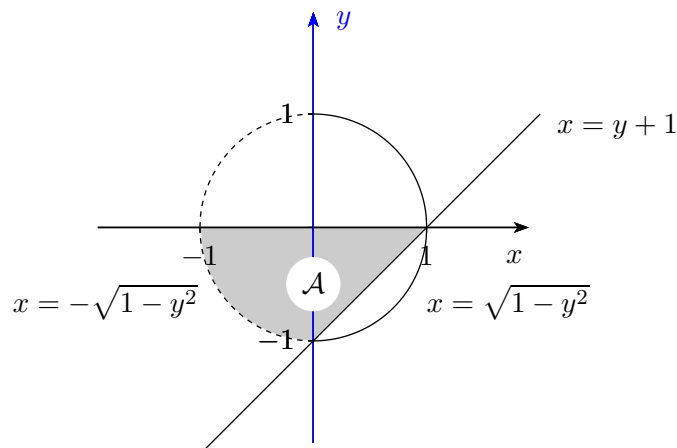
então a equação é impossível.

2. (a) Começamos por notar que as curvas dadas são definidas, em função de y , pelas seguintes expressões:

$$i) \quad x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{1 - y^2}$$

$$ii) \quad y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$$

Assim, a região \mathcal{A} é graficamente definida por



pelo que

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 0 \wedge -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq y+1\}.$$

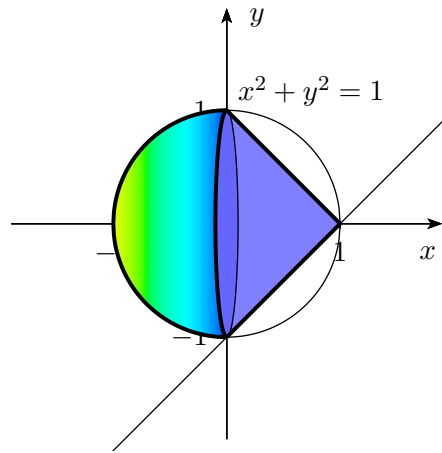
(b) Tendo em conta a alínea (a) tem-se imediatamente

$$\begin{aligned}\text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_{-1}^0 \left(y+1 - (-\sqrt{1-y^2}) \right) dy \\ &= \int_{-1}^0 \left(y+1 + \sqrt{1-y^2} \right) dy.\end{aligned}$$

Alternativa: A área também pode ser calculada recorrendo a x como variável independente. Nesse caso, tem-se

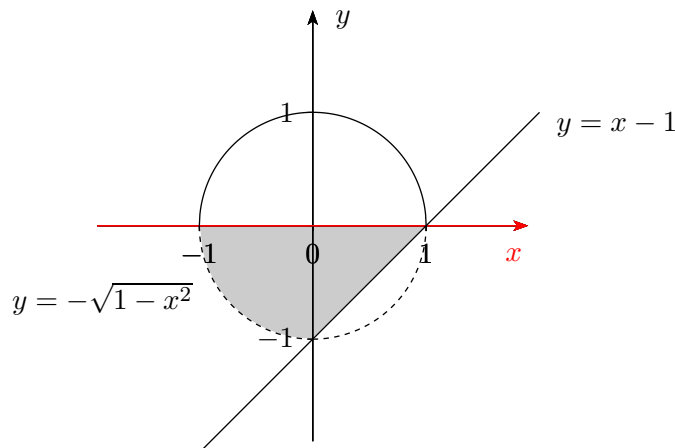
$$\begin{aligned}\text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_{-1}^0 0 - (-\sqrt{1-x^2}) dx + \int_0^1 0 - (x-1) dx \\ &= \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 (x-1) dx.\end{aligned}$$

(c) i. O sólido que se obtém pela rotação da região \mathcal{A} em torno dos eixos Ox , é composto por uma semi-esfera e por um cone, conforme representado na figura seguinte:

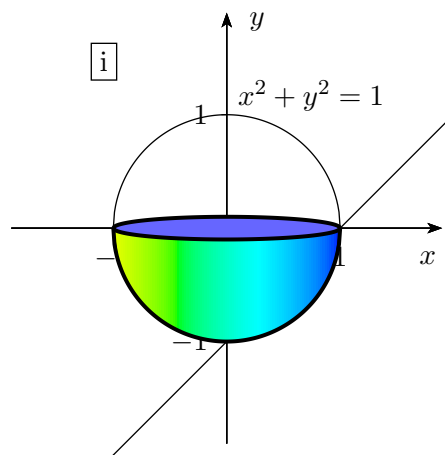


Recorrendo a integrais definidos, o volume do sólido anterior é dado por

$$\begin{aligned}\text{Volume}(\mathcal{A}_{Ox}) &= \int_{-1}^0 \pi \left(\underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{R_{\text{ext}}} \right)^2 dx + \int_0^1 \pi \left(\underbrace{x-1}_{R_{\text{ext}}} \right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^0 (1-x^2) dx + \pi \int_0^1 (x-1)^2 dx.\end{aligned}$$

