



universidade
de aveiro

CLASSIFICAÇÃO: 17.1

Bobinas de Helmholtz Relatório

Mecânica e Campo Eletromagnético (MCE)
Departamento de Física
Ano Letivo 2023/2024

Turma: PL1, grupo 2

108583 Luís Barros Ferreira de Sousa
114525 Daniel Costeira Narciso

Contents

1	Sumário	2
2	Introdução Teórica	3
3	Procedimento Experimental	8
4	Análise e Tratamento de Dados Experimentais	10
4.0.1	Parte A - Calibração da sonda de Hall	10
4.0.2	Parte B - Verificação do princípio da sobreposição para o campo magnético	12
5	Síntese Conclusiva	16
6	Bibliografia	17

1 Sumário

Neste relatório pretendemos aprofundar o nosso conhecimento na área do campo eletromagnético estudando diferentes campos eletromagnéticos e as suas respectivas características. Para tal estudo vão ser efetuadas duas atividades experimentais, uma consiste na utilização de uma sonda de efeito de Hall por meio de um solenóide padrão e a outra consiste em medir o campo magnético ao longo do eixo de duas bobinas.

Após estas experiências devemos conseguir encontrar a constante de calibração na parte A e encontrar o número de espiras na parte B. Na parte B também conseguiremos provar o princípio da sobreposição

2 Introdução Teórica

Produção de campos magnéticos a partir de correntes: o solenoide padrão

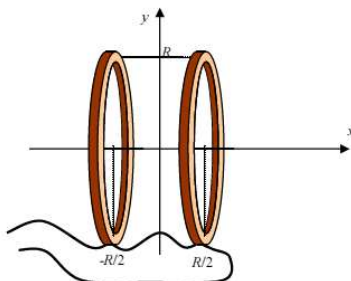
Correntes elétricas e cargas em movimento produzem campos magnéticos que podem ser calculados através da Lei de Biot-Savart ou através da Lei de Ampère. Do ponto de vista físico, o solenoide pode considerar-se como um conjunto de anéis idênticos, alinhados lado a lado e percorridos pela mesma corrente I_s . No caso de um solenoide de comprimento infinito, a expressão do campo magnético no seu interior tem apenas a componente longitudinal (isto é, paralela ao eixo principal) e é dada por:

$$B_{sol} = \mu_0 \frac{N}{l} I_s$$

sendo N/l o número de espiras por unidade de comprimento do solenoide, I_s , a corrente elétrica que o percorre e a constante μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Tm/A). Esta expressão pode considerar-se válida para um solenoide finito, cujo comprimento é muito maior que o raio, $l \gg R$. Um enrolamento deste tipo designa-se por solenoide-padrão

Produção de campos magnéticos a partir de correntes: o solenoide padrão

As bobinas de Helmholtz são um outro dispositivo que, sendo constituído por dois enrolamentos paralelos em que $R \gg l$, parecem-se bastante mais com anéis de corrente do que com solenoides-padrão, permitindo criar, no espaço entre esses enrolamentos e ao longo do respetivo eixo, um campo magnético muito mais uniforme do que o campo devido a apenas um enrolamento (bobina).

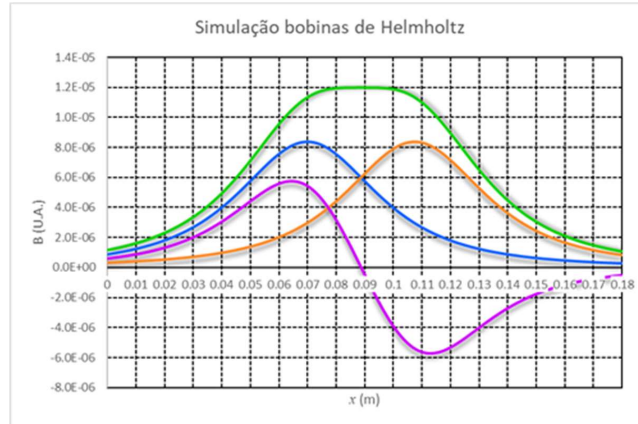


Esquema representativo do posicionamento das bobinas a uma distância R

Esta característica consegue-se desde que as bobinas sejam idênticas (mesmo raio e número de espiras), paralelas, coaxiais e estejam situadas entre si a uma distância igual ao seu raio, sendo ainda percorridas por correntes iguais e com o mesmo sentido. Nesta configuração é possível obter uma expressão para o campo magnético criado pelas duas bobinas num ponto x genérico do seu eixo, a partir da expressão do campo magnético no eixo de um anel de corrente (centrado em $x = x_0$)

