Independência da Trajetória de Forças Conservativas

O teste principal para determinar se uma força é conservativa ou dissipativa é o seguinte: Deixa-se a força atuar sobre uma partícula que se move ao longo de um *percurso fechado*, ou seja, um caminho que começa e termina na mesma posição. A força é conservativa se e apenas se for nula a energia total transferida durante esse ou qualquer outro percurso fechado. Em outras palavras:

O trabalho total realizado por uma força conservativa sobre uma partícula que se move ao longo de qualquer percurso fechado é nulo.

Os experimentos mostram que a força gravitacional passa neste *teste do percurso fechado*. Um exemplo é o tomate da Fig. 8-2. O tomate deixa o ponto de lançamento com velocidade v_0 e energia cinética $\frac{1}{2}mv_0^2$. A força gravitacional que age sobre o tomate reduz sua velocidade a zero e depois o faz cair de volta. Quando o tomate retorna ao ponto de partida, ele possui novamente uma velocidade v_0 e uma energia cinética $\frac{1}{2}mv_0^2$. Assim, a força gravitacional extrai tanta energia *do* tomate durante a subida quanto fornece energia *ao* tomate durante a descida. O trabalho total realizado sobre o tomate pela força gravitacional durante a viagem de ida e volta é, portanto, nulo.

Uma consequência importante do teste do percurso fechado é a seguinte:

O trabalho realizado por uma força conservativa sobre uma partícula que se move entre dois pontos não depende da trajetória seguida pela partícula.

Suponha, por exemplo, que a partícula se move do ponto *a* para o ponto *b* da Fig. 8-4*a* seguindo a trajetória 1 ou a trajetória 2. Se todas as forças que agem sobre a partícula são conservativas, o trabalho realizado sobre a partícula é o mesmo para as duas trajetórias. Em símbolos, podemos escrever esse resultado como

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}, \qquad (8\text{-}2)$$

em que o índice *ab* indica os pontos inicial e final, respectivamente, e os índices 1 e 2 indicam a trajetória.

Esse resultado é importante porque permite simplificar problemas difíceis quando apenas uma força conservativa está envolvida. Suponha que você precise calcular o trabalho realizado por uma força conservativa ao longo de uma trajetória entre dois pontos, e que o cálculo seja difícil ou mesmo impossível sem informações adicionais. Você pode determinar o trabalho substituindo a trajetória entre esses dois pontos por outra para a qual o cálculo seja mais fácil.

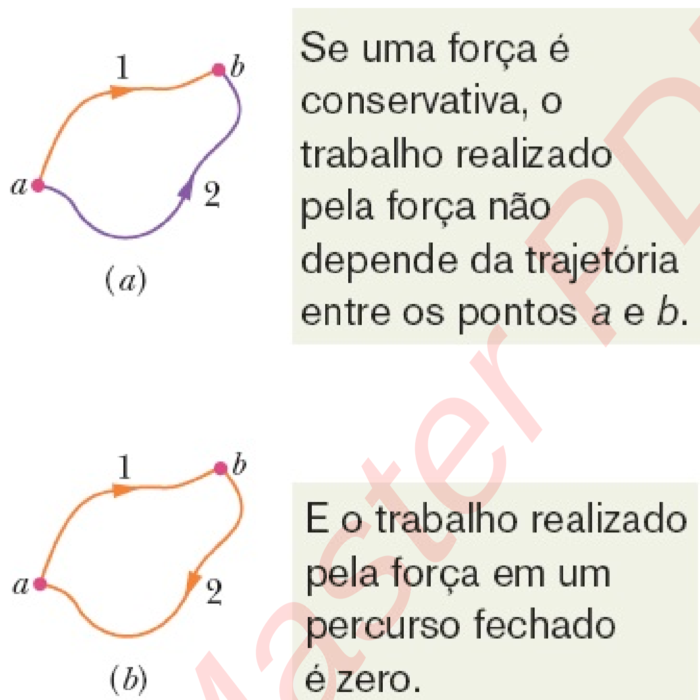


Figura 8-4 (a) Uma partícula pode se mover do ponto a ao ponto b, sob a ação de uma força conservativa, seguindo a trajetória 1 ou a trajetória 2. (b) A partícula descreve um percurso fechado, seguindo a trajetória 1 para ir do ponto a ao ponto b e a trajetória 2 para voltar ao ponto a.

