Árvore B

Estruturas de Dados

Bruno Prado

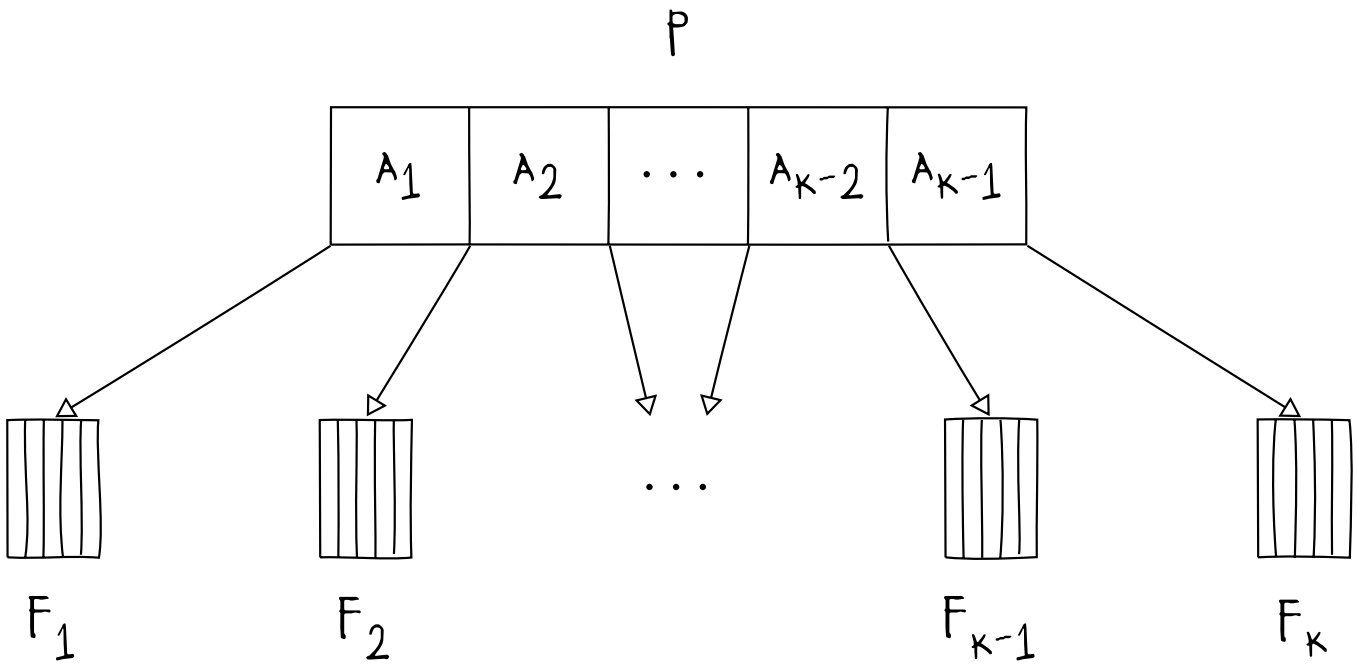
Departamento de Computação / UFS

Introdução

- O que é uma árvore B?
  - É uma árvore *k*-ária balanceada
  - Mantém todos os nós folha no mesmo nível
  - Foi criada em 1970 por R. **B**ayer e E. McCreight

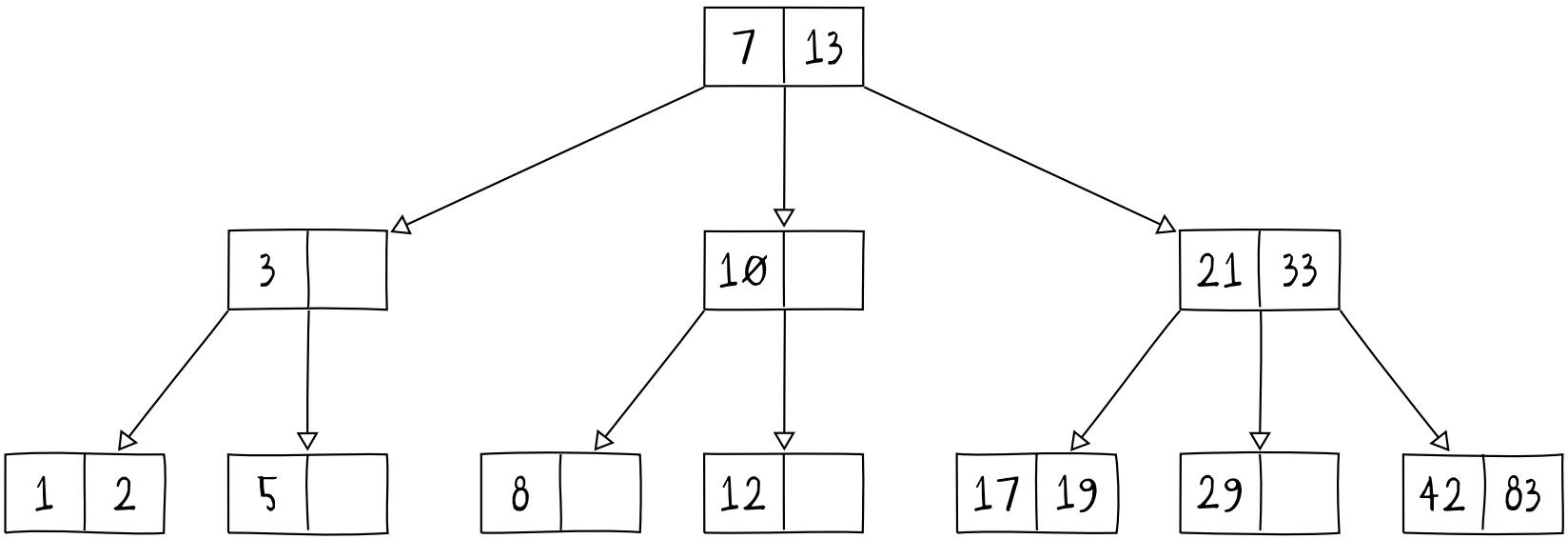
Introdução

- Propriedades de uma árvore B de ordem k
  - Todo nó tem $k \div 2$ até k filhos (exceto raiz e folha)
  - Chaves ordenadas $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{k-1} \leq a_{k-1}$
  - Todos os nós folhas estão no mesmo nível



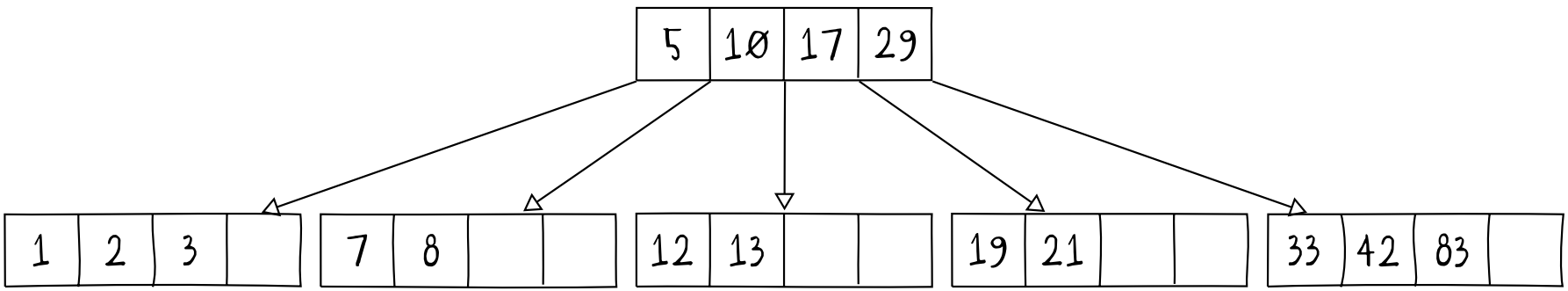
Introdução

- Árvore B de ordem 3



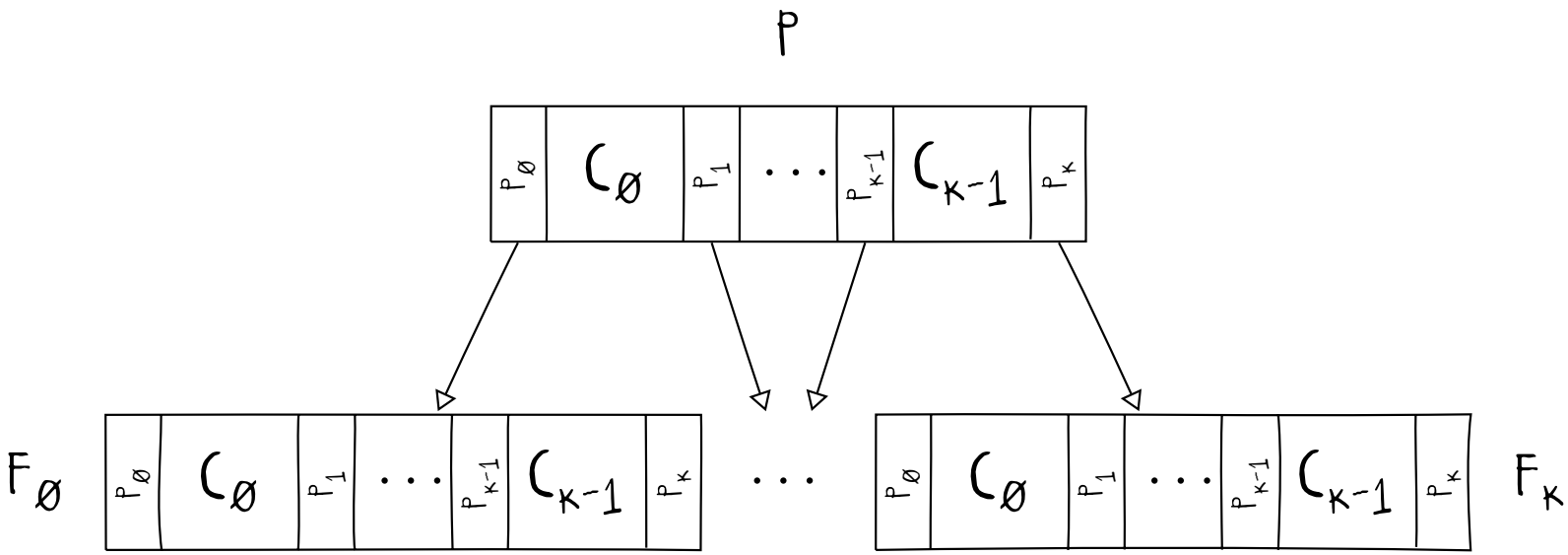
Introdução

- Árvore B de ordem 5



Árvore B

- Definição da estrutura



Árvore B

- Implementação em C
  - Estrutura e ponteiros

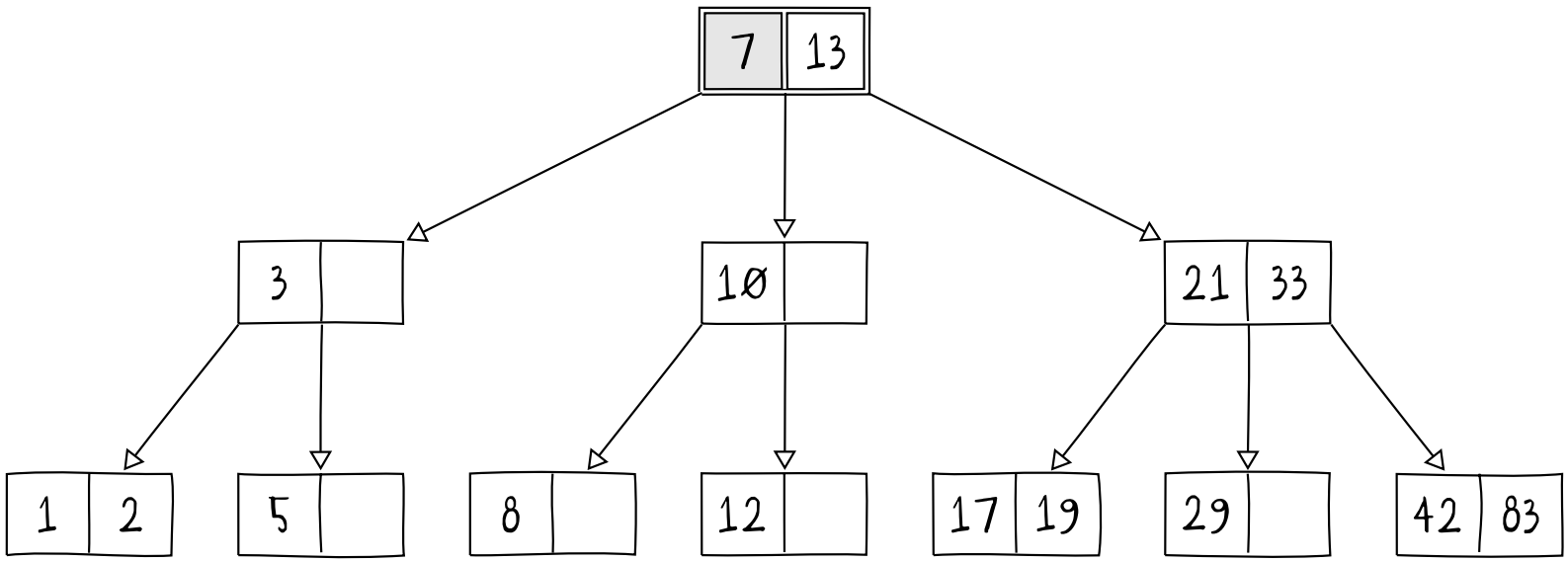
```c
// Padrão de tipos por tamanho
#include <stdint.h>
// Estrutura de nó
typedef struct no {
    // Vetor de chaves
    uint32_t* C;
    // Vetor de filhos
    struct no** P;
    // Quantidade utilizada
    uint32_t n;
} no;
```

Árvore B

- Operações básicas
  - Busca
  - Inserção
  - Remoção

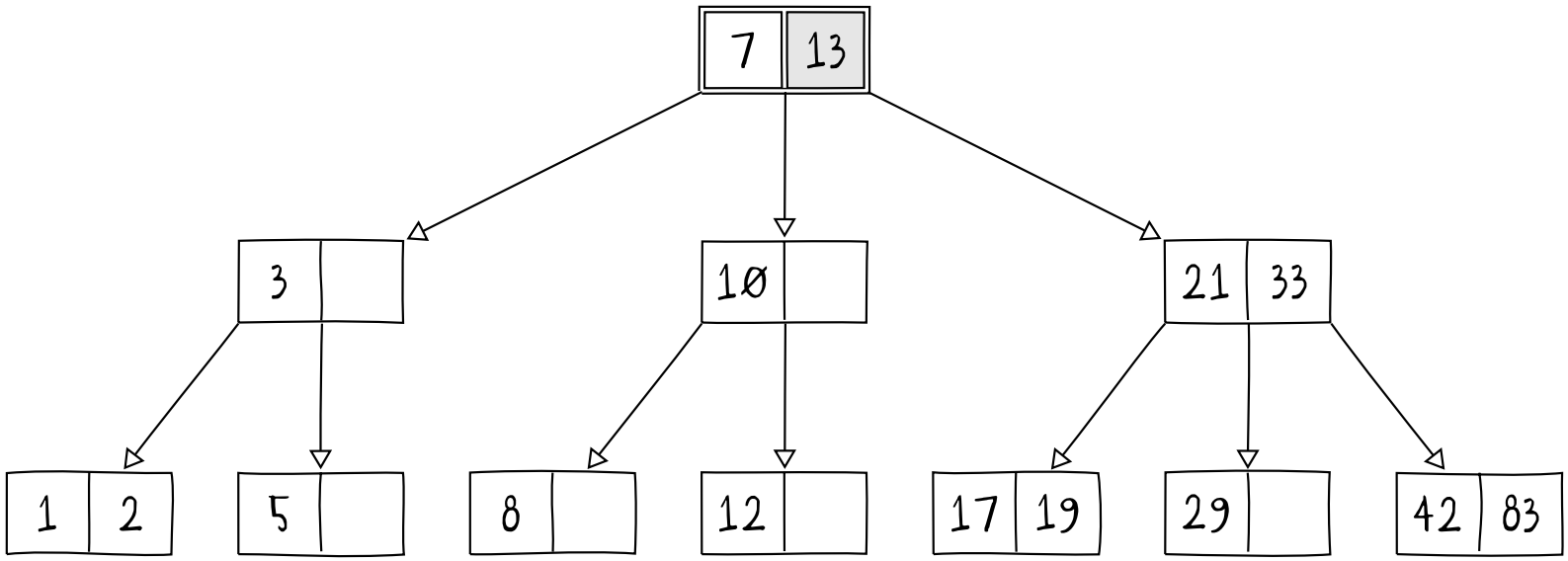
Árvore B

- Operação de busca
  - Parâmetro de chave: 19
  - A busca tem início pela raiz da árvore, checando as chaves do nó e acessando as subárvores



