Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Exame de Análise Matemática I - Engenharia Informática

14 de janeiro de 2019 | Duração: 2h30m

Não é permitido utilizar máquina de calcular ou telemóvel durante a prova

---

[2.0 *val.*] 1. Considere a função $f(x) = 1 - 2\cos\left(\frac{3x-\pi}{6}\right)$.

(a) Determine o valor da expressão $A = \frac{3}{\pi}\,\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\sin\left(\frac{29\pi}{6}\right)$.

(b) Resolva a equação $f(x) = A$.
Observação: Se não resolveu a alínea (a), considere $A = 2$.

(c) Caracterize a função inversa de f (domínio, contradomínio e expressão analítica).

[6.0 *val.*] 2. Considere a região limitada do plano

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \leq 0 \ \wedge \ y \leq x+1 \ \wedge \ y \geq -x-3 \ \wedge \ x^2+y^2 \geq 1\right\}.$$

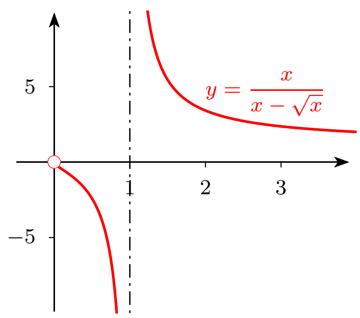
(a) Represente graficamente a região $\mathcal{A}$.

(b) Recorrendo a integrais, indique expressões simplificadas que lhe permitam calcular:

i. a área da região $\mathcal{A}$;

ii. o volume do sólido que se obtém pela rotação da região $\mathcal{A}$ em torno do eixo Oy;

iii. o perímetro da região $\mathcal{A}$.



[3.5 *val.*] 3. Considere a o seguinte gráfico, da função $f(x \,=\, \frac{x}{x-\sqrt{x}}$.

(a) Prove, recorrendo à técnica de primitivação por substituição, que

$$\int \frac{x}{x-\sqrt{x}}\,dx \;=\; x + 2\sqrt{x} + \ln\left(\sqrt{x}-1\right)^2 + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Classifique, justificando, as seguintes expressões:

(I) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{x-\sqrt{x}}\,dx$; (II) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{x-\sqrt{x}}\,dx$; (III) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{x}{x-\sqrt{x}}\,dx$.

(c) Determine a natureza do integral impróprio de 2ª espécie.

[2.0 *val.*] 4. Considere a primitiva $\displaystyle\int \sec^2(x)\,\tan(x)\,dx$.

Apresente 3 cálculos da primitiva, recorrendo a três interpretações diferentes das regras de primitivação imediata.

[5.0 *val.*] 5. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{-3x+3}{(x-2)(x^2-x-2)}\,dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-x}}\,dx$; (c) $\displaystyle\int \frac{\tan^3(x)}{\sec(x)}\,dx$.

[1.5 *val.*] 6. Considere a equação diferencial ordinária de primeira ordem $e^{-x}\,y' + y \,=\, 1$.

(a) Mostre que a equação diferencial é de variáveis separáveis <u>e também</u> linear.

(b) Resolva a equação diferencial dada sujeita à condição inicial $y(0) = 2$.

1. (a) $A = \dfrac{3}{\pi} \operatorname{arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 4 \sin\left(\dfrac{29\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{\pi}\dfrac{2\pi}{3} - 4 \sin\left(4\pi + \dfrac{5\pi}{6}\right) = 2 - 4 \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2 - 4\,\dfrac{1}{2} = 0$

   (b) Tem-se

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 2 \cos\left(\frac{3x-\pi}{6}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{3x-\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3x-\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{6} + k\,2\pi \quad \Leftrightarrow \quad 3x - \pi = \pm\pi + k\,12\pi \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3} + k\,4\pi \ \vee \ x = k\,4\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

   (c) Para caracterizar a função inversa é necessário definir o domínio, o contradomínio e a expressão analítica, ou seja, é necessário completar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} D_f = CD_{f^{-1}} = ? & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} & CD_f = D_{f^{-1}} = ? \\ ? = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = y = 1 - 2 \cos\left(\dfrac{3x-\pi}{6}\right) \end{array}$$

O domínio da função tem que ser restringido, de modo a garantir a injectividade. Tendo em conta a restrição de injectividade do cosseno, tem-se

