Árvore B+

Estruturas de Dados

Bruno Prado

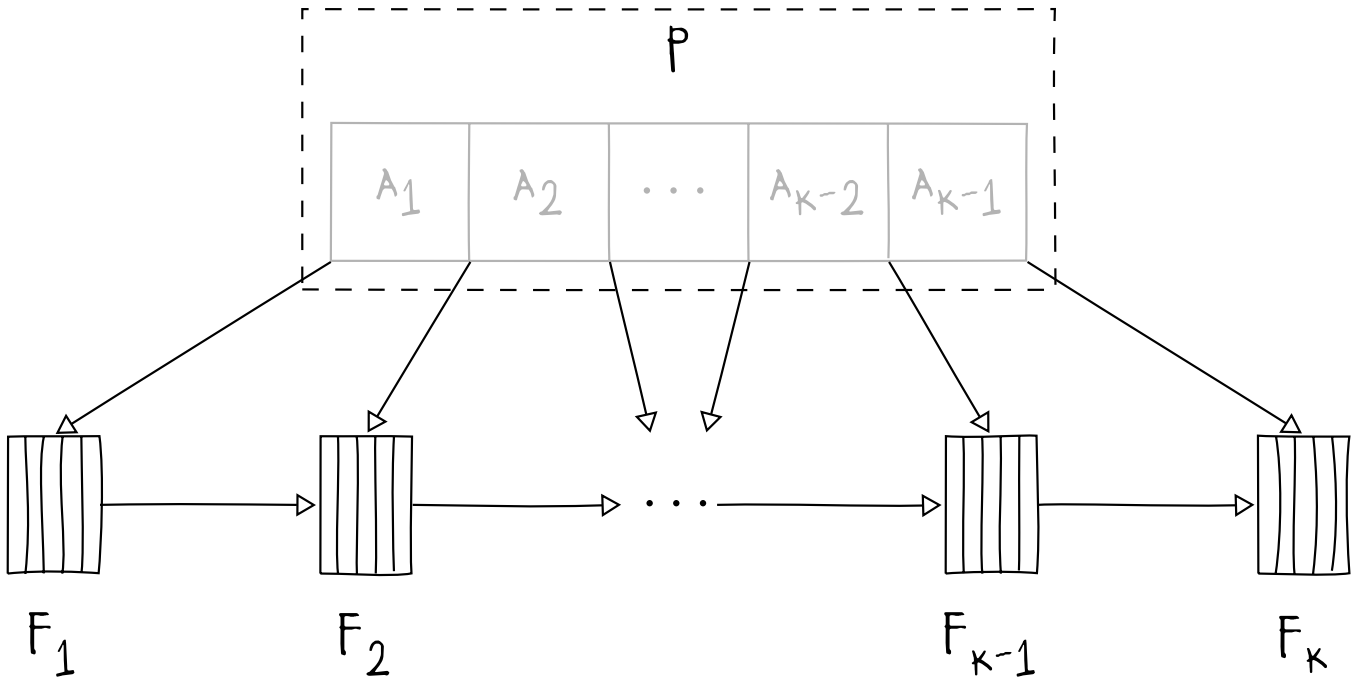
Departamento de Computação / UFS

Introdução

- O que é uma árvore B+?
  - É uma variação da árvore B
  - Os nós internos armazenam somente as chaves e referências para outros nós (indexação)
  - Uma lista encadeada é construída com os nós folha que armazenam as referências para os dados

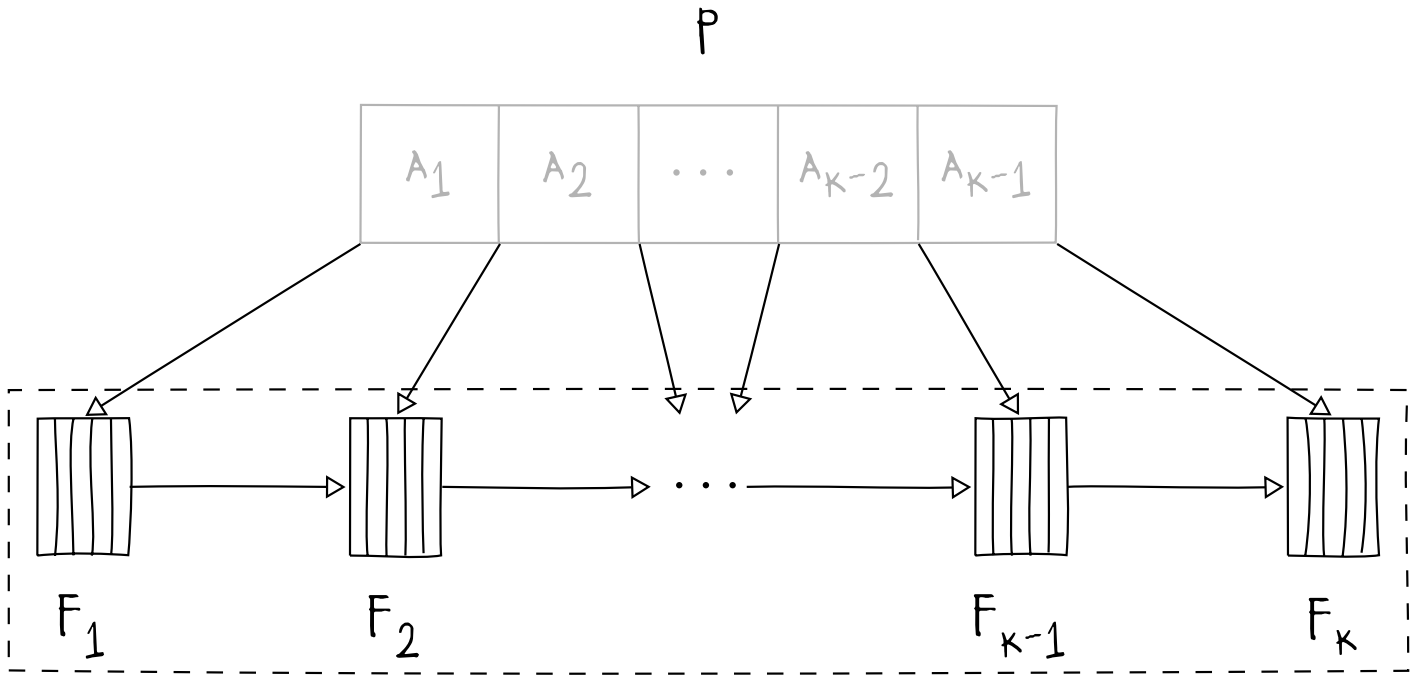
Introdução

- Árvore B+ de ordem *k*
  - Nó interno



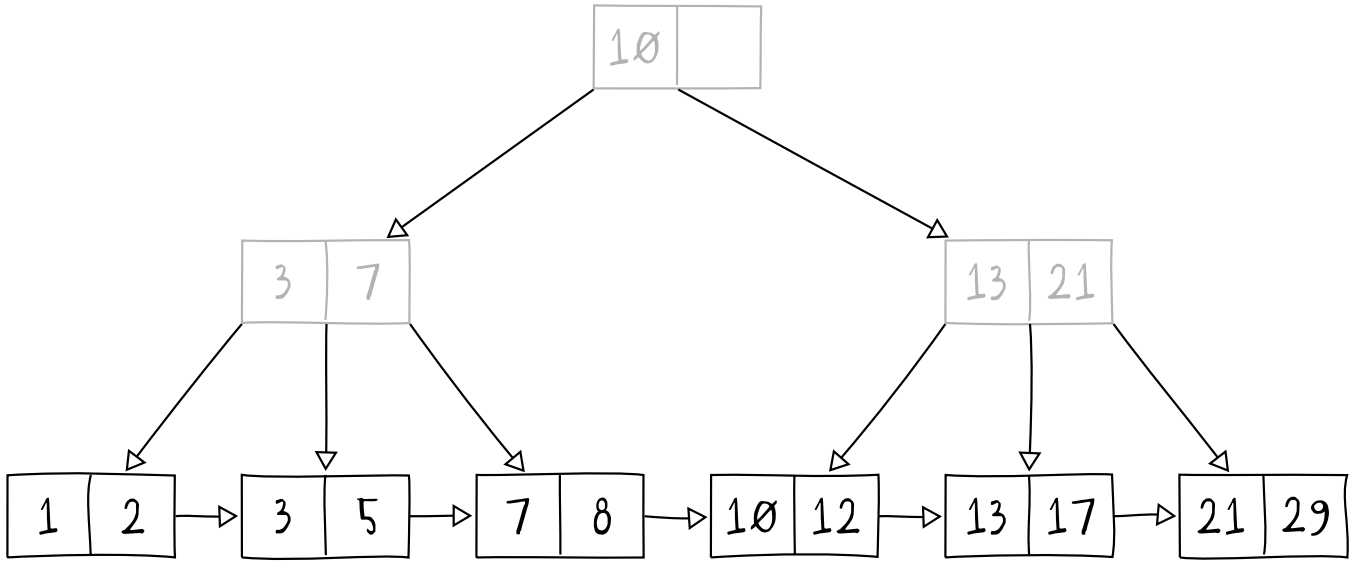
Introdução

- Árvore B+ de ordem *k*
  - Nós folha



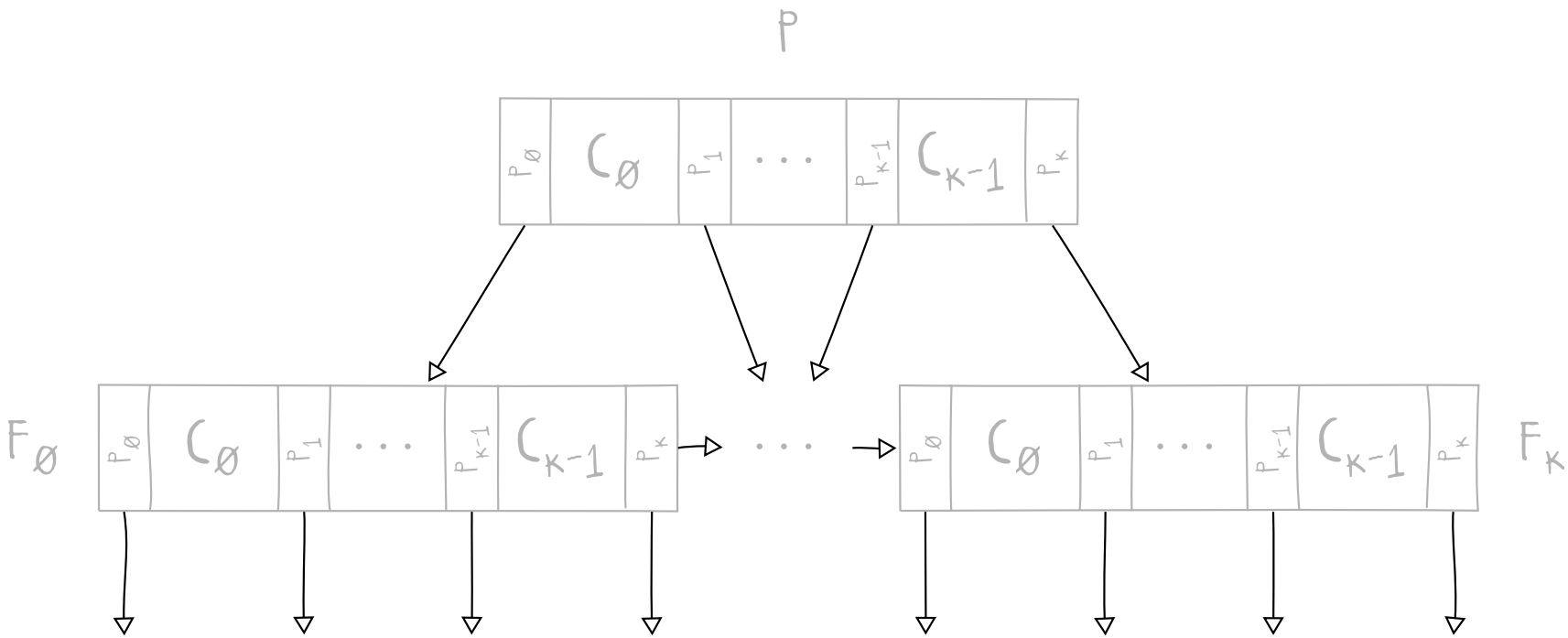
Introdução

- Árvore B+ de ordem 3



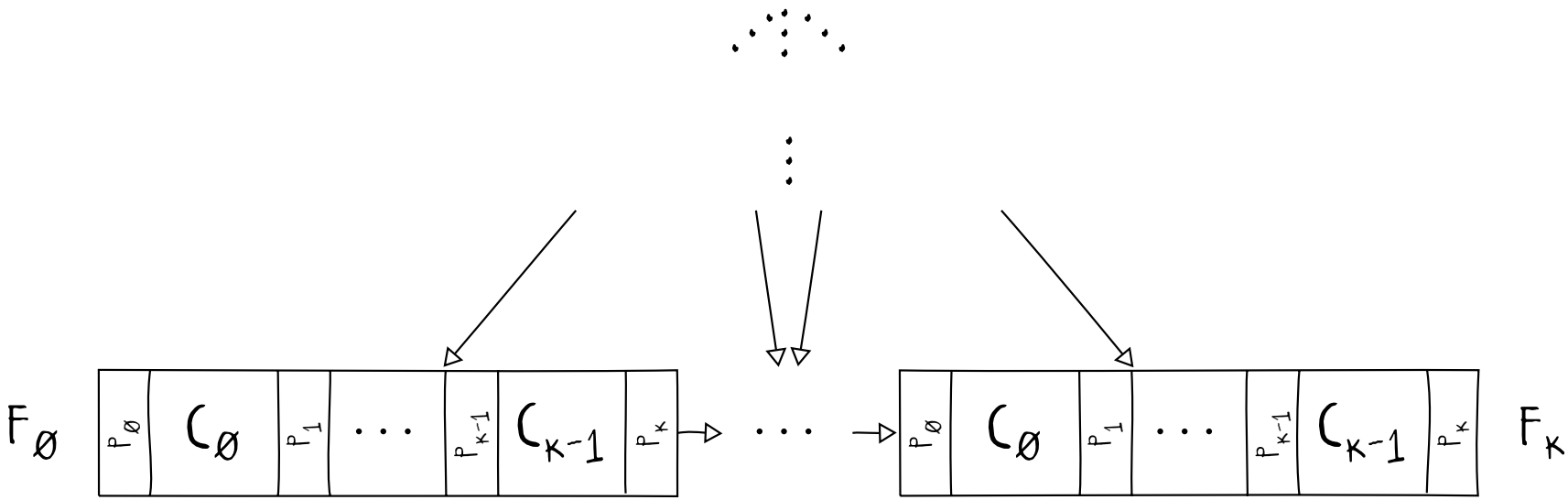
Árvore B+

- Definição da estrutura
  - Nós internos



Árvore B+

- Definição da estrutura
  - Nó folha



Árvore B+

- Implementação em C
  - Estrutura e ponteiros

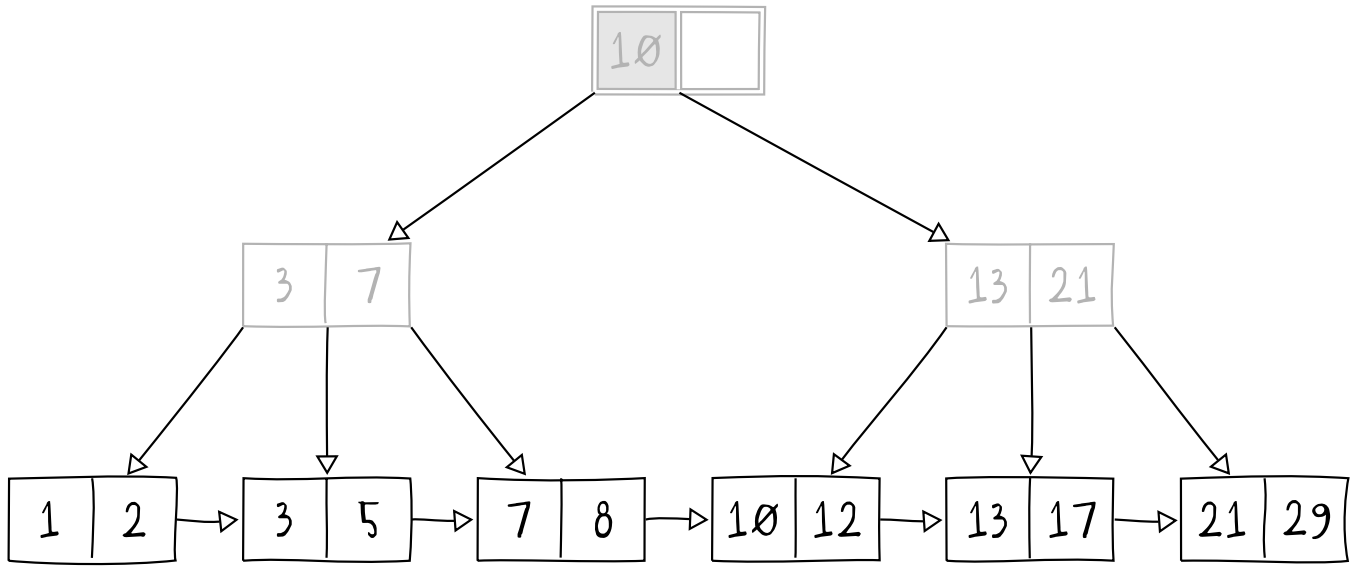
```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Estrutura de nó
typedef struct no {
    // Vetor de chaves
    uint32_t* C;
    // Vetor de filhos
    struct no** P;
    // Quantidade utilizada
    uint32_t n;
} no;
```

