Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência 2 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

10 de janeiro de 2017 Duração: 2h

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[6.0 *val.*] 1. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \left(\sqrt{5} + \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}\right) dx\,;$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,\cos(\sqrt{x}\,)}\, dx\,;$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx\,;$

(d) $\displaystyle\int x \ln x \, dx\,.$

[3.5 *val.*] 2. Considere a função $f(x) = \dfrac{4x^2-8x}{(x^2-1)(x+1)}\,.$

(a) Reescreva a fracção imprópria $\dfrac{x^3+5x^2-9x-1}{(x^2-1)(x+1)}$ na forma $p(x)+f(x)\,,$ onde $p(x)$ é um polinómio e $f(x)$ é a fracção dada.

(b) Determine a decomposição de $f(x)$ como uma soma de fracções simples.

(c) Calcule a primitiva $\displaystyle\int \frac{x^3+5x^2-9x-1}{(x^2-1)(x+1)}\, dx\,.$

[6.5 *val.*] 3. (a) Mostre que $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \;=\; -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c,\ c \in \mathbb{R}\,,$ recorrendo

i) à definição de primitiva;

ii) à técnica de primitivação por partes.

(b) Calcule a primitiva $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\sec^3 x}\, dx\,.$

(c) Recorrendo à mudança de variável $x = \sin t\,,\quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\,,$ mostre que o cálculo da primitiva $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ reduz-se à determinação da primitiva da alínea anterior. Determine a sua expressão.

[4.0 *val.*] 4. Considere as seguintes equações diferencias ordinárias (EDO) de primeira ordem:

i) $x\,y' + 2\,y \;=\; \dfrac{1}{y}\,;$ ii) $y' + 2\,\dfrac{y}{x} \;=\; 2\,x\,;$ iii) $x\,y' \;=\; y + \dfrac{x^2}{y}\,.$

(a) Classifique, justificando, as equações (i) e (ii) quanto ao tipo (*variáveis separáveis* ou *linear*).

(b) Sem recorrer a mudanças de variável, resolva as EDO (i) e (ii).

(c) Mostre que $y = x\sqrt{2\ln x}$ é uma solução da equação (iii).

1. (a) Tem-se

$$\begin{aligned}
\int \left(\sqrt{5}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}\right) dx &= \int \underbrace{\sqrt{5}}_{R1}\, dx + \int \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}\, dx + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{5}}}\, dx \\
&= \sqrt{5}\, x + \int \underbrace{x^{-\frac{1}{5}}\cdot 1}_{R2}\, dx + \int \underbrace{x^{\frac{3}{10}}\cdot 1}_{R2}\, dx \\
&= \sqrt{5}\, x + \frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + \frac{x^{\frac{13}{10}}}{\frac{13}{10}} + c \\
&= \sqrt{5}\, x + \frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4} + \frac{10}{13}\sqrt[10]{x^{13}} + c\,,\ c\in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Tendo em conta a definição de secante, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\,\cos(\sqrt{x}\,)}\, dx &= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\sec(\sqrt{x}\,)\, dx \\
&= 2\int \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\sec(\sqrt{x}\,)}_{R12}\, dx \\
&= 2\,\ln|\sec(\sqrt{x}\,)+\mathrm{tg}\,(\sqrt{x}\,)| + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) Recorrendo à técnica de primitivação por decomposição, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx &= \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx \\
&= \int x\,(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{4(1-\frac{x^2}{4})}}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x\,(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{R2}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{4}}\,\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \int \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}}_{R18}\, dx \\
&= -\sqrt{4-x^2} + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(d) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int x\ln x\, dx = \int \underbrace{x}_{p}\,\underbrace{\ln x}_{d}\, dx$$

cálculos auxiliares:

$$\boxed{\begin{aligned} \textstyle\int x\,dx &= \tfrac{x^2}{2} \\ (\ln x)' &= \tfrac{1}{x} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{PP}{=} \frac{x^2}{2}\,\ln x - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{1}{2}\int \underbrace{x^1\cdot 1}_{R2}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + c \\
&= \frac{x^2}{2}\,\ln x - \frac{1}{4}\,x^2 + c\,,\ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

