



universidade
de aveiro

Movimento de Projéteis

Relatório

Mecânica e Campo Eletromagnético (MCE)

Departamento de Física

Ano Letivo 2023/2024

Turma: PL1, grupo 2

108583 Luís Barros Ferreira de Sousa

114525 Daniel Costeira Narciso

113726 Francisco José Nogueira Da Rocha Matos

Contents

1	Sumário	2
2	Introdução Teórica	3
3	Procedimento Experimental	5
4	Análise e Tratamento de Dados Experimentais	8
4.1	Apresentação de Dados	8
4.1.1	Parte A - Determinação de Velocidade Inicial	8
4.1.2	Parte B - Dependência do Alcance com o Ângulo de Disparo	8
4.1.3	Parte C - Pêndulo Balístico: Método alternativo para de- terminação da Velocidade Inicial de um Projétil	9
4.2	Análise de Resultados	10
4.2.1	Parte A - Determinação de Velocidade Inicial	10
4.2.2	Parte B - Dependência do Alcance com o Ângulo de Disparo	11
4.2.3	Parte C - Pêndulo Balístico: Método alternativo para de- terminação da Velocidade Inicial de um Projétil	13
5	Síntese Conclusiva	15
6	Contribuição dos Autores	16

1 Sumário

Neste relatório vão ser abordados os conceitos lecionados em aula relativamente a mecânica, mais concretamente à cinemática de um corpo através do lançamento oblíquo e horizontal de um projétil. Posto isto, vamos por em prática a teoria aprendida em sala de aula relativamente a esta matéria para observar e analisar o comportamento do projétil.

2 Introdução Teórica

A posição de um projétil e velocidade inicial (com componentes v_{0x} e v_{0y} que se desloca no plano (x, y) é dada por:

$$x = x_0 + v_{0x}t \cos(\theta_0) \quad (1)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t \cos(\theta_0) - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

Onde g é a aceleração da gravidade, t é o tempo, x_0 e y_0 são as coordenadas da posição inicial do projétil relativas ao eixo, e θ_0 é a inclinação do vetor velocidade inicial em relação ao eixo x . Removendo a variável t das equações 1 e 2, obtemos uma nova equação para o alcance x em função do ângulo, que permite determinar o ângulo para o qual o alcance é máximo. O ângulo θ_{\max} é dado por:

$$\theta_{\max} = \arctg \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2g(y_i - y_f)}{v_0^2}}} \right) \quad (3)$$

Se o valor da altura inicial for igual ao da altura final ($y_i = y_f$), então $\tan(\theta_{\max}) = 1$, pelo que $\theta_{\max} = 45^\circ$.

Pêndulo Balístico

O pêndulo balístico consiste numa massa M suspensa por um fio ou uma barra. Se um projétil de massa m ($m \ll M$) for disparado contra a massa M e nela ficar retido, então o conjunto tem energia cinética, E_c , que, à medida que o pêndulo se move, vai sendo transformada em energia potencial gravítica, E_p . A altura máxima, h , atingida será tal que a energia potencial gravítica máxima é igual à energia cinética inicial, devendo-se isso à conservação da energia mecânica.

Considerando v_0 a velocidade inicial do projétil e v_2 a velocidade do conjunto massa + projétil, logo após a colisão, obtém-se:

$$E_c(\text{ inicial }) = \frac{1}{2}(m + M)v_2^2 = (m + M)gh = E_p(\text{max}) \quad (4)$$

A conservação de momento linear na colisão implica que:

$$mv_0 = (m + M)v_2 \quad (5)$$

de onde se tira a relação entre a velocidade de v_0 e a altura h :

$$v_0 = \left(\frac{m + M}{m} \right) \sqrt{2gh} \quad (6)$$

Nota: v_2 foi obtido através de:

$$\frac{1}{2}(m + M)v_2^2 = (m + M)gh$$

$$\frac{1}{2}v_2^2 = gh$$

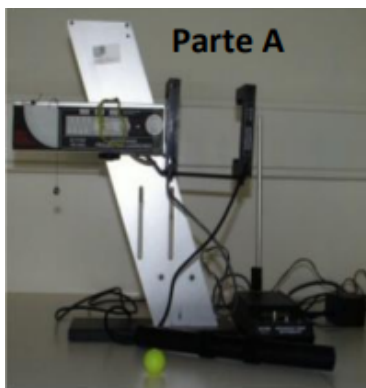
$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