Árvore B+

- Operações básicas
  - Busca
    - Exata
    - Intervalo
  - Inserção
  - Remoção

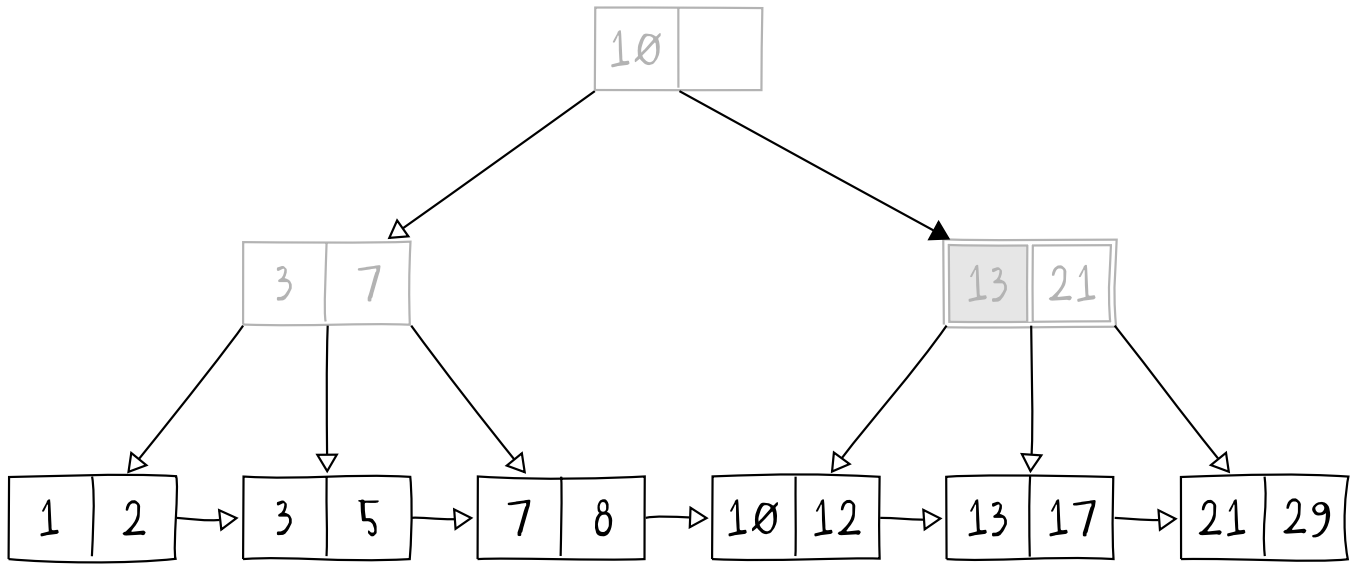
Árvore B+

- Operação de busca exata
  - Parâmetro de chave: 13
  - A busca tem início pela raiz da árvore, checando as chaves do nó e acessando as subárvores



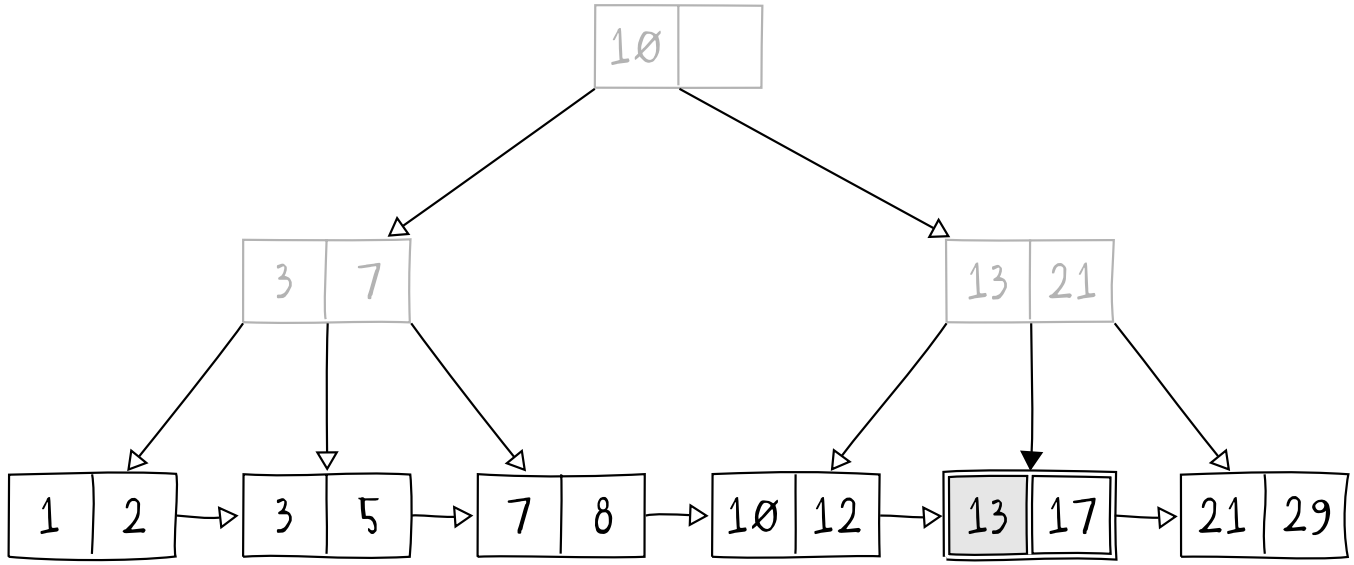
Árvore B+

- Operação de busca exata
  - Parâmetro de chave: 13
  - A busca tem início pela raiz da árvore, checando as chaves do nó e acessando as subárvores



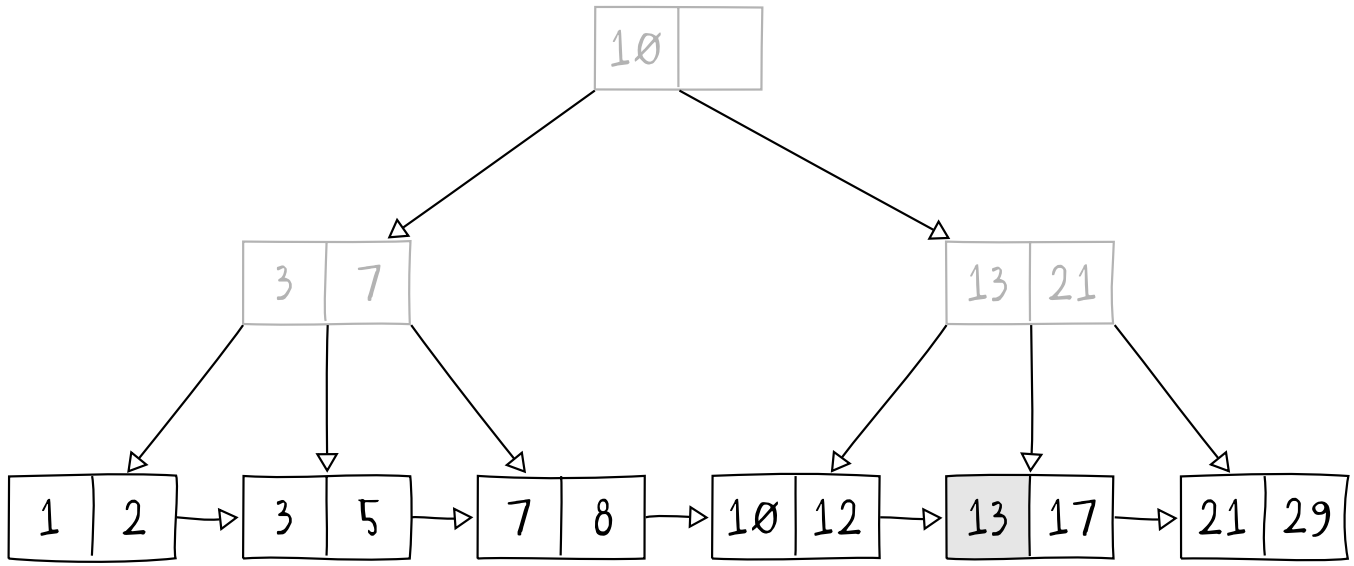
Árvore B+

- Operação de busca exata
  - Parâmetro de chave: 13
  - A busca tem início pela raiz da árvore, checando as chaves do nó e acessando as subárvores



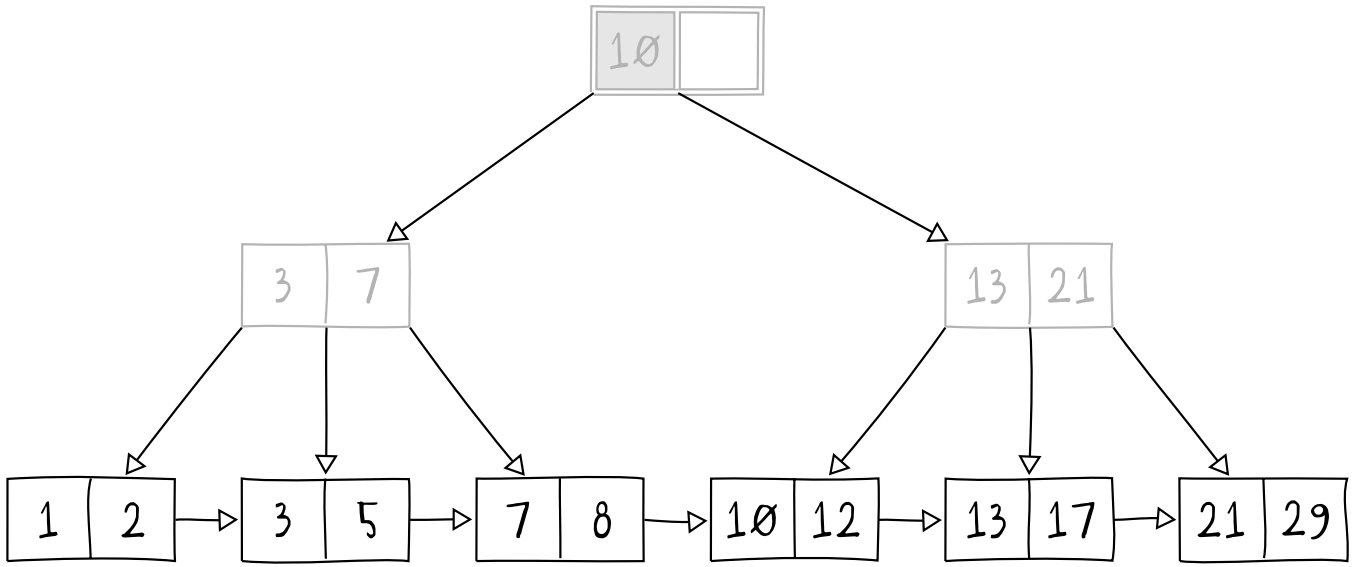
Árvore B+

- Operação de busca exata
  - Parâmetro de chave: 13
  - A referência do nó encontrado é retornada



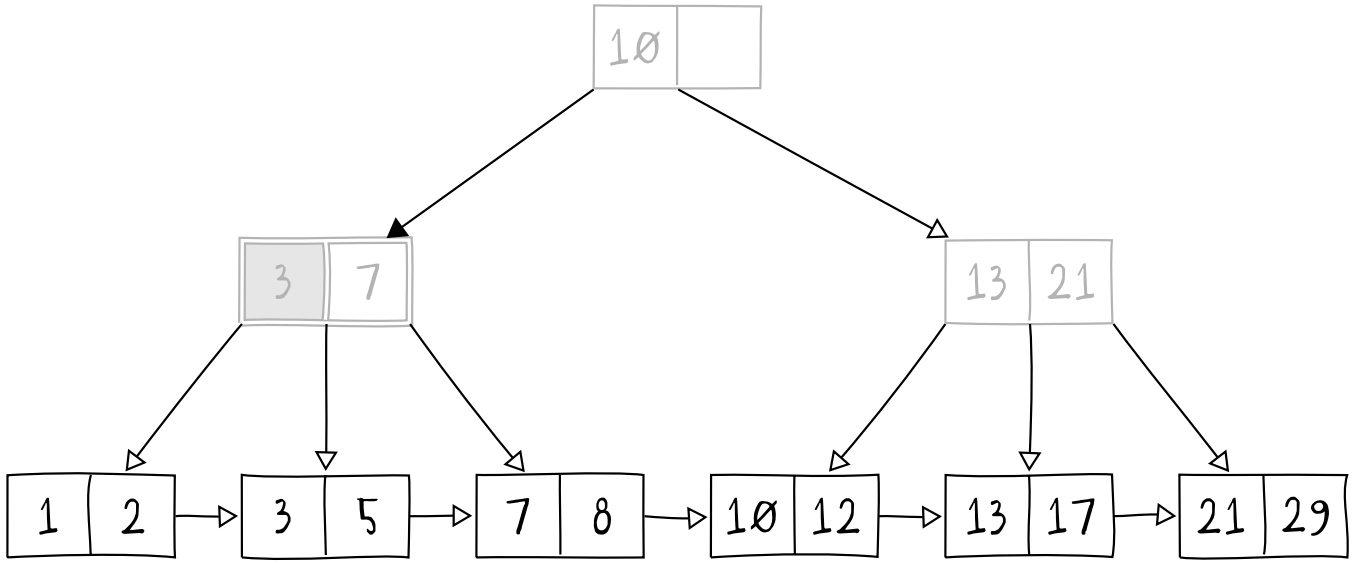
Árvore B+

- Operação de busca por intervalo
  - Parâmetros de chave: 4 e 11
  - A busca tem início pela raiz da árvore, checando as chaves do nó e acessando as subárvores