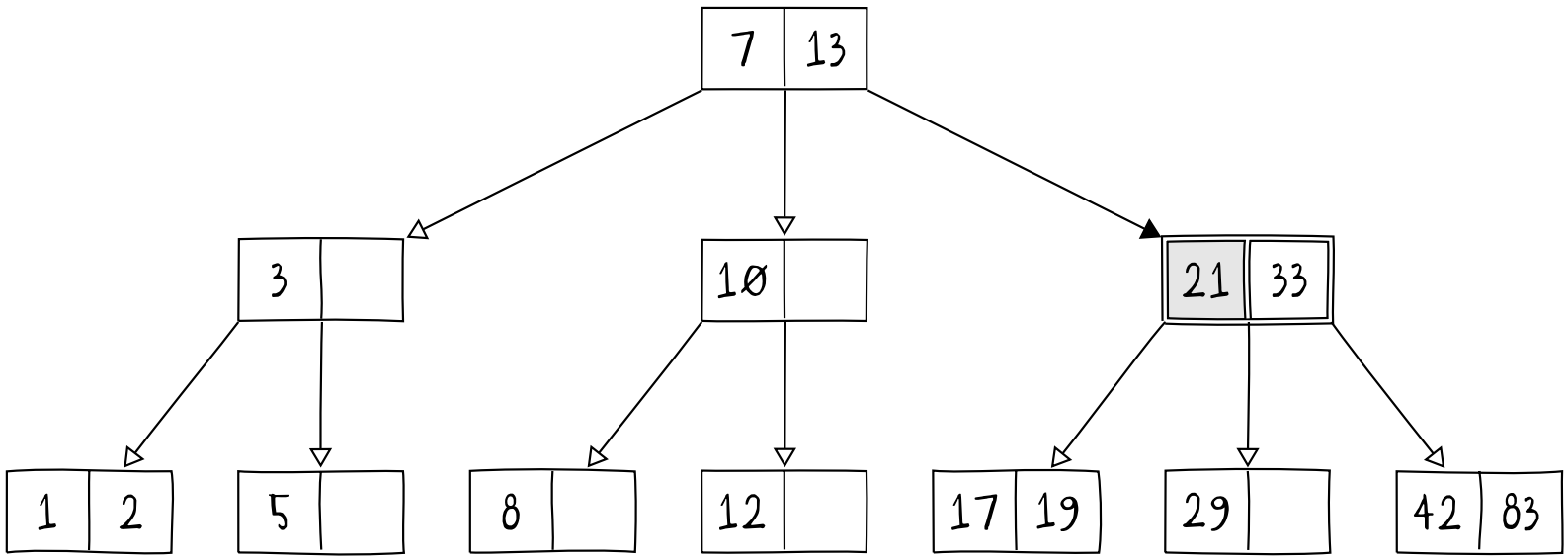
Árvore B

- Operação de busca
  - Parâmetro de chave: 19
  - A busca tem início pela raiz da árvore, checando as chaves do nó e acessando as subárvores



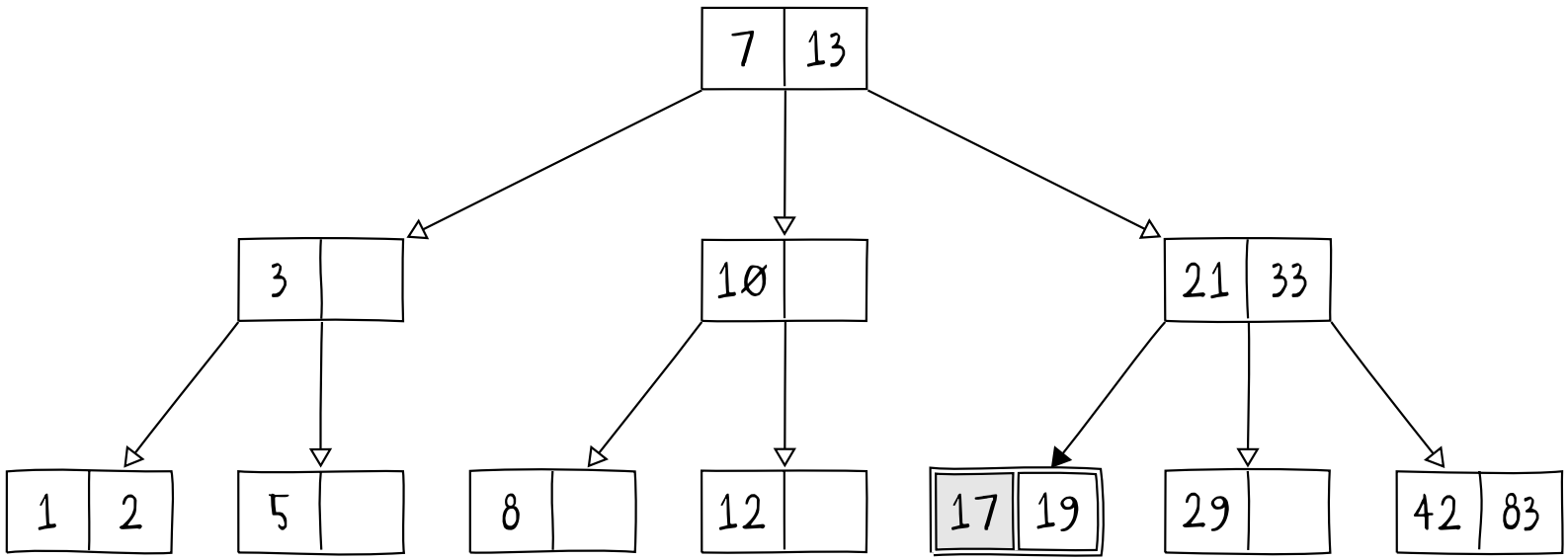
Árvore B

- Operação de busca
  - Parâmetro de chave: 19
  - A busca tem início pela raiz da árvore, checando as chaves do nó e acessando as subárvores



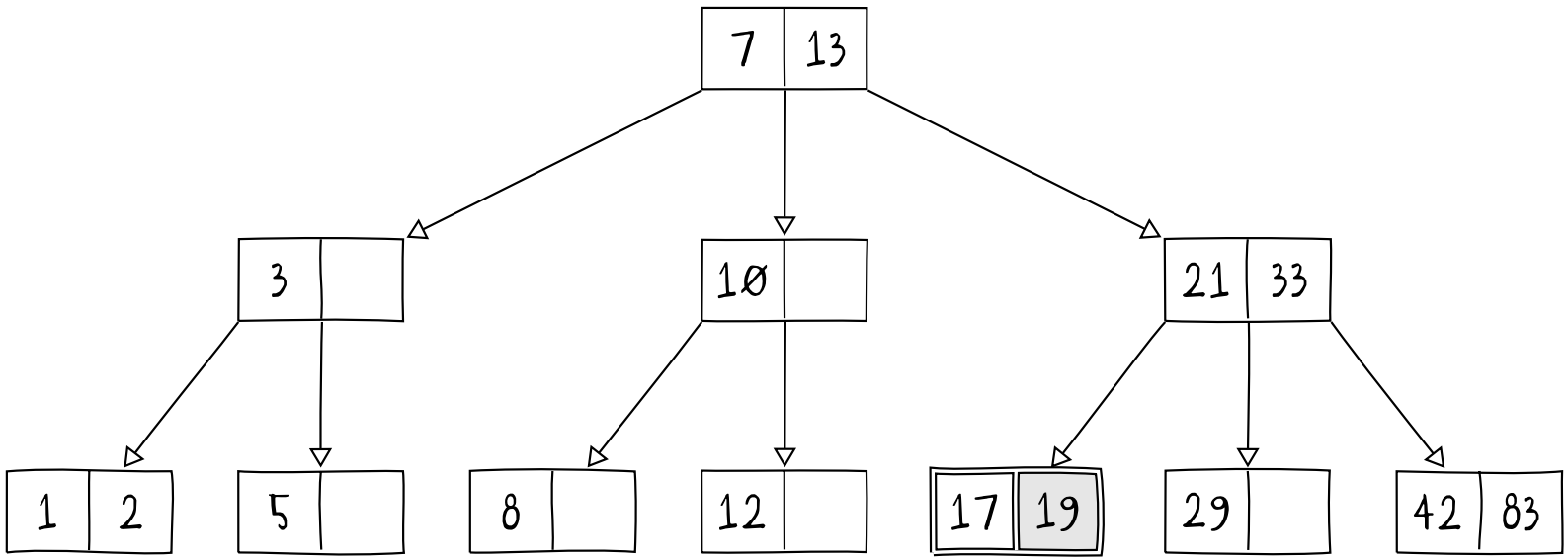
Árvore B

- Operação de busca
  - Parâmetro de chave: 19
  - A busca tem início pela raiz da árvore, checando as chaves do nó e acessando as subárvores



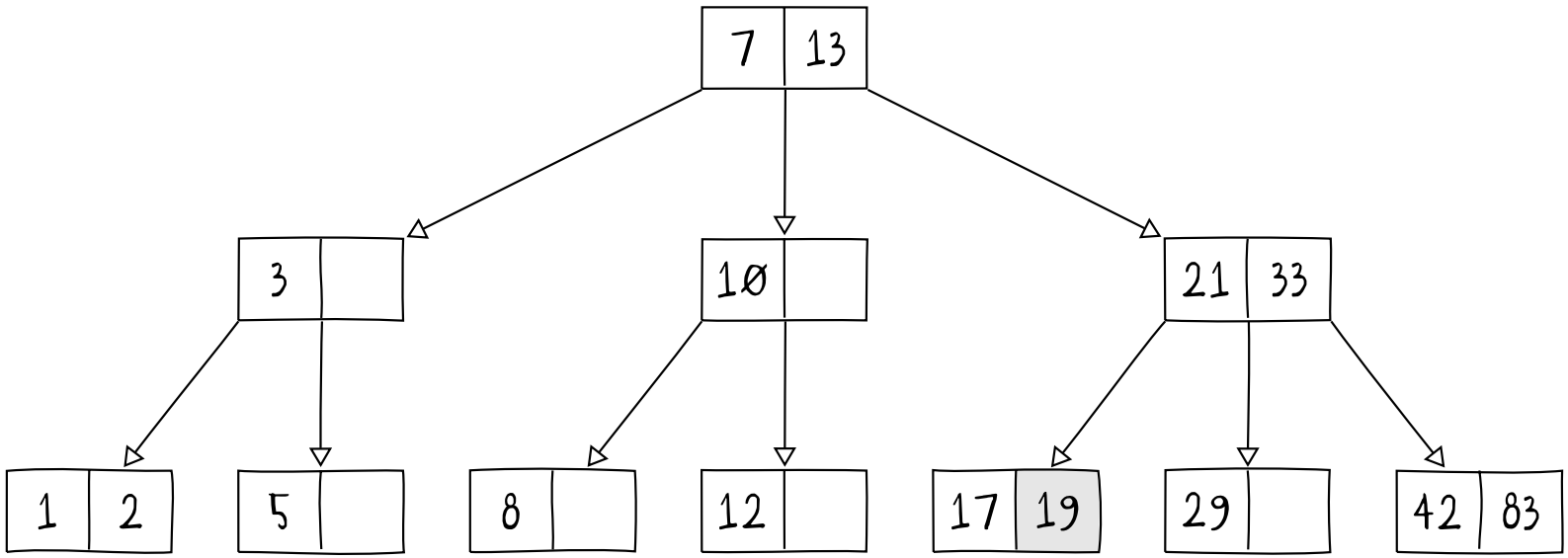
Árvore B

- Operação de busca
  - Parâmetro de chave: 19
  - A busca tem início pela raiz da árvore, checando as chaves do nó e acessando as subárvores



Árvore B

- Operação de busca
  - Parâmetro de chave: 19
  - A referência do nó encontrado é retornada



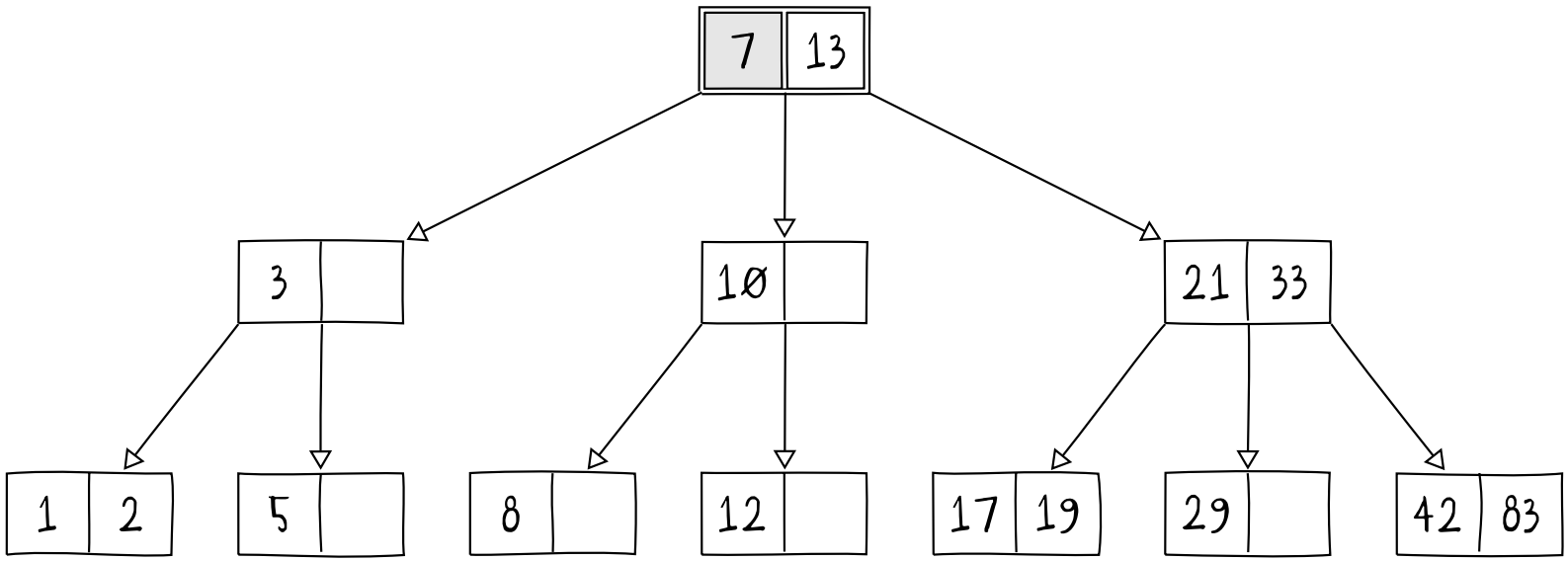
Árvore B

- Implementação em C
  - Busca na árvore

```
1  // Função de busca na árvore
2  no* busca(no* x, uint32_t c) {
3      no* r = NULL;
4      if(x != NULL) {
5          uint32_t i = 0;
6          while(i < x->n && c > x->C[i])
7              i++;
8          if(i < x->n && c == x->C[i])
9              r = x;
10         else
11             r = busca(x->P[i], c);
12     }
13     return r;
14 }
```

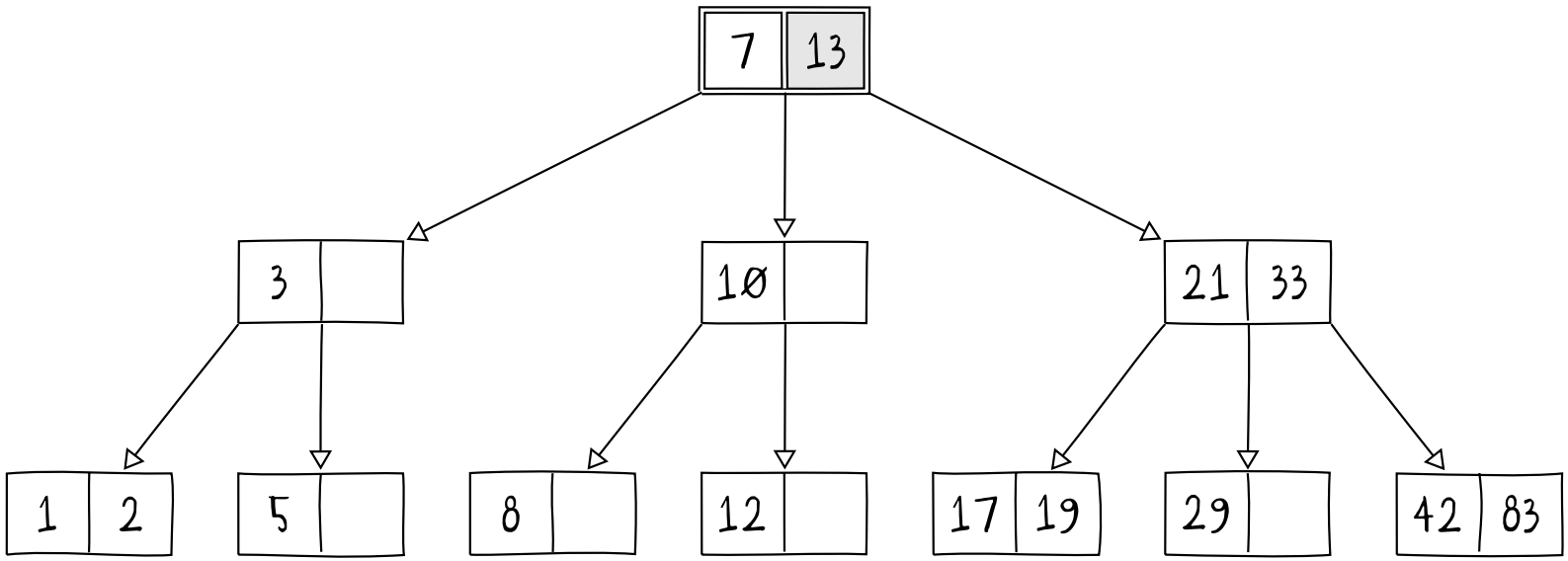
Árvore B

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 11
  - Caso 1: nó está incompleto



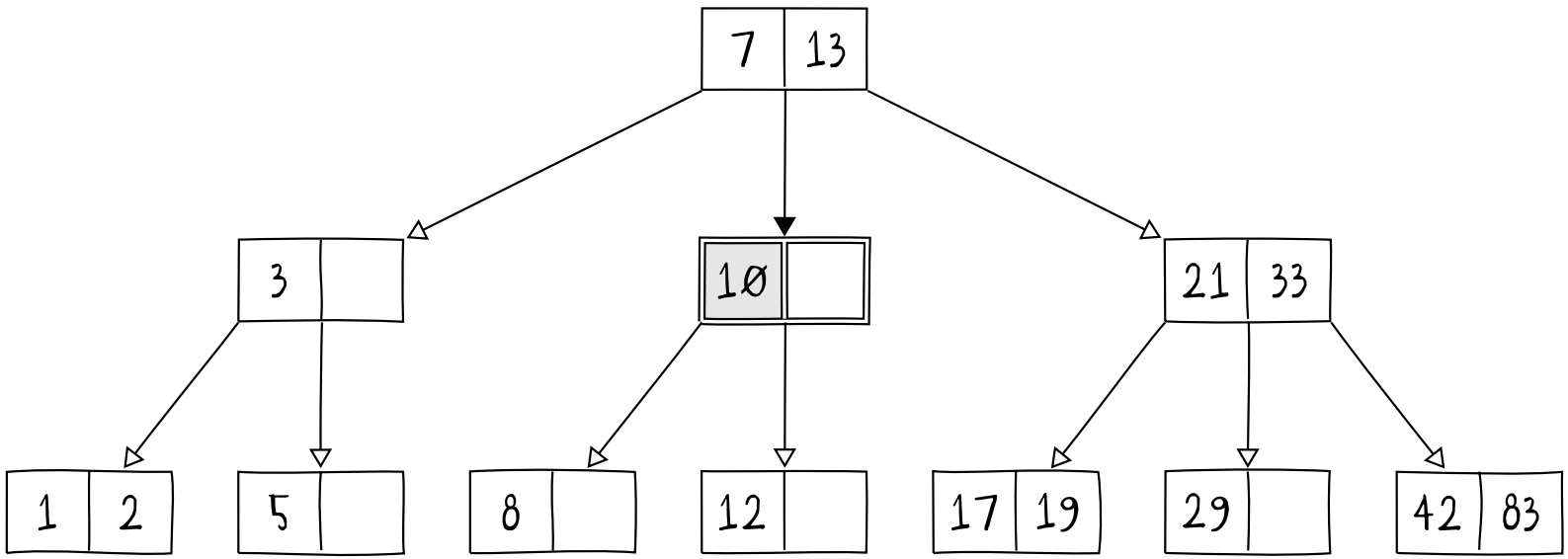
Árvore B

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 11
  - Caso 1: nó está incompleto