3 Procedimento Experimental

Parte A

Determinação da Velocidade Inicial

Nesta experiência efetuamos a montagem do equipamento seguindo as instruções presentes no guião da aula Prática-Laboratorial. Montamos a base de modo a assegurar que o Lançador de Projéteis estivesse numa posição horizontal (ângulo de 0°). Após assegurar que não houve erros de montagem que afetassem a posição do Lançador de Projéteis, montamos e ligamos o sistema de controlo de modo a uma leitura correta da velocidade do projétil. Assim que a montagem esteve completa verificamos a distância entre as células. De seguida inserimos o projétil no Lançador de Projéteis em "Short Range" com o auxílio de uma vareta de carregar de modo a confirmar que o projétil se encontrava na posição pretendida. Antes de efetuar o seu lançamento, configuramos o sistema de controlo com o estado "TWO GATES". Agora que tudo está pronto, puxamos o fio suavemente numa posição vertical e anotamos os valores apresentados no sensor. A experiência foi repetida mais 4 vezes de modo a obter medidas para análises de **exatidão**.

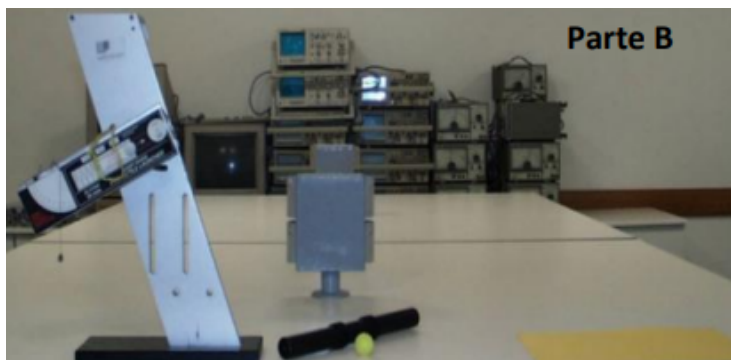


Montagem experimental da Parte A

Parte B

Dependência do alcance com o ângulo de disparo

Nesta experiência ajustamos o Lançador de Projéteis de modo a satisfazer as condições da experiência. Como se trata de um lançamento oblíquo, ajustamos o Lançador de Projéteis para um ângulo de 30° . Após inserir o projétil em "Short Range" vimos onde o projétil aterrou e de seguida colocamos na mesa um alvo constituído por papel químico e papel milimétrico de modo a confirmar se os resultados estavam a ser recolhidos com precisão (foram feitos 3 lançamentos). Após o lançamento a 30° , repetimos o procedimento para os 34° , 38° , 40° e 43° de modo a recolher dados precisos para a análise da relação entre o alcance e o ângulo do disparo.

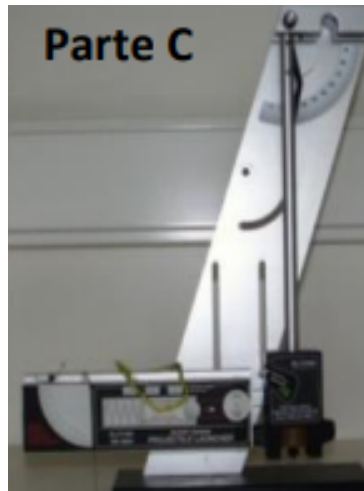


Montagem experimental da Parte B

Parte C

Pêndulo Balístico: Método alternativo para determinação da velocidade inicial de um projétil

Para realizar devidamente esta experiência, começamos por pesar a massa do projétil, m , e a massa do pêndulo, M . Usando a fita métrica, medimos o comprimento do pêndulo, l . Após os registos, inserimos o projétil no Lancador de Projéteis em "Short Range" e inserimos o contador do ângulo a 0° . No final do lançamento registamos o ângulo máximo descrito pelo pêndulo para depois calcular a velocidade inicial. Repetimos a experiência 5 vezes de modo a confirmar que obtemos resultados precisos



Montagem experimental da Parte C

4 Análise e Tratamento de Dados Experimentais

Apresentação de Dados

Parte A - Determinação de Velocidade Inicial

Primeiramente começamos por medir a distância, s , entre os sensores e obtivemos o valor de $0,1000 \pm 0,0005 \Delta s$ (m). O erro deve-se ao uso da fita métrica. Como se trata de um equipamento analógico usamos metade da menor divisão (mm).