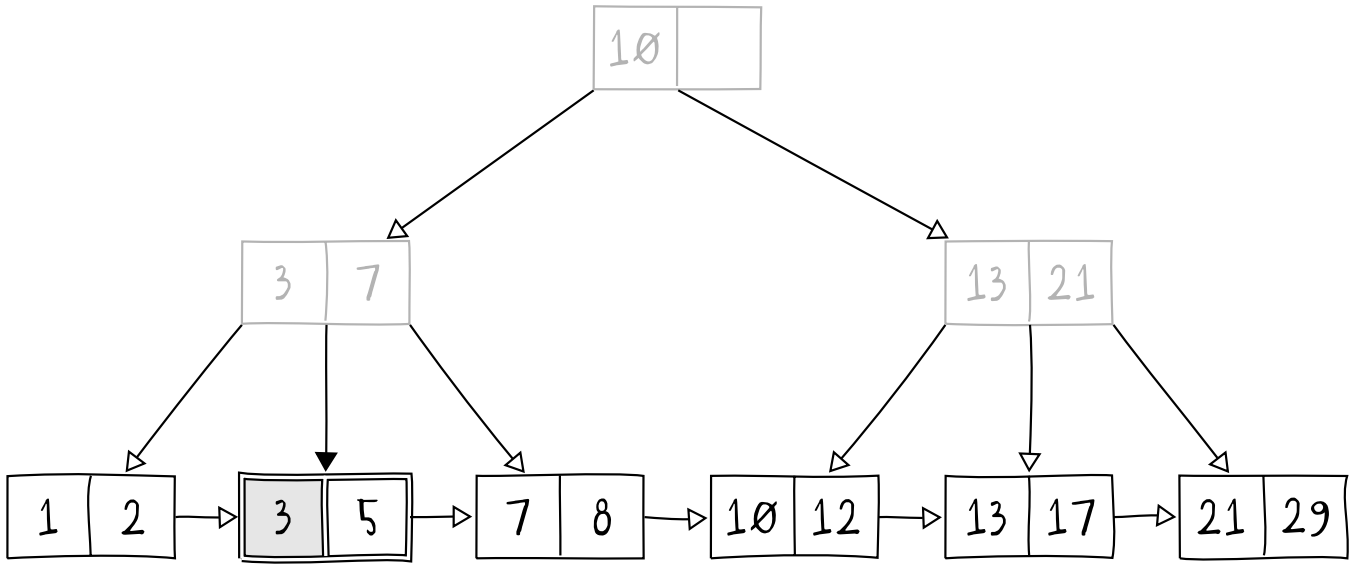
Árvore B+

- Operação de busca por intervalo
  - Parâmetros de chave: 4 e 11
  - A busca tem início pela raiz da árvore, checando as chaves do nó e acessando as subárvores



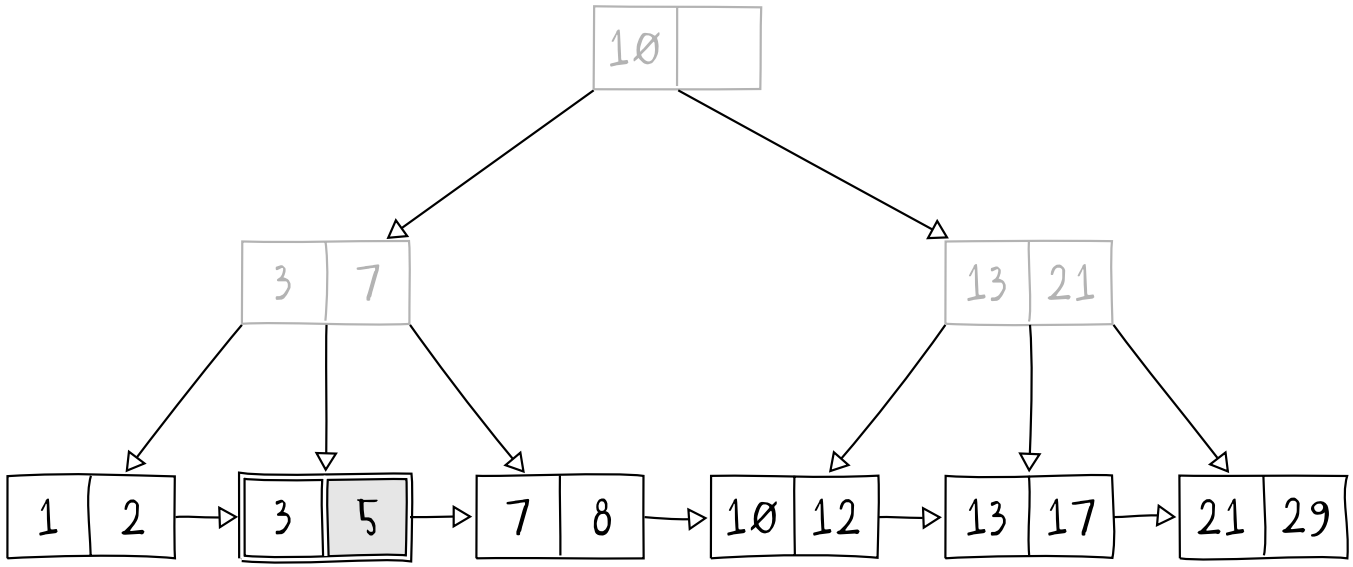
Árvore B+

- Operação de busca por intervalo
  - Parâmetros de chave: 4 e 11
  - A busca tem início pela raiz da árvore, checando as chaves do nó e acessando as subárvores



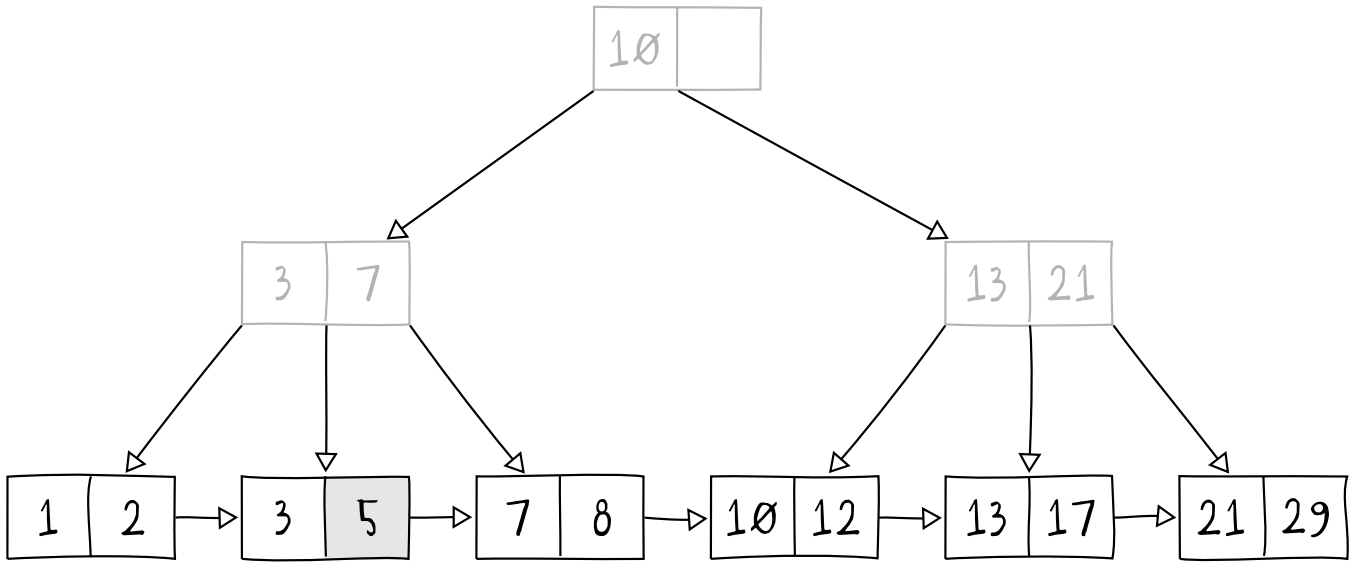
Árvore B+

- Operação de busca por intervalo
  - Parâmetros de chave: 4 e 11
  - A busca tem início pela raiz da árvore, checando as chaves do nó e acessando as subárvores



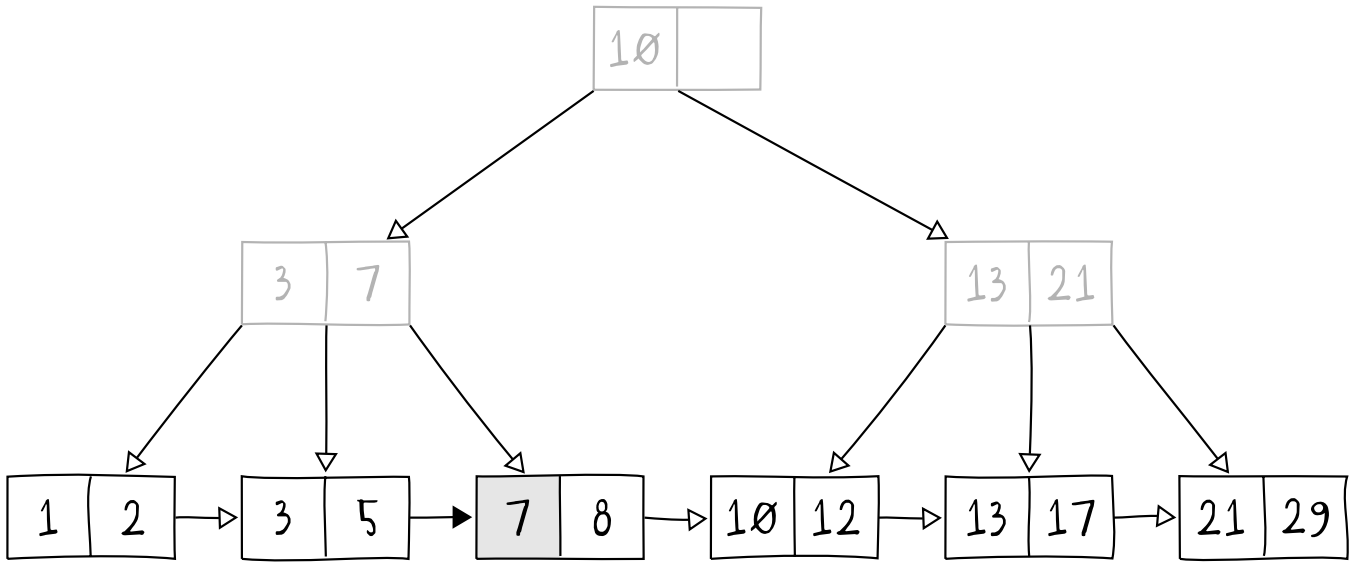
Árvore B+

- Operação de busca por intervalo
  - Parâmetros de chave: 4 e 11
  - As referências dos nós no intervalo são retornadas



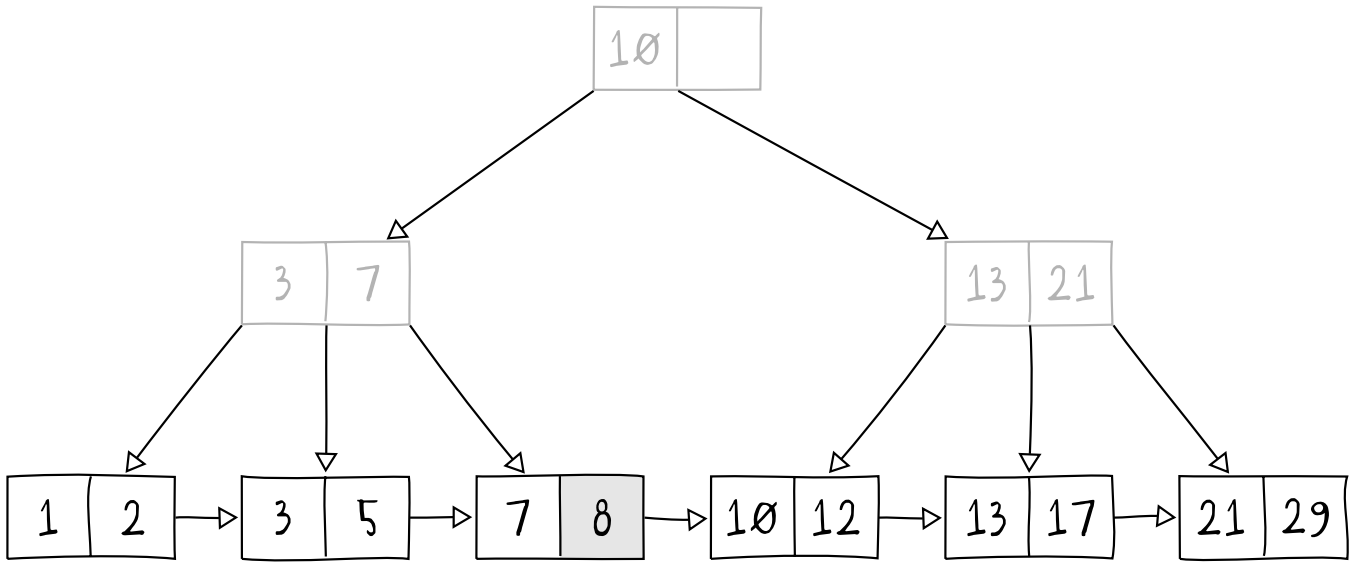
Árvore B+

- Operação de busca por intervalo
  - Parâmetros de chave: 4 e 11
  - As referências dos nós no intervalo são retornadas



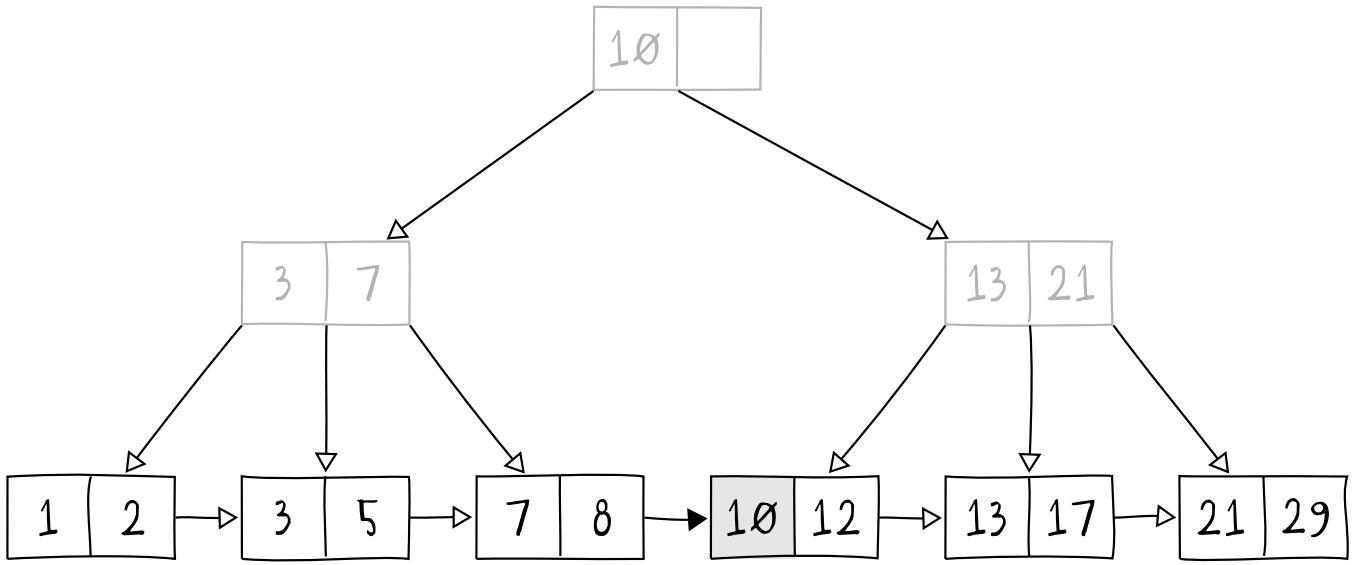
Árvore B+

- Operação de busca por intervalo
  - Parâmetros de chave: 4 e 11
  - As referências dos nós no intervalo são retornadas



Árvore B+

- Operação de busca por intervalo
  - Parâmetros de chave: 4 e 11
  - As referências dos nós no intervalo são retornadas