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + (x - x_0)^2)^{3/2}} \hat{x}$$

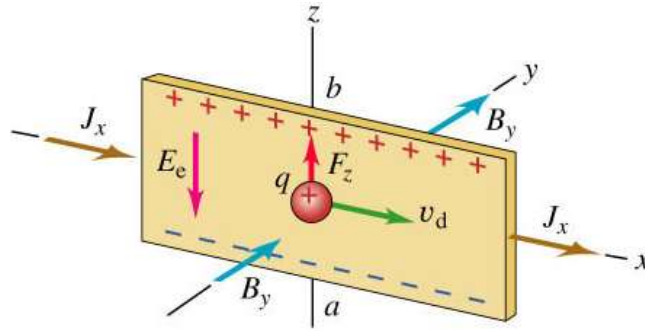
Se $B_H(x)$ é a expressão do campo criado pelas Bobinas de Helmholtz pode deduzir-se que o campo magnético atinge o seu valor máximo, $B_{Hmáx}$, no ponto médio da porção do eixo entre as bobinas ($x = 0$, na Figura 1), considerando que o campo total é a soma dos campos de cada bobina $\vec{B}_{Htotal} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Analisando a variação do valor de B_H ao longo do eixo, pode ainda concluir-se que o valor de B_H não é inferior a 95% de $B_{Hmáx}$, sendo, em 60% dessa mesma secção, superior a 99% de $B_{Hmáx}$. Usando a Equação 2, a representação gráfica do campo magnético $\vec{B}_{Htotal}(x) = \vec{B}_1(x) + \vec{B}_2(x)$ ao longo do eixo de duas bobines na configuração de Helmholtz para as várias correntes possíveis é a seguinte



$B(x)$ na configuração de Helmholtz

Medição de campos magnéticos usando uma sonda de efeito de Hall

Para medir campos magnéticos utiliza-se o efeito que este campo produz em cargas elétricas em movimento, através da força magnética – Efeito Hall. Consideremos um bloco retangular de um semicondutor percorrido por uma corrente I_H (J_x) e colocado num campo magnético, B , como se mostra na seguinte figura



Geometria utilizada para medir o efeito de Hall

Os portadores de carga móveis, com carga q e velocidade de arrastamento v_d , vão necessariamente sentir o efeito da força magnética \vec{F}_{mag} dada pela equação (Força de Lorentz)

$$\vec{F}_{mag} = q\vec{v}_d * \vec{B} = qvB\hat{z}$$

Num semicondutor, os portadores de carga podem ser positivos ou negativos, dependendo da estrutura do material. Aqui vamos considerar o caso em que são positivos (Como se pode ver na figura). Sob a ação da força magnética estes portadores vão deflectir a sua trajetória, acumulando-se na face superior do semicondutor, produzindo uma diferença de potencial entre as faces superior e inferior do semicondutor (ao longo do eixo-zz), originando assim um campo elétrico interno, segundo a direção do eixo-zz e sentido negativo (-zz). Ficam, então, sujeitos a uma outra força, neste caso elétrica, dada por:

$$\vec{F}_E = -qE\hat{z}$$

que se opõe à força magnética. Na situação de equilíbrio as duas forças igualam-se e resulta que:

$$qE = qv_v B$$

o que permite calcular a diferença de potencial que se originou entre as duas faces do semiconductor, que se designa, normalmente, por tensão de Hall, V_H . Admitindo que o campo elétrico é uniforme temos $V_H = Ea$ onde a é a dimensão do bloco na direção zz (na Figura ab). Então podemos escrever

$$qE = q \frac{V_H}{a} = qvB \rightarrow V_H = vaB$$

Num semiconductor, a relação entre corrente e velocidade dos portadores (velocidade de arrastamento) é dada pelo fluxo de portadores de carga através da superfície perpendicular à direção da corrente,

$$I_H = nqv \rightarrow V_H = v = \frac{I_H}{nq}$$

Substituindo na Equação (6) resulta

$$V_H \propto I_H B$$

ou seja, a tensão de Hall, V_H , é proporcional à corrente de Hall I_H que percorre o material e ao campo magnético externo, $|\vec{B}|$. Assim, para um dado valor I_H constante, V_H é proporcional a B. Esta relação é utilizada para medir o campo magnético, através de um dispositivo que, por utilizar o efeito de Hall e permitir medir e sondar os valores do campo magnético, se designa por sonda de Hall.

