

Aritmética entera y modular. Polinomios

Ejercicio 1. Tenemos tres garrafas, con capacidades de 21, 35 y 45 litros. Vamos a una fuente a por agua, y queremos traer 17 litros. Antes de salir, nos piden que traigamos además 9 litros. ¿Sería posible, en un solo viaje, regasar con 17 litros en una garrafa y 9 en la otra?

Caso de ser posible, explica el procedimiento para lograrlo.

Ejercicio 2. Sea a el número formado por las tres últimas cifras de tu DNI. Resuelve el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{aligned}(a^2 + 4)x &\equiv 11 \pmod{27} \\ 26x &\equiv 40 \pmod{56} \\ 7x &\equiv 9 \pmod{55} \\ 19^{470}x &\equiv 21 \pmod{53}\end{aligned}$$

Ejercicio 3 (El problema del mono y los cocos).

Cinco hombres y un mono naufragan en una isla desierta. Durante el primer día los hombres se dedican a recoger cocos. Al final del día deciden dejar el reparto para el día siguiente. Por la noche, uno de ellos despierta y, desconfiado, decide separar su parte. Divide los cocos en cinco montones, toma su parte y, como sobra un coco, se lo da al mono. Poco después, un segundo náutico se despierta y hace lo mismo. Al dividir los cocos en cinco montones, vuelve a sobrar un coco y también se lo da al mono. Uno tras otro, el tercero, cuarto y quinto náuticos hacen lo mismo. Al día siguiente por la mañana, dividen los cocos en cinco montones sin que sobre ninguno. ¿Cuántos cocos se habían recolectado inicialmente?

Ejercicio 4. Factoriza los siguientes polinomios:

- $p(x) = x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}_2[x]$, donde $a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ es tu fecha de nacimiento en formato ddmmaa.
- $q(x) = x^9 + 2x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

Ejercicio 5. Sea $A = \mathbb{Z}_5[x]_{x^4+x^3+3x^2+4}$.

- ¿Cuántos elementos tiene A ?
- ¿Es A un cuerpo?
- Realiza en A , si es posible, los siguientes cálculos:
 - $(3x^3 + 4x^2 + x + 2) \cdot (4x^3 + x^2 + 2)$.
 - $(2x^2 + 1) \cdot (x^3 + 3x^2 + 2) + (2x^3 + 3x + 3)^{-1}(x^3 + 2)^2$.
 - $(2x^3 + x^2 + x + 4)^{-1} \cdot (x^3 + x)$.
- Calcula un elemento $\alpha \in A$ tal que

$$(x^3 + x + 2)(\alpha + x) = \alpha(4x^3 + 4x^2 + 3) + (x^2 + 1).$$