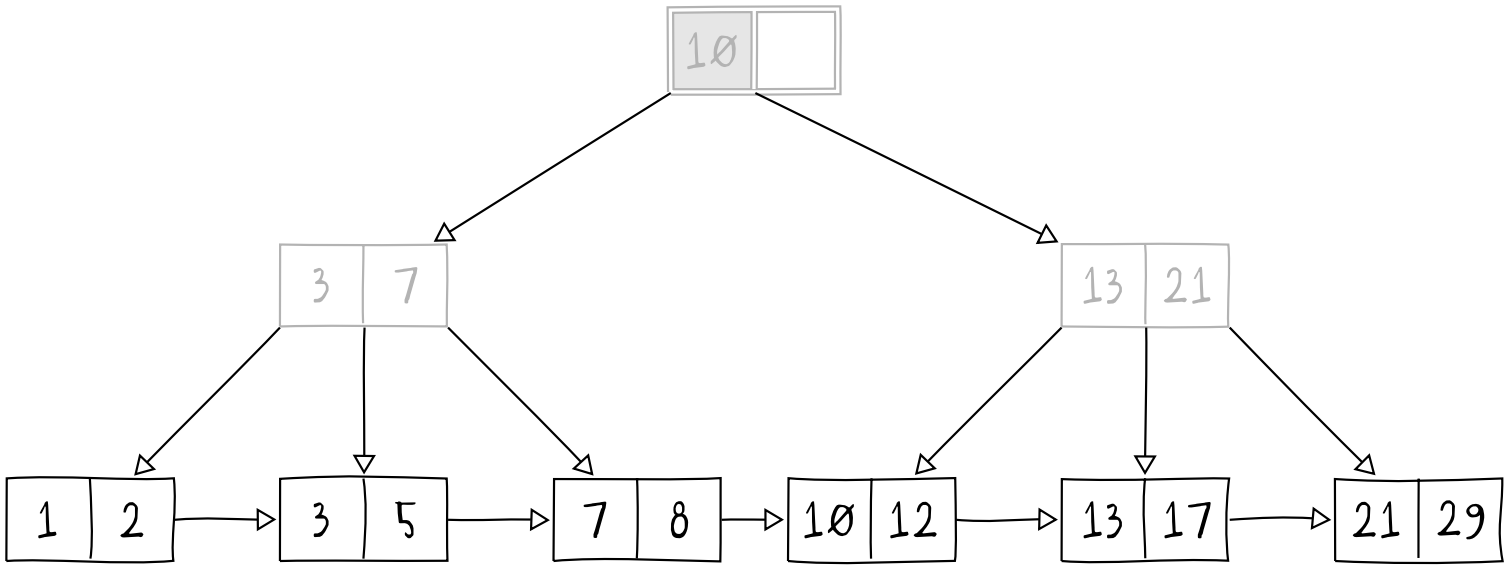
Árvore B+

- Busca por intervalo
  - Retorna nós no intervalo de chaves

```
1  // Procedimento de busca por intervalo
2  nos* busca_intervalo(no* x, uint32_t a, uint32_t b) {
3      uint32_t ini = min(a, b), fim = max(a, b);
4      nos* r = criar_nos();
5      no* f = busca_folha(x, ini, fim);
6      while(f != NULL && f->C[0] <= fim) {
7          adicionar_no(r, f);
8          f = f->P[k];
9      }
10     return r;
11 }
```

