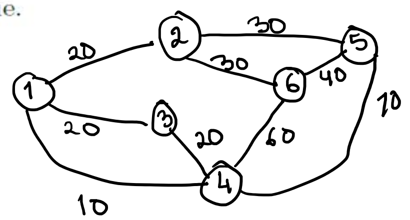
(4) Seja G um grafo simples não orientado, com matriz de custos (ou pesos)

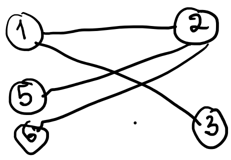
$$C = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 20 & 20 & 10 & \infty & \infty \\ 20 & 0 & \infty & \infty & 30 & 30 \\ 20 & \infty & 0 & 20 & \infty & \infty \\ 10 & \infty & 20 & 0 & 10 & 60 \\ \infty & 30 & \infty & 10 & 0 & 40 \\ \infty & 30 & \infty & 60 & 40 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

a) Indique um subgrafo H de G com 5 vértices que seja bipartido e conexo (apresente uma figura com o subgrafo, identificando os vértices). Determine uma bipartição de H. Justifique.

Não tem ciclos de comprimento ímpar



H

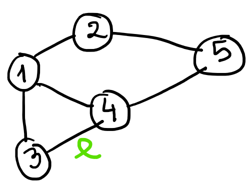


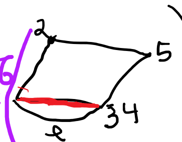
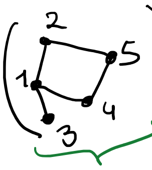
G grafo

H é um subgrafo de G pois $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(H)$. Além disso tem 5 vértices. É conexo porque para quaisquer dois vértices $x, y \in V(H)$, existe em H um caminho a unir x e y. H é bipartido porque $V(H)$ admite a bipartição em (V_1, V_2), com $V_1 = \{1, 5, 6\}$ e $V_2 = \{2, 3\}$ e tal que toda a aresta de H é incidente num vértice de V_1 e num vértice de V_2.

c) Considere o subgrafo F de G induzido pelo subconjunto de arestas $E' = \{12, 13, 14, 25, 34, 45\}$. Determine o número de árvores abrangentes de F, aplicando a fórmula recursiva e indicando em cada passo a aresta selecionada.

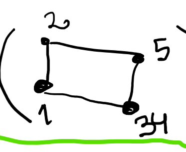
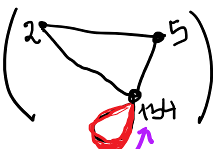
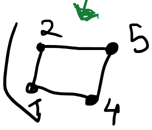
F



$\tau(F) = \tau\Big($  $\Big) + \tau\Big($  $\Big)$

13 é uma ponte

grafo K_1

$= \tau\Big($  $\Big) + \tau\Big($  $\Big) + \tau\Big($  $\Big)\,\tau\Big($  $\Big)$

= 4 (ciclo com 4 arestas)

vértice de corte

= 1

K_1 é uma ...

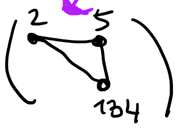
= 4 (ciclo com 4 arestas)

4 arestas)

vértice de corte

K_4 é uma árvore

(ciclo com 4 arestas)

$= 4 + \tau($  $)\ \tau($  $) + 4 = 4+3+4 = 11$

= 1 ciclo com 1 aresta

= 3 ciclo com 3 arestas

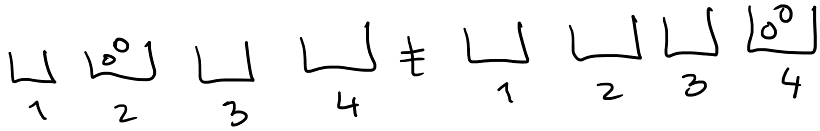
(2) Utilizando séries de potências formais, determine o número de maneiras de distribuir 8 bolas não distinguíveis por 5 caixas numeradas de modo que a primeira caixa recebe no máximo 2 bolas.

ver slide 22

$$f = (1+x+x^2)\,(1+x+x^2+\dots+x^8)$$

caixas iguais:

caixas diferentes:



Podemos considerar a série (ou função) geradora escrita na forma

$$f = (1+x+x^2)\,(1+x+x^2+\dots+x^8)^4$$

ou na forma

$$f = (1+x+x^2)\,(1+x+x^2+\dots+x^8+\dots)^4$$

Termos de ordem superior a 8. Não vão afetar a resposta a este problema

O número de maneiras de distribuir as 8 bolas coincide com o coeficiente de x^8 quando se efetuam os produtos em f.

Consideremos

$$f = (1+x+x^2)\,(\underbrace{1+x+x^2+\dots}_{\sum_{n=0}^{\infty} x^n})^4.$$

Note-se que

substituir K por $K+3$

$$1+x+x^2 = \left(\sum_{K=0}^{\infty} x^K\right) - \sum_{K=3}^{\infty} x^K$$

$K+3=3 \Leftrightarrow K=0$

$$= \sum^{\infty} x^K - \sum^{\infty} x^{K+3}$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} x^K - \sum_{K=0}^{\infty} x^{K+3} \qquad \Leftrightarrow K=0$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} x^K - x^3 \sum_{K=0}^{\infty} x^K = (1-x^3)\left(\sum_{K=0}^{\infty} x^K\right)$$

Então $\mathcal{A} = (1-x^3)\left(\sum_{K=0}^{\infty} x^K\right)\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^4}$

$$= \frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{4+i-1}{i}x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{3+i}{i}x^i$$

$$= (1-x^3)\left(\sum_{K=0}^{\infty} x^K\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{3+i}{i}x^i\right)$$

$$= (1-x^3)\sum_{K,i=0}^{\infty}\binom{3+i}{i}x^{K+i}$$

$$= \sum_{K,i=0}^{\infty}\binom{3+i}{i}x^{K+i} - \sum_{K,i=0}^{\infty}\binom{3+i}{i}x^{K+i+3}$$

1º somatório:

coeficiente de x^8: $\begin{cases} K+i=8 \\ K=8-i \end{cases}$

$$\sum_{i=0}^{8}\binom{3+i}{i}$$

i	$K=8-i$	$\binom{3+i}{i}$
0	8	
1	7	
⋮	⋮	
8	0	

2º somatório:

coeficiente de x^8:

$(K+i+3=8 \Leftrightarrow K+i=5)$

$$\sum_{i=0}^{5}\binom{3+i}{i}$$

i	$K = 5-i$	$\binom{3+i}{i}$
0	5	
1	4	
⋮	⋮	
5	0	

coeficiente de x^8 em $\mathcal{A}$:

$$\sum_{i=0}^{8}\binom{3+i}{i} - \sum_{i=0}^{5}\binom{3+i}{i} = \sum_{i=6}^{8}\binom{3+i}{i}$$

$$= \binom{9}{6} + \binom{10}{7} + \binom{11}{8} = \dots \quad \text{contas}$$

OBS: Vamos supor que tinhamos que determinar a série geradora.

$$f_0 = (1-x^3)\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)}_{=\frac{1}{1-x}} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^4}_{=\frac{1}{(1-x)^4}}$$

usamos $\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$

$$= \frac{1-x^3}{(1-x)^5}$$

série geradora (escrita na forma racional, isto é, quociente de polinómios.

Ex: $1+x+x^2$, $\frac{2+x}{x^2+x^3}$, $\frac{(2+x^2)(1+x)}{1-x}$, etc.)