Para medir campos magnéticos com uma sonda de Hall é preciso calibrar a sonda, ou seja, determinar a constante de proporcionalidade (ou constante de calibração) para uma dada sonda entre V_H e B

$$B = C_c V_H$$

Para isso, usamos um dispositivo que nos dá um valor de B uniforme e reprodutível – o solenoide-padrão.

Importante:

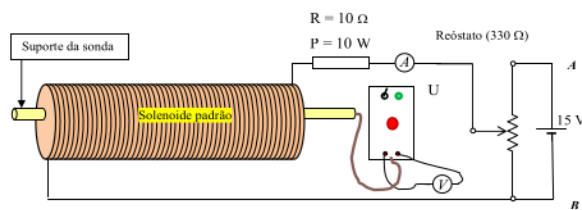
- Esta constante de calibração é válida apenas para a sonda particular que está a ser usada e não podemos extrapolar para outras sondas.
- No caso dos materiais em que os portadores de carga são negativos, por exemplo, metais, a força magnética tem o mesmo sentido que o da Figura 3 e, portanto, agora é a carga negativa que se acumula na parte superior da amostra e a tensão de Hall muda de sinal. Deste modo podemos identificar e caracterizar o sinal dos portadores de carga em materiais desconhecidos.

3 Procedimento Experimental

Parte A

Calibração da sonda de Hall

Na primeira parte da experiência, começou-se por montar um circuito elétrico fechado de modo a que a corrente passa-se na sonda. Depois, ligaram-se os terminais da sonda à entrada do amplificador e também se ligou um voltímetro à saída do amplificador. Em seguida, verificou-se se a tensão era nula e procedeu-se à montagem do circuito, utilizando um solenóide-padrão e um reóstato



Esquema da montagem experimental disponível na aula

Material utilizado:

- Amperímetro
- Voltímetro
- Fonte de Alimentação Simétrica
- Solenóide Padrão
- Reostato

Parte B

Verificação do princípio da sobreposição para o campo magnético

Na Parte B do trabalho, as bobinas foram colocadas na disposição geométrica de Helmholtz, que permaneceu inalterada ao longo da parte. A intensidade da corrente foi ajustada para $I = (0,50 \pm 0,01)A$, valor que foi mantido constante durante toda a parte.

O campo magnético ao longo do eixo de uma bobina foi medido usando uma sonda de Hall. O processo foi repetido para a outra bobina e para as duas bobinas em série.

Material utilizado:

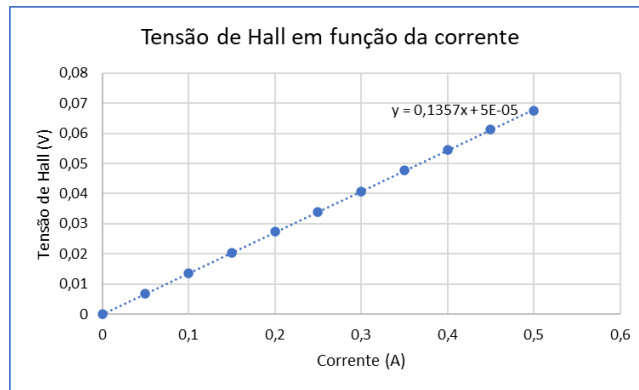
- Amperímetro
- Voltímetro
- Fonte de Alimentação Simétrica
- Reóstato
- Bobinas

4 Análise e Tratamento de Dados Experimentais

Parte A - Calibração da sonda de Hall

Para a realização desta experiência tivemos que medir o comprimento do solenóide ($23,00 \pm 0,05$ cm). Registamos também o valor de $\frac{N}{L} = 3467 \pm 60$ espiras do solenóide. Também verificamos se o V_H não permanecia nulo na ausência do campo magnético ajustando a tensão residual no potenciômetro. Após esses passos inserimos a sonda no solenóide de modo a que esta se encontre num ponto do eixo que minimize a aproximação de solenóide infinito e registamos a corrente I_s e a tensão V_H tendo em conta os respectivos erros ($I_s = \pm 0,01$ A e $V_H = \pm 0,0001$ V)

