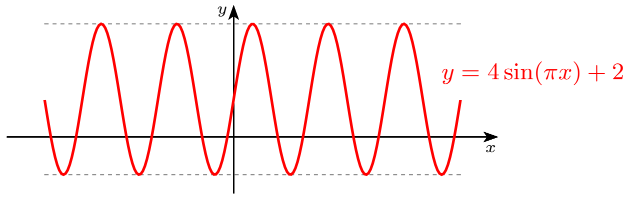
Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Frequência 1 de ANÁLISE MATEMÁTICA I - Engenharia Informática

14 de novembro de 2018 — Duração: 1h30m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

[4.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = 4\sin(\pi x) + 2$.



(a) Calcule $f\left(\frac{17}{6}\right)$.

(b) Determine os zeros de f.

(c) Caracterize, numa restrição adequada, a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

(d) Tendo em conta o gráfico dado, faça um esboço da função f na restrição principal.

(e) Discuta e resolva, caso seja possível, a equação

$$\arcsin(3x-1) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

[1.0 *val.*] 2. Recorrendo à definição de primitiva, mostre que

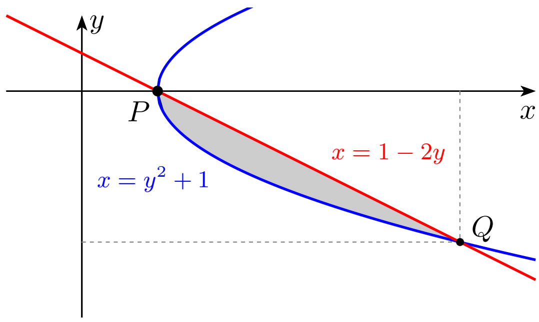
$$\int x\arcsin(x^2)\,dx = \frac{x^2}{2}\arcsin(x^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

[2.0 *val.*] 3. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{9+4x^4}\,dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{1+4x^2}\,dx$.

[1.5 *val.*] 4. Prove que o integral definido $\displaystyle\int_1^8 \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^4}}\,dx$ tem valor 2.

[6.0 *val.*] 5. Considere a região $\mathcal{A}$, sombreada, da figura seguinte.



(a) Determine as coordenadas dos pontos P e Q.

(b) Defina a região $\mathcal{A}$ na forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \le x \le b \ \wedge \ f(x) \le y \le g(x)\}$.

(c) Usando integrais, indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular a área da região em função da variável y.

(d) Indique, justificando, o que representa o integral $\displaystyle\pi\int_1^5 x - 1 - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2 dx$.

(e) Indique uma expressão simplificada que lhe permita calcular o perímetro da região $\mathcal{A}$.

[5.5 *val.*] 6. Considere a região plana $\mathcal{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 \le 2 \ \wedge \ y \le -x^2 \ \wedge \ x \le 0\}$.

(a) Faça um esboço da região $\mathcal{B}$.

(b) Identifique as funções que delimitam a região $\mathcal{B}$.

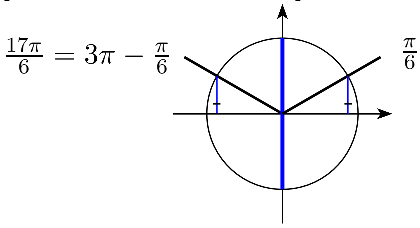
(c) Recorrendo a integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular

(i) a área da região $\mathcal{B}$, em função da variável x;

(ii) o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{B}$ em torno do eixo Ox.

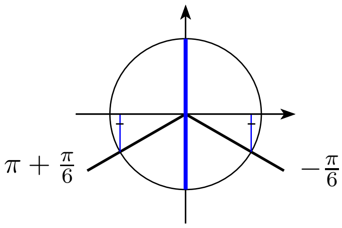
1. (a) Tendo em conta os valores do seno nos ângulos de referência, tem-se

$$f\left(\frac{17}{6}\right) = 4\sin\left(\pi\,\frac{17}{6}\right)+2 = 4\sin\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2 = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+2 = 4\cdot\frac{1}{2}+2 = 4\,.$$



