

# Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

## Matemática Discreta 2021/22

### Exame de Recurso

13 de Julho de 2022

1. (4 val.) Considere uma linguagem de primeira ordem com os símbolos de predicado  $F, G, H$  de um argumento e considere as fórmulas

$$\varphi_1 = \neg \exists x (\neg F(x) \wedge \neg G(x)),$$

$$\varphi_2 = \exists x \neg G(x),$$

$$\varphi_3 = \forall x (H(x) \rightarrow \neg F(x)),$$

$$\psi = \exists x \neg H(x).$$

Utilizando método de resolução, mostre que  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi$ .

2. (4 val.)

- a) Com recurso à fórmula binomial, calcule o valor da expressão

$$\sum_{k=0}^{27} \binom{27}{k} (-3)^{2k+1}.$$

- b) Num estante encontram-se cinco livros diferentes em francês, sete livros diferentes em espanhol e onze livros diferentes em português. De quantas maneiras se pode escolher dois livros de línguas diferentes?

3. (3 val.) Seja

$$\frac{1}{2x^2 + x - 1}$$

a série/função geradora da sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Encontre uma fórmula para  $a_n$ .

NOTA.  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^m}.$

4. (4 val.) O polinómio caraterístico de uma equação de recorrência homogênea tem as raízes 2 com multiplicidade dois e 5 com multiplicidade um.

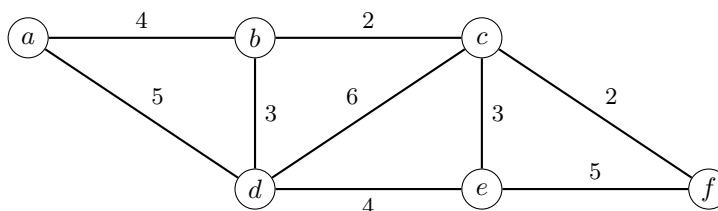
- a) Determine esta equação de recorrência.  
b) Escreva a solução geral desta equação de recorrência.

5. (5 val.)

- a) Seja  $T = (V, E)$  uma árvore finita com  $n$  vértices. Mostre que

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2n - 2.$$

- b) Considere o grafo  $G$  representado na figura a seguir.



- i. Determine um caminho de custo mínimo entre os vértices **a** e **f**, aplicando o algoritmo de Dijkstra. Apresente todos os passos do algoritmo.  
ii. Determine uma árvore abrangente de  $G$  com custo mínimo, aplicando o algoritmo de Kruskal ou o algoritmo de Prim. Apresente todos os passos do algoritmo.