Tensão, V_H (V)	Intensidade do solenoide, I_s (A)
0,0000	0,00
0,0068	0,05
0,0135	0,10
0,0204	0,15
0,0273	0,20
0,0339	0,25
0,0408	0,30
0,0478	0,35
0,0545	0,40
0,0612	0,45
0,0675	0,50



Após a representação gráfica da tensão de Hall em função da intensidade, tivemos de calcular o declive da função para sermos capazes de obter a Constante de Calibração, este foi nos dado pelo uso de funções do EXCEL.

$$y = 0,1357x + 0,00005$$

Com este declive podemos proceder para determinar a constante de calibração (C_c),

$$C_c = \frac{\mu_0 * \frac{N}{l}}{m} = \frac{4\pi * 10^{-7} * 3467}{0,1357} = 0,0321 V/A$$

Agora que calculamos esta constante precisamos de calcular o erro associado aplicando a formula

$$\Delta C_c = \left| \frac{dC_c}{dm} * \Delta m \right| + \left| \frac{\Delta C_c}{d \frac{N}{l}} * \Delta \frac{N}{l} \right|$$

$$\frac{dC_c}{dm} = \frac{N}{l} * \left(-\frac{\mu_0}{m^2} \right) = 3467 * \left(-\frac{4\pi * 10^{-7}}{0,1357^2} \right) \approx -0,2366$$

$$\Delta m = |m| * \sqrt{\frac{\frac{1}{R^2} - 1}{N - 2}} = 0,1357 * \sqrt{\frac{\frac{1}{0,9999} - 1}{10 - 2}} \approx 0,0005 V/A$$

Agora podemos colocar esses valores na fórmula de modo a encontrar o erro associado

$$\Delta C_c = |-0,2366 * 0,0005| + \left| \frac{4\pi * 10^{-7}}{0,1357} * 0,0321 \right| \approx 0,0001 T/V$$

Logo a constante de calibração terá o valor de $C_c = 0,0321 \pm 0,0001 T/V$

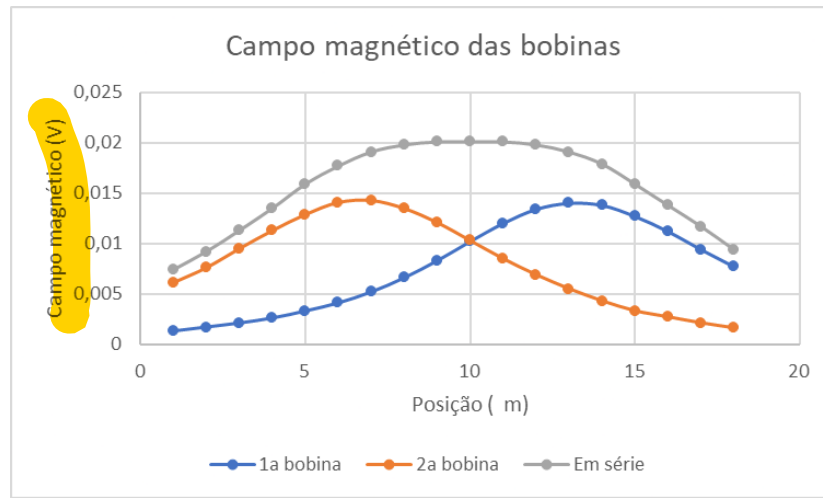
Para dar a experiência como concluída iremos calcular o erro relativo de modo a provar que o resultado foi preciso para isso o erro terá de tomar um valor inferior a 10%

$$\text{erro relativo} = \left| \frac{0,0001}{0,0321} \right| * 100 = 0,3\%$$

Parte B - Verificação do princípio da sobreposição para o campo magnético

Para a realização desta experiência medimos o raio das bobinas e procedemos para o ajuste desta uma distância igual à do raio medido. Os multímetros foram alterados para medirem a intensidade e a tensão. De modo a que a intensidade fosse igual a 0,50 A (tomando em conta o erro de $\pm 0,01$ A) foi ajustada a resistência tendo em conta os respetivos erros ($distancia = \pm 0,0005$ m e $V_H = \pm 0,0001$ V)