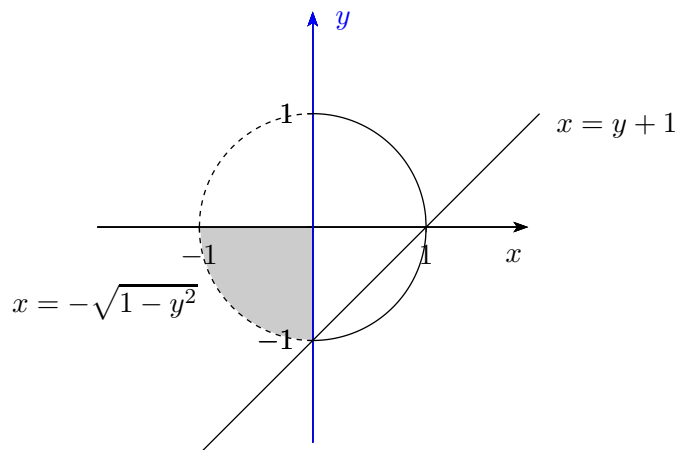


ii. O sólido que se obtém pela rotação da região \mathcal{A} em torno dos eixos Oy , é uma semi-esfera, conforme representado na figura seguinte:

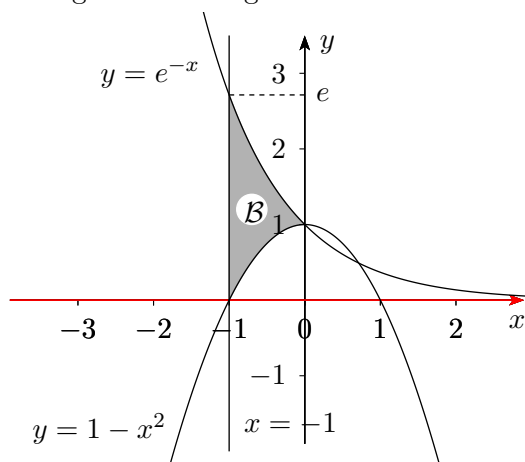


Recorrendo a integrais definidos, o volume do sólido anterior é dado por

$$\begin{aligned} \text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy}) &= \int_{-1}^0 \pi \left(\underbrace{-\sqrt{1-y^2}}_{R_{\text{ext}}} \right)^2 dy \\ &= \pi \int_{-1}^0 (1-y^2) dy. \end{aligned}$$



3. (a) A representação gráfica da região \mathcal{B} é a seguinte:



- (b) i) Tendo em conta a alínea anterior, tem-se

$$\text{Área}(\mathcal{B}) = \int_{-1}^0 e^{-x} - (1-x^2) dx.$$

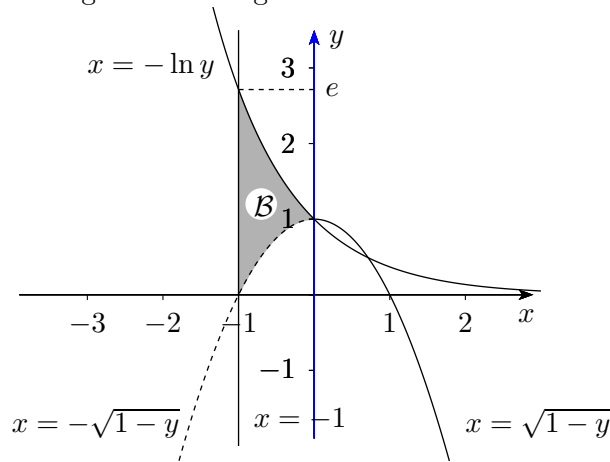
- ii) Começamos por notar que as curvas dadas são definidas, em função de y , pelas seguintes expressões:

$$y = e^{-x} \Leftrightarrow \ln y = -x \Leftrightarrow x = -\ln y$$

$$y = 1 - x^2 \Leftrightarrow y - 1 = -x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y \Leftrightarrow x = \sqrt{1 - y}$$

Atendendo à representação

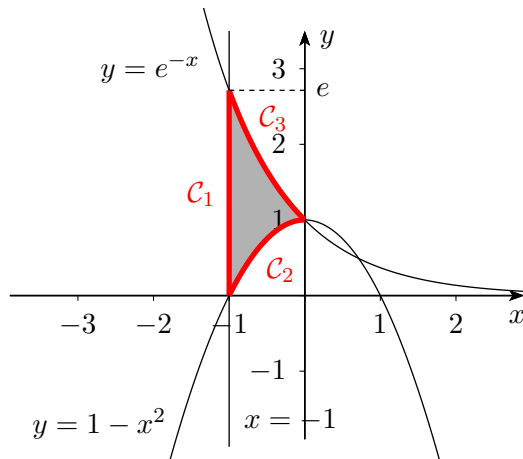
A representação gráfica da região \mathcal{B} é a seguinte:



tem-se então, em função de y ,

$$\begin{aligned} \text{Área}(\mathcal{B}) &= \int_0^1 -\sqrt{1-y} - (-1) dy + \int_1^e -\ln y - (-1) dy \\ &= \int_0^1 (-\sqrt{1-y} + 1) dy + \int_1^e (1 - \ln y) dy. \end{aligned}$$