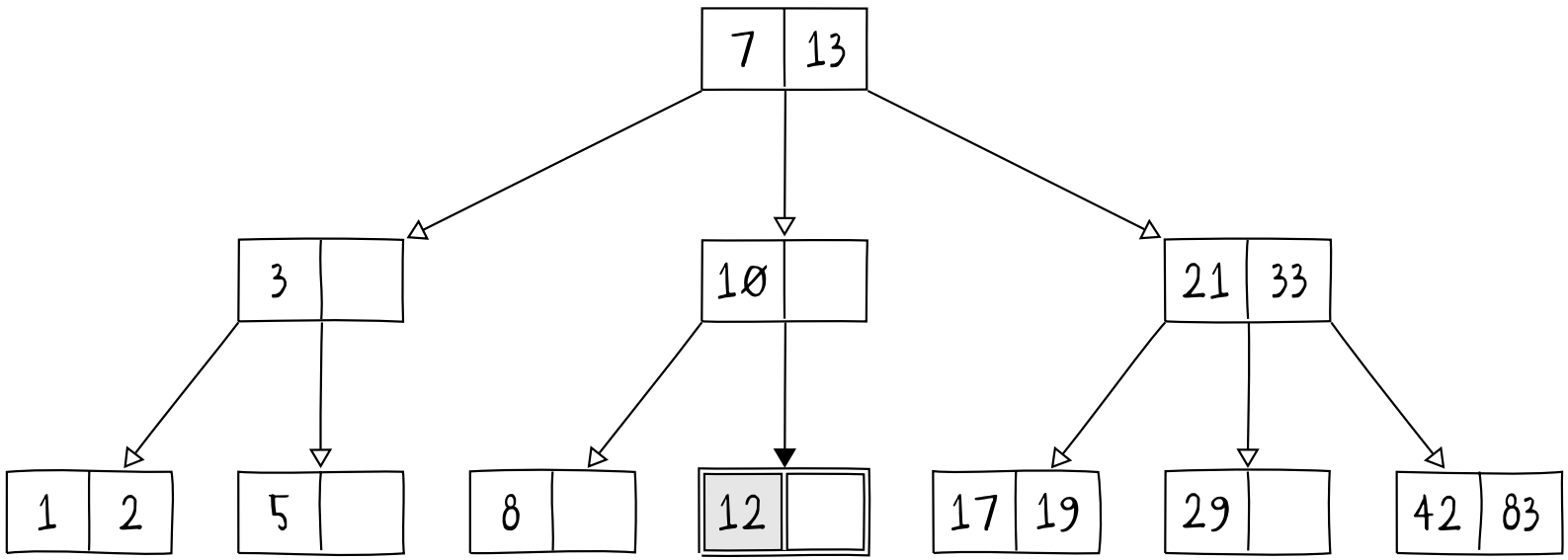
Árvore B

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 11
  - Caso 1: nó está incompleto



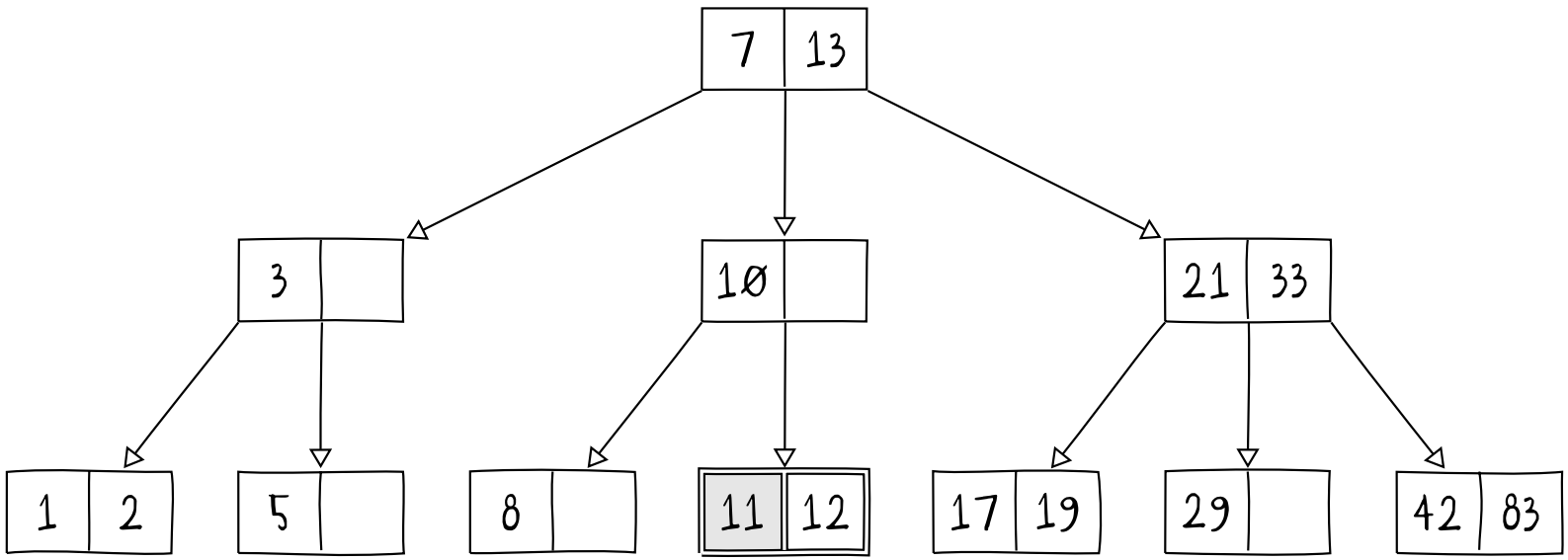
Árvore B

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 11
  - Caso 1: nó está incompleto



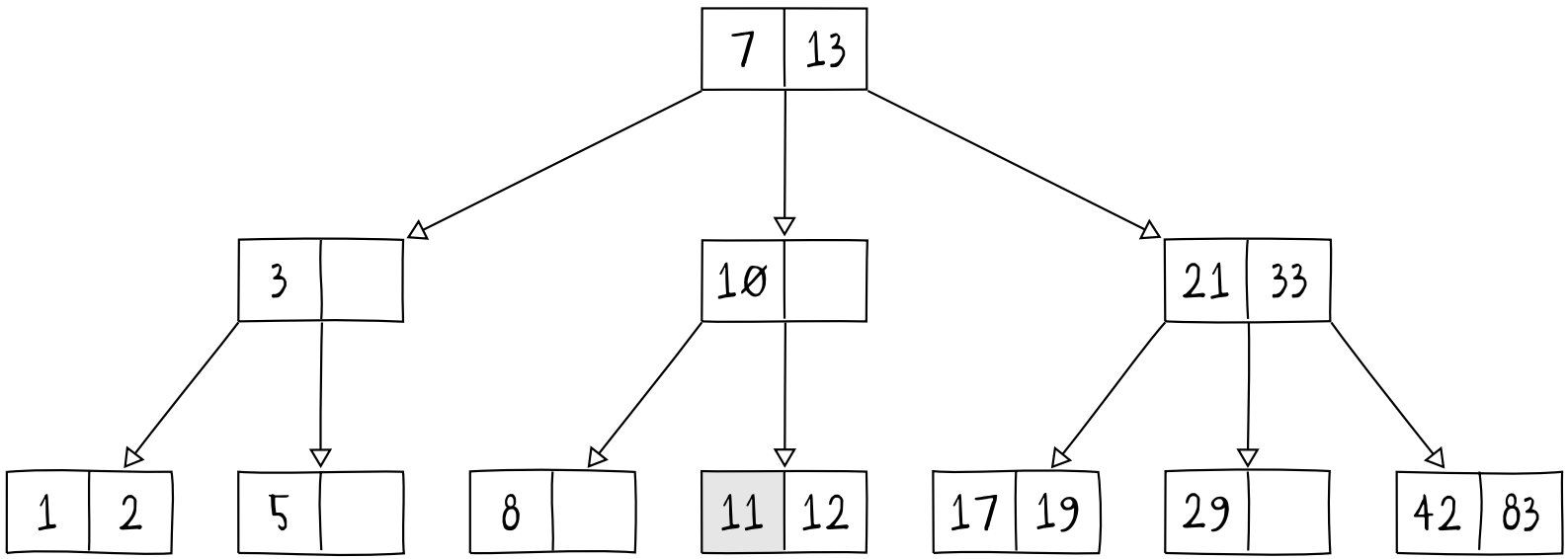
Árvore B

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 11
  - Caso 1: nó está incompleto



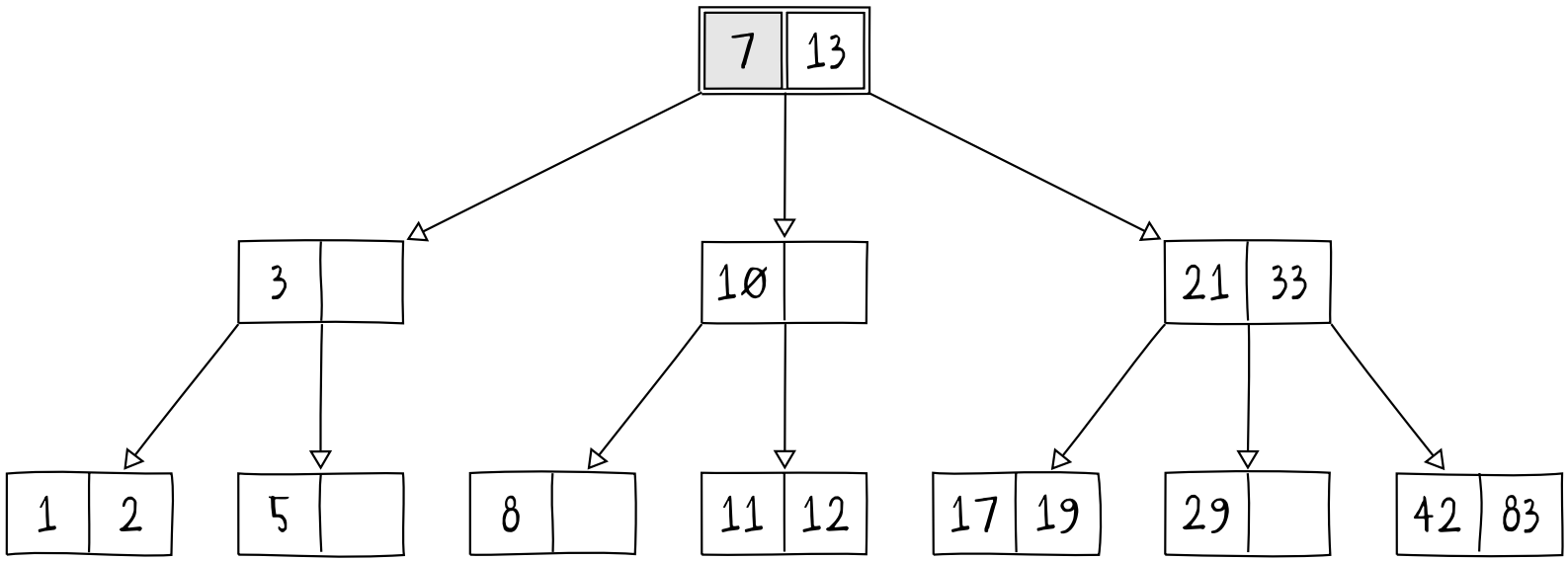
Árvore B

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 11
  - Caso 1: nó está incompleto



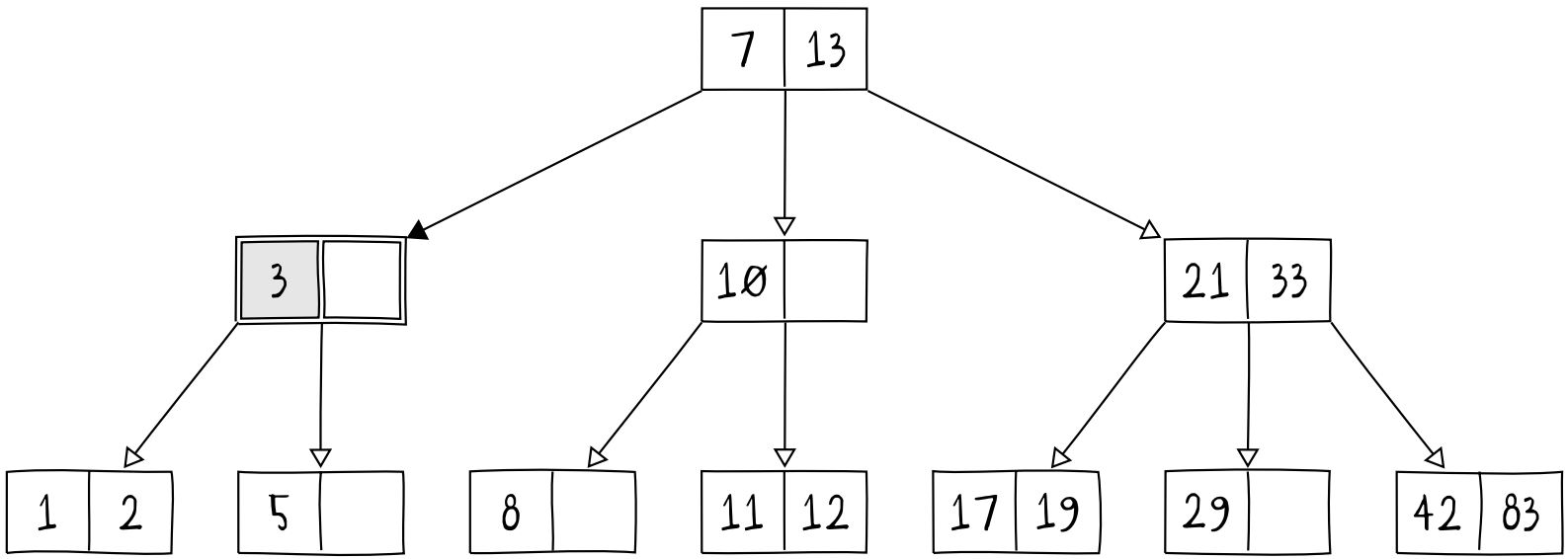
Árvore B

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 0
  - Caso 2: nó está completo



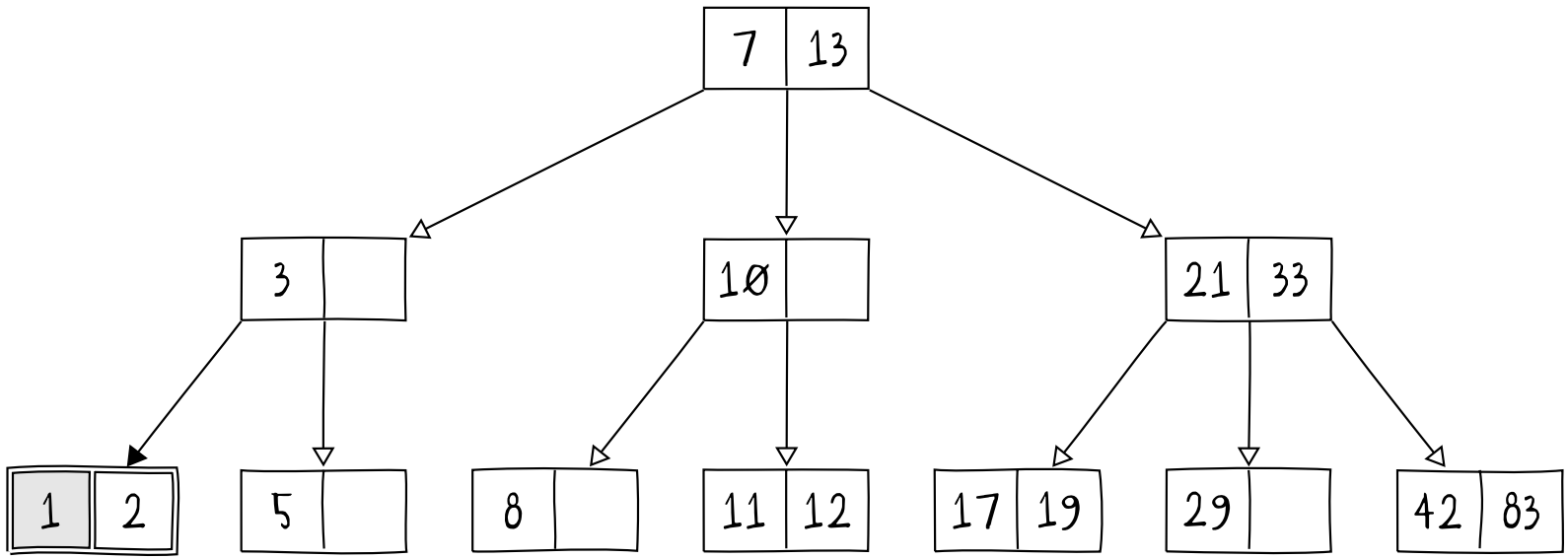
Árvore B

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 0
  - Caso 2: nó está completo