ângulo $\pm 0,5^\circ$	tempo $\pm 0,0001$ s				
$0,0^\circ$	0,0443 s	0,0448 s	0,0450 s	0,0456 s	0,0453s

O erro correspondente ao ângulo deve-se ao uso de um instrumento analógico cuja menor divisão é 1. Por sua vez, o erro associado ao tempo deve ao facto de se ter utilizado um instrumento digital com a menor medida de $\pm 0,0001$ s

Parte B - Dependência do Alcance com o Ângulo de Disparo

Para cada ângulo foram realizados 3 lançamentos de modo a verificar se os resultados apresentam um valor preciso.

angulo $\pm 0,5^\circ$	alcance $\pm 0,0005$ m		
$30,0^\circ$	0,7670 m	0,7660 m	0,7670 m
$34,0^\circ$	0,7690 cm	0,7680 m	0,7700 m
$38,0^\circ$	0,7660 cm	0,7660 m	0,7650 m
$40,0^\circ$	0,7660 cm	0,7670 m	0,7680 m
$43,0^\circ$	0,7610 cm	0,7620 m	0,7600 m

O erro correspondente ao alcance deve-se ao uso de um instrumento analógico (fita métrica), devido a este tipo de instrumento temos em conta um erro de $\pm 0,0005$ m

Parte C - Pêndulo Balístico: Método alternativo para determinação da Velocidade Inicial de um Projétil

Nesta experiência começamos por medir a massa do projétil, $m = 0,0634 \pm 0,0001$ kg e a massa do pêndulo balístico, $M = 0,2644 \pm 0,0001$ kg, tal como o comprimento deste último, $l = 0,3030 \pm 0,0005$ m. Estes erros resultam do instrumento de medida utilizado, com o instrumento analógico (fita métrica) temos em conta a sua menor divisão de 0,0005 m, o instrumento digital (balança) temos em conta a sua menor divisão de 0,0001 kg e o erro associado ao ângulo apresentado que devido ao uso de material analógico usamos a sua ~~menor divisão~~, no caso $0,5^\circ$.

Após 5 disparos estes foram os valores registados:

ângulo máximo $\pm 0,5^\circ$
14,5°
15,5°
14,0°
14,7°
15,0°

Análise de Resultados

Parte A - Determinação de Velocidade Inicial

Após todos os resultados da experiência terem sido anotados decidimos calcular a média do tempo t_m :

$$t_m = \frac{0,0443+0,0448+0,0450+0,0456+0,0453}{5} = 0,0450 \text{ s}$$

Agora podemos calcular a velocidade inicial média do projétil, V_m :

$$V_m = \frac{0,1000}{0,0450} = 2,2222 \text{ m/s}$$

Agora que temos a velocidade inicial média, prosseguimos para o cálculo da incerteza do tempo realizando as seguintes operações:

$$t1 = |0,0450 - 0,0443| = 0,0007 \text{ s}$$

$$t2 = |0,0450 - 0,0448| = 0,0002 \text{ s}$$

$$t3 = |0,0450 - 0,0450| = 0,0000 \text{ s}$$

$$t4 = |0,0450 - 0,0456| = 0,0006 \text{ s}$$

$$t5 = |0,0450 - 0,0453| = 0,0003 \text{ s}$$

$$inct = \max(t1, t2, t3, t4, t5) = 0,0007 \text{ s}$$

A incerteza ~~da distância~~ é 0,0007s então o erro da velocidade poderá ser calculado a partir da expressão:

$$\Delta v = 2,2222 * \frac{0,0007}{0,0450} = 0,0346$$

Logo, $\Delta v = 2,22 \pm 0,03 \text{ m/s}$

Por fim calculamos o erro relativo de V da seguinte forma:

$$erro = \frac{0,03}{2,22} * 100 = 1.35 \%$$

Como o erro relativo é menor que 10% concluímos que o resultado é preciso

Depois de analisar a experiência realizada verificamos que a fonte de maior erro poderá ser proveniente de um de dois erros, um erro sistemático (como o relógio utilizado para a medição do tempo ou a resistência do ar) ou um erro aleatório (como medições). Após ter estes fatores em conta decidimos que a fonte de maior erro será proveniente de um erro aleatório visto que usamos material analógico para registrar certos dados.