- (c) O perímetro da região \mathcal{B} é dado pela soma dos comprimentos das linhas que delimitam a região, isto é, pela soma dos comprimentos das seguintes três curvas:



$$\begin{aligned} \text{Perímetro}(\mathcal{B}) &= \text{Comprimento}(\mathcal{C}_1) + \text{Comprimento}(\mathcal{C}_2) + \text{Comprimento}(\mathcal{C}_3) \\ &= e + \int_{-1}^0 \sqrt{1 + \left((e^{-x})'\right)^2} dx + \int_{-1}^0 \sqrt{1 + \left((1 - x^2)'\right)^2} dx \\ &= e + \int_{-1}^0 \sqrt{1 + (-e^{-x})^2} dx + \int_{-1}^0 \sqrt{1 + (-2x)^2} dx \\ &= e + \int_{-1}^0 \sqrt{1 + e^{-2x}} dx + \int_{-1}^0 \sqrt{1 + 4x^2} dx. \end{aligned}$$

4. Começemos por determinar o domínio da função $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x^2-1} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Note-se ainda que a função é contínua em D_f , por ser definida pelo quociente de funções contínuas (uma função constante e um radical).

- (a) O integral (ii) é definido porque o intervalo de integração $[2, 3]$ é um subconjunto de D_f e portanto $f(x)$ está definida e é contínua em $[2, 3]$. Assim, recorrendo ao Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx &= \frac{1}{2} \int_2^3 2x (x^2-1)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_2^3 \\ &= \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{9} \right) = \frac{3}{4} \left(4 - \sqrt[3]{9} \right), \end{aligned}$$

- (b) O integral (i) é impróprio de 2ª espécie, porque $f(x)$ está definida e é contínua em $[-3, -1[$, mas é ilimitada em $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\overbrace{x}^{\rightarrow -1}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2-1}}_{\rightarrow 0^+}} = -\infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{-1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dy &= \lim_{B \rightarrow -1^-} \int_{-3}^B \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx = \lim_{B \rightarrow -1^-} \frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{(x^2-1)^2} \right]_{-3}^B \\ &= \lim_{B \rightarrow -1^-} \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{(B^2-1)^2} - 4 \right) = -3, \end{aligned}$$

pelo que o integral é convergente.

- (c) Uma vez que

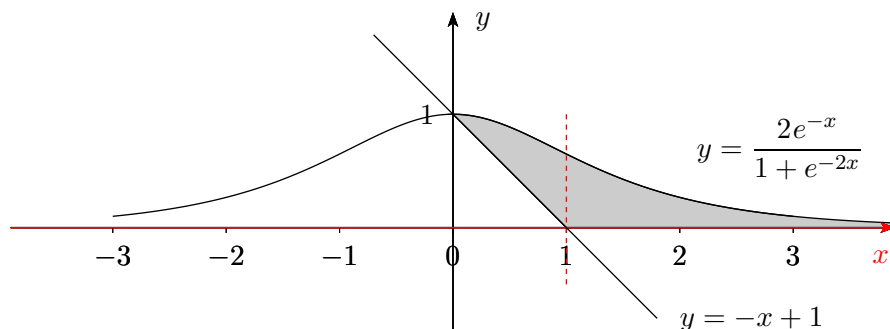
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx}_{1^\text{a espécie}} + \underbrace{\int_{-3}^{-1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx}_{2^\text{a espécie}}$$

então o integral é de 3ª espécie (misto). Como o integral de 2ª espécie é convergente (alínea a), então é necessário determinar a natureza do integral de 1ª espécie.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dy &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-3} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{(x^2-1)^2} \right]_A^{-3} \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{3}{4} \left(4 - \sqrt[3]{(A^2-1)^2} \right) = -\infty, \end{aligned}$$

pelo que o integral de 1ª espécie é divergente e portanto o integral de 3ª espécie também é divergente.

5. (a) Tendo em conta a representação dada e usando x como variável independente, tem-se



$$\text{Área}(\mathcal{C}) = \underbrace{\int_0^1 \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-2x}} - (-x + 1) dx}_{\text{integral definido}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-2x}} dx}_{\text{integral impróprio}}.$$

- (b) A área de \mathcal{C} só é finita se o integral impróprio for convergente. Como

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-2x}} dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} -2 \int_1^B \frac{-e^{-x}}{1 + (e^{-x})^2} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} -2 \left[\arctan(e^{-x}) \right]_1^B \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} -2 \left(\underbrace{\arctan(e^{-B})}_{\rightarrow 0} + 2 \arctan(e^{-1}) \right) = 2 \arctan(e^{-1}), \end{aligned}$$

então o integral impróprio é convergente e portanto a área de \mathcal{C} é finita.