Demonstração da Equação 8-2

A Fig. 8-4*b* mostra um percurso fechado, arbitrário, de uma partícula sujeita à ação de uma única força. A partícula se desloca de um ponto inicial a para um ponto b seguindo a trajetória 1 e volta ao ponto a seguindo a trajetória 2. A força realiza trabalho sobre a partícula enquanto ela se desloca em cada uma das trajetórias. Sem nos preocuparmos em saber se o trabalho realizado é positivo ou negativo, vamos representar o trabalho realizado de a a b ao longo da trajetória 1 como $W_{ab,1}$ e o trabalho realizado de b a a ao longo da trajetória 2 como $W_{ba,2}$. Se a força é conservativa, o trabalho total realizado durante a viagem de ida e volta é zero:

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0,$$

e portanto,

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2}. \tag{8-3}$$

Em palavras, o trabalho realizado ao longo da trajetória de ida é o negativo do trabalho realizado ao longo da trajetória de volta.

Consideremos agora o trabalho $W_{ab,2}$ realizado pela força sobre a partícula quando ela se move de a para b ao longo da trajetória 2 (Fig. 8-4a). Se a força é conservativa, esse trabalho é o negativo de $W_{ba,2}$:

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}. \tag{8-4}$$

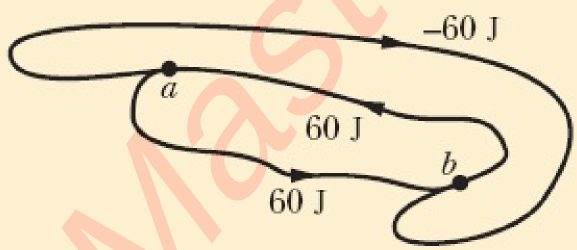
Substituindo $-W_{ba,2}$ por $W_{ab,2}$ na Eq. 8-3, obtemos

$$W_{ab,1} = W_{ab,2},$$

como queríamos demonstrar.

☑ Teste 1

A figura mostra três trajetórias ligando os pontos a e b. Uma única força $\vec{F}$ realiza o trabalho indicado sobre uma partícula que se move ao longo de cada trajetória no sentido indicado. Com base nessas informações, podemos afirmar que a força $\vec{F}$ é conservativa?



Trajetórias equivalentes para calcular o trabalho sobre um queijo gorduroso

A lição principal que se pode extrair deste exemplo é a seguinte: É perfeitamente aceitável escolher um caminho fácil em vez de um caminho difícil. A Fig. 8-5a mostra um pedaço de 2,0 kg de queijo gorduroso que desliza por uma rampa, sem atrito, do ponto a ao ponto b. O queijo percorre uma distância total de 2,0 m e uma distância vertical de 0,80 m. Qual é o trabalho realizado sobre o queijo pela força gravitacional durante o deslocamento?

IDEIAS-CHAVE

(1) *Não podemos* usar a Eq. 7-12 ($W_g = mgd \cos \phi$) para calcular o trabalho, já que o ângulo ϕ entre a força gravitacional $\vec{F}_g$ e o deslocamento $\vec{d}$ varia de ponto para ponto de forma desconhecida. (Mesmo que conhecêssemos a forma da trajetória e pudéssemos determinar o valor de ϕ para todos os pontos, o cálculo provavelmente seria muito difícil.) (2) Como $\vec{F}_g$ é uma força

conservativa, podemos calcular o trabalho escolhendo outra trajetória entre *a* e *b* que torne os cálculos mais simples.