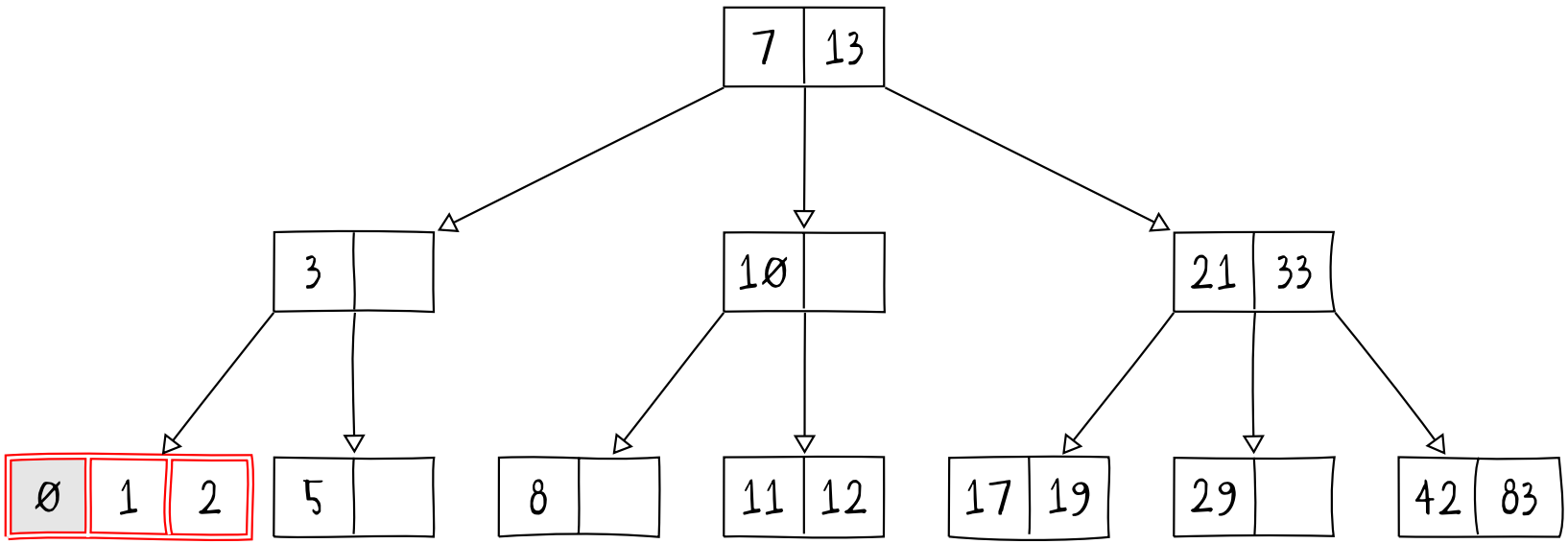
Árvore B

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 0
  - Caso 2: nó está completo



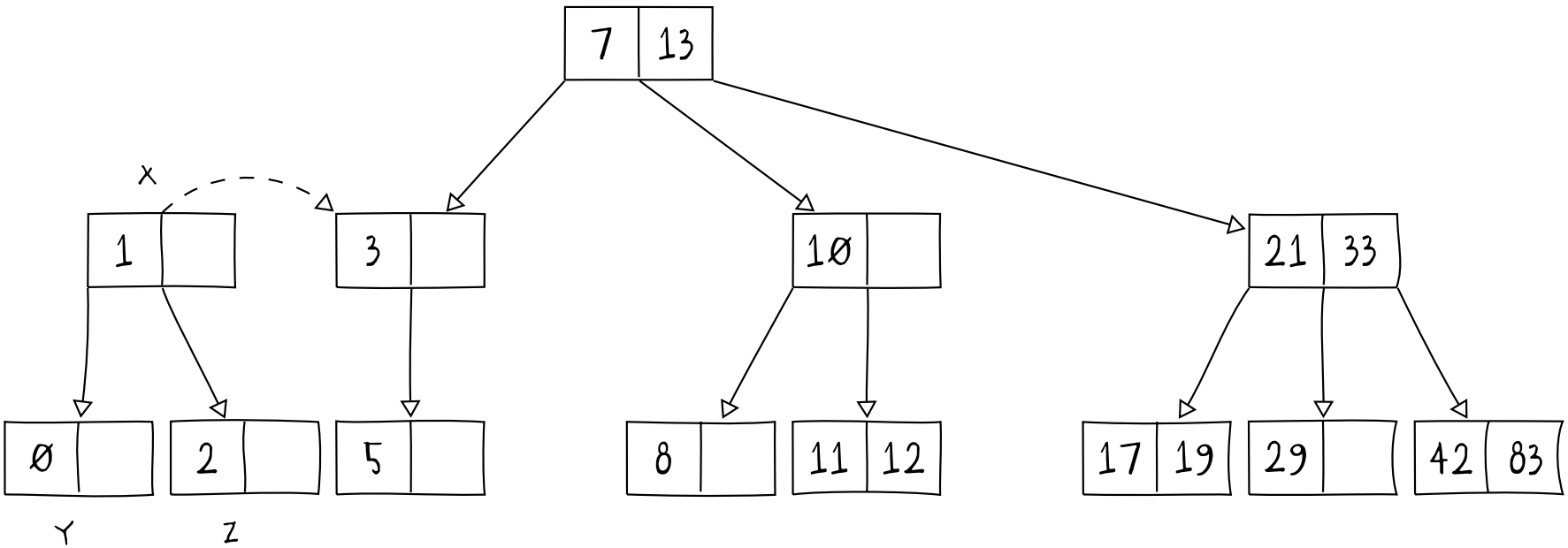
Árvore B

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 0
  - Caso 2: nó está completo



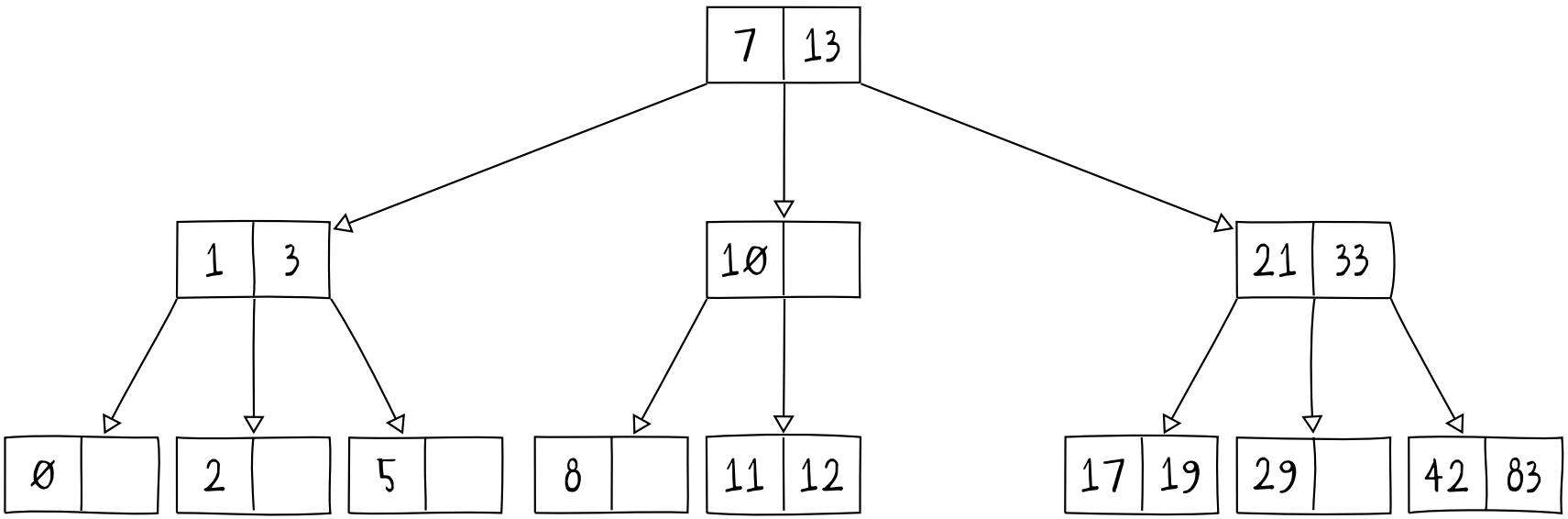
Árvore B

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 0
  - Caso 2: nó está completo (divisão do nó)



Árvore B

- Operação de inserção
  - Parâmetro de chave: 0
  - Caso 2: nó está completo (divisão do nó)



Árvore B

- Implementação em C
  - Divisão do nó

```
1  // Procedimento de divisão do nó
2  void divisao_no(no* x) {
3      uint32_t i = 0;
4      no* y = criar_no(k);
5      no* z = criar_no(k);
6      for(i = 0; i < k / 2; i++) {
7          y->C[i] = x->C[i]; y->P[i] = x->P[i]; y->n++;
8      } y->P[i] = x->P[i];
9      for(i = (k / 2) + 1; i < x->n; i++) {
10         z->C[i - (k / 2) - 1] = x->C[i]; z->P[i - (k /
               2) - 1] = x->P[i]; z->n++;
11     } z->P[i - (k / 2) - 1] = x->P[i];
12     x->C[0] = x->C[k / 2]; x->P[0] = y; x->P[1] = z;
           x->n = 1;
13 }
```

Árvore B

- Implementação em C
  - Divisão do nó

```
1  // Procedimento de divisão do nó
2  void divisao_no(no* x) {
3      uint32_t i = 0;
4      no* y = criar_no(k);
5      no* z = criar_no(k);
6      for(i = 0; i < k / 2; i++) {
7          y->C[i] = x->C[i]; y->P[i] = x->P[i]; y->n++;
8      } y->P[i] = x->P[i];
9      for(i = (k / 2) + 1; i < x->n; i++) {
10         z->C[i - (k / 2) - 1] = x->C[i]; z->P[i - (k /
               2) - 1] = x->P[i]; z->n++;
11     } z->P[i - (k / 2) - 1] = x->P[i];
12     x->C[0] = x->C[k / 2]; x->P[0] = y; x->P[1] = z;
           x->n = 1;
13 }
```

Instanciação dos novos nós *y* e *z*

Árvore B

- Implementação em C
  - Divisão do nó

```
1  // Procedimento de divisão do nó
2  void divisao_no(no* x) {
3      uint32_t i = 0;
4      no* y = criar_no(k);
5      no* z = criar_no(k);
6      for(i = 0; i < k / 2; i++) {
7          y->C[i] = x->C[i]; y->P[i] = x->P[i]; y->n++;
8      } y->P[i] = x->P[i];
9      for(i = (k / 2) + 1; i < x->n; i++) {
10         z->C[i - (k / 2) - 1] = x->C[i]; z->P[i - (k /
               2) - 1] = x->P[i]; z->n++;
11     } z->P[i - (k / 2) - 1] = x->P[i];
12     x->C[0] = x->C[k / 2]; x->P[0] = y; x->P[1] = z;
           x->n = 1;
13 }
```

Cópia da metade inferior de *x* para *y*

Árvore B

- Implementação em C
  - Divisão do nó

```
1  // Procedimento de divisão do nó
2  void divisao_no(no* x) {
3      uint32_t i = 0;
4      no* y = criar_no(k);
5      no* z = criar_no(k);
6      for(i = 0; i < k / 2; i++) {
7          y->C[i] = x->C[i]; y->P[i] = x->P[i]; y->n++;
8      } y->P[i] = x->P[i];
9      for(i = (k / 2) + 1; i < x->n; i++) {
10         z->C[i - (k / 2) - 1] = x->C[i]; z->P[i - (k /
               2) - 1] = x->P[i]; z->n++;
11     } z->P[i - (k / 2) - 1] = x->P[i];
12     x->C[0] = x->C[k / 2]; x->P[0] = y; x->P[1] = z;
           x->n = 1;
13 }
```

Cópia da metade superior de *x* para *z*

Árvore B

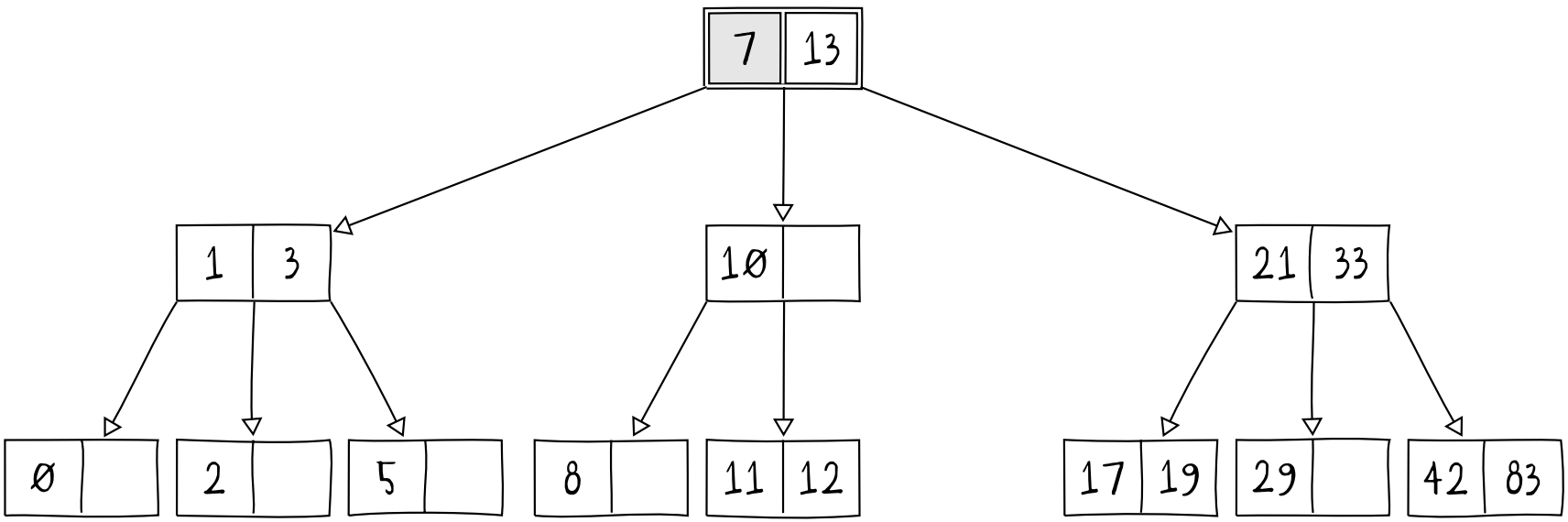
- Implementação em C
  - Divisão do nó

```
1  // Procedimento de divisão do nó
2  void divisao_no(no* x) {
3      uint32_t i = 0;
4      no* y = criar_no(k);
5      no* z = criar_no(k);
6      for(i = 0; i < k / 2; i++) {
7          y->C[i] = x->C[i]; y->P[i] = x->P[i]; y->n++;
8      } y->P[i] = x->P[i];
9      for(i = (k / 2) + 1; i < x->n; i++) {
10         z->C[i - (k / 2) - 1] = x->C[i]; z->P[i - (k /
               2) - 1] = x->P[i]; z->n++;
11     } z->P[i - (k / 2) - 1] = x->P[i];
12     x->C[0] = x->C[k / 2]; x->P[0] = y; x->P[1] = z;
           x->n = 1;
13 }
```

A chave de *x* e os ponteiros para *y* e *z* são atualizados

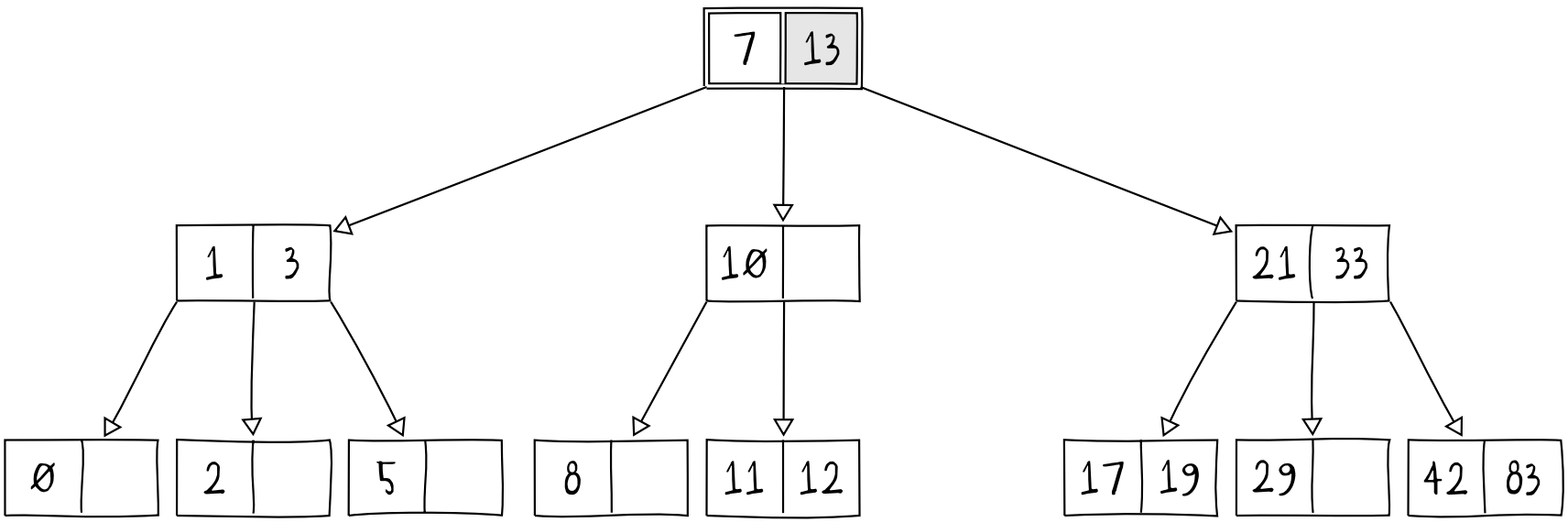
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 17
  - Caso 1: nó folha com $n > \frac{k}{2}$



