FATEC Faculdade de Tecnologia

SANTANA de PARNAÍBA

ANÁLISE e DESENVOLVIMENTO de SISTEMAS

M A T E M Á T I C A D I S C R E T A

RELAÇÕES

Prof. Me. Tetsuo Araki

PRODUTO CARTESIANO

Dados os conjuntos A e B, não vazios, o **produto cartesiano** de A por B, denotado **A x B**, é o conjunto formado por todos os **pares ordenados** (x, y) onde $x \in A$ e $y \in B$.

Notação: $\mathbf{A \times B} = \{ (x , y) \,/\, x \in A \text{ e } y \in B \}$

Exemplo 1:

Dados: A= { 1, 2 } e B = { 0 , 2 , 4 }

A x B = { (1, 0), (1, 2), (1, 4), (2, 0), (2, 2), (2, 4) }

Exemplo 2:

Dado: A= { 1, 2 }

A x A = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) }

RELAÇÃO

Dados os conjuntos A e B, uma **relação R** de A em B, denotada **R: A→B**, é qualquer **subconjunto** do produto cartesiano **A x B**, ou seja , $\mathbf{R \subset A \times B}$.

Exemplos:

Dados: A= { 1, 2 } e B = { 0 , 2 , 4 }

A x B = { (1, 0) , (1, 2) , (1, 4) , (2, 0) , (2, 2), (2, 4) }

$R_1 = \{ (x, y) \in A \times B \; / \; \mathbf{x < y} \} = \{ (1, 2) , (1, 4) , (2, 4) \}$

$R_2 = \{ (x, y) \in A \times B \; / \; \mathbf{x = y} \} = \{ (2, 2) \}$

$R_3 = \{ (1, 0) , (1, 4) , (2, 0) \}$

Notação

Se $(x, y) \in R$, então indicamos $x\,R\,y$. (leitura: x se relaciona com y)

Se $(x, y) \notin R$, então indicamos $x \not R\, y$. (leitura: x não se relaciona com y)

Na relação $R_1 = \{ (1, 2) , (1, 4) , (2, 4) \}$, temos:

$(2, 4) \in R_1$ ou $2\,R_1\,4$

$(1, 4) \in R_1$ ou $1\,R_1\,4$

$(2, 0) \notin R_1$ ou $2 \not R_1\, 0$

$(2, 2) \notin R_1$ ou $2 \not R_1\, 2$

Obs.: Se R é uma relação de um conjunto A para si mesmo, isto é, R é subconjunto de A x A, então dizemos que R é uma relação em A.

PROPRIEDADES

Reflexiva

Uma relação R em um conjunto A é reflexiva se aRa para todo $a \in A$, isto é, se $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$. Portanto, R não é reflexiva se existe um $a \in A$ tal que $(a, a) \notin R$.

Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as relações

$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 4), (3, 4)\}$ e

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3)\}$ em A.

R_1 é reflexiva, pois $(1, 1) \in R_1$, $(2, 2) \in R_1$, $(3, 3) \in R_1$, $(4, 4) \in R_1$, ou seja, para todo $a \in A$, $(a, a) \in R_1$

R_2 não é reflexiva, pois $(4, 4) \notin R_2$

Simétrica

Uma relação R em um conjunto A é Simétrica se aRb implica bRa, isto é, se $(a, b) \in R$, então $(b, a) \in R$. Portanto, R não é Simétrica se $(a, b) \in R$, mas $(b, a) \notin R$.

Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as relações

$R_1 = \{(1, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ e

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ em A.

R_1 é simétrica, pois $1 R 1 \rightarrow 1 R 1$,

$3 R 3 \rightarrow 3 R 3$,

$2 R 4 \rightarrow 4 R 2$ e

$4 R 2 \rightarrow 2 R 4$

R_2 não é simétrica, pois $2 R 3$, mas $3 \not R 2$

Transitiva

Uma relação R em um conjunto A é transitiva se aRb e bRc, implica aRc, isto é, se $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$. Portanto, R não é transitiva se existirem a, b e $c \in A$ tais que (a, b) e $(b, c) \in R$, mas $(a, c) \notin R$.