Cálculos: Vamos escolher o percurso tracejado da Fig. 8-5*b*, que é formado por dois segmentos de reta. Ao longo do segmento horizontal, o ângulo ϕ é constante e igual a 90°. Não conhecemos o deslocamento horizontal de *a* até *b*, mas, de acordo com a Eq. 7-12, o trabalho W_h realizado ao longo desse segmento é

$$W_h = mgd \cos 90° = 0.$$

No segmento vertical, o deslocamento *d* é 0,80 m e, com $\vec{F}_g$ e $\vec{d}$ apontando verticalmente para baixo, o ângulo ϕ é constante e igual a 0°. Assim, de acordo com a Eq. 7-12, o trabalho W_v realizado ao longo do trecho vertical do percurso tracejado é dado por

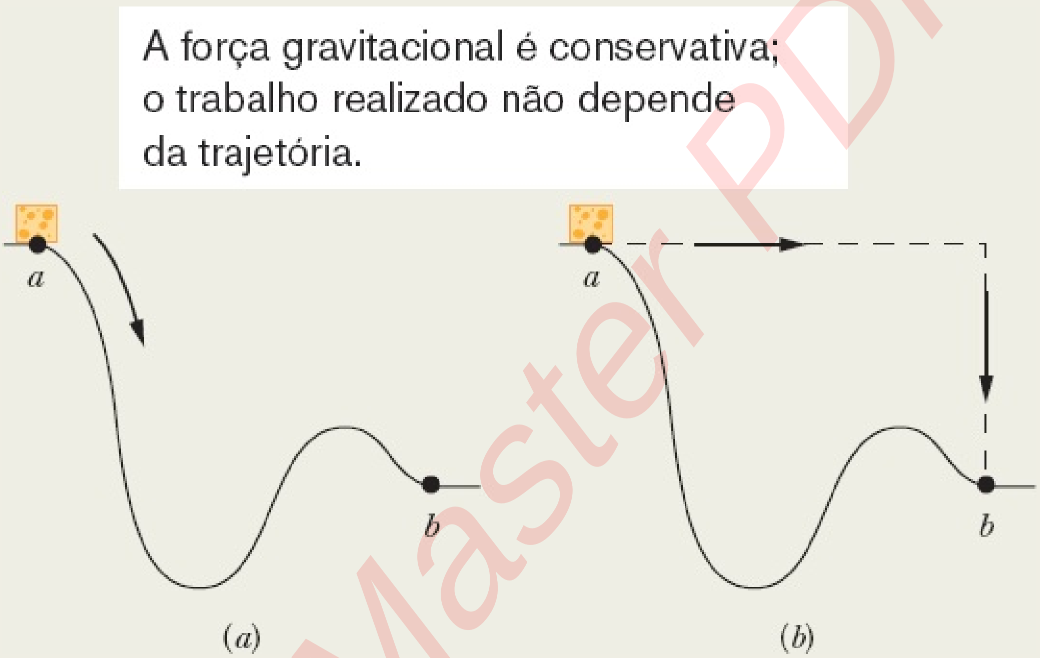


Figura 8-5 (*a*) Um pedaço de queijo desliza por uma rampa, sem atrito, do ponto *a* para o ponto *b*. (*b*) O trabalho realizado pela força gravitacional sobre o queijo é mais fácil de calcular para a trajetória tracejada do que para a trajetória real, mas o resultado é o mesmo nos dois casos.

$$\begin{aligned} W_v &= mgd \cos 90°° \\ &= (2{,}0\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}80\ \text{m})(1) = 15{,}7\ \text{J}. \end{aligned}$$

O trabalho total realizado sobre o queijo por $\vec{F}_g$ quando o queijo se desloca do ponto *a* para o ponto *b* ao longo do percurso tracejado é, portanto,

$$W = W_h + W_v = 0 + 15{,}7\ \text{J} \approx 16\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esse é também o trabalho realizado quando o queijo escorrega ao longo da rampa de *a* a *b*. Note que o valor da distância total percorrida (2,0 m) não foi usado nos cálculos.