(b) Recorrendo ao círculo trigonométrico e aos ângulos de referência, tem-se

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \;&\Leftrightarrow\; 4\sin(\pi x)+2 = 0\\ &\Leftrightarrow\; \sin(\pi x) = -\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow\; \sin(\pi x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow\; \pi\,x = -\frac{\pi}{6}+k\,2\pi \;\vee\; \pi\,x = \pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+k\,2\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}$$

Nota: ver fórmula 20 da página 1 das Tabelas de Matemática

$$\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{6}+2k \;\vee\; x = \frac{7}{6}+2k\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

(c) Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D_f = CD_{f^{-1}} = ? & \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & CD_f = D_{f^{-1}} = ? \\ ? = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = y = 4\sin(\pi x)+2 \end{array}$$

A função f tem domínio $\mathbb{R}$, mas como não é injectiva então também não é invertível! Assim, para podermos definir a função inversa, temos que considerar uma restrição conveniente da função f. No que se segue vamos considerar a restrição principal. Tendo em conta a restrição principal do seno, tem-se

$$D_f = CD_{f^{-1}} = \left\{x\in\mathbb{R} : -\frac{\pi}{2}\le \pi x\le \frac{\pi}{2}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R} : -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}\right\} = \left[-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right].$$

O contradomínio de f (que coincide com o domínio de f^{-1}) também pode ser definido a partir do contradomínio da função seno. Assim,

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \le & \sin(\pi x) & \le & 1\\ -4 & \le & 4\sin(\pi x) & \le & 4\\ -2 & \le & \underbrace{4\sin(\pi x)+2}_{f(x)} & \le & 6 \end{array}$$

donde $CD_f = D_{f^{-1}} = [-2,\,6]$.

A função inversa tem expressão analítica dada por

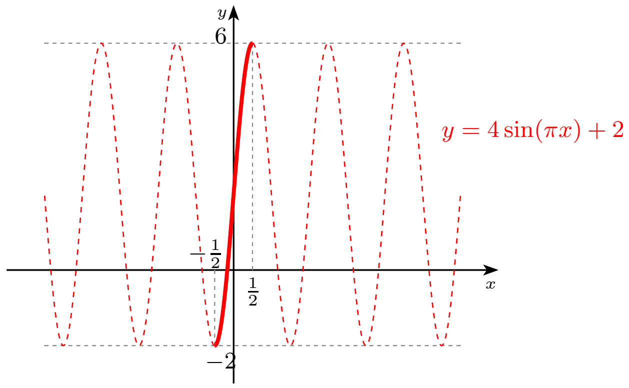
$$\begin{aligned} y = 4\sin(\pi x) + 2 \quad &\Leftrightarrow \quad y - 2 = 4\sin(\pi x) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y-2}{4} = \sin(\pi x) \\ &\overset{\text{na restrição!}}{\Leftrightarrow} \quad \arcsin\left(\frac{y-2}{4}\right) = \pi x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{y-2}{4}\right) = x\,. \end{aligned}$$

Tem-se então

$$D_f = CD_{f^{-1}} = \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \quad \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \quad CD_f = D_{f^{-1}} = [-2, 6]$$

$$\tfrac{1}{\pi}\arcsin\left(\tfrac{y-2}{4}\right) = x = f^{-1}(y) \quad \longleftrightarrow \quad f(x) = y = 4\sin(\pi x) + 2$$

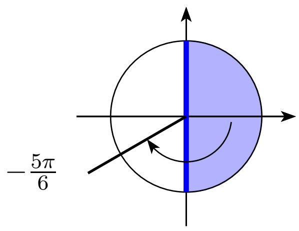
(d) A restrição principal é definida no subconjunto (do domínio) mais próximo da origem (preferencialmente positivo) no qual a função é injectiva e tal que o contradomínio seja o mesmo da função original. Então, a representação gráfica de f da restrição é a seguinte (linha contínua):



(e) Tendo em conta que

$$\begin{aligned} \arcsin(3x-1) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \arcsin(3x-1) + \pi - \frac{\pi}{6} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \arcsin(3x-1) = -\frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

a equação é impossível, porque $-\frac{5\pi}{6}$ não pertence ao contradomínio do arco seno (o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$).