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \le \frac{3x-\pi}{6} \le \pi\right\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le 3x - \pi \le 6\pi\} = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right].$$

O contradomínio também pode ser definido a partir do contradomínio da função cosseno. Assim,

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \le & \cos\left(\dfrac{3x-\pi}{6}\right) & \le & 1 \\ 2 & \ge & -2\cos\left(\dfrac{3x-\pi}{6}\right) & \le & -2 \\ 3 & \ge & \underbrace{1 - 2\cos\left(\dfrac{3x-\pi}{6}\right)}_{f(x)} & \ge & -1 \end{array}$$

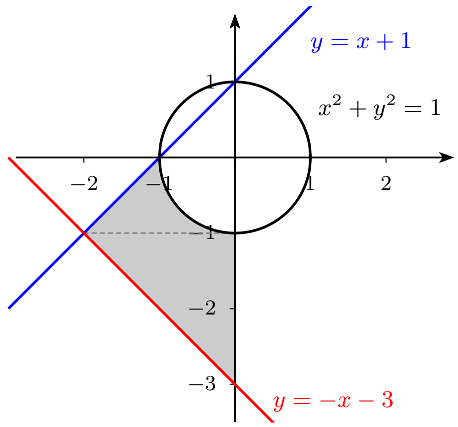
donde $CD_f = [-1, 3]$.
A função inversa tem expressão analítica definida por

$$\begin{aligned} y = 1 - 2\cos\left(\frac{3x-\pi}{6}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad y - 1 = -2\cos\left(\frac{3x-\pi}{6}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{-2} = \cos\left(\frac{3x-\pi}{6}\right) \\ &\overset{\text{na restrição!}}{\Leftrightarrow} \quad \operatorname{arccos}\left(\frac{y-1}{-2}\right) = \frac{3x-\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} + 2\operatorname{arccos}\left(\frac{y-1}{-2}\right) = x\,. \end{aligned}$$

Tem-se então

$$\begin{array}{ccc} D_f = CD_{f^{-1}} = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right] & \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} & CD_f = D_{f^{-1}} = [-1, 3] \\ \dfrac{\pi}{3} + 2\operatorname{arccos}\left(\dfrac{y-1}{-2}\right) = x = f^{-1}(y) & \longleftrightarrow & f(x) = y = 1 - 2\cos\left(\dfrac{3x-\pi}{6}\right) \end{array}$$

2. (a) Tem-se



(b) i. Comecemos por explicitar as curvas que limitam a região, em função da variável y:

- $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-y^2}$
- $y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1$
- $y = -x - 3 \Leftrightarrow x = -y - 3$

A área de $\mathcal{A}$ em função da variável y é então dada por

$$\begin{aligned}
\text{Área}(\mathcal{A}) &= \int_{-3}^{-1} \Big(\underbrace{0}_{f_{sup}} - (\underbrace{-y-3}_{f_{inf}}) \Big)\, dy + \int_{-1}^{0} \Big(\underbrace{-\sqrt{1-y^2}}_{f_{sup}} - (\underbrace{y-1}_{f_{inf}}) \Big)\, dy \\
&= \int_{-3}^{-1} y + 3\, dy + \int_{-1}^{0} -\sqrt{1-y^2} - y + 1\, dy
\end{aligned}$$

ii. Para o cálculo do volume do sólido que se obtém pela rotação da região em torno no eixo Oy é necessário ter em conta as funções que definem os contornos exterior e o interior. Essas expressões já foram determinadas na alínea anterior, pelo que

$$\begin{aligned}
\text{Volume}(\mathcal{A}_{Oy}) &= \pi \int_{-3}^{-1} (\underbrace{-y-3}_{f_{ext}})^2 - (\underbrace{0}_{f_{int}})^2\, dy + \pi \int_{-1}^{0} (\underbrace{y-1}_{f_{ext}})^2 - (\underbrace{-\sqrt{1-y^2}}_{f_{int}})^2\, dy \\
&= \pi \int_{-3}^{-1} (-y-3)^2\, dy \, + \, \pi \int_{-1}^{0} (y-1)^2 - (1-y^2)\, dy
\end{aligned}$$

