Ejercicio 1.

1| Una matriz es regular si tiene inversa

Estudiamos si tiene inversa, para que tenga el $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 10 + 6 - 9 - 8 = -1 \neq 0$$

Sí tiene

Para calcularla $A^{-1} = \dfrac{adj(A)^t}{|A|}$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} +(-12-(10)) & -(-4+5) & +(2-3) \\ -(-8-(6)) & +(0+3) & -(0-2) \\ +(-10-(9)) & -(0+3) & +(0-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$adj(A)^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Teniendo $G = \{(1,1,1), (-1,0,1), (1,2,2), (2,1,0)\}$

Para comprobarlo planteamos un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ teniendo que encontrar escalares a, b, c y d tal que:

$$a\cdot(1,1,1) + b\cdot(-1,0,1) + c\cdot(1,2,2) + d\cdot(2,1,0)$$

lo que se convierte en estudiar

$$\begin{cases} a + (-b) + c + 2d = x \\ a + 2c + d = y \\ a + b + 2c = z \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo el rango de A, para ello realizo su forma escalonada por columna

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{21}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{C_{41}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_{42}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_{23}(2) \\ C_3(-1)}]{C_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 3 y por tanto el de la ampliada también es 3, no puede ser mayor.

Por lo tanto es un sistema compatible, luego cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de los que tenemos

Por lo tanto G si es un sist. de Generadores

3. Para que B sea base debe ser un sist. de generadores, cosa que ya sabemos que lo es.
Y los vectores de B deben ser linealmente independientes.

En el apartado anterior obtuvimos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De lo que deducimos que el último vector es linealmente dependiente y nuestra base será

$$B = \{(1,1,1), (-1,0,1), (1,2,2)\}$$

4. Calculamos $M_{B \to B_C'}$ sabiendo que:

$$M_{B \to B_C'} = M_{B' \to B_C} \cdot M_{B \to B'}$$

Sabemos que $M_{B \to BC}$ es B colocada por columnas (C) y $M_{B \to B'} = A$

~~$M_{B'}$~~ Por lo tanto $C = M_{B' \to BC} \cdot A$

$$C \cdot A^{-1} = M_{B' \to B_C} \, A \cdot A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -6 & 5 \\ 5 & -9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B' = \{(2,4,5), (-1,-6,-9), (0,5,8)\}$$

5. Si u tiene coordenadas $(1,2,3)$ en la base B' significa:

$$u = 1\cdot(2,4,5) + 2\cdot(-1,-6,-9) + 3\cdot(0,5,8) =$$
$$= (0,7,11)$$

¿Cuáles son sus coordenadas en B?

Sabiendo que $M_{B\to B'} = A$

$M_{B'\to B} = A^{-1}$ Por lo tantos sus coordenadas en B:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobarlo

$$u = 1\cdot(1,1,1) + 4\cdot(-1,0,1) + 3\cdot(1,2,2) = (0,7,11)$$

6.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$-2y + 3z - x - 3y + 5z - x - 2y + 4z = 2x - 2y + z$$
$$+ x - 3y + 3z + x - 2y + 2z$$

$$-2x - 7y + 12z = 4x - 7y + 6z$$

$$-6x + 6z = 0 \quad \text{Todos los que la cumplan}$$

Ejercicio 2.

1. Calcularemos una base para cada uno

Comenzamos calculando la base de U, la obtendremos a partir del sistema de generadores

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos como base de U

$$B_u = \{(1,0,1,1),(0,1,0,0)\}$$

$$\dim(u) = 2$$

Para W, observo si las 3 ecuaciones son linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x + z + t = 0$$
$$y + 2t = 0$$

Por lo tanto el subespacio W tiene ecuaciones:

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + 2t = 0 \end{cases} \qquad \dim(w) = 4 - 2 = 2$$

$$\begin{aligned} x &= 2z + 2t \quad / \ 2a + 2b \\ y &= t \quad / \ b \\ z &= a \\ t &= b \end{aligned}$$

$$B_w = (2,0,1,0),(2,1,0,1)\}$$

Por lo tanto tenemos $B_u = \{(1,0,1,1),(0,1,0,0)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2x+z \\ 0 & 0 & 2x+t \end{pmatrix}$$