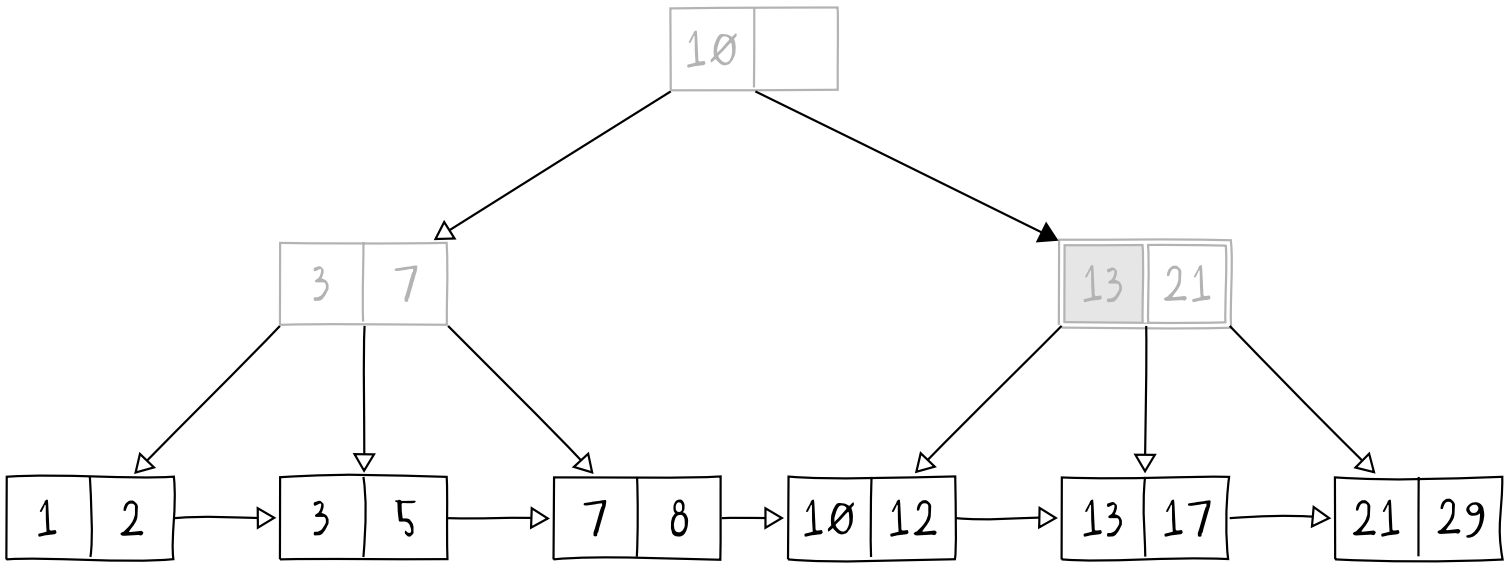
Árvore B+

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 19



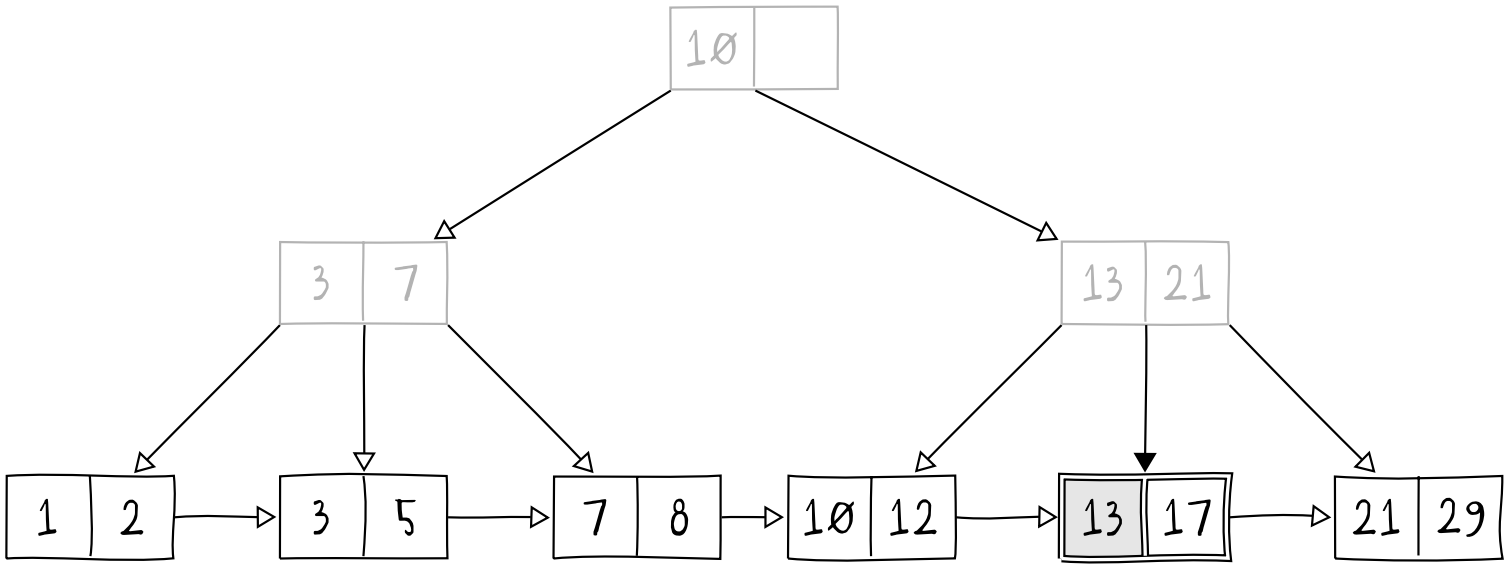
Árvore B+

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 19



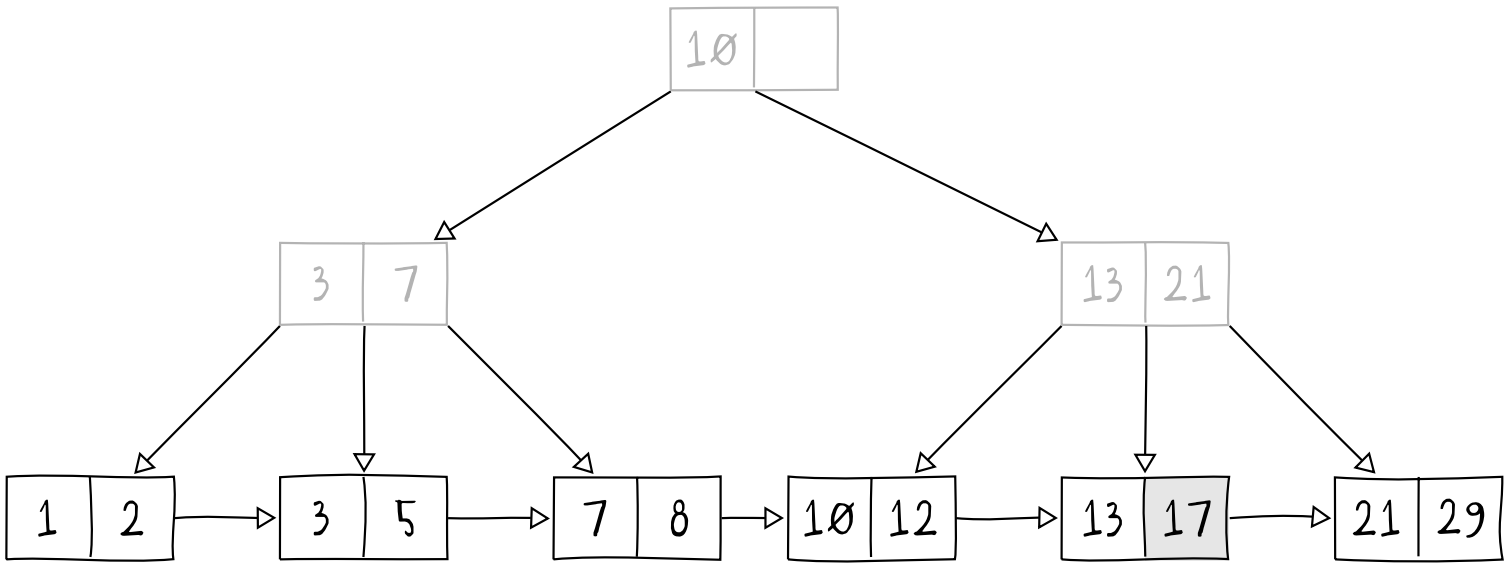
Árvore B+

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 19



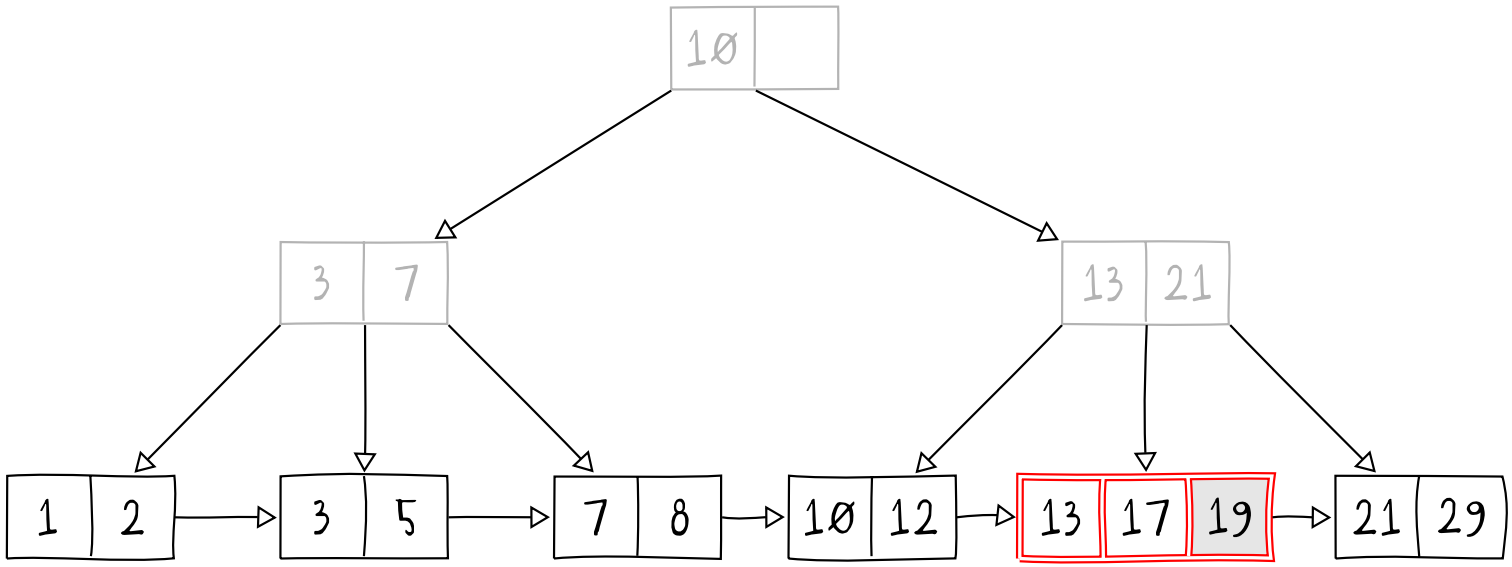
Árvore B+

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 19



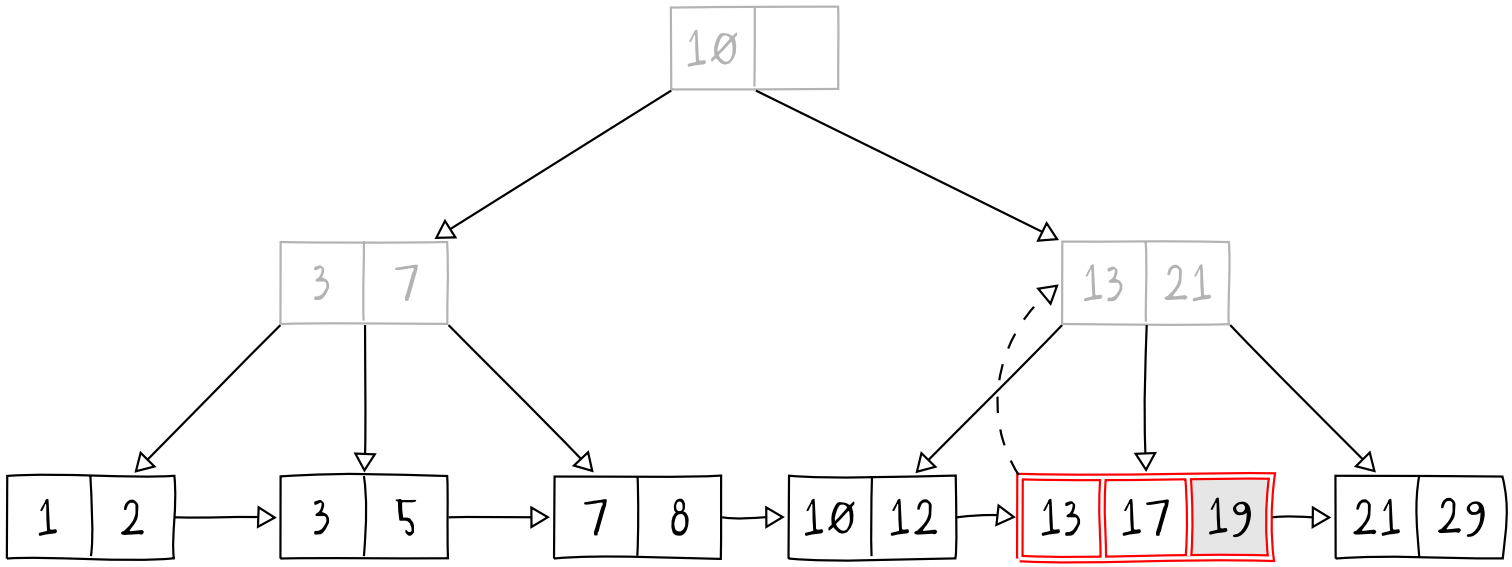
Árvore B+

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 19



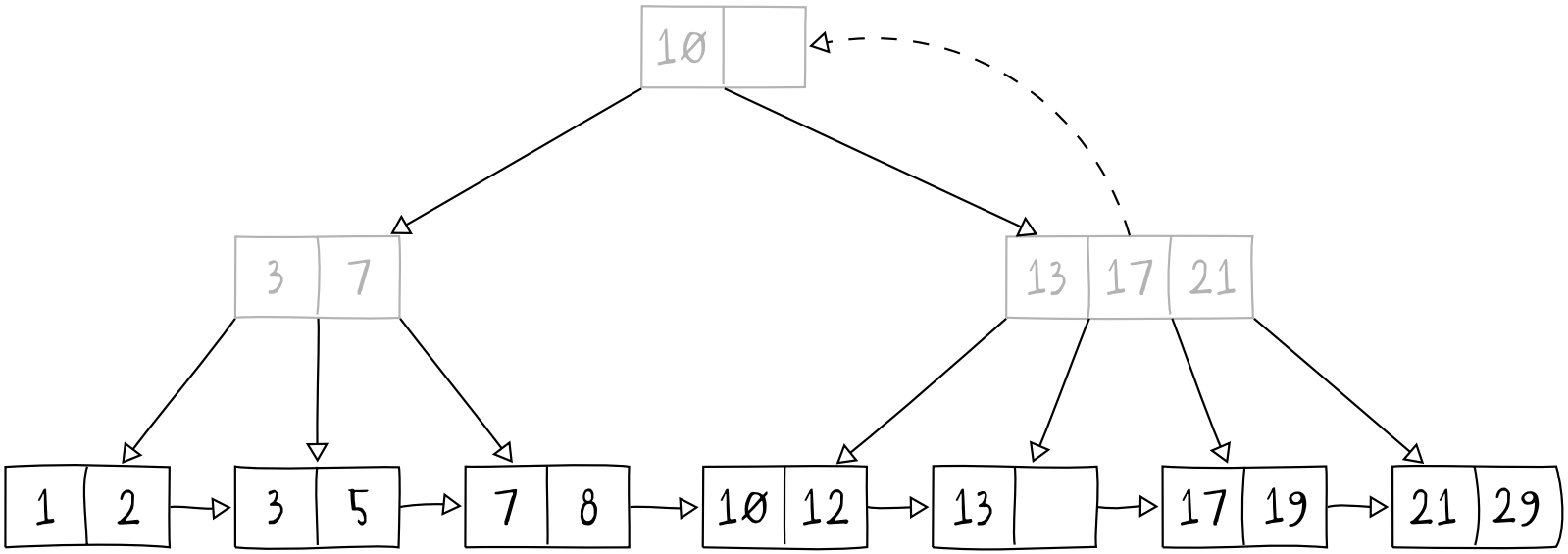
Árvore B+

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 19



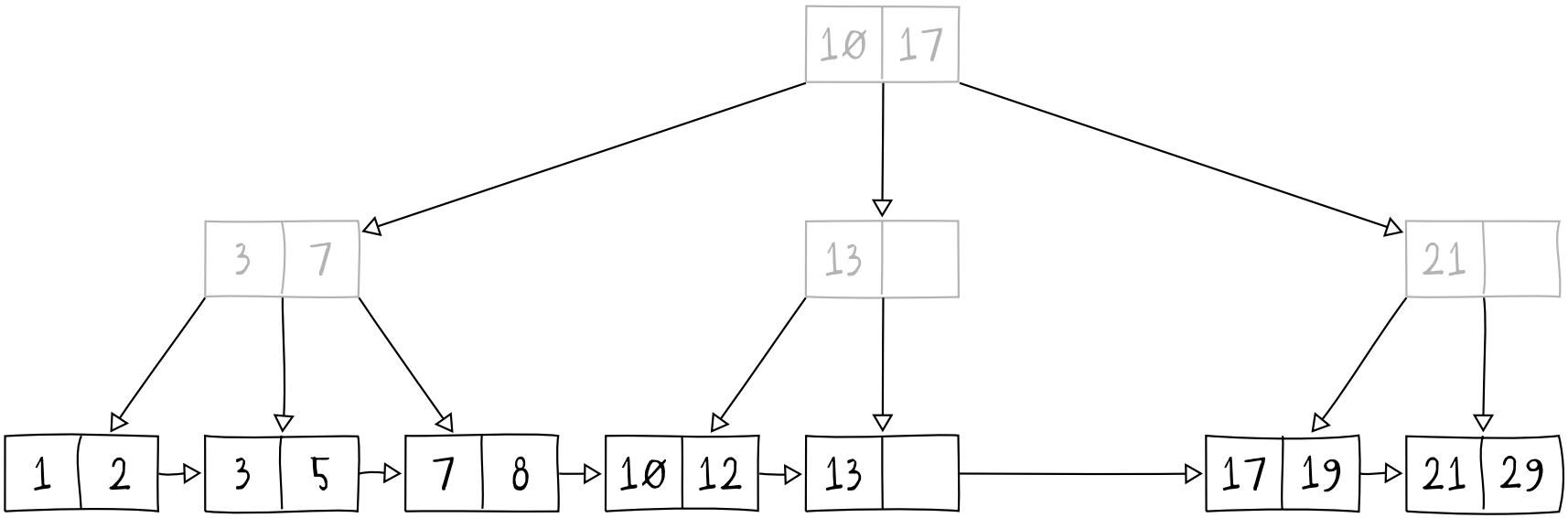
Árvore B+

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 19



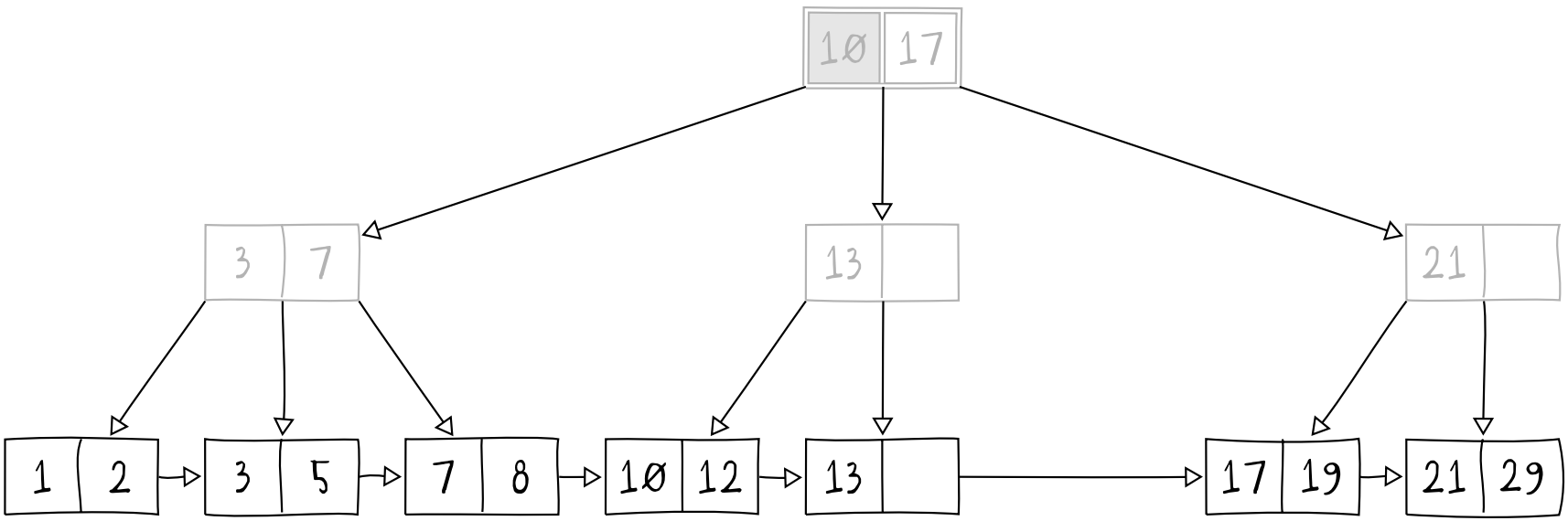
Árvore B+

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 19



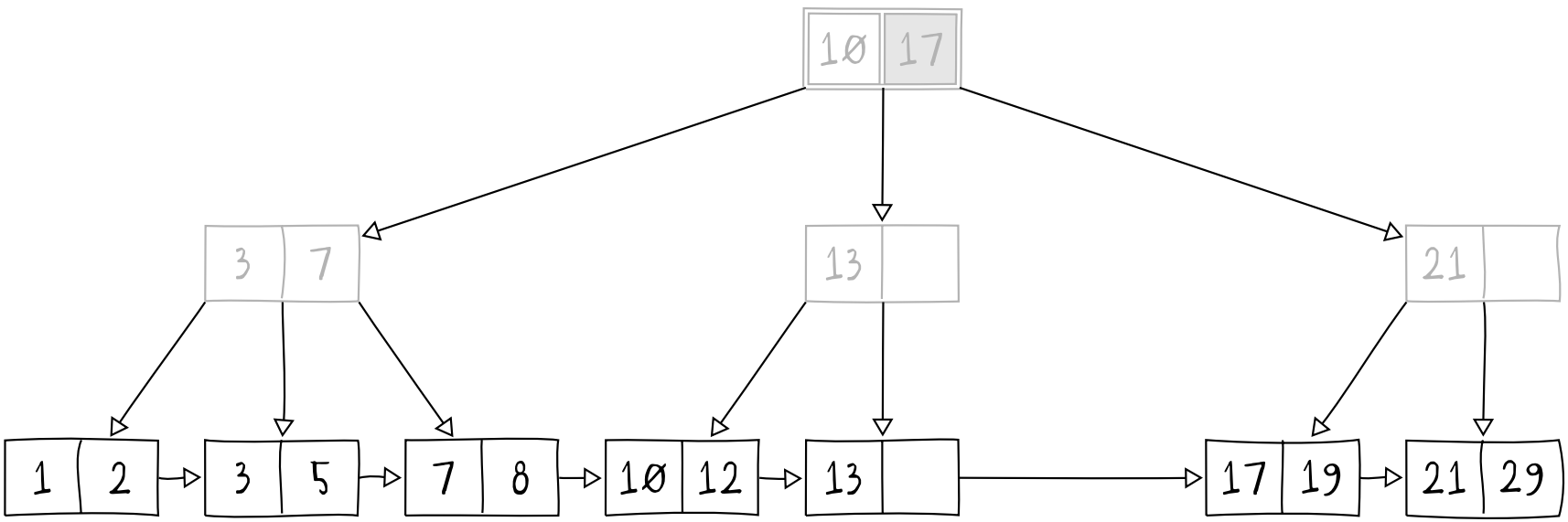
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 21
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



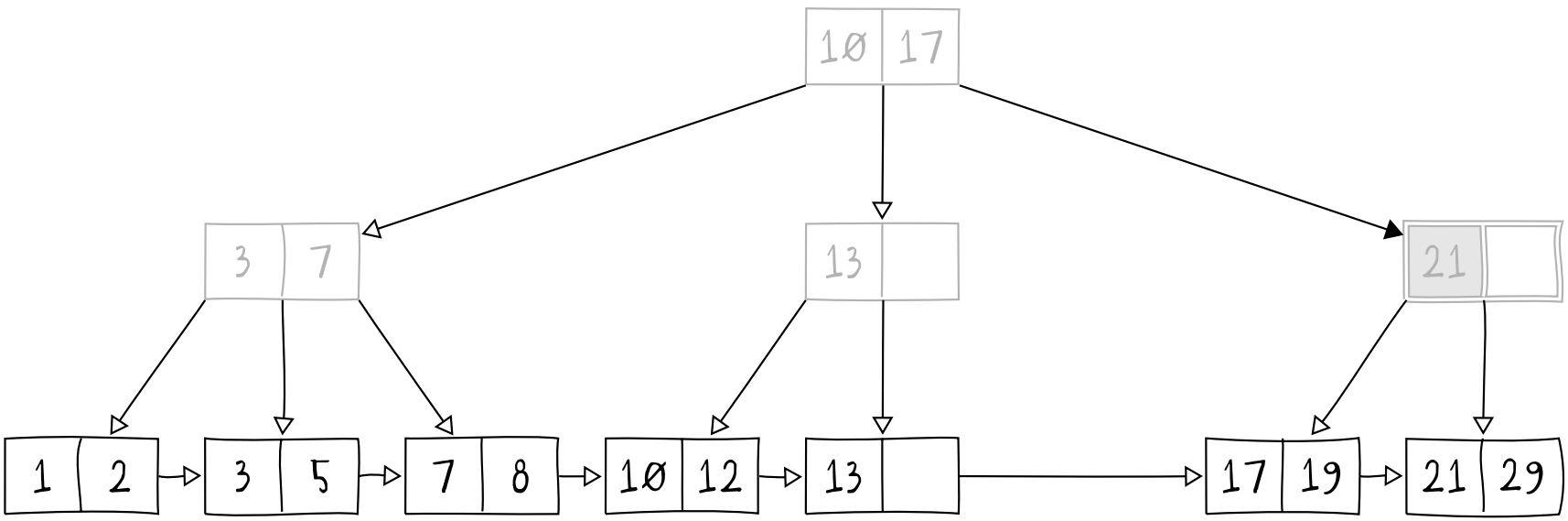
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 21
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



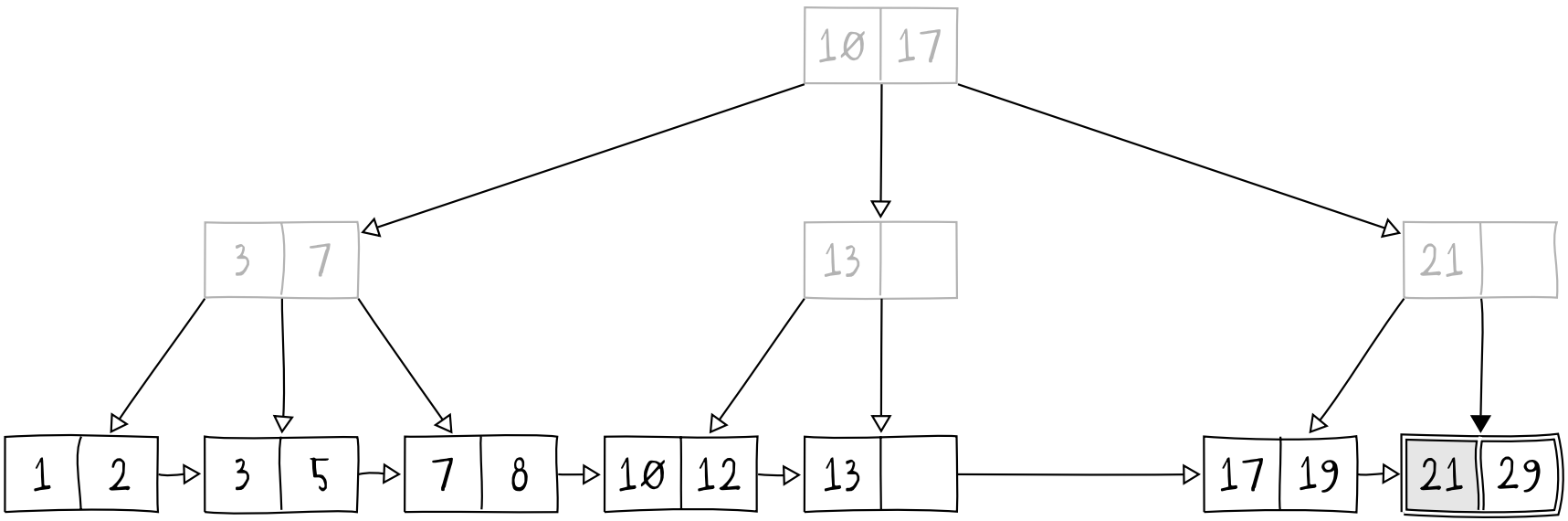
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 21
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