distancia (m)	1a bobina (V)	2a bobina (V)	Em série (V)
0,0500	0,0013	0,0061	0,0074
0,0600	0,0017	0,0076	0,0092
0,0700	0,0021	0,0095	0,0113
0,0800	0,0026	0,0113	0,0135
0,0900	0,0033	0,0129	0,0159
0,1000	0,0041	0,0141	0,0177
0,1100	0,0052	0,0143	0,0191
0,1200	0,0066	0,0135	0,0198
0,1300	0,0083	0,0121	0,0201
0,1400	0,0102	0,0103	0,0201
0,1500	0,0120	0,0085	0,0201
0,1600	0,0134	0,0069	0,0198
0,1700	0,0140	0,0055	0,0191
0,1800	0,0138	0,0043	0,0179
0,1900	0,0127	0,0033	0,0159
0,2000	0,0112	0,0027	0,0138
0,2100	0,0094	0,0021	0,0117
0,2200	0,0077	0,0016	0,0094

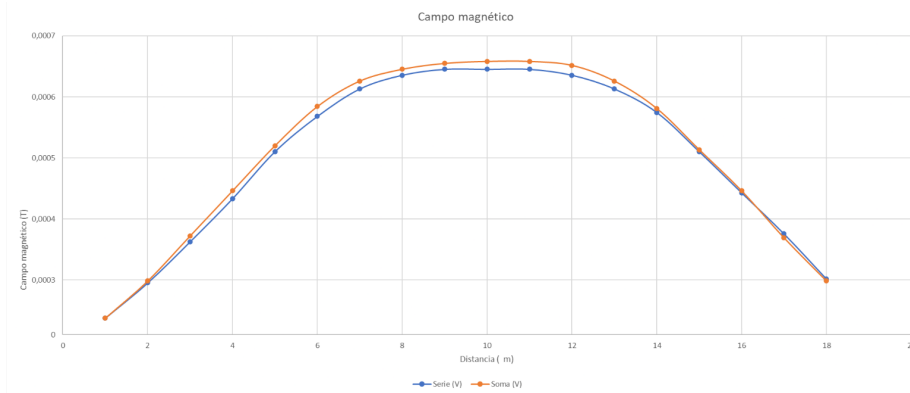


A partir da experiência A conseguimos calcular a Constante de calibração que será-nos essencial para calcular o campo magnético

$$B = C_c * V_H \Leftrightarrow \frac{B}{V_H} = C_c \Leftrightarrow C_c = \frac{\mu_0 * \frac{N}{L} * I}{V_H} \Leftrightarrow C_c = \frac{\mu_0 * \frac{N}{L}}{m} \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 * \frac{N}{L}}{m} * V_H$$

Usando a variável $C_c = 0,0321 \pm 0,0001$ T/V podemos completar a tabela tendo em conta os respetivos erros (distancia = $\pm 0,0005$ m)

distancia (m)	1a bobina (T)	2a bobina (T)	Em serie (T)	Soma bobinas (T)
0.0500	0.00004173	0.00019581	0.00023754	0.00023754
0.0600	0.00005457	0.00024396	0.00029532	0.00029853
0.0700	0.00006741	0.00030495	0.00036273	0.00037236
0.0800	0.00008346	0.00036273	0.00043335	0.00044619
0.0900	0.00010593	0.00041409	0.00051039	0.00052002
0.1000	0.00013161	0.00045261	0.00056817	0.00058422
0.1100	0.00016692	0.00045903	0.00061311	0.00062595
0.1200	0.00021186	0.00043335	0.00063558	0.00064521
0.1300	0.00026643	0.00038841	0.00064521	0.00065484
0.1400	0.00032742	0.00033063	0.00064521	0.00065805
0.1500	0.00038520	0.00027285	0.00064521	0.00065805
0.1600	0.00043014	0.00022149	0.00063558	0.00065163
0.1700	0.00044940	0.00017655	0.00061311	0.00062595
0.1800	0.00044298	0.00013803	0.00057459	0.00058101
0.1900	0.00040767	0.00010593	0.00051039	0.00051360
0.2000	0.00035952	0.00008667	0.00044298	0.00044619
0.2100	0.00030174	0.00006741	0.00037557	0.00036915
0.2200	0.00024717	0.00005136	0.00030174	0.00029853



Por meio desses gráficos, podemos corroborar a validade do princípio da sobreposição, no qual o campo magnético total gerado por múltiplas cargas é a soma dos campos magnéticos produzidos individualmente.

Após a realização da experiência, temos todos os dados para podermos calcular o número de espiras visto que conhecemos o valor do campo magnético teórico e prático.