iii. Tem-se

$$\begin{aligned}
&\text{Perímetro}(\mathcal{A}) \\
&= \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + [(y-1)']^2}\, dy + \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + [(-\sqrt{1-y^2})']^2}\, dy + \int_{-3}^{-1} \sqrt{1 + [0']^2}\, dy + \int_{-3}^{-1} \sqrt{1 + [(-y-3)']^2}\, dy \\
&= \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + [1]^2}\, dy + \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + [-\frac{1}{2}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)]^2}\, dy + \int_{-3}^{-1} \sqrt{1 + [0]^2}\, dy + \int_{-3}^{-1} \sqrt{1 + [(-1)]^2}\, dy \\
&= \int_{-1}^{0} \sqrt{2}\, dy + \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + \frac{y^2}{1-y^2}}\, dy + \int_{-3}^{-1} 1\, dy + \int_{-3}^{-1} \sqrt{2}\, dy \\
&= \sqrt{2}\, dy + \underbrace{\int_{-1}^{0} \sqrt{1 + \frac{y^2}{1-y^2}}\, dy}_{=\frac{2\pi}{4}} + 2 + 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

3. (a) Recorrendo à seguinte mudança de variável (Tabelas de Matemática, página 4)),

$$\text{m.v. } \boxed{x = t^2}, \quad t \in [0, +\infty[\,,$$

tem-se

$$x' = 2\,t$$

e ainda $\sqrt{t^2} = |t| = t$, pelo que

$$\int \frac{x}{x-\sqrt{x}}\,dx \overset{\text{m.v}}{=} \int \frac{t^2}{t^2-\sqrt{t^2}}\,2t\,dt = \int \frac{t^2}{t^2-t}\,2t\,dt = \int \frac{2t^2}{t-1}\,dt$$

Efectuando a divisão dos polinómio, conclui-se que (...)

$$\frac{2t^2}{t-1} = 2t + 2 + \frac{2}{t-1}\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{2t^2}{t-1}\,dt &= \int 2t + 2 + \frac{2}{t-1}\,dt \\
&= 2\int \underbrace{t}_{R2}\,dt + \int \underbrace{2}_{R1}\,dt + 2\int \underbrace{\frac{1}{t-1}}_{R5}\,dt \\
&= 2\,\frac{t^2}{2} + 2t + 2\ln|t-1| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Atendendo novamente à mudança de variável considerada, tem-se

$$x = t^2\,, \quad t \in \big[0, +\infty\big[\;\Leftrightarrow\; t = \pm\sqrt{x} \;\Rightarrow\; t = \sqrt{x} \quad (\text{porque } t \geq 0)$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x-\sqrt{x}}\,dx &\overset{\text{m.v}}{=} t^2 + 2t + 2\ln|t-1| + c \\
&\overset{\text{m.v}}{=} x + 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}-1| + c \\
&\overset{\text{m.v}}{=} x + 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}-1)^2 + c\,,\; c \in \mathbb{R}, \quad \text{porque } p\ln(f) = \ln(f^p)\,.
\end{aligned}$$

(b) Começamos por notar que a função $f(x) = \dfrac{x}{x-\sqrt{x}}$ tem domínio

$$D_f = \big\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \;\wedge\; \underbrace{x - \sqrt{x} \neq 0}_{x \neq 0,\,1}\big\} =]0,\,1[\cup]1,\,+\infty[\,,$$

como também é visível no gráfico apresentado. Além disso, f é contínua no seu domínio, por ser definida pelo quociente de funções contínuas.

I) O intervalo de integração $I = [1,\,4]$ é <u>limitado</u> mas não está contido em D_f, porque $x = 1$ não pertence a D_f. Uma vez que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \quad (\text{conforme se verifica pelo gráfico dado})\,,$$

então f <u>não é limitada</u> em $I = [1,\,4]$. Então o integral (I) é impróprio de 2ª espécie.

II) O intervalo de integração $I = [0,\,\frac{1}{2}]$ é <u>limitado</u> mas não está contido em D_f, porque $x = 0$ não pertence a D_f. Porém

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \quad (\text{conforme se verifica pelo gráfico dado})\,,$$

é finito, pelo que f <u>é limitada</u> em $I = [0,\,\frac{1}{2}]$. Então o integral (II) é definido.

III) O intervalo de integração $I = [4,\,+\infty[$ está contido em D_f mas não é limitado, pelo que o integral (III) é impróprio de 1ª espécie.