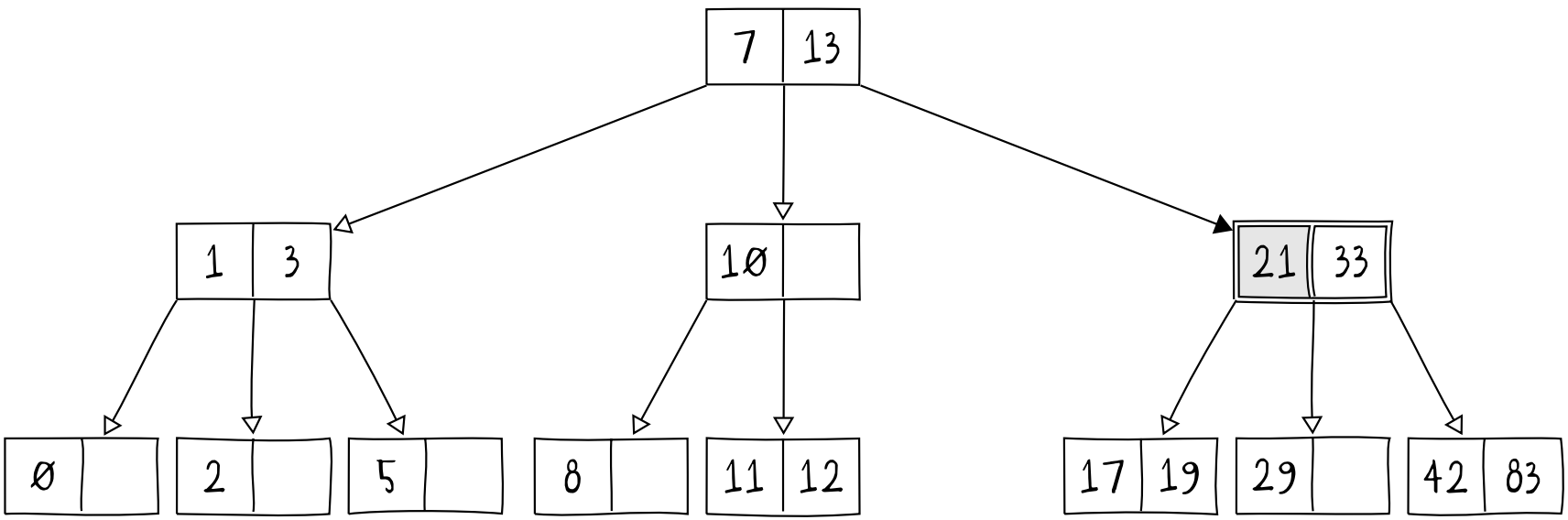
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 17
  - Caso 1: nó folha com $n > \frac{k}{2}$



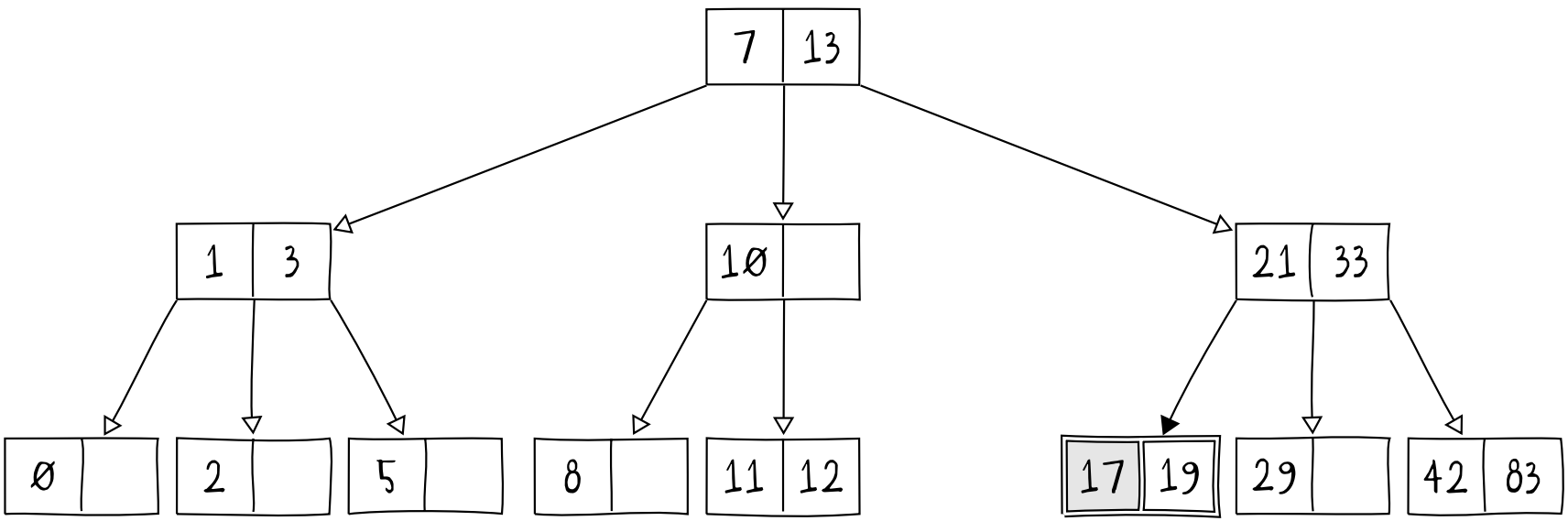
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 17
  - Caso 1: nó folha com $n > \frac{k}{2}$



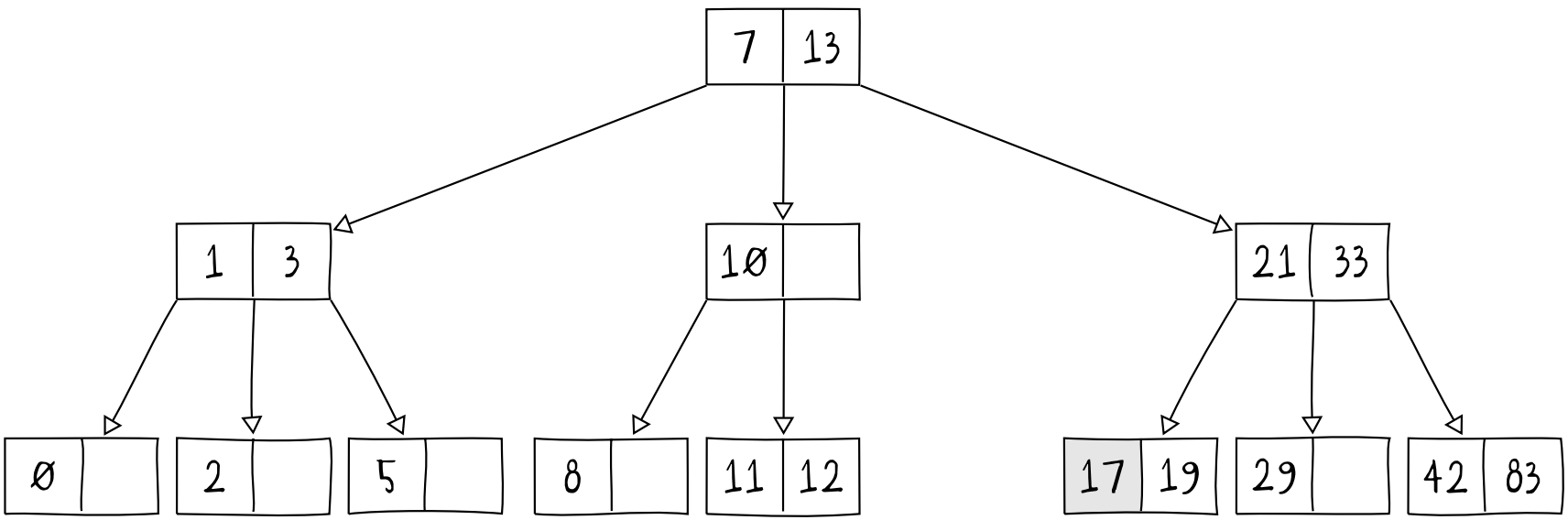
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 17
  - Caso 1: nó folha com $n > \frac{k}{2}$



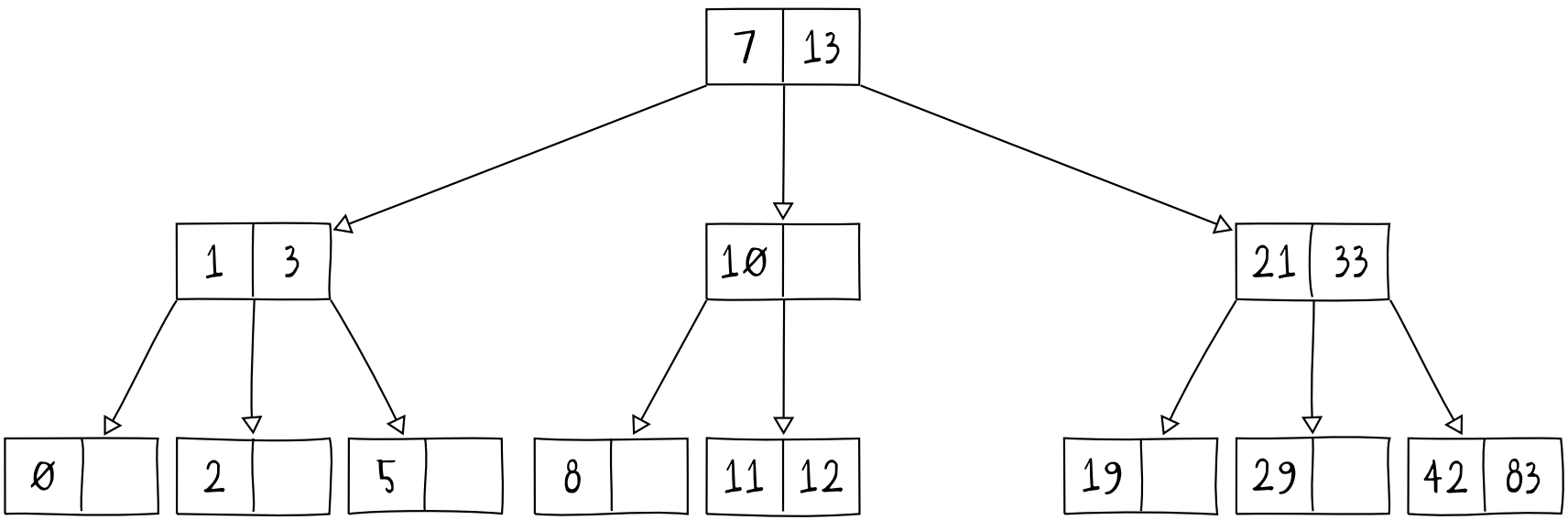
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 17
  - Caso 1: nó folha com $n > \frac{k}{2}$



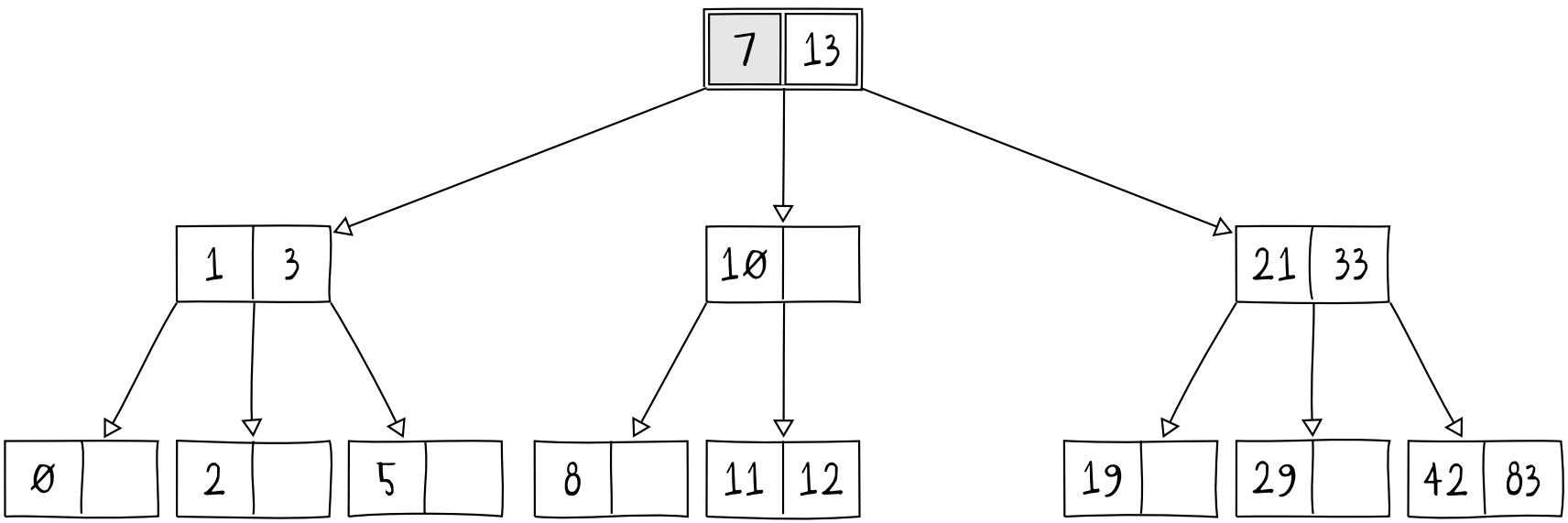
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 17
  - Caso 1: nó folha com $n > \frac{k}{2}$



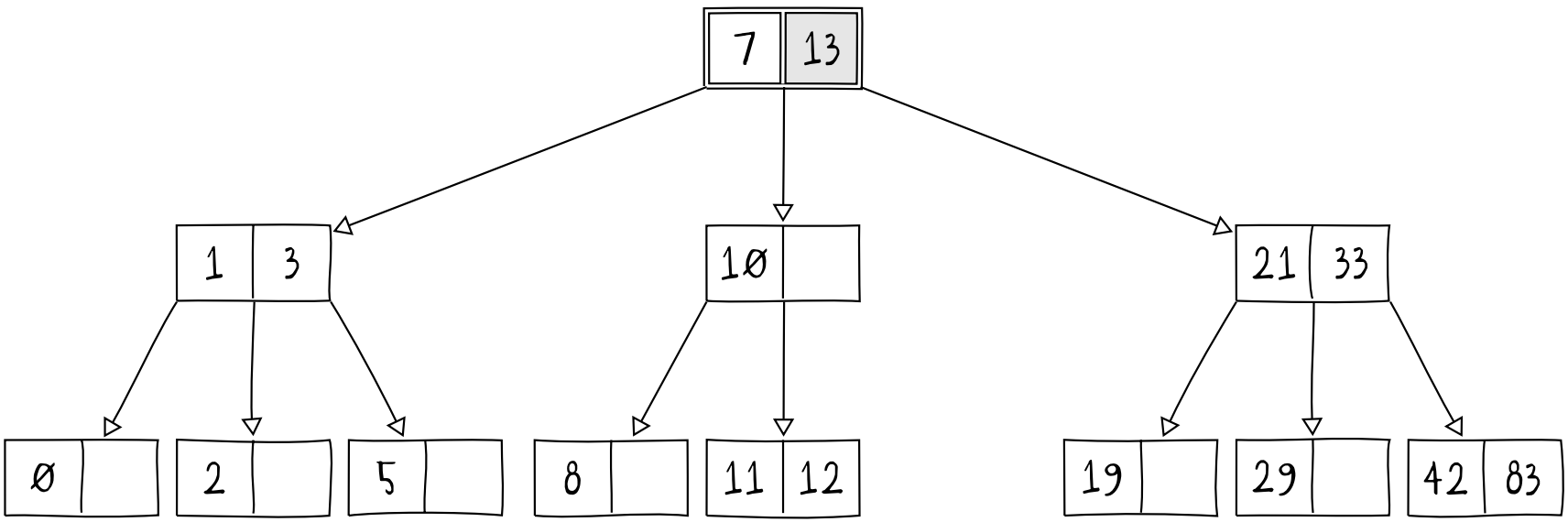
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó folha com $n = \frac{k}{2}$



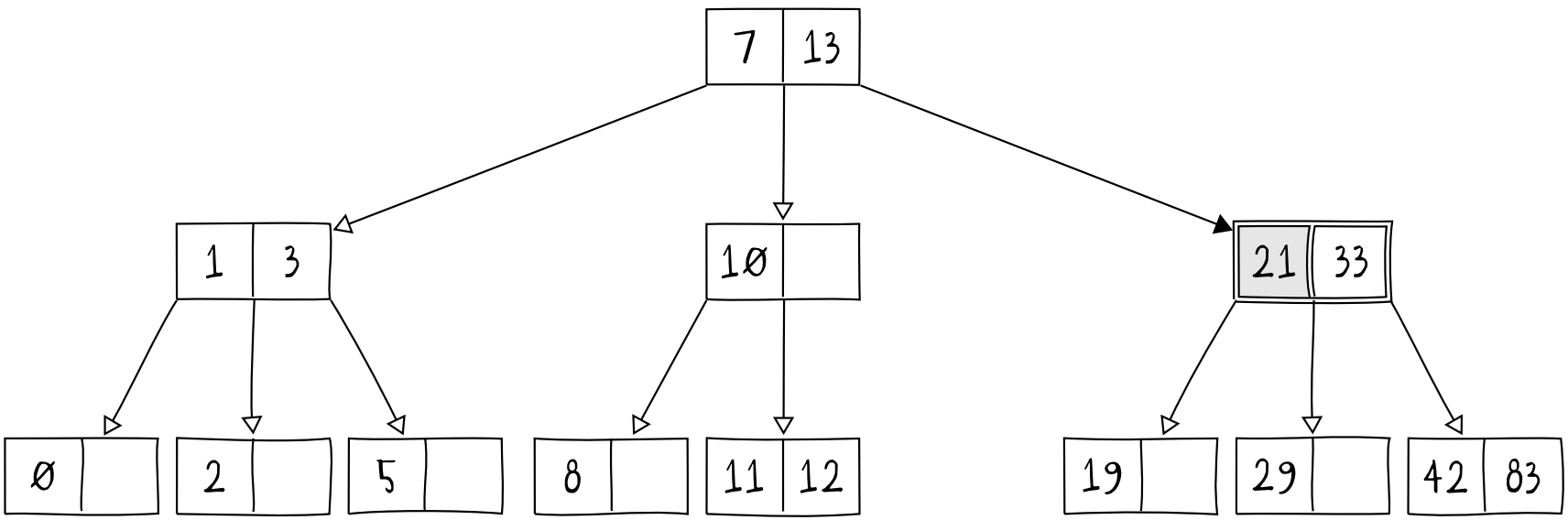
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó folha com $n = \frac{k}{2}$