Nos queda que un vector (x,y,z,t) pertenece a U sí

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ 2x + t = 0 \end{cases}$$ Ecuaciones cartesianas de U

Y las cartesianas de W son

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + 2t = 0 \end{cases}$$ ~~Ecuaciones~~

Comencemos calculando $u \cap w$

$$u \cap w = \begin{cases} 2x + z = 0 \\ 2x + t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ y + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u \cap w \begin{cases} x + 2t = 0 \\ y + 2t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases}$$ $\dim(u \cap w) = 4 - 3 = 1$

Por lo tanto la base de $\mathcal{U} \cap W$:

$$B_{\mathcal{U} \cap W} = \{(1,1,1,1)\}$$

Para $\mathcal{U} + W$ uno las bases de $\mathcal{U}$ y W

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{41}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{42}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{34}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{43}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{x} + 2t = 0 \\ \cancel{y = 0} \\ z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$B_{\mathcal{U} + W} = \{(1,0,0,2), (0,1,0,0), (0,0,1,2)\}$$

~~Puesto que dim (u + w)~~

$$\dim(\mathcal{U} + W) = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 2 & 0 & 2 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 2 & t+x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & t+x+z \end{pmatrix}$$

Hago la última fila nula para rango = 3

Por lo que Ecuaciones cartesianas de $\mathcal{U} + W$:

$$\{ t + x + z = 0$$

2. Vector $(1,0,0,2)$ *

Escribo $(1,0,0,2)$ como suma de un vector de U y uno de W

$$(1,0,0,2) = \underbrace{a\cdot(1,0,1,1) + b\cdot(0,1,0,0)}_{U} + \underbrace{c\cdot(2,0,1,0) + d\cdot(2,1,0,1)}_{W}$$

* Las ecuaciones cartesianas de $U+W$

$$\{\, x + \quad + z + t = 0$$

Con $(1,0,0,2)$ Se cumple, luego pertenece a $U+W$

$$1 + 0 + 2 = 0$$

Con $(1,1,2,2)$ No se cumple, No pertenece

$$1 + 2 + 2 = 2$$

Ejercicio 3.

1) Si $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ significa $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_2$

$\{\emptyset\} = V_1 \cap V_2$

Obtengamos las cartesianas de V_1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$\dim(V_1) = 3 - 2 = 1$

$V_2 \equiv x - z = 0 \qquad \dim(V_2) = 3 - 1 = 2$

$$V_1 \cap V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad B_{V_1 \cap V_2} = \{\emptyset\}$$

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

$$3 = 1 + 2 - 0$$

Efectivamente se cumplen las condiciones iniciales y por ello $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$

2) Para obtener $A = P D P^{-1}$

P está formada por las columnas de vectores propios.

Obtengamos primero B_{V_1} y B_{V_2}

$V_2 \equiv x - z = 0$ $\quad\quad$ $\dim(V_2) = 2$

$$B_{V_2} = \{(1,0,1),\ (0,1,0)\}$$

$$V_1 \equiv \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad\quad \begin{aligned} x &= 2a \\ y &= -a \\ z &= a \end{aligned}$$

$$B_{V_1} = \{(2,-1,1)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad\quad |P| = -1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad\quad \operatorname{adj}(P) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) $A^{-1} = \dfrac{adj(A)^t}{|A|}$

$|A| = 1 \qquad adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ -3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{22} = \left(P \cdot D \cdot P^{-1}\right)^{22} = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \ldots = PD^{20}P^{-1}$$

$$D^{22} = \begin{pmatrix} 1^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{22} \end{pmatrix}$$

$$A^{22} = P \cdot D^{22} \cdot P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2^{22} & 0 \\ -1 & 0 & 2^{22} \\ 1 & 2^{22} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ($$

$$= \begin{pmatrix} -2^{22}+2 & 0 & 2 \cdot 2^{22} - 2 \\ 2^{22} - 1 & 2^{22} & 2^{22} + 1 \\ -2^{22} + 1 & 0 & 2 \cdot 2^{22} - 1 \end{pmatrix}$$