Simulação com Equações de Diferenças

Rafael Dalmolin, *RA: 1436287*

***Abstract*—Este artigo descreve, através de um exemplo simulado em um ambiente matlab, a resolução e a discussão de um problema proposto na disciplina de controle digital, onde a partir de uma equação de diferenças será analisado o comportamento do sistema quando aplicado três tipos distintos de sinais em sua entrada, sendo eles um sinal do tipo impulso, sinal senoidal e um sinal quadrado.**

I. Introdução

Nos estudos de sinais uma das maneiras de descrever o comportamento de um sistema de tempo discreto, é utilizando uma equação de diferença, no qual relaciona a saída do sistema com a sua entrada. Através das equações de diferenças, consegue-se representar dinâmicas de tempo discreto, da mesma maneira que equações diferenciais são utilizadas para demostrar dinâmicas de tempo contínuo. A partir dessa relação, podemos derivar as principais características do sistema: a resposta ao impulso, a resposta ao degrau, a resposta de frequência, o gráfico pólo zero, etc. (SMITH,2013) [1]

A equação de diferenças possui a seguinte forma a seguir:

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k y[n+k] = \sum_{k=0}^{M} \beta_k y[n+k] \tag{1}$$

Sendo assim esta representação em tempo discreto permite simulações de sistemas, implementação de filtros e controladores a partir da sua forma recursiva. Para se chegar na forma recursiva é possível expandir a equação 1 como demostrado na equação a seguir:

$$\alpha_0 y[n] + \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] = \beta_0 x[n] \tag{2}$$

No qual $y[n]$ e $x[n]$ são respectivamente os sinais de saída e entrada do sistema, os termos α e β representam os coeficientes de recursão. Sendo assim a forma recursiva é obtida isolando o termo mais avançado da função $y[n+k]$ e deslocando todos os termos de N ou $N-1$ posições.

II. Descrição da atividade

Nesta atividade foi dado um sistema H que representa um sistema dinâmico qualquer que foi discretizado, onde o modelo esta na forma de equação de diferenças de 2^a ordem, no qual, a entrada $x[n]$ e saída $y[n]$ são dadas por amostras do sistema. O sistema H em questão a ser considerado é representado pela seguinte equação:

$$10y[n+2] - 8y[n+1] + 3y[n] = 4x[n+1] + x[n] \tag{3}$$

Será construído um script para calcular recursivamente $y[n]$ para uma simulação com 100 pontos e gerar um gráfico com as respectivas saídas quando aplicado entradas do tipo:

- Sinal impulso com amplitude 5;
- Sinal senoidal com amplitude 5 e período fundamental de 40 pontos;
- Sinal quadrado com amplitude 5, período fundamental de 40 pontos e razão cíclica de 50%.

Após gerar as respectivas saídas $y[n]$ a simulação será refeita alterado os coeficientes de recursão e reavaliando o comportamento das saídas.

Para fazer a simulação é necessário readequar a equação 3 isolando o termo mais avançado como descrito anteriormente, como mostrado a seguir:

Equação inicial

$$10y[n+2] - 8y[n+1] + 3y[n] = 4x[n+1] + x[n] \tag{4}$$

Isolar termo mais avançado

$$10y[n+2] = 8y[n+1] - 3y[n] + 4x[n+1] + x[n] \tag{5}$$

Deslocando em 2 posições para direta e dividindo por 10

$$y[n] = 0.8y[n-1] - 0.3y[n-2] + 0.4x[n-1] + 0.1x[n-2] \tag{6}$$

III. Script e Resultados

Nesta seção encontra-se os scripts para simulação do calculo de recursão e plots dos respectivos gráficos de saída obtidos.

A. Sinal Impulso

```
%% Limpando variaveis
close all;
clear all;
clc;
%% Sinal de entrada =  Impulso

% DADOS DA ATIVIDADE
A = 5;          % Amplitude
T = 40;         % Periodo
Ts = 1;         % Tempo de amostragem
NC = 2.5;       % Numero de ciclos
NA = 40;        % Numero de amostras por ciclo
NT = NA * NC;   % Numero total de pontos
TT = NT * Ts;   % Tempo total de pontos

t = 0:Ts:TT+1;
x = zeros(1,NT+1);    %inicializacao de x
y = zeros(1,NT+1);    %inicializacao de y
k = 0;                %inicializacao de k
```

Dalmolin. Rafael Acadêmico de engenharia de computação ,Universidade tecnológica federal do paraná, Pato Branco, PR.

```

%Laco de repeticao
%Contador iniciando em 3 devido ao ...
    deslocamento y(n-2)
for n=3:NT+1
    if n == 3
        x(n)=A;
    else
        x(n)=0;
    end
    %Equacao de diferencas y(n) obtida
    y(n) = (8*y(n-1) - 3*y(n-2) + 4*x(n-1) + ...
        x(n-2))/10;

    %Teste com outros coeficientes
    %y(n) = (a0*y(n-1) - a1*y(n-2) + ...
        3*x(n-1) + 0.8*x(n-2))/10;
end

%Plotando os 3 graficos
figure
subplot(2,2,1);
stem(x);
xlim([0 100]);
title('Entrada X[n]');
grid;
subplot(2,2,2);
stem(y, 'r');
xlim([0 100]);
title('Saida Y[n]');
grid;
subplot(2,2,[3 4]);
title('Equacao de diferencas');
hold on;
stem(x);
stem(y,'r');
xlim([0 100]);
grid;
```