2. Basta notar que

$$\begin{aligned}
\Big(\underbrace{\frac{x^2}{2}\arcsin(x^2)+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}+c}_{R4}\Big)' &= \Big(\underbrace{\frac{x^2}{2}\arcsin(x^2)}_{R5}\Big)' + \Big(\underbrace{\frac{1}{2}(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}_{R3}\Big)' + (\underbrace{c}_{R1})' \\
&= \Big(\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{R3}\Big)'\arcsin(x^2) + \frac{x^2}{2}\Big(\underbrace{\arcsin(x^2)}_{R19}\Big)' + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}_{R7}\Big)' \\
&= x\arcsin(x^2) + \frac{x^2}{2}\,\frac{\overbrace{(x^2)'}^{R7}}{\sqrt{1-(x^2)^2}} + \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{1}}{2}(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}\,(-\cancel{4}x^3) \\
&= x\arcsin(x^2) + \cancel{\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}} - \cancel{\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}} \\
&= x\arcsin(x^2)
\end{aligned}$$

3. (a) Tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{9+4x^4}\,dx &= \int \frac{x}{9(1+\frac{4}{9}x^4)}\,dx = \int \frac{1}{9}\,\frac{x}{1+\frac{4}{9}x^4}\,dx \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{x}{1+(\frac{2}{3}x^2)^2}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{3}{4}\int \underbrace{\frac{\frac{4}{3}x}{1+(\frac{2}{3}x^2)^2}}_{R19}\,dx \\
&= \frac{1}{12}\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{2}{3}x^2\Big) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{arctg}\,(2x)}{1+4x^2}\,dx &= \int \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{arctg}\,(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{2}{1+4x^2}\,\mathrm{arctg}\,(2x)}_{R2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\big(\mathrm{arctg}\,(2x)\big)^2}{2} + c = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}^{\,2}(2x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

4. Tem-se

$$\begin{aligned}
\int_1^8 \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^4}}\,dx &= \int_1^8 \frac{1+x^{\frac{1}{3}}}{x^2}\,dx \qquad \text{NOTA: } \sqrt{x^4} = |x^2| = x^2 \\
&= \int_1^8 \frac{1}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2}\,dx = \int_1^8 \underbrace{x^{-2}\cdot 1}_{R2} + \underbrace{x^{-\frac{5}{3}}\cdot 1}_{R2}\,dx \\
&= \left[\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}\right]_1^8 = \left[-\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right]_1^8 \\
&= -\frac{1}{8} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} - \Big(-1-\frac{3}{2}\Big) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{4} + \frac{5}{2} = -\frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{5}{2} = 2\,.
\end{aligned}$$

5. (a) Basta notar que os pontos P e Q correspondem a intersecções da curvas $x = 1-2y$ e $x = y^2+1$.

$$\begin{cases} x = 1-2y \\ x = y^2+1 \end{cases} \Rightarrow 1-2y = y^2+1 \Leftrightarrow y^2+2y=0 \Leftrightarrow y\,(y+2)=0 \Leftrightarrow \underbrace{y=0}_{x=1-0=1} \ \vee \ \underbrace{y=-2}_{x=1-2\,(-2)=5}$$

Então $P = \big(1,\,0\big)$ e $Q = \big(5,\,-2\big)$.

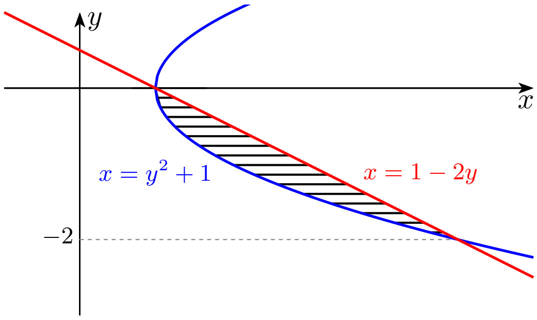
(b) Comecemos por explicitar as funções que delimitam a região:

- $x = 1-2y \ \Leftrightarrow\ 2y = -x+1 \ \Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$
- $x = y^2+1 \ \Leftrightarrow\ y^2 = x-1 \ \Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{x-1} \ \Rightarrow\ y = -\sqrt{x-1}$

Tendo em conta a alínea (a), tem-se então

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \le x \le 5 \quad \wedge \quad -\sqrt{x-1} \le y \le -\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\right\}.$$

(c) Começamos por notar que as expressões das funções de y que delimitam a região já são conhecidas:



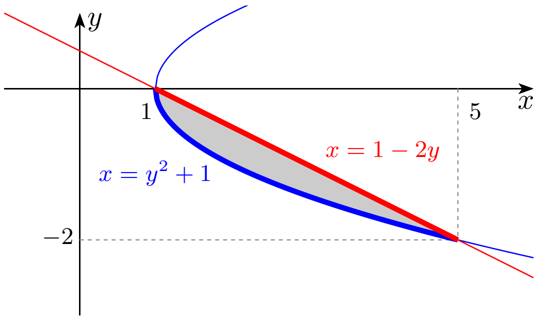
Então,

$$\begin{aligned} \text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_{-2}^{0} \underbrace{1-2y}_{f_{superior}} - \big(\underbrace{y^2+1}_{f_{inferior}}\big)\,dy \\ &= \int_{-2}^{0} -2y - y^2\,dy \end{aligned}$$

(d) O integral representa o volume do sólido de revolução que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Ox:

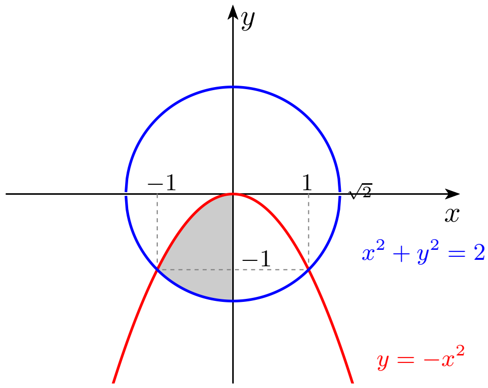
$$\begin{aligned} \text{Volume}(\mathcal{A}_{Ox}) &= \pi \int_{1}^{5} \Big(\underbrace{-\sqrt{x-1}}_{R_{exterior}}\Big)^2 - \underbrace{\Big(-\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\Big)^2}_{R_{interior}}\,dx \\ &= \pi \int_{1}^{5} x-1-\Big(-\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}\Big)^2\,dx \end{aligned}$$

(e) Tendo em conta as curvas que delimitam a região, tem-se



$$\begin{aligned} \text{Perímetro}(\mathcal{A}) &= \int_{-2}^{0} \sqrt{1+\big[(y^2+1)'\big]^2}\,dy + \sqrt{4^2+2^2} \\ &= \int_{-2}^{0} \sqrt{1+4y^2}\,dy + \sqrt{20}\,. \end{aligned}$$

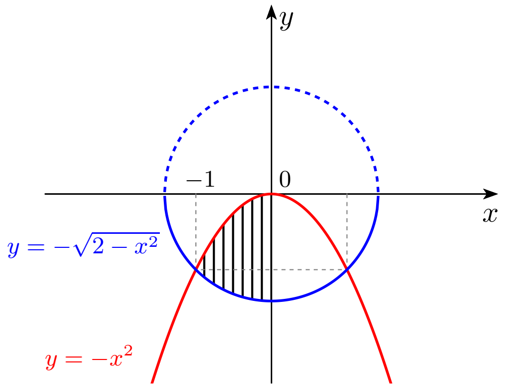
6. (a) Tem-se



(b) Comecemos por explicitar todas as funções que resultam das curvas anteriormente definidas:

- $x^2+y^2=2 \;\Leftrightarrow\; y^2=2-x^2 \;\Leftrightarrow\; y=\pm\sqrt{2-x^2}$
- $y=-x^2$

Então,



(c) (i) Tendo em conta a alínea (b), tem-se

$$\begin{aligned}
\text{Área}(\mathcal{B}) &= \int_{-1}^{0} \underbrace{-x^2}_{f_{superior}} - \Big(\underbrace{-\sqrt{2-x^2}}_{f_{inferior}}\Big)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} -x^2+\sqrt{2-x^2}\,dx\,.
\end{aligned}$$

(ii) Tendo novamente em conta a alínea (b), tem-se

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(\mathcal{B}_{Ox}) &= \pi\int_{-1}^{0} \Big(\underbrace{-\sqrt{2-x^2}}_{R_{exterior}}\Big)^2 - \Big(\underbrace{-x^2}_{R_{interior}}\Big)^2\,dx \\
&= \pi\int_{-1}^{0} 2-x^2-x^4\,dx\,.
\end{aligned}$$