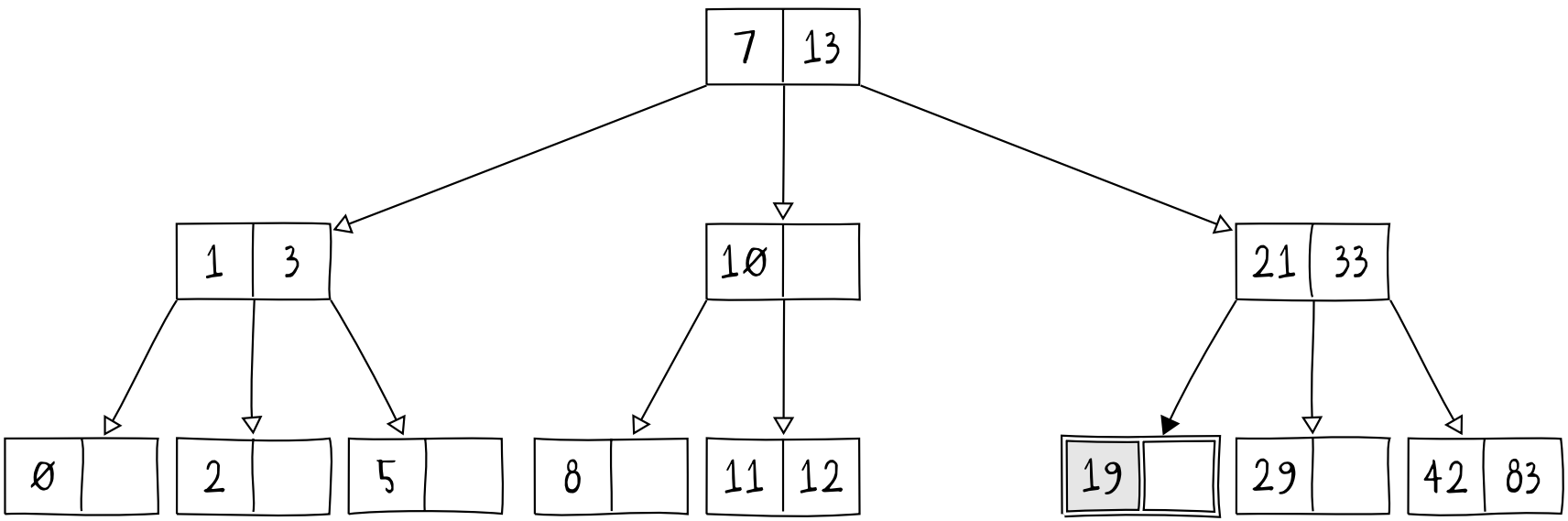
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó folha com $n = \frac{k}{2}$



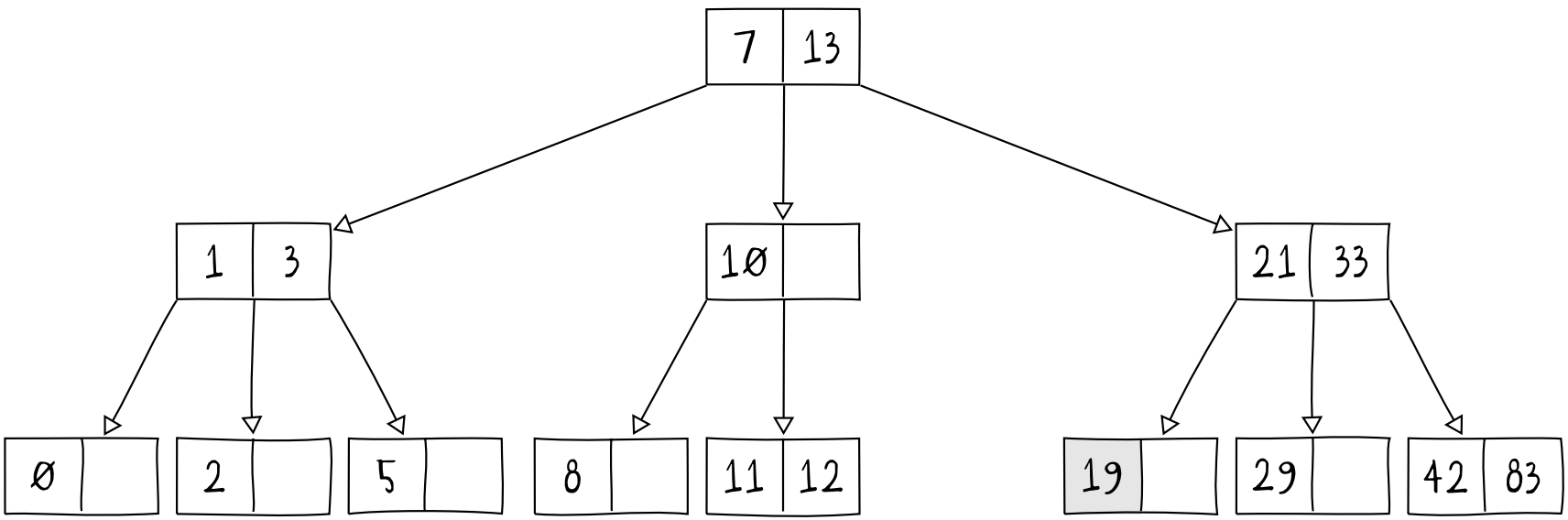
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó folha com $n = \frac{k}{2}$



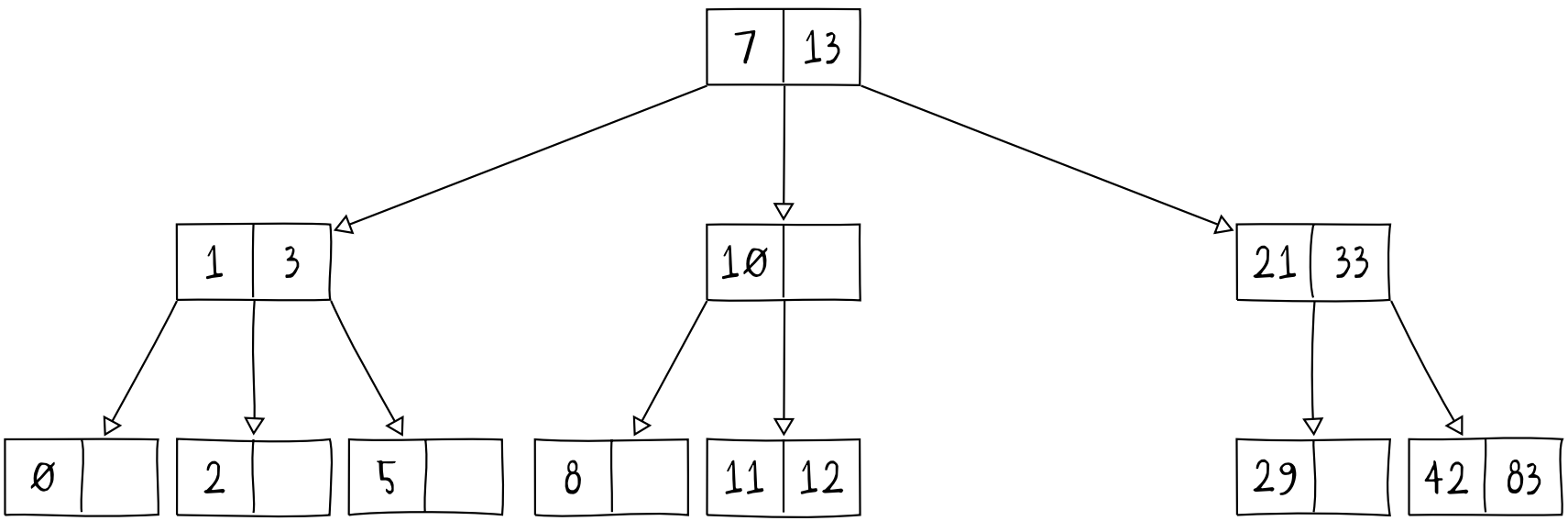
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó folha com $n = \frac{k}{2}$



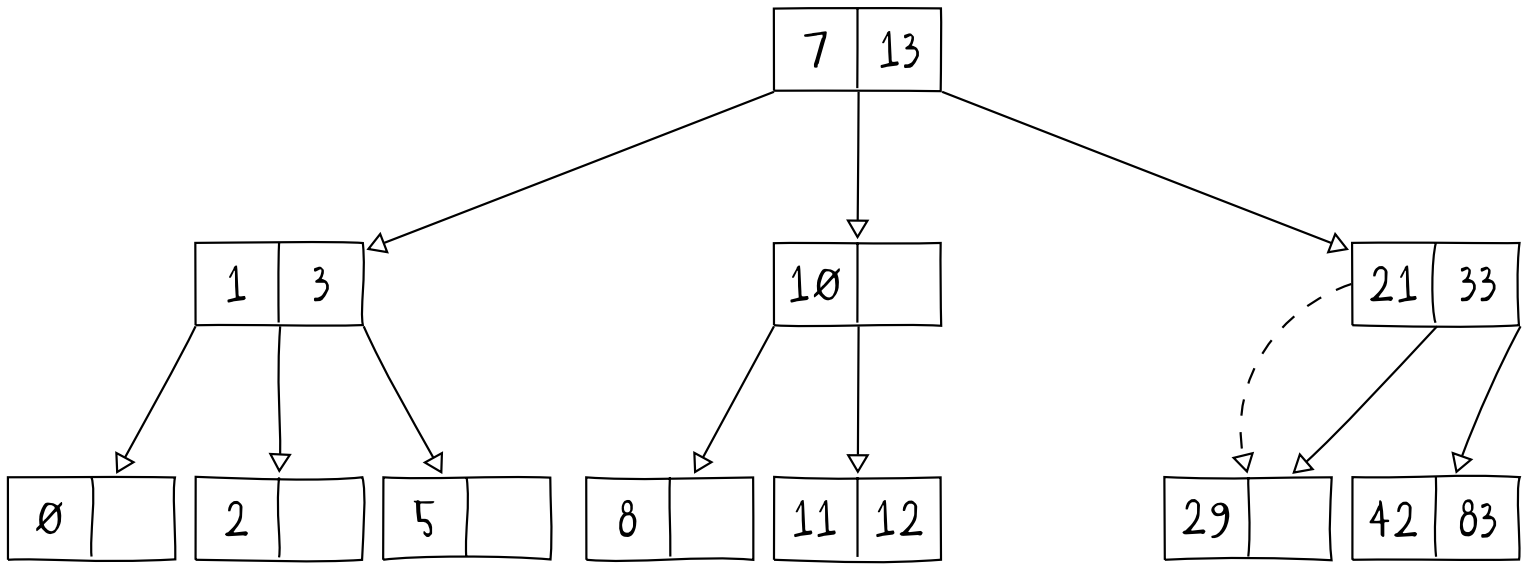
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó folha com $n = \frac{k}{2}$



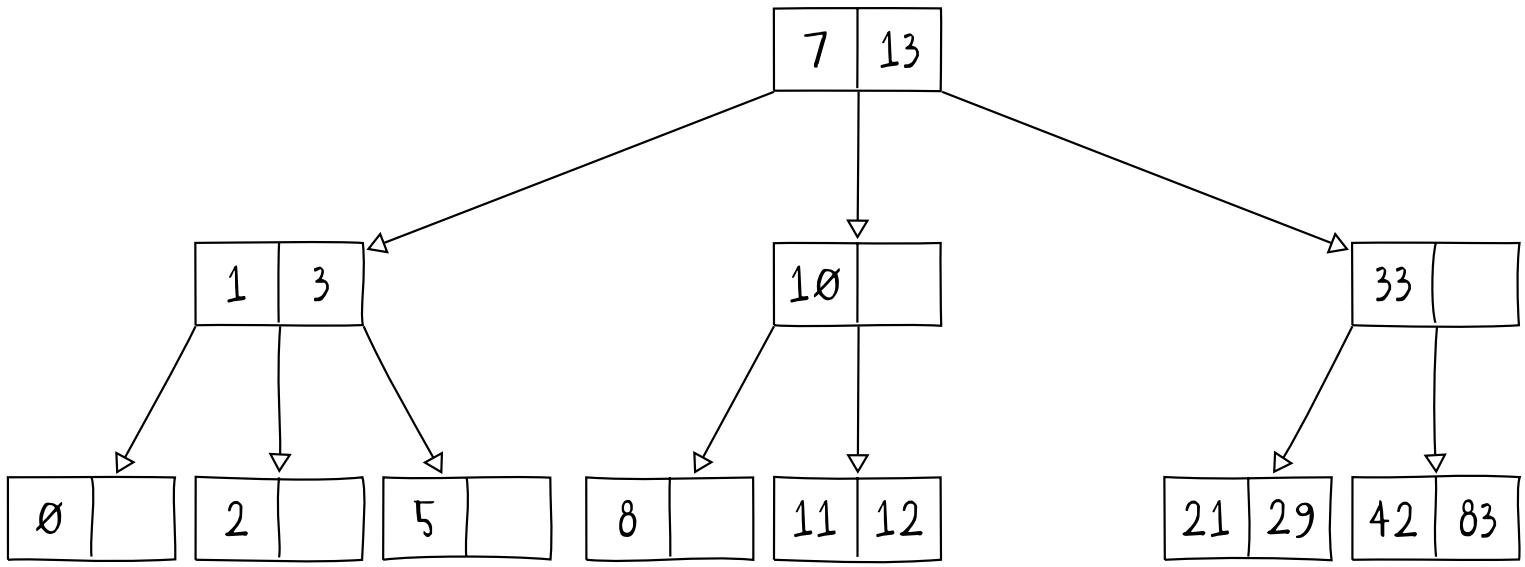
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó folha com $n = \frac{k}{2}$



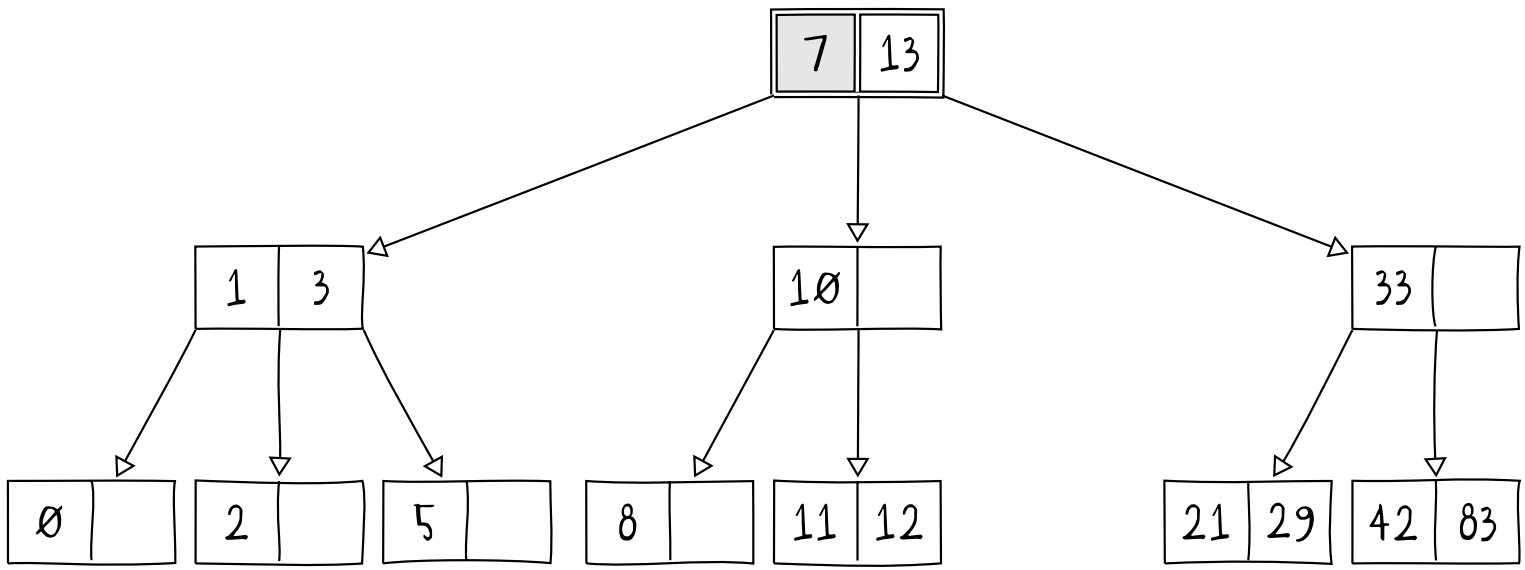
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 19
  - Caso 2: nó folha com $n = \frac{k}{2}$