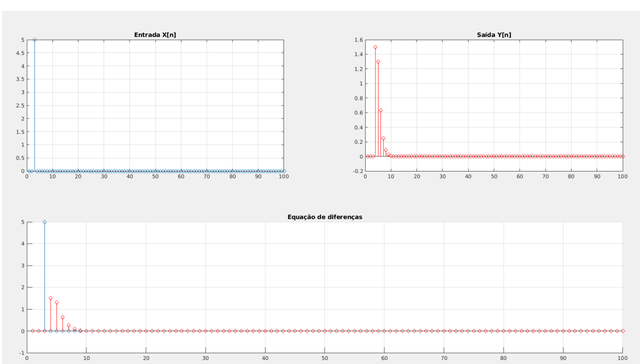

Fig. 1. Gráfico - Comportamento da saída ao sinal de entrada impulso

B. Sinal Senoidal

```
%% Limpando variaveis
close all;
clear all;
clc;
%% Sinal de entrada = Sinal Senoidal

% DADOS DA ATIVIDADE
A = 5;          % Amplitude
T = 40;         % Periodo
Ts = 1;         % Tempo de amostragem
NC = 2.5;       % Numero de ciclos
NA = 40;        % Numero de amostras por ciclo
NT = NA * NC; % Numero total de pontos
TT = NT * Ts; % Tempo total de pontos
To = NA*Ts;   % periodo fundamental
fo = 1/To;    % frequencia fundamental

t=0:Ts:TT;
y = zeros(1,NT+2);      %inicializazacao de y
x = A*sin(2*pi*fo*t);   %Onda senoidal

%Laco de repeticao
%Contador iniciando em 3 devido ao ...
    deslocamento y(n-2)
for n=3:NT+1
    %Equacao de diferencas y(n) obtida
    y(n) = (8*y(n-1) - 3*y(n-2) + 4*x(n-1) + ...
        x(n-2))/10;

    %Teste com outros coeficientes
    %y(n) = (a0*y(n-1) - a1*y(n-2) + ...
        3*x(n-1) + 0.8*x(n-2))/10;
end

%Plotando os 3 graficos
figure
subplot(2,2,1);
stem(x);
xlim([0 100]);
title('Entrada X[n]');
grid;
subplot(2,2,2);
stem(y, 'r');
xlim([0 100]);
title('Saida Y[n]');
grid;
subplot(2,2,[3 4]);
title('Equacao de diferencas');
hold on;
stem(x);
stem(y,'r');
xlim([0 100]);
grid;
```

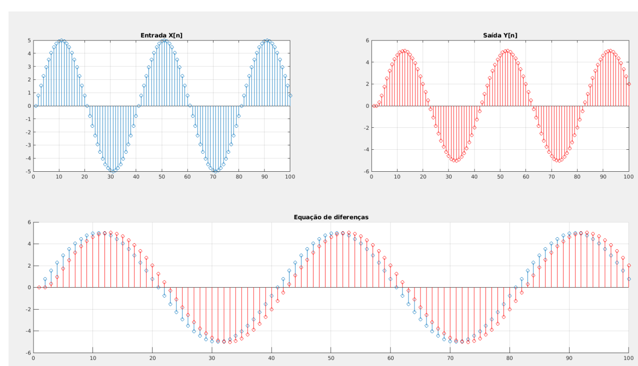

Fig. 2. Gráfico - Comportamento da saída ao sinal de entrada senoidal

C. Sinal Quadrado

```
%% Limpando variaveis
close all;
clear all;
clc;
%% Sinal de entrada = Sinal Quadrado

% DADOS DA ATIVIDADE
A = 5;          % Amplitude
T = 40;         % Periodo
```

```
Ts = 1;        % Tempo de amostragem
NC = 2.5;      % Numero de ciclos
NA = 40;       % Numero de amostras por ciclo
NT = NA * NC; % Numero total de pontos
TT = NT * Ts; % Tempo total de pontos

t = 0:Ts:TT+1;
x = zeros(1,NT+1);    %inicializacao de x
y = zeros(1,NT+1);    %inicializacao de y
k = 0;               %inicializando k

%Laco de repeticao
%Contador iniciando em 3 devido ao ...
    deslocamento y(n-2)
for n=3:NT

    x(n) = 5;
    k = k+1;
    if k > 20
        x(n) = 0;
    end
    if k>40
        k=0;
    end

    %Equacao de diferencas y(n) obtida
    y(n) = (8*y(n-1) - 3*y(n-2) + 4*x(n-1) + ...
        x(n-2))/10;

    %Teste com outros coeficientes
    %y(n) = (a0*y(n-1) - a1*y(n-2) + ...
        3*x(n-1) + 0.8*x(n-2))/10;

end

%Plotando os 3 graficos
figure
subplot(2,2,1);
stem(x);
xlim([0 100]);
title('Entrada X[n]');
grid;
subplot(2,2,2);
stem(y, 'r');
xlim([0 100]);
title('Saida Y[n]');
grid;
subplot(2,2,[3 4]);
title('Equacao de diferencas');
hold on; stem(x);
stem(y,'r');
xlim([0 100]);
grid;
```