Parte B - Dependência do Alcance com o Ângulo de Disparo

Após todos os resultados estarem anotados, calculamos a média da distância relativa a cada ângulo θ :

$$\theta = 30^\circ \quad x_m = \frac{0.7670 + 0.7660 + 0.7670}{3} = 0.7667 \text{ m}$$

$$\theta = 34^\circ \quad x_m = \frac{0.7690 + 0.7680 + 0.7700}{3} = 0.7690 \text{ m}$$

$$\theta = 38^\circ \quad x_m = \frac{0.7660 + 0.7670 + 0.7680}{3} = 0.7670 \text{ m}$$

$$\theta = 40^\circ \quad x_m = \frac{0.7660 + 0.7660 + 0.7650}{3} = 0.7657 \text{ m}$$

$$\theta = 43^\circ \quad x_m = \frac{0.7610 + 0.7620 + 0.7600}{3} = 0.7610 \text{ m}$$

Para calcular a incerteza e o desvio de cada ângulo fizemos as seguintes operações:

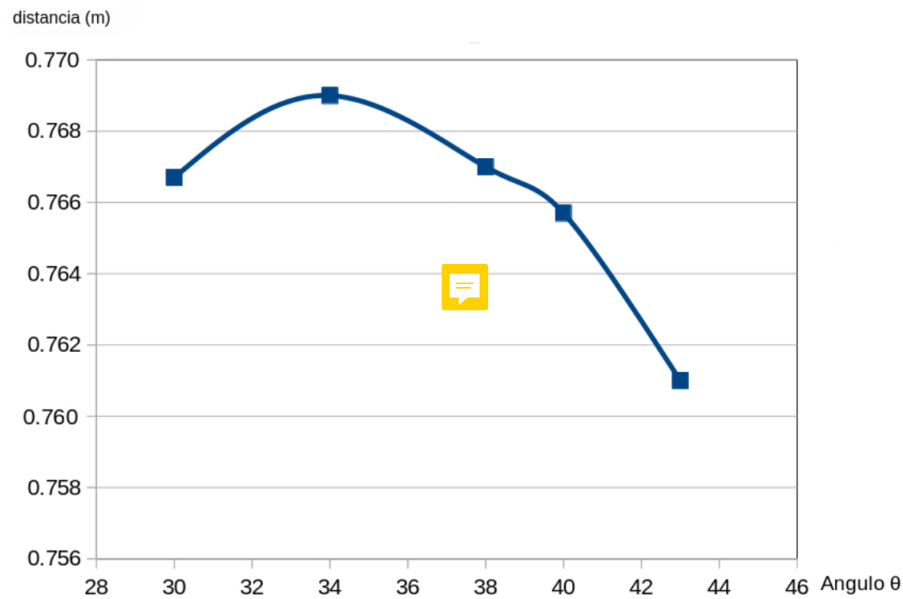
$$\theta = 30^\circ \quad incx = |0,7667 - 0,7660| = 0,0007 \text{ m}$$

$$\theta = 34^\circ \quad incx = |0,7690 - 0,7680| = 0,0010 \text{ m}$$

$$\theta = 38^\circ \quad incx = |0,7670 - 0,7660| = 0,0010 \text{ m}$$

$$\theta = 40^\circ \quad incx = |0,7657 - 0,7650| = 0,0007 \text{ m}$$

$$\theta = 43^\circ \quad incx = |0,7610 - 0,7600| = 0,0010 \text{ m}$$



Para ter uma representação apresentamos os resultados num gráfico de modo a ver a dispersão dos resultados organizados num sistema de eixos representados pelas suas unidades.

Como podemos ver a distância percorrida pelo corpo é representada por uma parábola. Também conseguimos confirmar que $\theta_{max} = 34,0^\circ \pm 1,0^\circ$

$$\theta_{max} = \arctg \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 9,8 \cdot (0,1302 - 0,000)}{2,222^2}}} \right) = 39,1^\circ$$

Logo, concluímos que $\theta_{max} = 39^\circ \pm 1^\circ$

Para concluir a experiência calculamos a precisão usando a fórmula:

$$erro = \frac{39,1}{34} * 100 = 1,15 \%$$

Como o erro é inferior a 10% concluímos que o resultado é preciso

Parte C - Pêndulo Balístico: Método alternativo para determinação da Velocidade Inicial de um Projétil