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e as relações $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ e $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ em A.

R_1 é transitiva, pois $1 R 1$ e $1 R 2 \rightarrow 1 R 2$

$1 R 1$ e $1 R 3 \rightarrow 1 R 3$

$1 R 2$ e $2 R 3 \rightarrow 1 R 3$

R_2 não é transitiva, pois $1 R 2$ e $2 R 3 \rightarrow 1 \not{R} 3$

Antissimétrica

Uma relação R em um conjunto A é antissimétrica se aRb e bRa, implica a = b, isto é, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então a = b. Portanto, R não é antissimétrica se existirem $a, b \in A$ tais que (a, b) e $(b, a) \in R$, mas $a \neq b$.

Exemplo:

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e as relações $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (1, 3)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ e $R_3 = \{(2, 3)\}$ em A.

R_1 é antissimétrica, pois $1 R 1$ e $1 R 1 \rightarrow 1 = 1$

$2 R 2$ e $2 R 2 \rightarrow 2 = 2$

R_2 não é antissimétrica, pois $1 R 2$ e $2 R 1$, mas $1 \neq 2$

R_3 é antissimétrica, pois pela definição temos:

$$2 \; R \; 3 \text{ e } 3 \; R \; 2 \rightarrow 2 = 3$$

$$V \wedge F \rightarrow F$$

$$F \rightarrow F$$

$$V$$

Observação: As propriedades de simetria e antissimetria não são mutuamente excludentes. Por exemplo, R = {(1, 3), (3, 1), (2, 3)} não é simétrica e nem antissimétrica. Por outro lado, a relação R' = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)} é simétrica e antissimétrica.

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}				
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}				
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}				
R4 = A x A				

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM			
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}				
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}				
R4 = A x A				

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM			
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM			
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}				
R4 = A x A				

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM			
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM			
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO			
R4 = A x A				

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM			
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM			
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO			
R4 = A x A	SIM			

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM	SIM		
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM			
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO			
R4 = A x A	SIM			

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM	SIM		
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM	NÃO		
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO			
R4 = A x A	SIM			

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM	SIM		
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM	NÃO		
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO	NÃO		
R4 = A x A	SIM			

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM	SIM		
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM	NÃO		
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO	NÃO		
R4 = A x A	SIM	SIM		

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM	SIM	SIM	
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM	NÃO		
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO	NÃO		
R4 = A x A	SIM	SIM		

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM	SIM	SIM	
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM	NÃO	NÃO	
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO	NÃO		
R4 = A x A	SIM	SIM		

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM	SIM	SIM	
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM	NÃO	NÃO	
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO	NÃO	NÃO	
R4 = A x A	SIM	SIM		

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM	SIM	SIM	
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM	NÃO	NÃO	
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO	NÃO	NÃO	
R4 = A x A	SIM	SIM	SIM	

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM	SIM	SIM	NÃO
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM	NÃO	NÃO	
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO	NÃO	NÃO	
R4 = A x A	SIM	SIM	SIM	

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM	SIM	SIM	NÃO
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM	NÃO	NÃO	SIM
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO	NÃO	NÃO	
R4 = A x A	SIM	SIM	SIM	

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM	SIM	SIM	NÃO
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM	NÃO	NÃO	SIM
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO	NÃO	NÃO	SM
R4 = A x A	SIM	SIM	SIM	

Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das relações em A, verifique se é Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Antissimétrica

	R	S	T	AS
R1 = {(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)}	SIM	SIM	SIM	NÃO
R2 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)}	SIM	NÃO	NÃO	SIM
R3 = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)}	NÃO	NÃO	NÃO	SM
R4 = A x A	SIM	SIM	SIM	NÃO

RELAÇÕES de EQUIVALÊNCIA

Considere um conjunto A não vazio. Uma relação R sobre A é de equivalência se R é reflexiva, Simétrica e Transitiva.

Exemplo 1: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e as relações

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\} \text{ e}$$

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\} \text{ em A.}$$

R_1 é relação de equivalência, pois é Reflexiva, Simérica e Transitiva.

R_2 não é relação de equivalência, pois embora seja Reflexiva, não é Simérica e nem Transitiva.