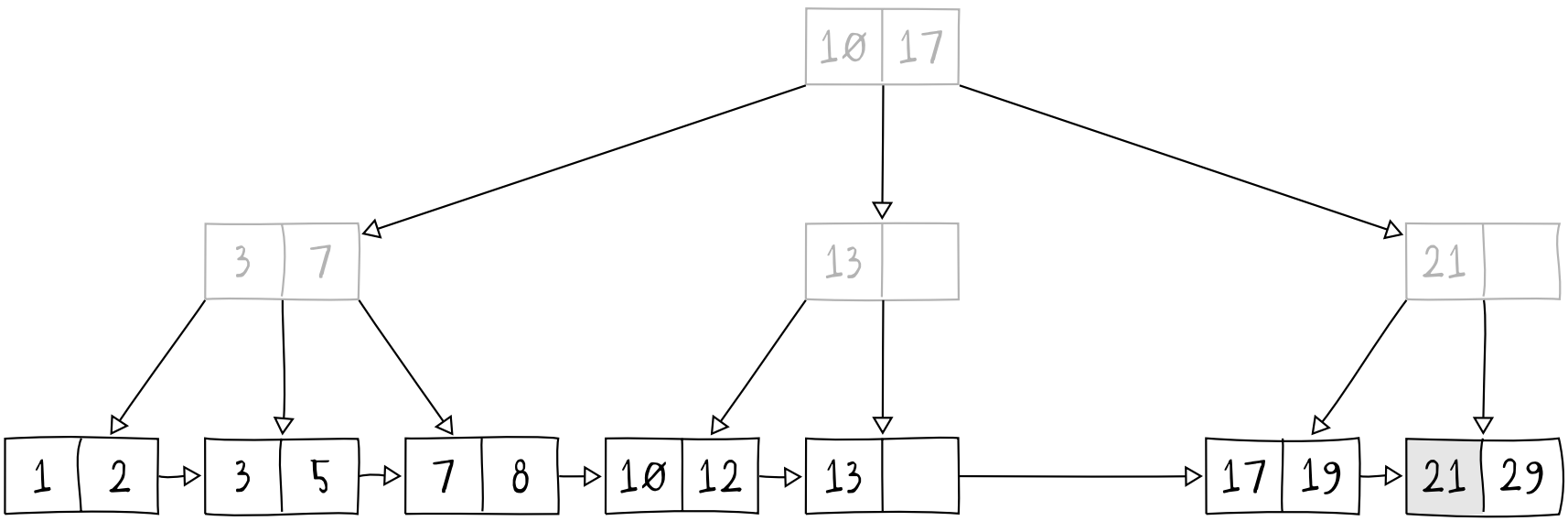
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 21
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



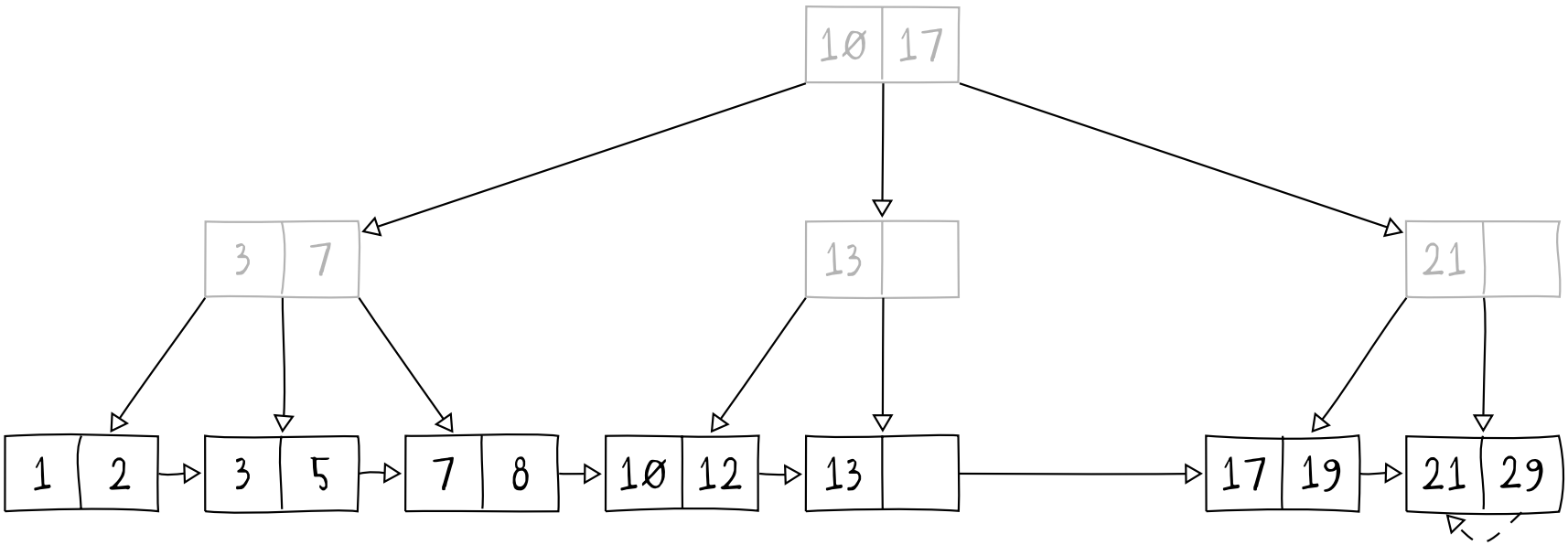
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 21
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



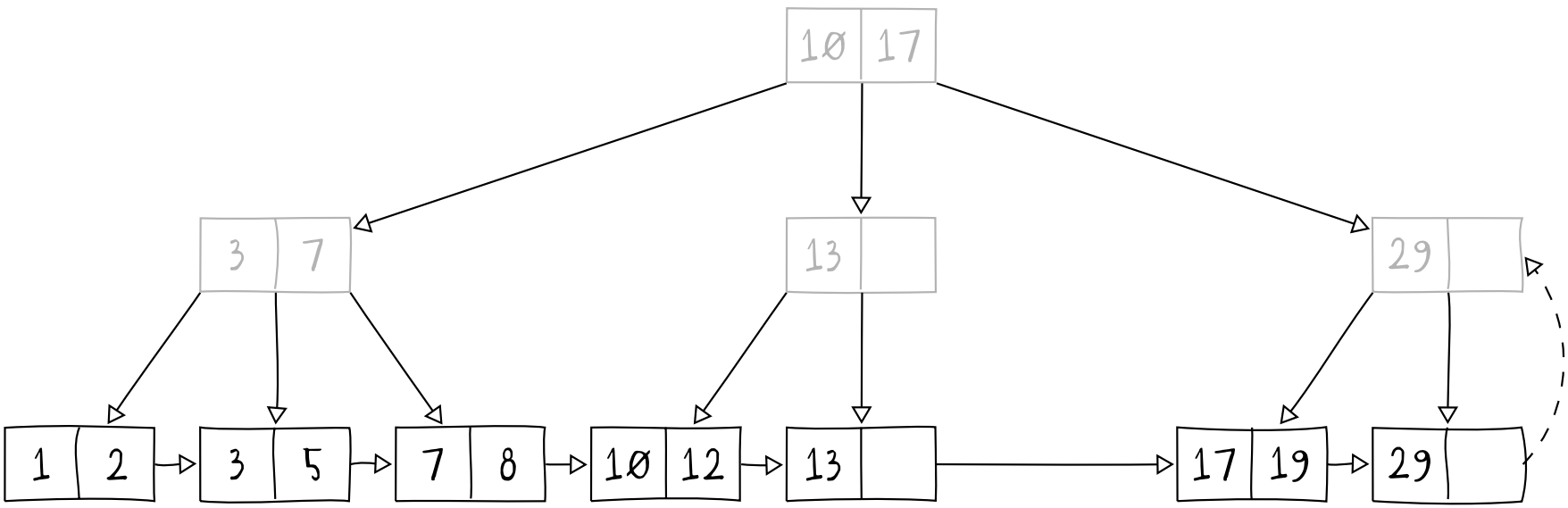
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 21
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



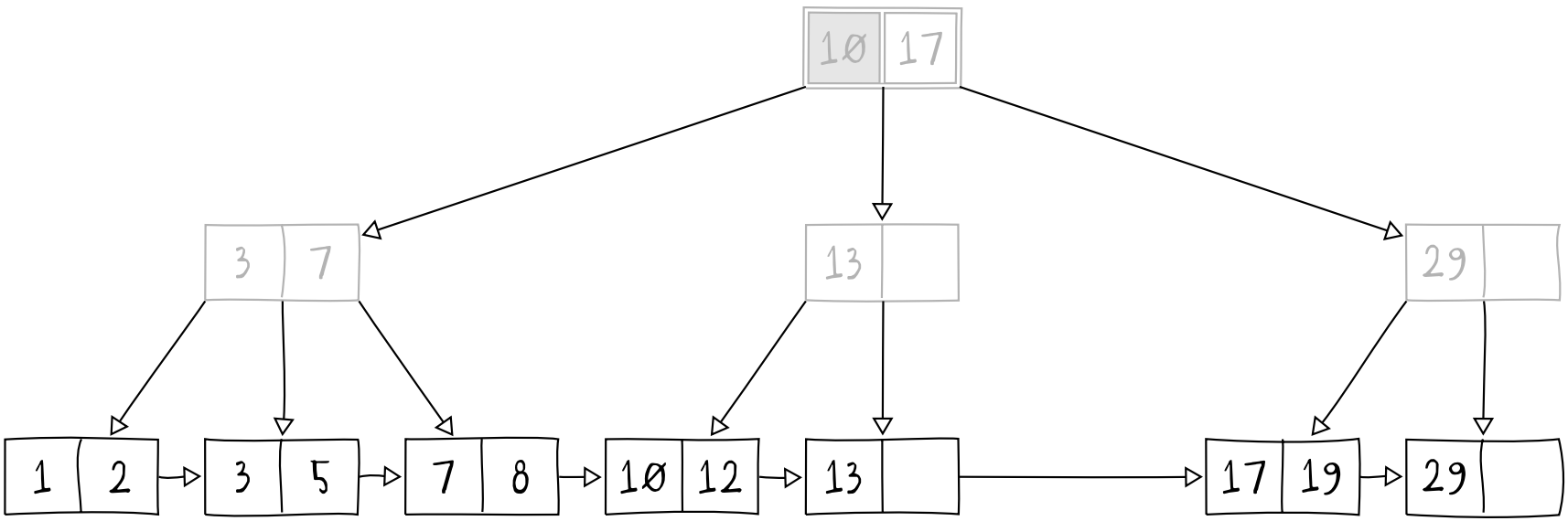
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 21
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



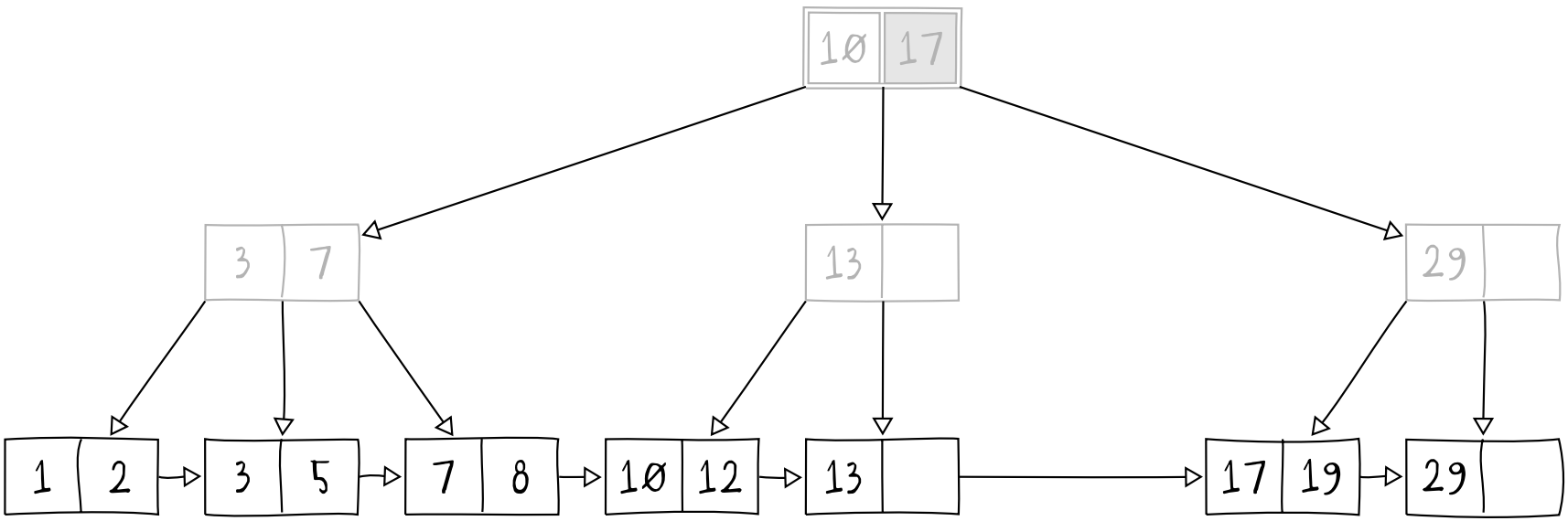
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 29
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



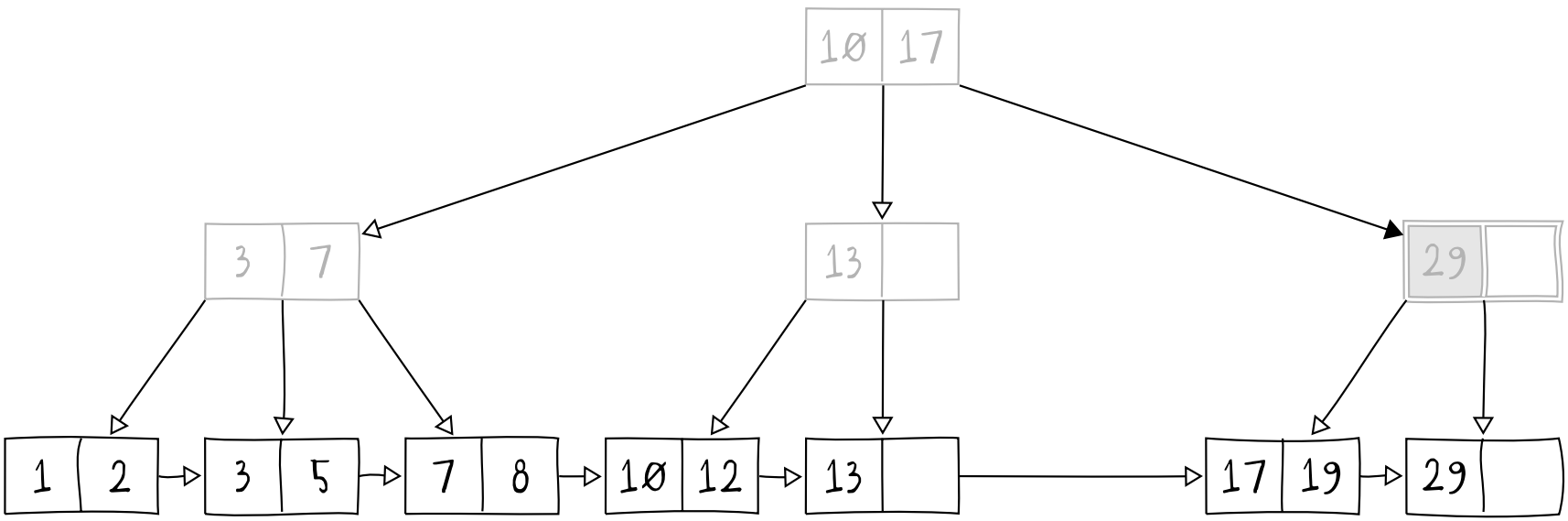
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 29
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