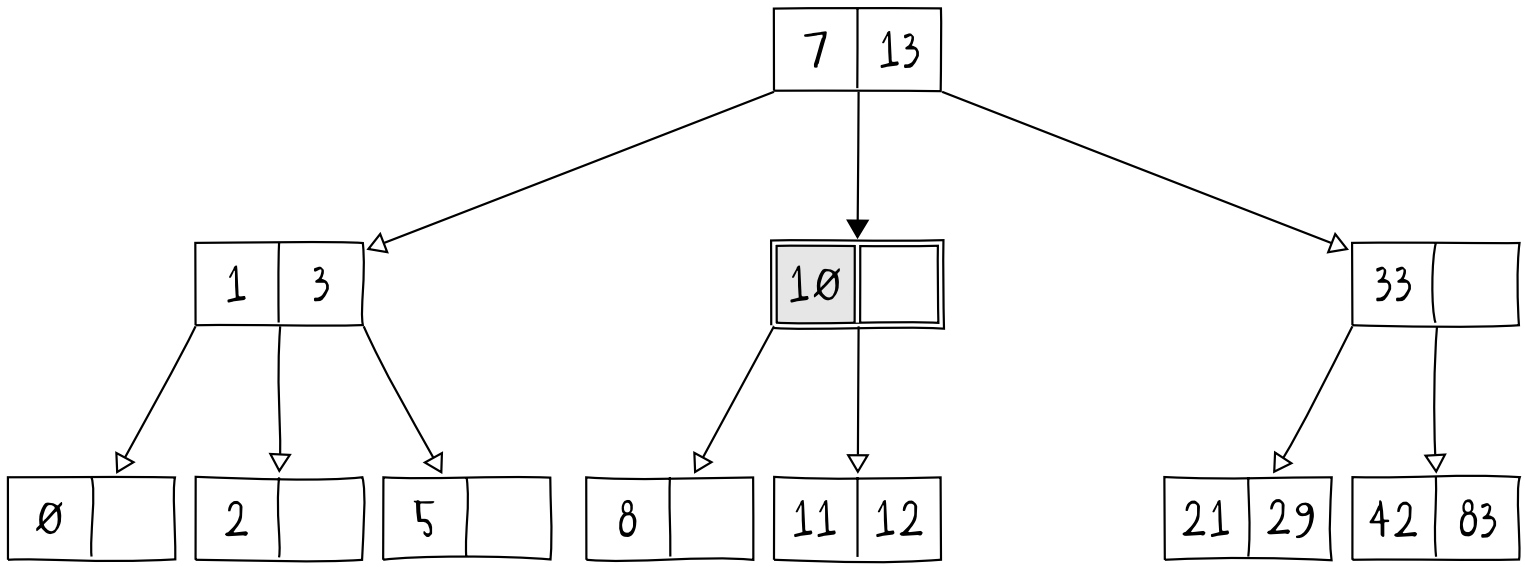
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 10
  - Caso 3: nó interno com um filho $n > \frac{k}{2}$



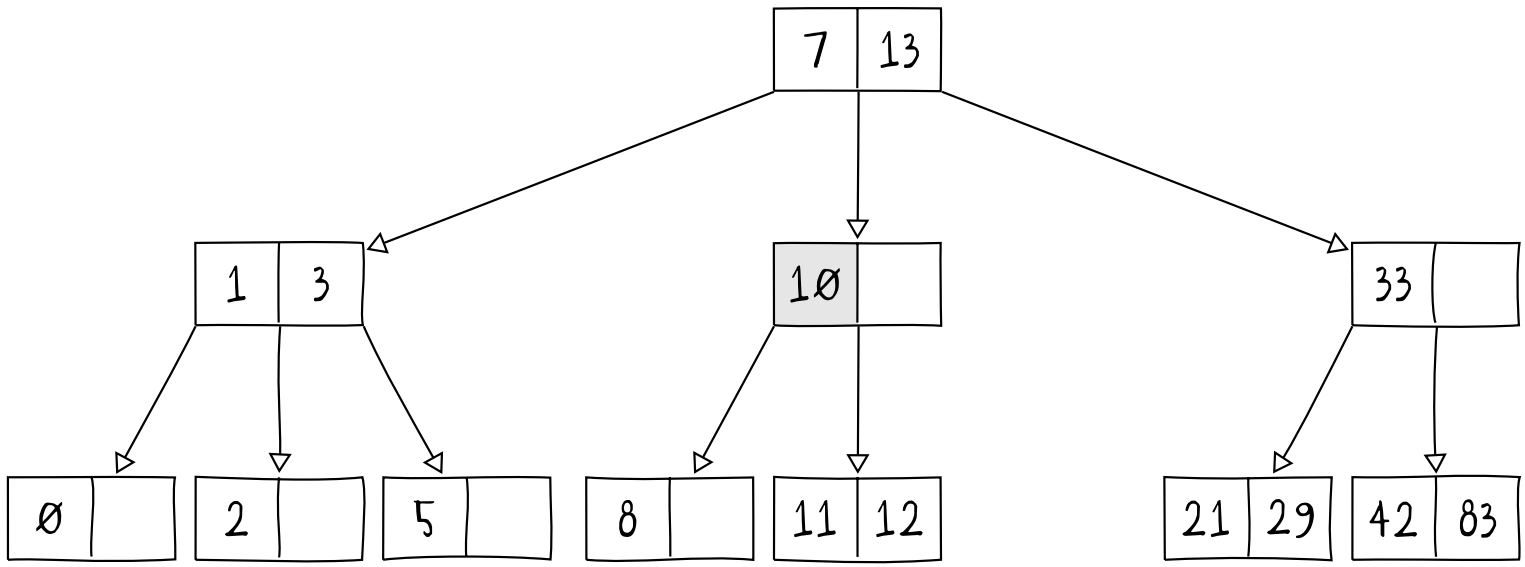
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 10
  - Caso 3: nó interno com um filho $n > \frac{k}{2}$



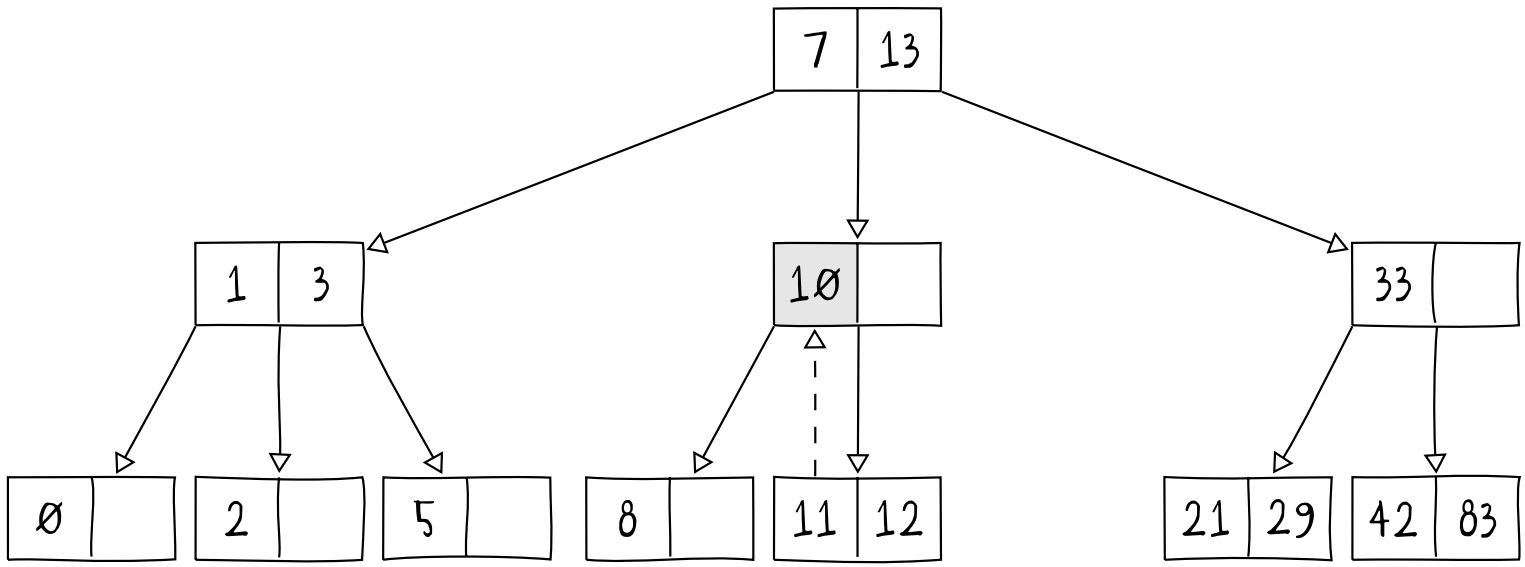
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 10
  - Caso 3: nó interno com um filho $n > \frac{k}{2}$



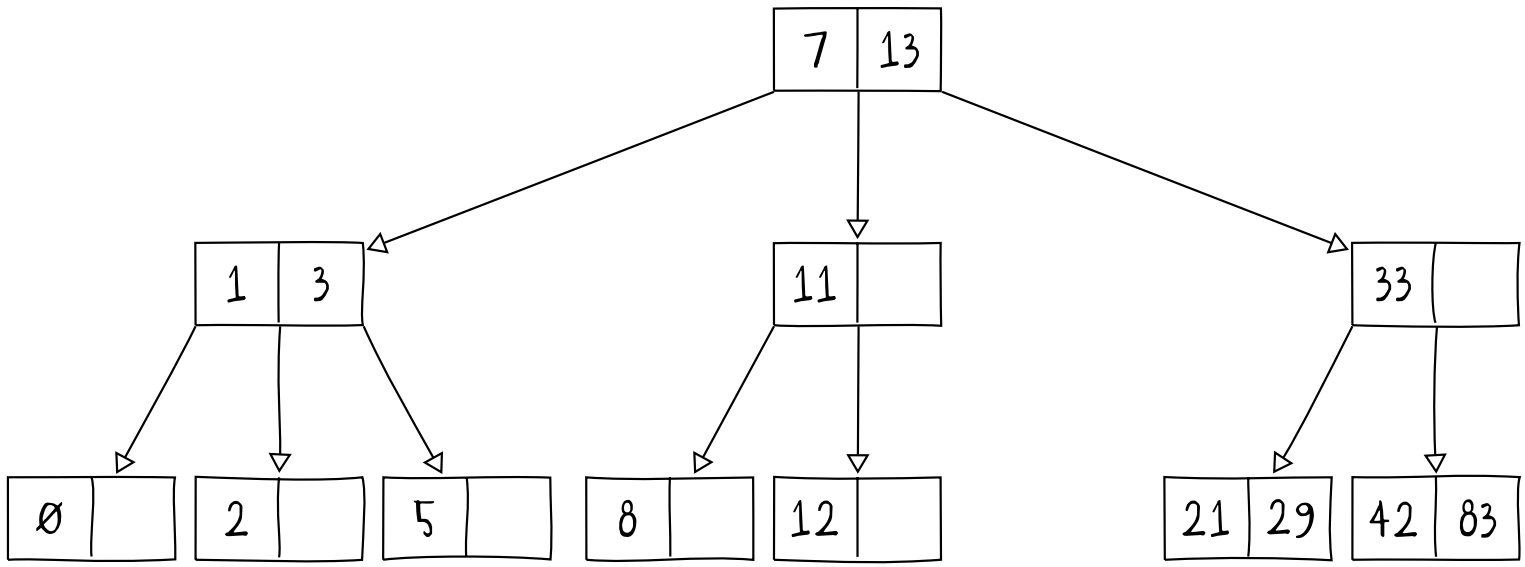
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 10
  - Caso 3: nó interno com um filho $n > \frac{k}{2}$



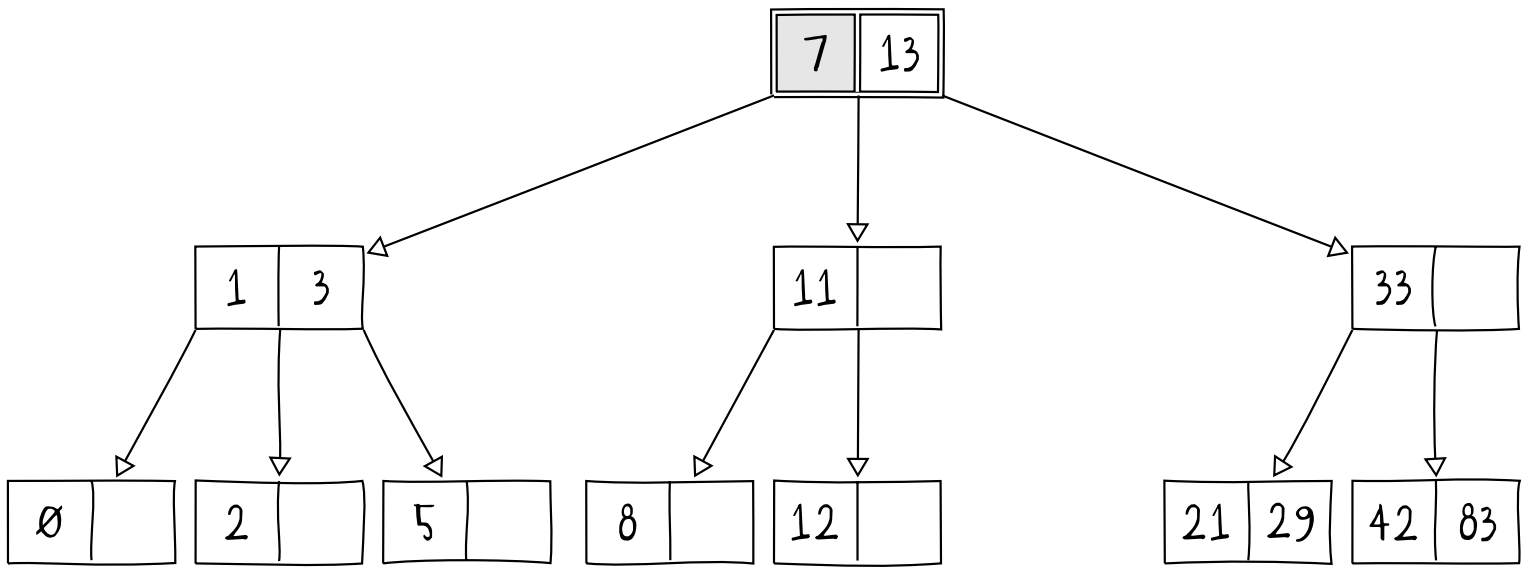
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 10
  - Caso 3: nó interno com um filho $n > \frac{k}{2}$



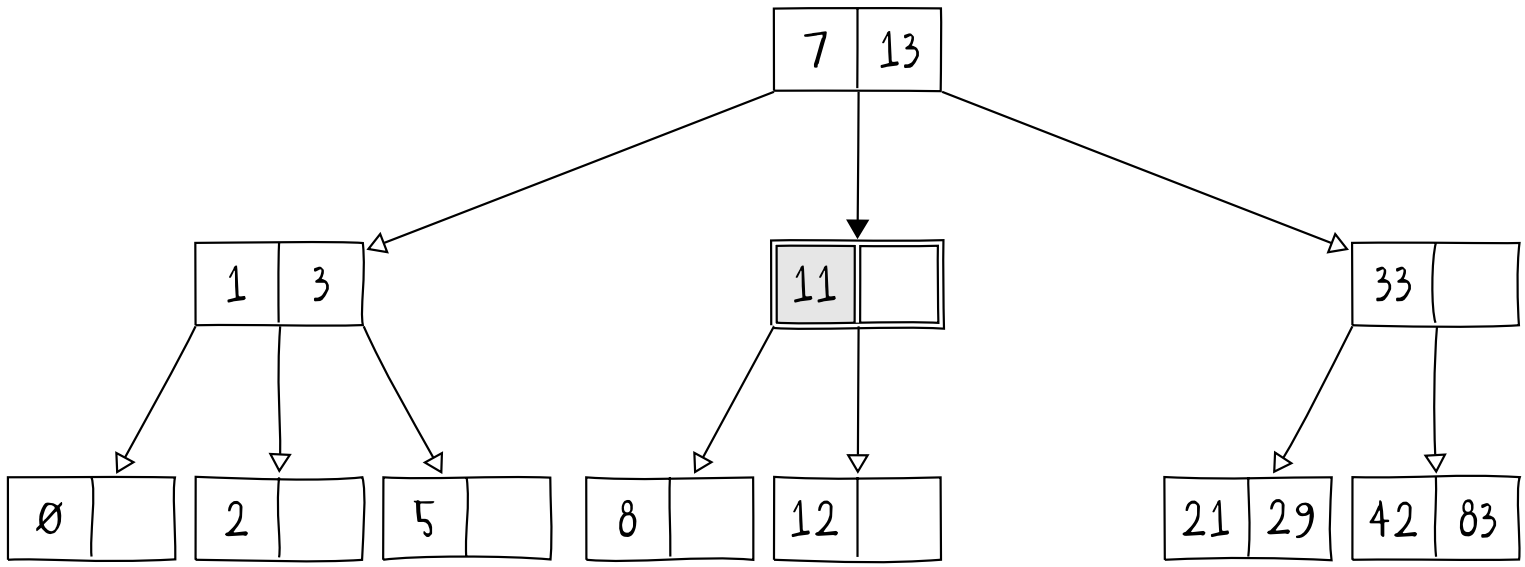
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 11
  - Caso 4: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



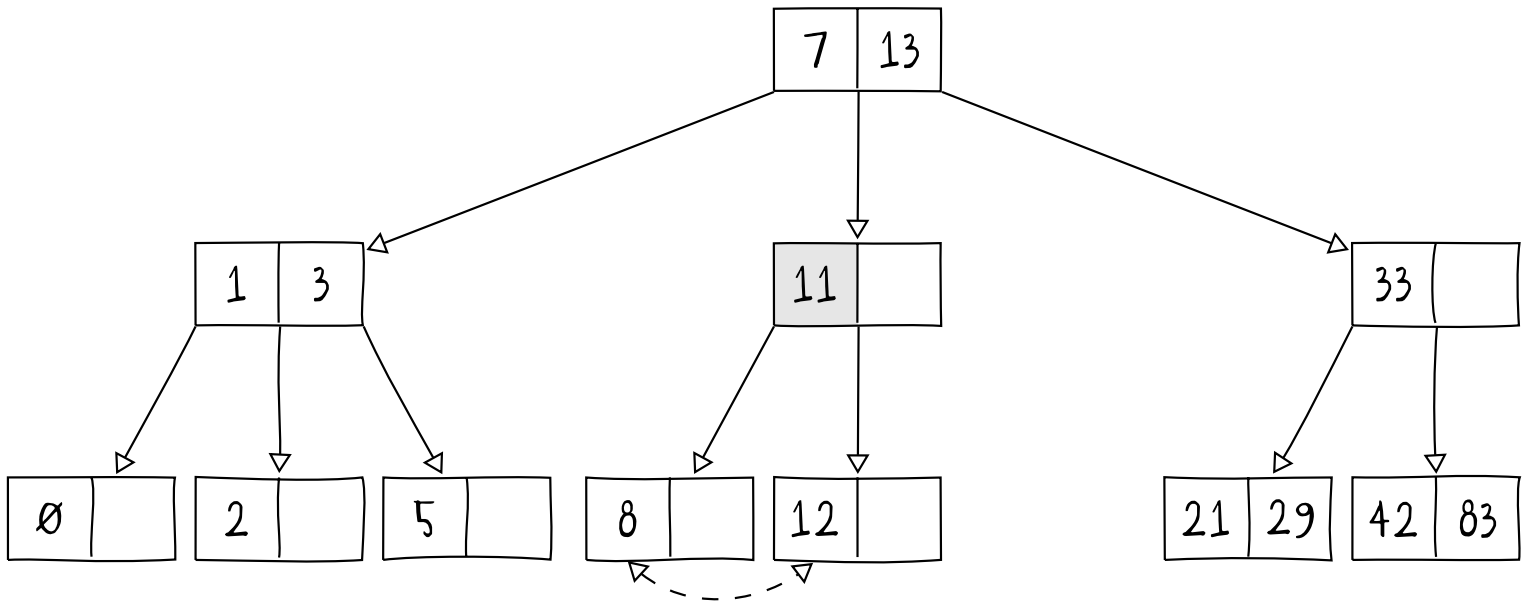
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 11
  - Caso 4: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