O valor do campo magnético prático, B_p , é obtido através do cálculo da média dos valores do campo magnético já registados:

$$B_t = \frac{\mu_0}{2} * \frac{IR^2}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi*10^{-7}}{2} * \frac{0,5*0,0650^2}{(0,0650^2+0^2)^{\frac{3}{2}}} = 4,833 * 10^{-6}T$$

$$\Delta B = \left| \frac{dB}{dl} * \Delta l \right| + \left| \frac{dB}{dR} * \Delta R \right|$$

$$\frac{dB}{dl} = l' * \frac{\mu_0 R^2}{2R^3} = \frac{4\pi*10^{-7}*0,0650^2}{2*0,0650^3} = 9,7 * 10^{-6}$$

$$\frac{dB}{dR} = \left(\frac{R^2}{R^3} \right)' * \frac{\mu_0 I}{2} = -\frac{1}{0,0650^2} * \frac{4\pi*10^{-7}*0,50}{2} = -7,4 * 10^{-5}$$

$$\Delta B = \left| 9,7 * 10^{-6} * 0,0100 \right| + \left| -7,4 * 10^{-5} * 0,0005 \right| = 1,34 * 10^{-7}T$$

Como sabemos $V_H = 14,0 \text{ mV}$ podemos calcular o campo magnético máximo:

$$B = C_c V_H = 0,0321 * 0,0140 = 0,0004494T$$

Esse valor representa o campo magnético para uma espira e assim podemos finalmente calcular o número de espiras na bobina

$$B = N * B_t \Leftrightarrow N = \frac{B_p}{B_t} \Leftrightarrow N = \frac{0,0004494}{4,833*10^{-6}} \approx 92 \text{ espiras}$$

Temos ainda que proceder para a verificação do erro associado ao número de espiras recorrendo à formula

$$\Delta N_{\text{espiras}} = \left| \frac{dN_e}{dB_{max}} * \Delta B_{max} \right| + \left| \frac{dN_e}{dB} * \Delta B \right|$$

$$\frac{dN_e}{dB_{max}} = (B_{max})' * \frac{1}{B} = 1 * \frac{1}{0,0004494} = 2225,2$$

$$\frac{dN_e}{dB} = B_{max} + \left(\frac{1}{B}\right)' = 0,0004494 * \left(-\frac{1}{(4,8*10^{-6})^2}\right) = -19505208,3$$

$$\Delta B_{max} = \left| \frac{dB_{max}}{dC_c} * \Delta C_c \right| + \left| \frac{dB_{max}}{dB} * \Delta B \right|$$

$$\frac{dB_{max}}{dC_c} = C'_c V_H = 1 * 0,0140 = 0,0140$$

$$\frac{dB_{max}}{dV_H} = C_c V'_H = 0,0321 * 1 = 0,0321$$

$$\Delta B_{max} = 0,0140 * 0,0007 + 0,0321 * 0,0001 = 1,301 * 10^{-5}$$

$$\Delta N_{\text{espiras}} = \left| 2225,2 * 1,301 * 10^{-5} \right| + \left| -19505208,3 * 1,34 * 10^{-7} \right| \approx 3 \text{ espiras}$$

Logo o número de espiras da bobina é 92 ± 3 espiras

Para dar a experiência como concluída iremos calcular o erro relativo de modo a provar que o resultado foi preciso para isso o erro terá de tomar um valor inferior a 10%

$$\text{erro relativo} = \left| \frac{3}{92} \right| * 100 = 3\%$$

5 Síntese Conclusiva

Através desta experiência prática foram aprofundados e consolidados conhecimentos adquiridos durante as aulas de MCE.

Os objetivos foram quase todos concluídos com sucesso, ou seja, na parte A encontramos o valor da constante de calibração, $C_c = 0,0321 \pm 0,0001$ T/V com um erro correspondente a 0,3%, ou seja, foi um sucesso tendo sido abaixo de 10%. Na parte B demonstramos o princípio da sobreposição do campo magnético e calculamos o número de espiras, chegando a um valores de 92 ± 3 espiras com um erro correspondente a 3% ou seja outro sucesso.

Contribuições:

- Luis Sousa nMec 108583 - 70%
- Daniel Narciso nMec 114525 - 30%

6 Bibliografia

1. Serway, R. A., *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*, Saunder College Publishing, 2000.
2. *MCE23-24_T2_BobinasHelmholtz_v3.pdf*, Departamento de Física.