(c) De acordo com a alínea anterior, o único integral impróprio de 2ª espécie é (II). Tendo em conta a alínea (a), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{x}{x-\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{t\to 1^+}\int_t^4 \frac{x}{x-\sqrt{x}}\,dx \\
&= \lim_{t\to 1^+}\Big[x+2\sqrt{x}+2\ln|\sqrt{x}-1|\Big]_t^4, \quad \text{pela alínea (a)} \\
&= \lim_{t\to 1^+}\underbrace{t+2\sqrt{t}+2\ln|\sqrt{t}-1|}_{\to+\infty}-\Big(4+2\sqrt{4}+2\ln|\sqrt{4}-1|\Big) \\
&= +\infty\,.
\end{aligned}$$

Então o integral é divergente.

4. Podemos aplicar a regra 2 considerando $f=\tan(x)$ e $p=1$:

$$\int \underbrace{\sec^2(x)\,\tan^1(x)}_{R2}\,dx = \frac{\tan^2(x)}{2}+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

Também podemos aplicar a regra 2 considerando $f=\sec(x)$ e $p=1$:

$$\int \sec^2(x)\,\tan(x)\,dx = \int \underbrace{\sec^1(x)\,\sec(x)\,\tan(x)}_{R2}\,dx = \frac{\sec^2(x)}{2}+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

E podemos aplicar a regra 2 considerando $f=\cos(x)$ e $p=-3$:

$$\int \sec^2(x)\,\tan(x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \underbrace{-\sin(x)\cos^{-3}(x)}_{R2}\,dx = -\frac{\cos^{-2}(x)}{-2}+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\,.$$

5. (a) A função é uma fracção própria (grau do numerador < grau do denominador) mas a primitiva ainda não pode ser calculada recorrendo a primitivas elementares, pelo que vamos efectuar a decomposição da fracção numa soma de elementos simples. As raízes do denominador são dadas por

$$\begin{aligned}
(x-2)(x^2-x-2)=0 &\Leftrightarrow x-2=0 \ \vee\ x^2-x-2=0 \\
&\Leftrightarrow x=2 \ \vee\ x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{x=2 \ \vee\ x=\frac{1+3}{2}=2}_{\text{raiz múltipla}} \ \vee\ x=\frac{1-3}{2}=-1\,.
\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{-3x+3}{(x-2)(x^2-x-2)} = \underbrace{\frac{A_1}{x-2}}_{\cdot(x-2)\,(x+1)} + \underbrace{\frac{A_2}{(x-2)^2}}_{\cdot(x+1)} + \underbrace{\frac{B}{x+1}}_{\cdot(x-2)^2} = \frac{A_1\,(x-2)\,(x+1)+A_2\,(x+1)+B\,(x-2)^2}{(x-2)^2(x+1)}$$

Tendo em conta a igualdade entre os numeradores, tem-se agora

	$-3x+3$	$=$	$A_1\,(x-2)\,(x+1)+A_2\,(x+1)+B\,(x-2)^2$
$x=2$	-3	$=$	$0+3A_2+0$
$x=-1$	6	$=$	$0+0+9B$
$x=0$	3	$=$	$-2A_1+A_2+4B$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_2=-1 \\ B=\frac{2}{3} \\ -2A_1+(-1)+4\,\frac{2}{3}=3 \quad\Rightarrow\quad A_1=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

A decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples é então definida por

$$\frac{-3x+3}{(x-2)(x^2-x-2)} = \frac{-\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{x+1}\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int \frac{-3x+3}{(x-2)(x^2-x-2)}\,dx &= \int \frac{-\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{x+1}\,dx \\
&= -\frac{2}{3}\int \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{R5}\,dx - \int \underbrace{(x-2)^{-2}}_{R2}\,dx + \frac{2}{3}\int \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{R5}\,dx \\
&= -\frac{2}{3}\ln|x-2| - \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + \frac{2}{3}\ln|x+1| + c \\
&= -\frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{3}\ln|x+1| + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(b) Recorrendo à técnica de primitivação por partes, tem-se

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x}}\,dx = \int \underbrace{x}_{p}\,\underbrace{(9-x)^{-\frac{1}{2}}}_{d}\,dx$$

cálculos auxiliares:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\textstyle\int (9-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\int \underbrace{-(9-x)^{-\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx = -\frac{(9-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \\
&(x)' = 1
\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{PP}{=} x\left(-\frac{(9-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{(9-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)dx \\
&= -2x\,(9-x)^{\frac{1}{2}} - 2\int \underbrace{-(9-x)^{\frac{1}{2}}}_{R2}\,dx \\
&= -2x\sqrt{9-x} - 2\,\frac{(9-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\
&= -2x\sqrt{9-x} - \frac{4}{3}\sqrt{(9-x)^3} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