Após todos os resultados estarem anotados, calculamos a média dos ângulos registrados:

$$x_{\theta} = \frac{14,5+15,5+14,0+14,7+15,0}{5} = 14,7^{\circ}$$

Em seguida calculamos os desvios de cada ângulo:

$$\sigma_1 = |14,5 - 14,7| = 0,2^{\circ}$$

$$\sigma_2 = |15,5 - 14,7| = 0,7^{\circ}$$

$$\sigma_3 = |14,0 - 14,7| = 0,7^{\circ}$$

$$\sigma_4 = |14,7 - 14,7| = 0,0^{\circ}$$

$$\sigma_5 = |15,0 - 14,7| = 0,3^{\circ}$$

Em seguida convertemos cada ângulo e a sua média para radianos:

$$14,7^{\circ} = 0,2566 \text{ radianos}$$

$$15,0^{\circ} = 0,2618 \text{ radianos}$$

$$|0,2566 - 0,2618| = 0,0052 \text{ radianos}$$

Para calcular a altura h , fizemos a seguinte conta:

$$h = 0,3030 - 0,3030 * \cos(0,2566) = 0,0099 \text{ m}$$

Agora podemos calcular o erro associado com $l = 0,3030 \text{ m}$

$$\Delta h = \left| \frac{\partial h}{\partial l} \right| \Delta l + \left| \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right| \Delta \alpha$$

$$\Delta h = (1 - \cos(\alpha)) * \Delta l + (l * \sin(\alpha)) * \Delta \alpha$$

$$\Delta h = (1 - \cos(0,2566)) * 0,0005 + (0,3030 * \sin(0,2566)) * 0,0052$$

$$\Delta h = 0,0021 \text{ m}$$

Logo, $h = 0,0099 \pm 0,0021 \text{ m}$

Para concluir apenas precisamos de calcular o valor da velocidade inicial e o erro associado à velocidade. Para isso iremos usar a fórmula (6) utilizando os valores de $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $m = 0,0634 \text{ kg}$, $M = 0,2644 \text{ kg}$ e $h = 0,0099 \text{ m}$

$$v_0 = \frac{0,0634+0,2644}{0,0634} * \sqrt{2 * 9,8 * 0,0099}$$

$$v_0 = 2,28 \text{ m/s}$$

Porém podemos também encontrar o erro associado à velocidade inicial recorrendo aos seguintes cálculos:

$$\Delta v_0 = \left| \frac{\partial v_0}{\partial m} \right| \Delta m + \left| \frac{\partial v_0}{\partial M} \right| \Delta M + \left| \frac{\partial v_0}{\partial h} \right| \Delta h$$

$$\Delta v_0 = \left| \frac{0,2644 * \sqrt{2 * 9,8 * 0,0099}}{0,0634} \right| * 0,0001 + \left| \frac{\sqrt{2 * 9,8 * 0,0099}}{0,0634} \right| * 0,0001 +$$

$$\left| \frac{9,8 * (0,0634 + 0,2644)}{\sqrt{2 * 9,8 * 0,0099} * 0,2644} \right| * 0,0021$$

$$\Delta v_0 = 0,06 \text{ m/s}$$

$$\text{Logo, } \Delta v_0 = 2,28 \pm 0,06 \text{ m/s}$$

Agora que temos todos os valores podemos calcular o erro relativo e ver se os resultados apontados são precisos:

$$\text{erro} = \left| \frac{\Delta v_0}{v_0} \right| * 100 = \left| \frac{0,06}{2,28} \right| * 100 = 2,63 \%$$

Como o erro é inferior a 10 % concluímos que o resultado é preciso.

Depois de analisar a experiência realizada verificamos que a fonte de maior erro poderá ser proveniente de um erro sistemático (como a montagem do pêndulo por exemplo) pois o medidor do ângulo é um material analógico às vezes não se conseguia colocar numa posição de 0° .

5 Síntese Conclusiva

Neste trabalho laboratorial verificamos precisão em todos as experiências efetuadas. Na parte A calculamos a velocidade inicial do projétil utilizando um lançador de projéteis colocado na horizontal que nos deu o valor de 2,222 m/s. Na parte B fizemos a análise do alcance do projétil com o alcance deste. Reparamos também que o alcance varia conforme o ângulo, até aos 34° verificamos um alcance maior enquanto que de 38° para a frente o alcance começa a diminuir, a experiência foi revista e chegamos a um resultado preciso. Para concluir o trabalho laboratorial resolvemos a parte C onde calculamos a velocidade inicial do projétil com a utilização de um pêndulo. A velocidade inicial entre a experiência A e C foi comparada e o valor final da velocidade apresenta valores comuns tendo em conta os erros algo que pode ter resultado de diversos fatores externos que terão afetado os resultado como por exemplo o uso de material analógico que poderá ter resultado em leituras não tão precisas como o material digital permitiria.

6 Contribuição dos Autores

Cada um dos membros do grupo contribui para a realização da atividade laboratorial e para a elaboração do relatório. As percentagens finais de participação foram:

- Luis Sousa nMec 108583 - 35%
- Francisco Matos nMec 113726 - 35%
- Daniel Narciso nMec 114525 - 30%