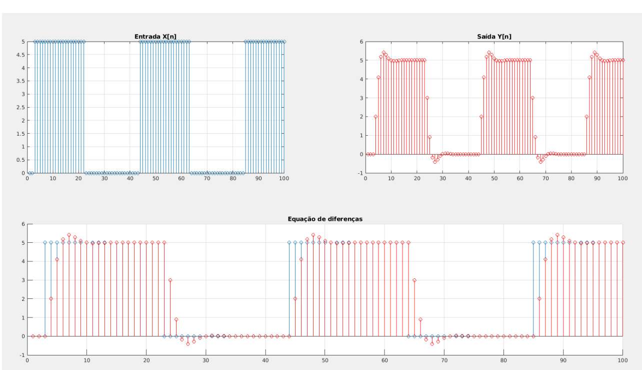

Fig. 3. Gráfico - Comportamento da saída ao sinal de entrada quadrado

Após a simulação dos scripts acima, foi alterado os coeficientes a_0 e a_1, de forma em que foi reproduzido três tipos de situações para os coeficientes, no qual são citadas abaixo:

- $a_0 > a_1$
- $a_0 = a_1$
- $a_0 < a_1$

Os resultados dos sinais obtidos com variações encontram-se a seguir:

D. Sinal impulso com alteração de coeficientes

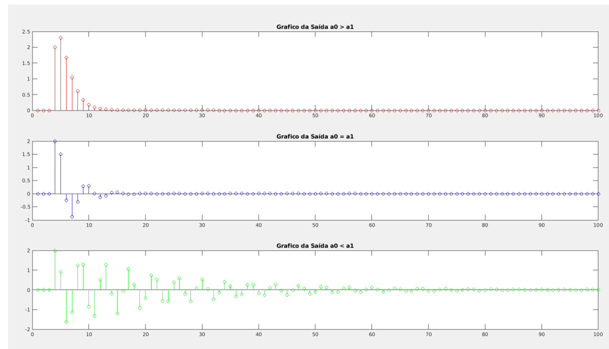

Fig. 4. Gráfico - Comportamento da saída ao sinal de entrada impulso com variações no coeficiente

E. Sinal senoidal com alteração de coeficientes

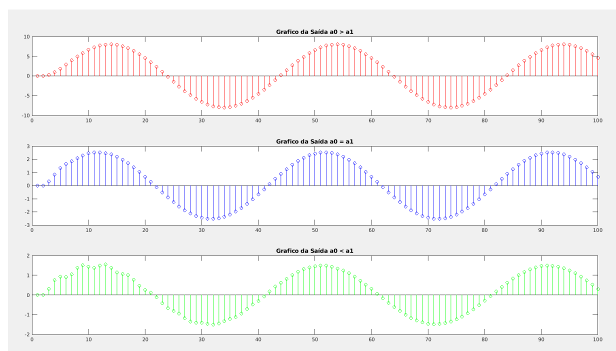

Fig. 5. Gráfico - Comportamento da saída ao sinal de entrada senoidal com variações no coeficiente

F. Sinal quadrado com alteração de coeficientes

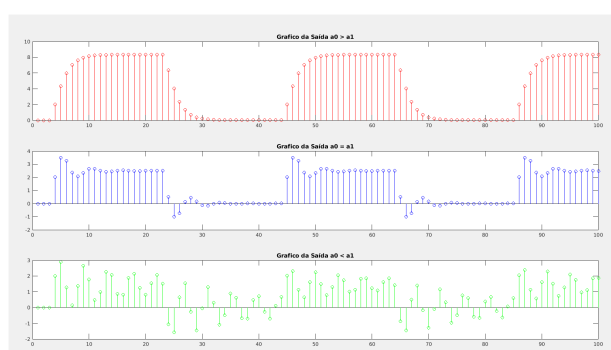

Fig. 6. Gráfico - Comportamento da saída ao sinal de entrada quadrada com variações no coeficiente

IV. CONCLUSÃO

Analisando as respostas obtidas através das equações de diferença, pode-se observar que, a partir de uma entrada $x[n]$ e uma saída $y[n]$ conseguimos obter o comportamento de um sistema H desconhecido, no qual, atua como um filtro digital sobre o sinal da entrada. Um fator que devemos destacar, é que quando comparamos o desempenho computacional da técnica de soma de convolução, no qual também atua como filtros digitais, o custo computacional utilizando equação de diferenças é muito menor. É muito importante evidenciar que, com as variações aplicadas nos coeficientes implicam em mudanças nas características do sinal de saída, essas como por exemplo: tempo de subida, oscilação, amortecimento e etc, assim também, alterando os pólos da função.

REFERENCES

[1] SMITH, S.*Digital signal processing: a practical guide for engineers and scientists.* [S.l.]: Elsevier,2013.