(c) Recorrendo à técnica de primitivação de funções trigonométricas (Tabelas de Matemática, página 7), tem-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan^3(x)}{\sec(x)}\,dx &= \int \frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)}\cos(x)\,dx \\
&= \int \sin^3(x)\cos^{-2}(x)\,dx \\
&= \int \sin(x)\sin^2(x)\cos^{-2}(x)\,dx \\
&= \int \sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\cos^{-2}(x)\,dx \\
&= \int \sin(x)\left(\cos^{-2}(x) - 1\right)dx \\
&= -\int \underbrace{-\sin(x)\cos^{-2}(x)}_{R2}\,dx - \int \underbrace{\sin(x)}_{R7}\,dx \\
&= -\frac{\cos^{-1}(x)}{-1} - \left(-\cos(x)\right) + c \\
&= \sec(x) + \cos(x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

6. (a) A equação pode ser interpretada como uma equação de variáveis separáveis,

$$\begin{aligned} e^{-x}\,y' + y = 1 \;&\Leftrightarrow\; e^{-x}\,y' = 1-y \\ &\Leftrightarrow\; y' = \frac{1-y}{e^{-x}} \\ &\Leftrightarrow\; y' = (1-y)\,e^{x}\,, \quad \text{EDO de variáveis separáveis} \end{aligned}$$

e também como uma EDO linear

$$\begin{aligned} e^{-x}\,y' + y = 1 \;&\Leftrightarrow\; y' = (1-y)\,e^{x} \\ &\Leftrightarrow\; y' = e^{x} - e^{x}\,y\,, \quad \text{EDO linear}\,. \end{aligned}$$

(b) Se recorrermos à técnica de resolução das EDO de variáveis separáveis, temos

$$\begin{aligned} e^{-x}\,y' + y = 1 \;&\Leftrightarrow\; y' = (1-y)\,e^{x}\,, \quad \text{EDO de variáveis separáveis} \\ &\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = (1-y)\,e^{x} \\ &\Leftrightarrow\; \frac{1}{1-y}\,dy = e^{x}\,dx \\ &\Leftrightarrow\; -\int \underbrace{\frac{-1}{1-y}}_{R5}\,dy = \int \underbrace{e^{x}}_{R3}\,dx \\ &\Leftrightarrow\; -\ln|1-y| = e^{x} + c\,,\ c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Tendo agora em conta a condição inicial $y(0) = 2$, tem-se

$$y(0) = 2: \quad -\ln|1-2| = e^{0} + c \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 1 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = -1$$

Então, a solução pretendida é definida, na forma implícita, por $-\ln|1-y| = e^{x} - 1$.

Se recorrermos à técnica de resolução das EDO lineares, temos

$$\begin{aligned} e^{-x}\,y' + y = 1 \;&\Leftrightarrow\; y' = e^{x} - e^{x}\,y\,, \quad \text{EDO linear} \\ &\Leftrightarrow\; y' + e^{x}\,y = e^{x} \\ &\;\; \text{F.I. } e^{\int e^{x}\,dx} = e^{e^{x}} \\ &\overset{\times e^{e^{x}}}{\Leftrightarrow}\; y'\,e^{e^{x}} + e^{x}\,e^{e^{x}}\,y = e^{x}\,e^{e^{x}} \\ &\Leftrightarrow\; \left(y\,e^{e^{x}}\right)' = e^{x}\,e^{e^{x}} \\ &\Leftrightarrow\; y\,e^{e^{x}} = \int \underbrace{e^{x}\,e^{e^{x}}}_{R3}\,dx \\ &\Leftrightarrow\; y\,e^{e^{x}} = e^{e^{x}} + k\,, \quad k \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Tendo agora em conta a condição inicial $y(0) = 2$, tem-se

$$y(0) = 2: \quad 2\,e^{e^{0}} = e^{e^{0}} + k \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 1 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$$

Então, a solução pretendida é definida, na forma implícita, por $y\,e^{e^{x}} = e^{e^{x}} + 1$.