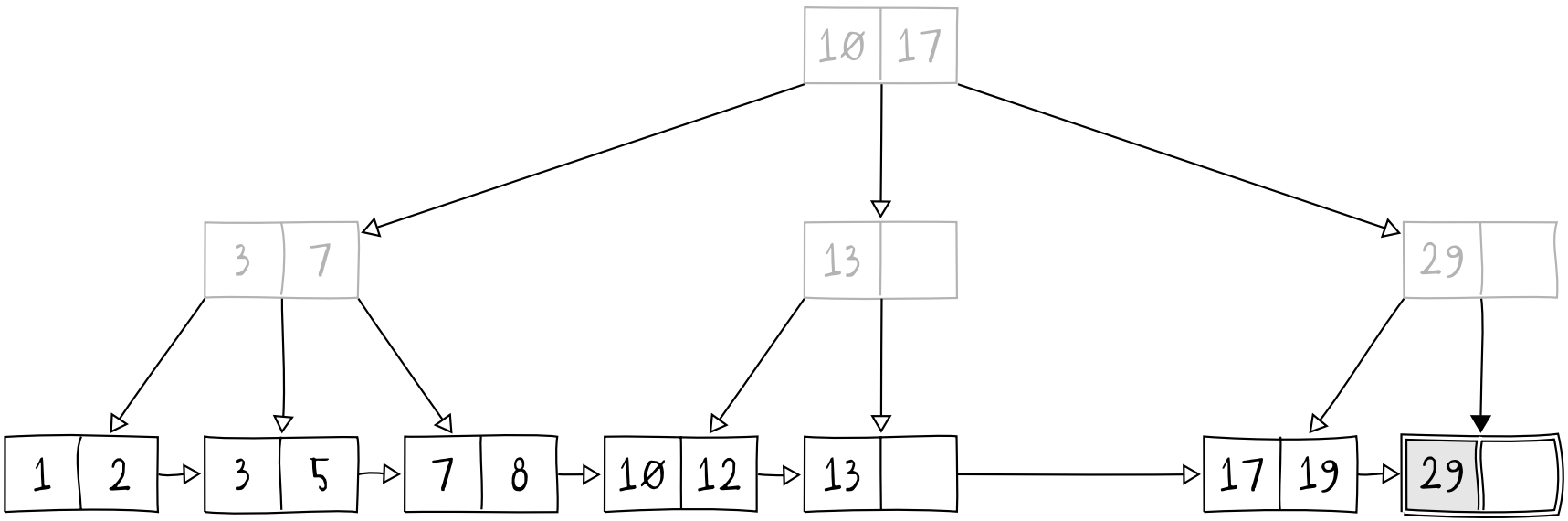
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 29
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



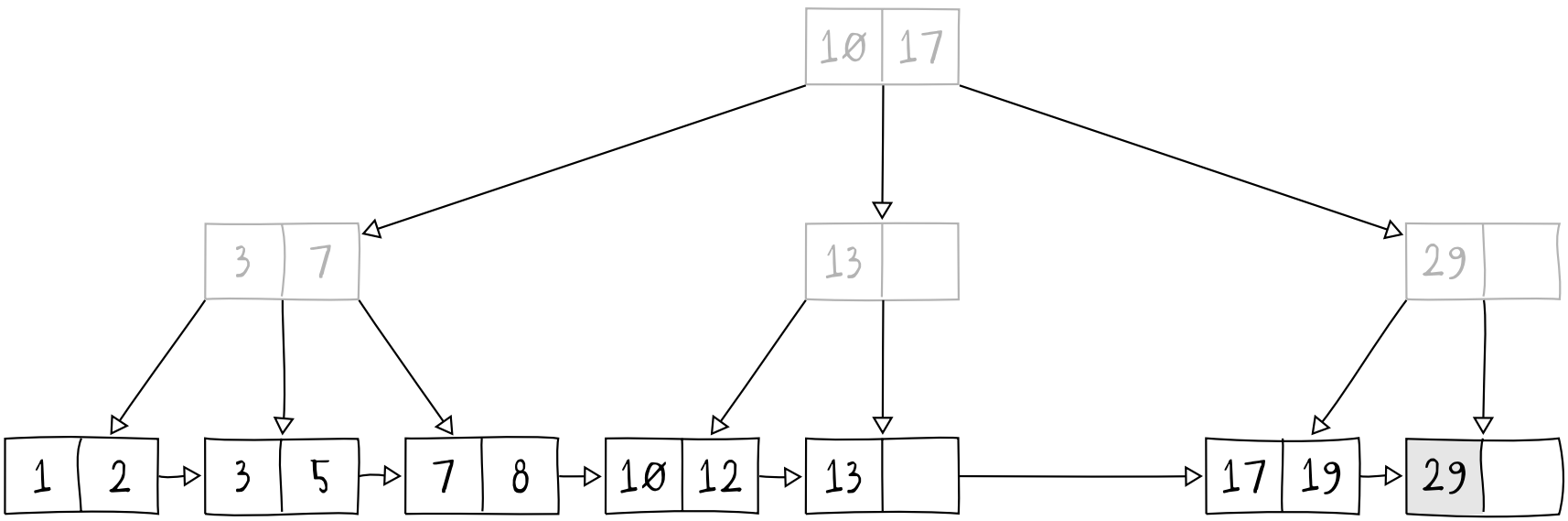
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 29
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



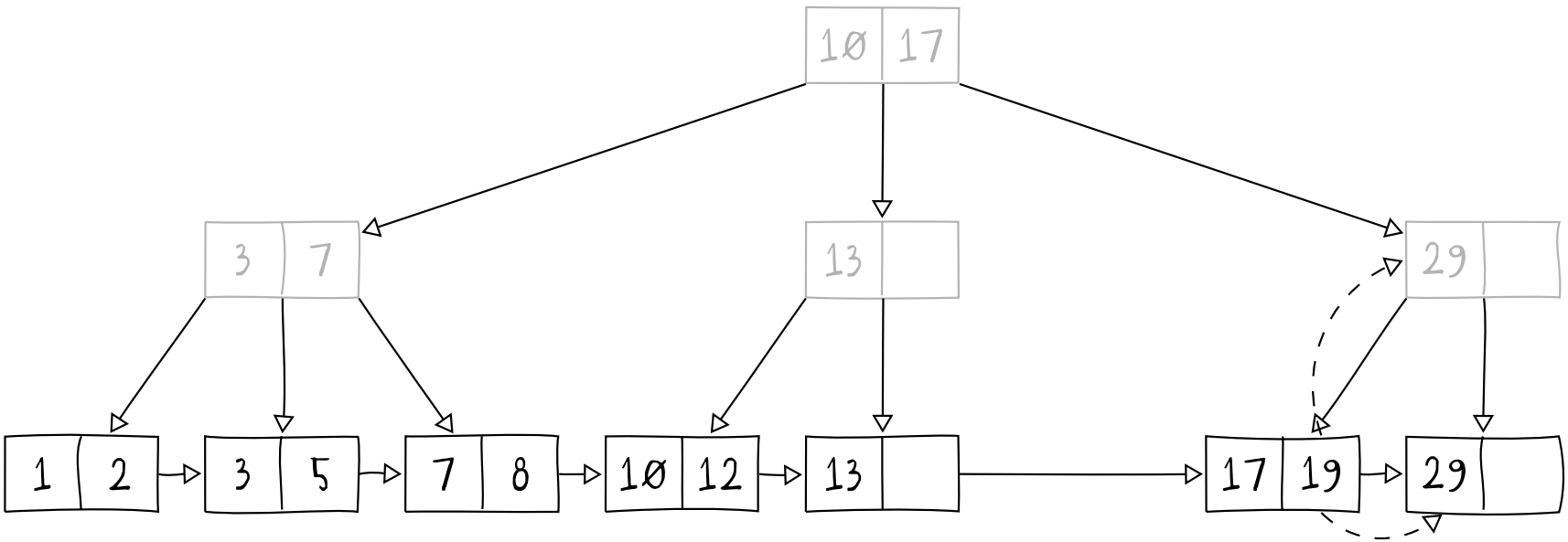
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 29
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



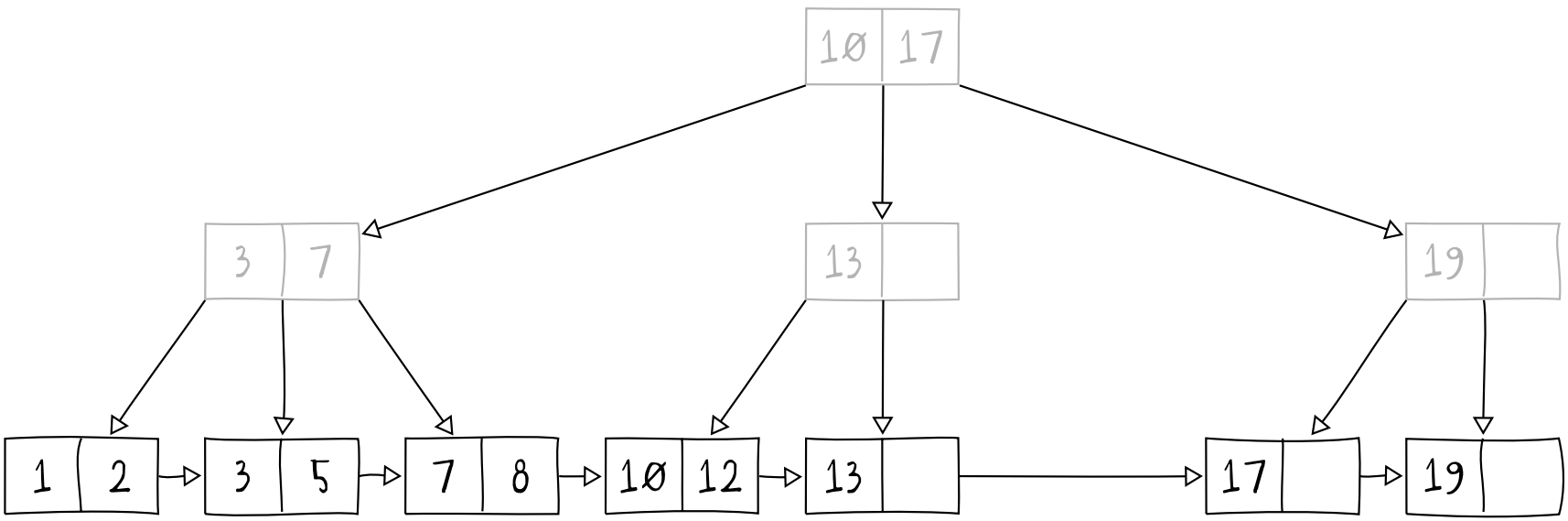
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 29
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



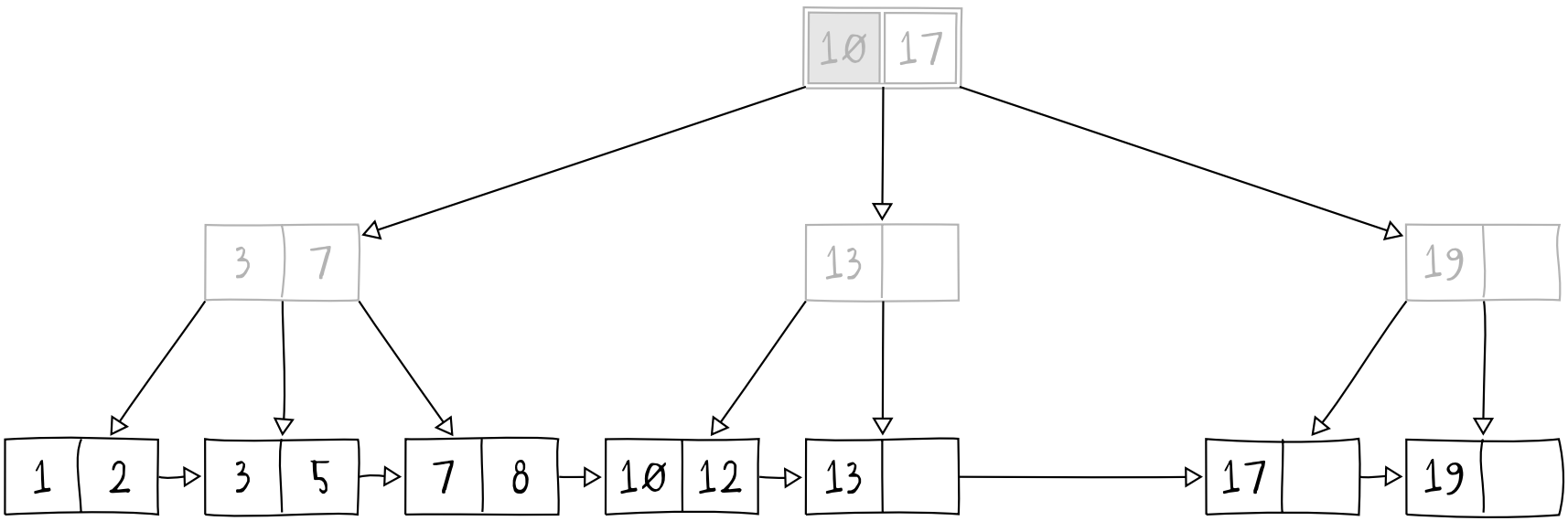
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 29
  - Caso 1: nó interno com filho $n > \frac{k}{2}$



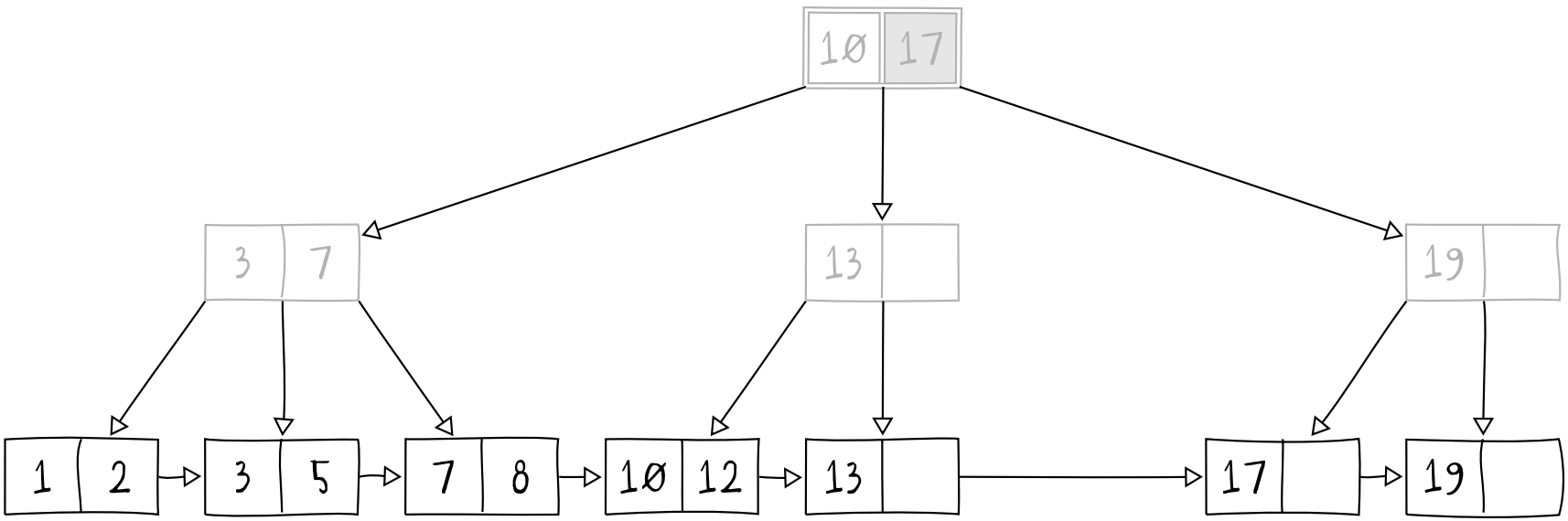
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