2. (a) A função é uma fracção imprópria (grau do numerador = 3 = grau do denominador) pelo que a primitivação da fracção é realizada recorrendo à sua decomposição numa soma de elementos simples e o cálculo dessa decomposição começa pela divisão dos polinómios. Uma vez que

$$(x^2-1)(x+1) \;=\; x^3+x^2-x-1\,,$$

então,

$$\begin{array}{rrrrr|l} & x^3 & +5x^2 & -9x & -1 & x^3+x^2-x-1 \\ \cline{6-6} -(& x^3 & +x^2 & -x & -1\;) & 1 \\ \cline{1-5} & & 4x^2 & -8x & & \end{array}$$

pelo que

$$\frac{x^3+5x^2-9x-1}{(x^2-1)(x+1)} \;=\; 1+\underbrace{\frac{4x^2-8x}{(x^2-1)(x+1)}}_{f(x)}\,.$$

(b) Começamos por notar que a função $f(x)$ é uma fracção racional própria e que as raízes do denominador são dadas por

$$(x^2-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \vee x+1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \vee x=-1 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1 \vee x=-1\,,$$

pelo que o denominador tem uma raiz simples e uma raiz de multiplicidade dois. Então,

$$\begin{aligned} \frac{4x^2-8x}{(x^2-1)(x+1)} &= \underbrace{\frac{A}{x-1}}_{\cdot(x+1)^2}+\underbrace{\frac{B}{x+1}}_{\cdot(x-1)(x+1)}+\underbrace{\frac{C}{(x+1)^2}}_{\cdot(x-1)} \\ &= \frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x^2-1)(x+1)}\,. \end{aligned}$$

Tendo em conta a igualdade entre os numeradores, tem-se agora

$$\begin{array}{r|rcl} & 4x^2-8x & = & A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1) \\ \hline x=1 & -4 & = & 4A+0+0 \\ x=-1 & 12 & = & 0+0-2C \\ x=0 & 0 & = & A-B-C \end{array} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ C=-6 \\ B=5 \end{cases}$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é então definida por

$$\frac{4x^2-8x}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{-1}{x-1}+\frac{5}{x+1}+\frac{-6}{(x+1)^2}\,.$$

(c) Tendo em conta as alíneas anteriores, tem-se

$$\frac{x^3+5x^2-9x-1}{(x^2-1)(x+1)} = 1+\frac{4x^2-8x}{(x^2-1)(x+1)} = 1+\frac{-1}{x-1}+\frac{5}{x+1}+\frac{-6}{(x+1)^2}$$

pelo que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+5x^2-9x-1}{(x^2-1)(x+1)}\,dx &= \int \left(1+\frac{-1}{x-1}+\frac{5}{x+1}+\frac{-6}{(x+1)^2}\right)dx \\ &= \int \underbrace{1}_{R1}\,dx-\int \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{R5}\,dx+5\int \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{R5}\,dx-6\int \underbrace{(x+1)^{-2}}_{R2}\,dx \\ &= x-\ln|x-1|+5\,\ln|x+1|-6\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+c \\ &= x-\ln|x-1|+5\,\ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+c\,,\;\; c\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

3. (a) i) Recorrendo à definição de primitiva, basta mostrar que

$$\Big(-x^2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\Big)' = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
&\Big(-x^2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3)}\Big)' \\
&= -2x\sqrt{1-x^2}-x^2\,\frac{1}{2}\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,(-2x)-\frac{2}{3}\,\frac{3}{2}\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x) \\
&= -2x\sqrt{1-x^2}+\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}+2x\sqrt{1-x^2} \\
&= \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \quad \checkmark\,.
\end{aligned}$$

ii) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int x^3\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int \underbrace{x^2}_{d}\,\underbrace{x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{p}\,dx$$

cálculos auxiliares:

$$\boxed{\begin{array}{l} \int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{-2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \\ (x^2)' = 2x \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{PP}{=} x^2\Big(-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big)-\int 2x\Big(-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big)\,dx \\
&= -x^2\sqrt{1-x^2}-\int \underbrace{-2x\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx \\
&= -x^2\sqrt{1-x^2}-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c \\
&= -x^2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+c\,,\ \ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Atendendo às definições de tangente e de secante e às técnicas de primitivação de potências de funções trigonométricas, descritas na página 6 das Tabelas de Matemática, tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\sec^3 x}\,dx &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cos^3 x\,dx = \int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x\sin x\,dx \\
&= \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \int \underbrace{1\cdot\sin x}_{R7}\,dx-(-1)\int \underbrace{\cos^2 x(-\sin x)}_{R2}\,dx \\
&= -\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+c\,,\ \ c\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) Recorrendo à mudança de variável dada,

$$\text{m.v. } \boxed{x=\sin t}\,, \quad t\in\Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big]\,,$$

tem-se

$$x'=\cos t$$

e ainda $|\cos t|=\cos t$ (porque o cosseno é não negativo no intervalo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$), pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{\sin^3 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = \int \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos^2 t}}\cos t\,dt = \int \frac{\sin^3 t}{|\cos t|}\cos t\,dt \\
&= \int \sin^3 t\,dt = -\cos t+\frac{1}{3}\cos^3 t+c\,,\ \ c\in\mathbb{R}\,, \quad \text{pela alínea anterior}\,.
\end{aligned}$$

Atendendo novamente à mudança de variável considerada, tem-se

$$x=\sin t\,,\quad t\in\big[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\big] \ \Leftrightarrow\ \arcsin x=t\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} \int \sin^3 t\,dt \\
&= -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + c \\
&\overset{\text{m.v}}{=} -\cos(\arcsin x) + \frac{1}{3}\cos^3(\arcsin x) + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

4. (a) A equação (i) é de variáveis separáveis, pois

$$\begin{aligned}
x\,y' + 2\,y = \frac{1}{y} \quad &\Leftrightarrow \quad x\,y' = -2\,y + \frac{1}{y} \\
&\Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{x}\Big(-2y + \frac{1}{y}\Big), \quad \text{EDO de variáveis separáveis}\,.
\end{aligned}$$

A equação (ii) é linear, porque

$$y' + 2\,\frac{y}{x} = 2\,x \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{2}{x}\,y + 2\,x\,, \quad \text{EDO linear}\,.$$

(b) Tendo em conta a alínea anterior, para a equação (i) tem-se

$$\begin{aligned}
x\,y' + 2\,y = \frac{1}{y} \quad &\Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{x}\Big(-2y + \frac{1}{y}\Big), \quad \text{EDO de variáveis separáveis} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\,\frac{-2y^2+1}{y} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y}{-2y^2+1}\,dy = \frac{1}{x}\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}\int \underbrace{\frac{-4y}{-2y^2+1}}_{R5}\,dy = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{R5}\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}\ln|-2y^2+1| = \ln|x| + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Para a equação (ii), tem-se

$$\begin{aligned}
y' + 2\,\frac{y}{x} = 2\,x \quad &\Leftrightarrow \quad y' + \frac{2}{x}\,y = 2\,x\,, \quad \text{EDO linear} \\
&\qquad \text{F.I. } e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln|x^2|} = x^2 \\
&\overset{\times x}{\Leftrightarrow} \quad y'x^2 + 2xy = 2x^3 \\
&\Leftrightarrow \quad \big(y\,x^2\big)' = 2x^3 \\
&\Leftrightarrow \quad y\,x^2 = 2\int \underbrace{x^3}_{R2}\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad y\,x^2 = 2\,\frac{x^4}{4} + c \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2}{2} + \frac{c}{x^2}\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) Substituindo $y = x\,\sqrt{2\ln x}$ na equação (iii), tem-se

$$\begin{aligned}
& x\left(x\,\sqrt{2\ln x}\right)' = x\,\sqrt{2\ln x} + \frac{x^2}{x\,\sqrt{2\ln x}} \\
\Leftrightarrow \quad & x\left(\sqrt{2\ln x} + x\,\frac{1}{2}\,(2\ln x)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{2}{x}\right) = x\,\sqrt{2\ln x} + \frac{x}{\sqrt{2\ln x}} \\
\Leftrightarrow \quad & x\,\sqrt{2\ln x} + \frac{x}{\sqrt{2\ln x}} = x\,\sqrt{2\ln x} + \frac{x}{\sqrt{2\ln x}} \quad \checkmark
\end{aligned}$$