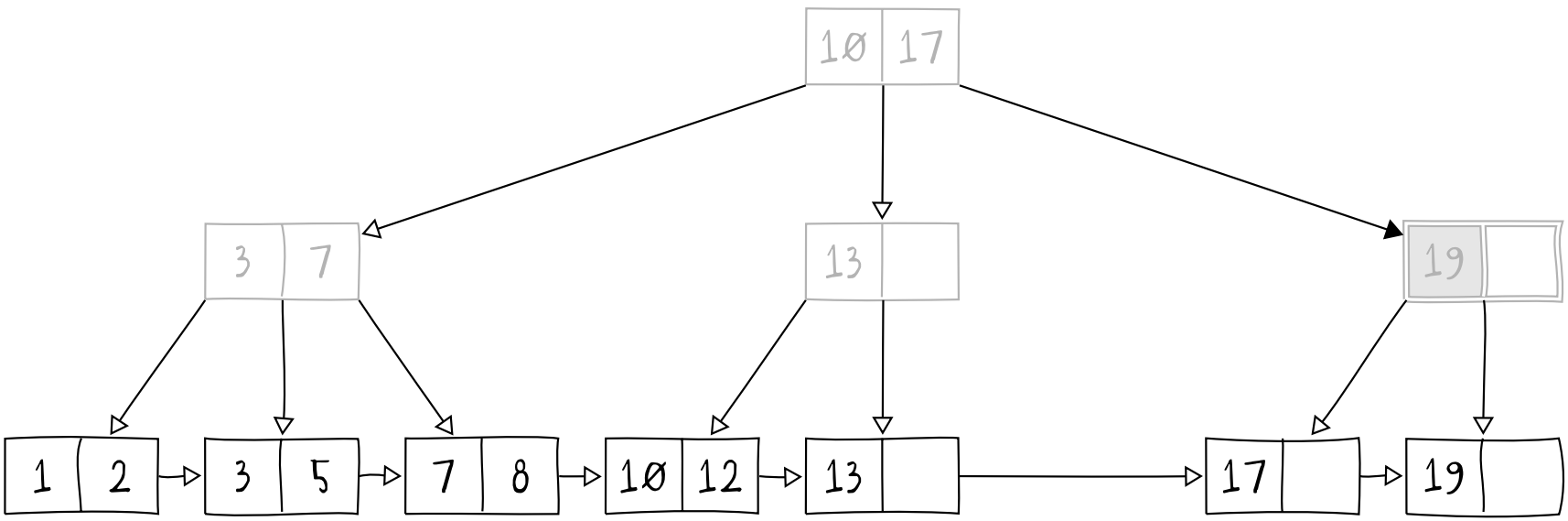
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



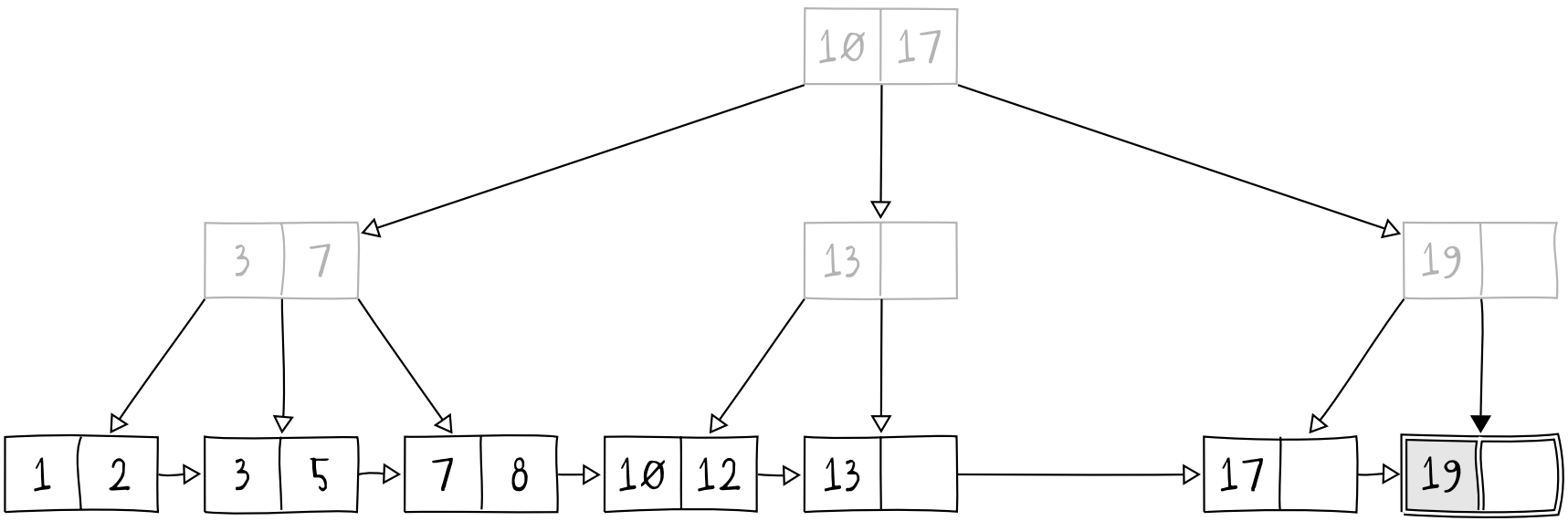
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



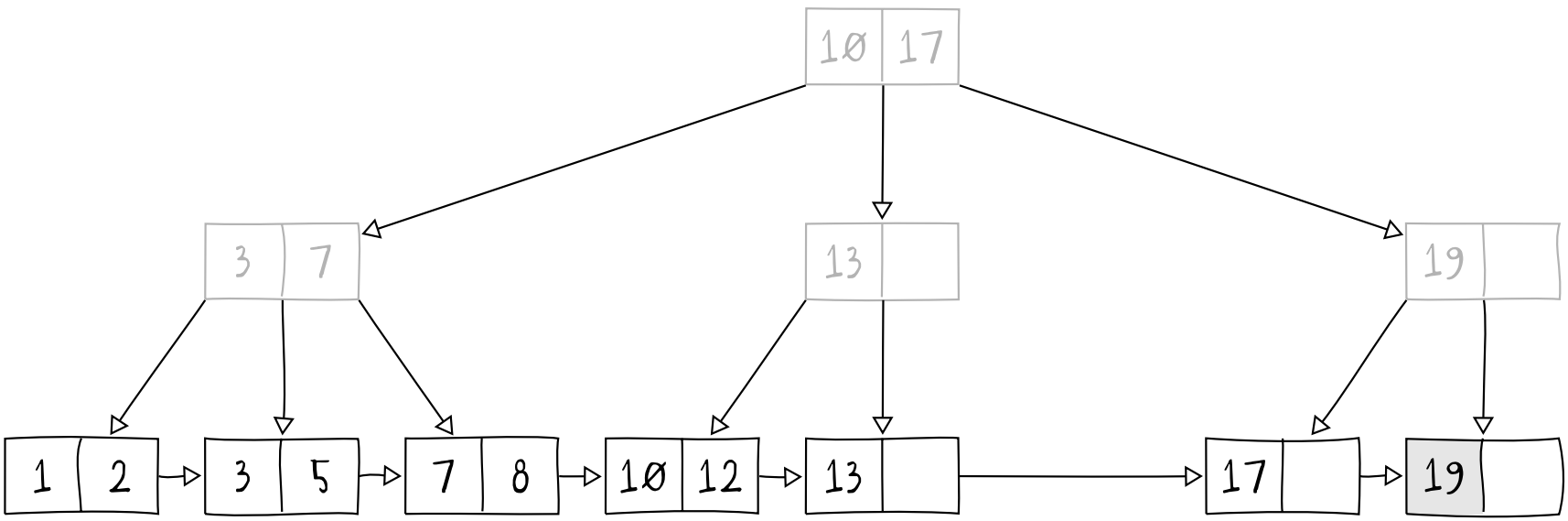
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



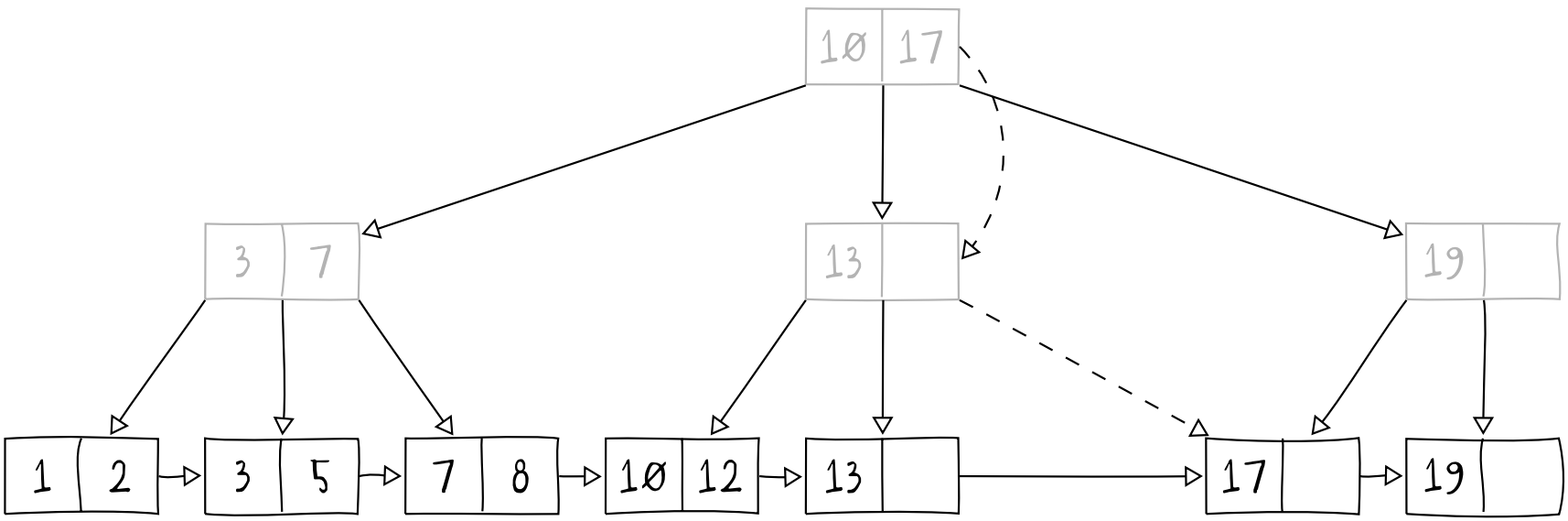
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



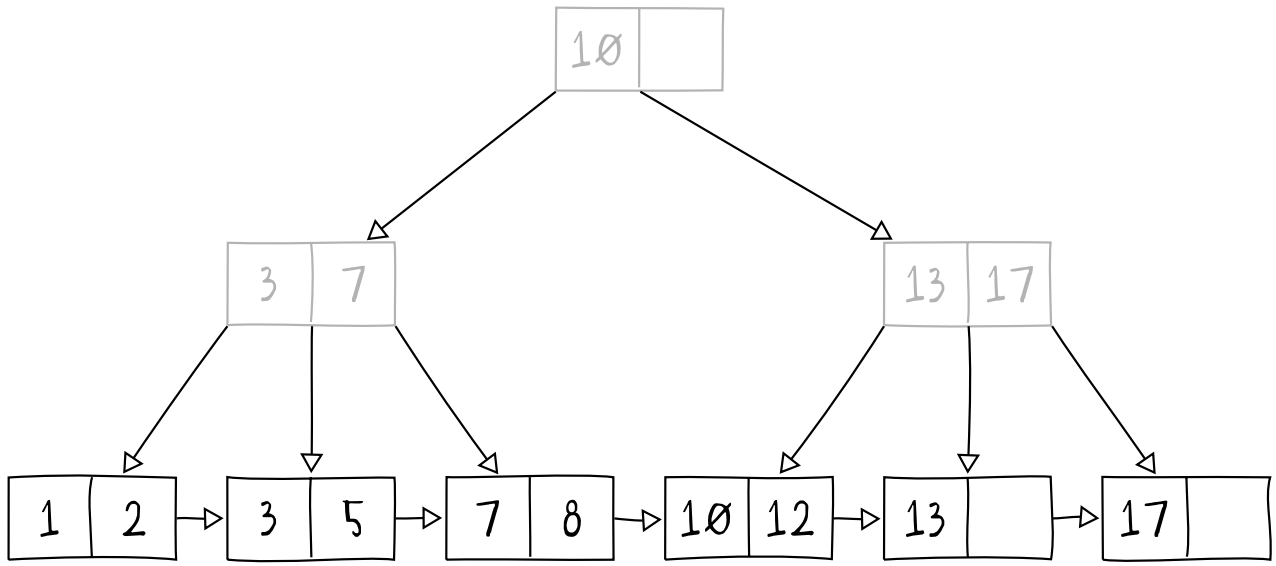
Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



Árvore B+

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



Árvore B+

- Análise de complexidade
  - Com ordem k, no pior caso, as operações percorrem a altura $h = log_k n$ da árvore com n nós, entretanto, na busca por intervalo, o pior caso é $O(n)$, uma vez que o intervalo pode conter todos os nós da árvore
  - Espaço: $\Theta(n)$
  - Tempo: $\Omega(\log_k n)$ e $O(n)$

Exemplo

- Construa uma árvore B+ de ordem 3
  - Insira os elementos com chaves 13, 2, 34, 11, 7, 43 e 9
  - Realize a remoção dos elementos de chave 7 e 9
  - Compare as diferenças entres as árvores B e B+

Exercício

- A empresa de tecnologia Poxim Tech está desenvolvendo um banco de dados distribuído para arquivos baseado em *blockchain* e árvore B+
  - Os arquivos possuem nomes + extensão com até 30 caracteres, compostos exclusivamente por letras
  - A codificação do código *hash* é feita em hexadecimal de 128 bits com caracteres maiúsculos, sendo utilizado como chave para buscas
  - Operações disponíveis:
    - **INSERT** nome tamanho hash
    - **SELECT** hash
    - **SELECT RANGE** hash1 hash2

Exercício

- Formato de arquivo de entrada
  - [#*Ordem da árvore*]
  - [#*Quantidade de arquivos*(n)]
  - [$Nome_1$] [$Tamanho_1$] [$Hash_1$]
  - $\vdots$
  - [$Nome_n$] [$Tamanho_n$] [$Hash_n$]
  - [#*Número de operações*(m)]
  - [$Operação_1$]
  - $\vdots$
  - [$Operação_m$]

Exercício

- Formato de arquivo de entrada

```
1  3
2  5
3  f.b␣1␣00000000000000000000000000000000
4  f.c␣2␣00000000000000000000000000000001
5  f.d␣3␣00000000000000000000000000000002
6  f.e␣4␣00000000000000000000000000000003
7  f.f␣5␣00000000000000000000000000000004
8  5
9  INSERT␣f.a␣0␣FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
10 SELECT␣00000000000000000000000000000004
11 SELECT␣123456789ABCDEF0123456789ABCDEF0
12 SELECT␣RANGE␣00000000000000000000000000000005␣
       FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFE
13 SELECT␣RANGE␣00000000000000000000000000000006␣
       FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
```

Exercício

- Formato de arquivo de saída
  - Conteúdo armazenado pelo nó da árvore

```
1  [00000000000000000000000000000004]
2  f.f:size=5,hash=0000000000000000000000000000004
3  f.a:size=0,hash=FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
4  [123456789ABCDEF0123456789ABCDEF0]
5  -
6  [00000000000000000000000000000005,
       FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFE]
7  -
8  [00000000000000000000000000000006,
       FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF]
9  f.f:size=5,hash=0000000000000000000000000000004
10 f.a:size=0,hash=FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
```