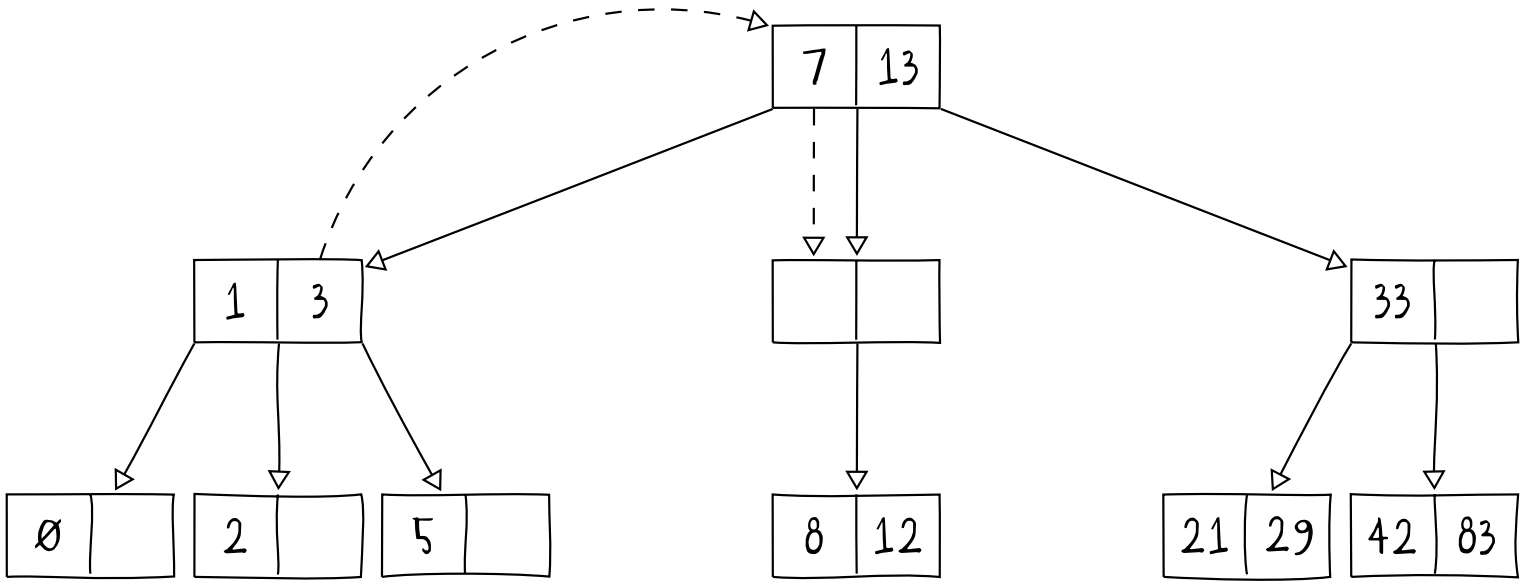
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 11
  - Caso 4: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



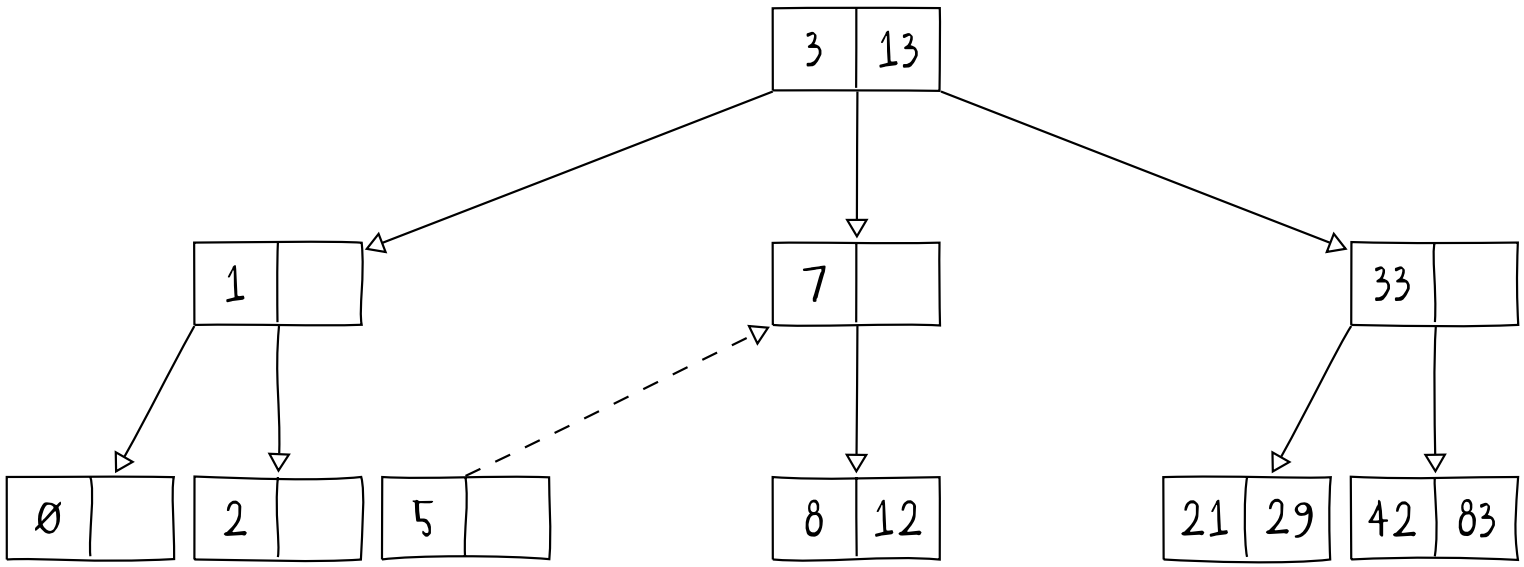
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 11
  - Caso 4: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



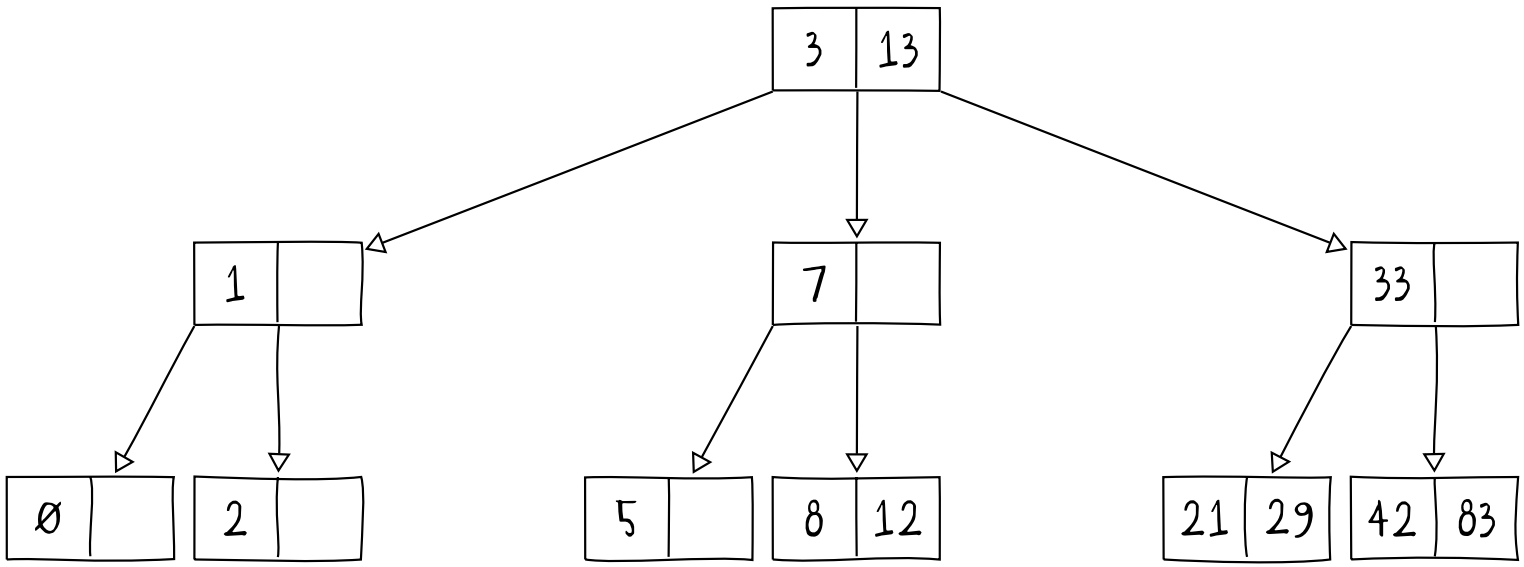
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 11
  - Caso 4: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



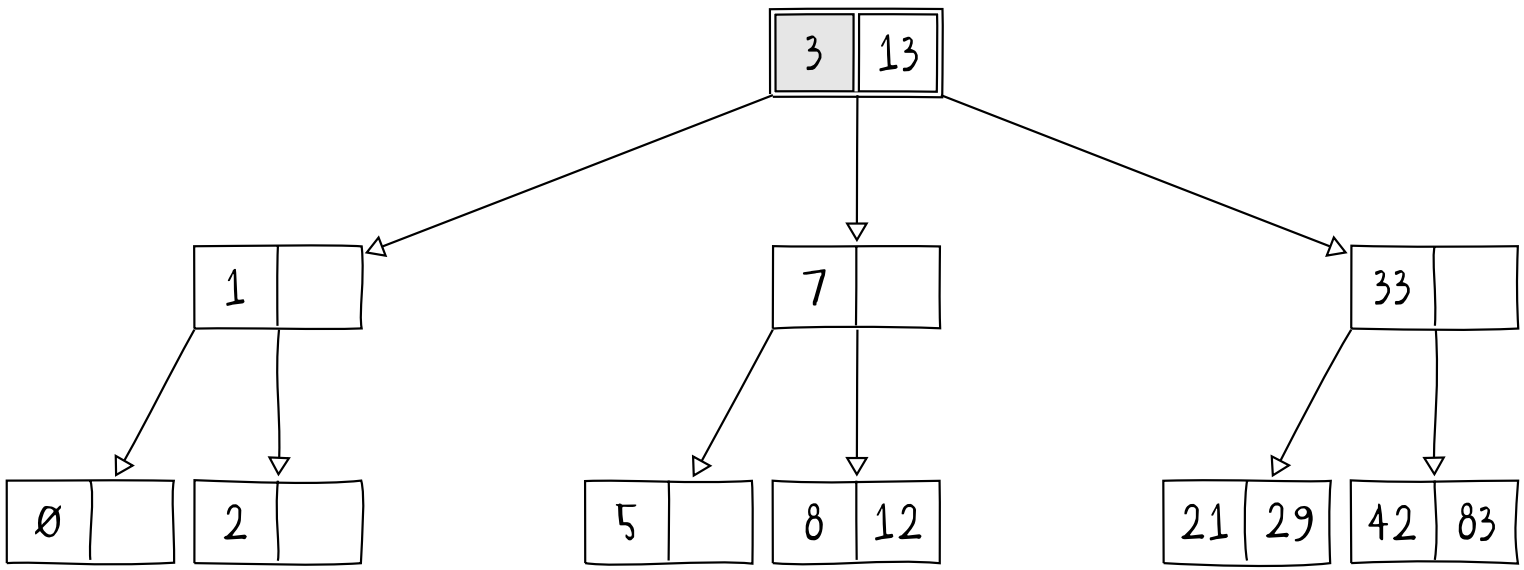
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 11
  - Caso 4: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



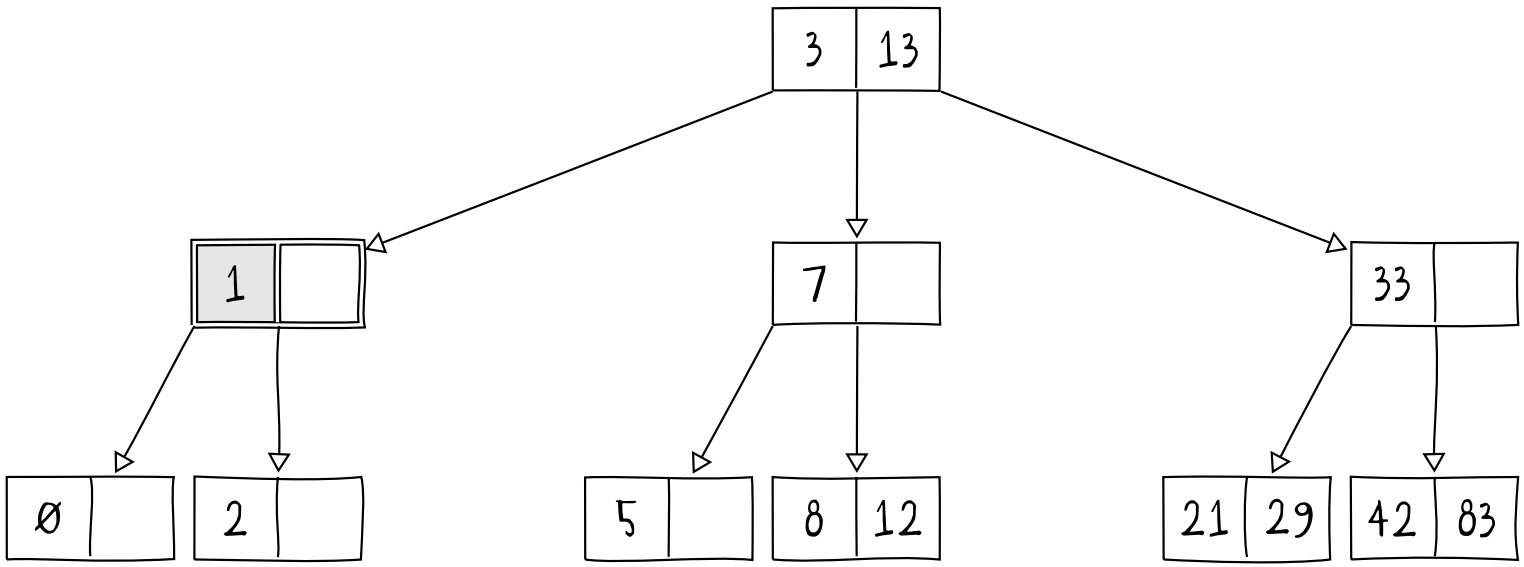
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 1
  - Caso 4: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



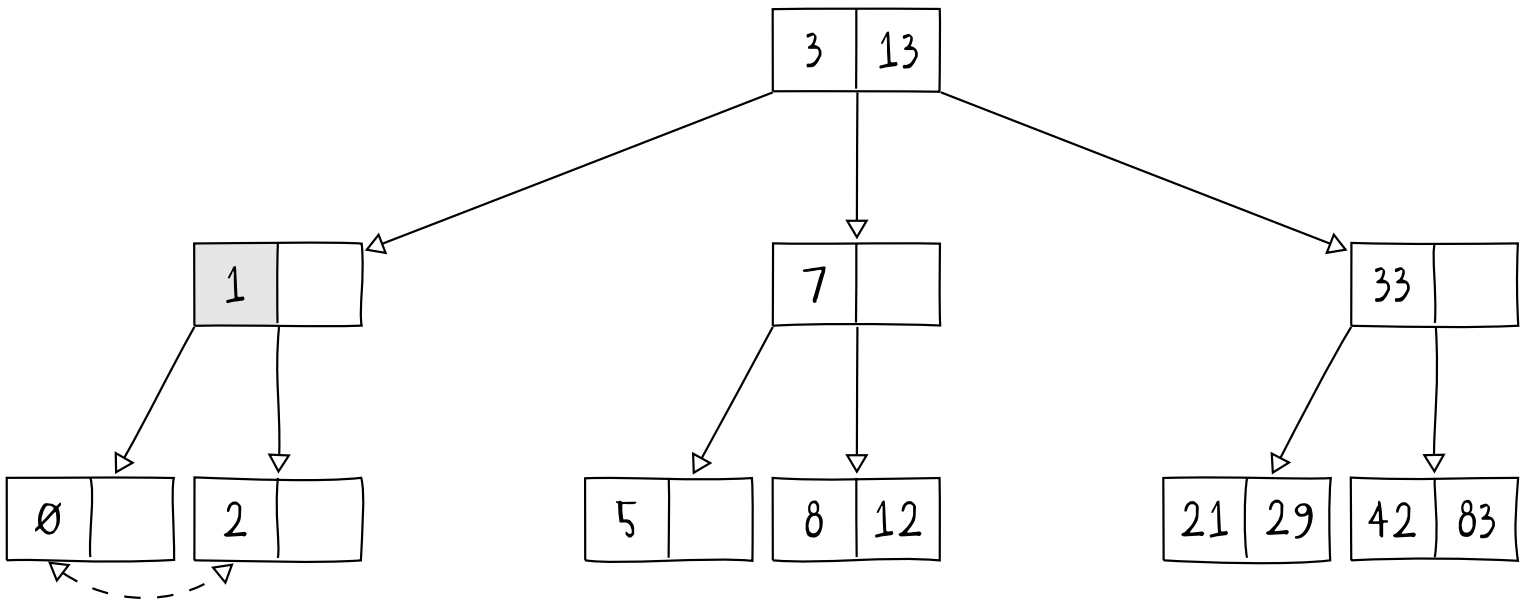
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 1
  - Caso 4: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



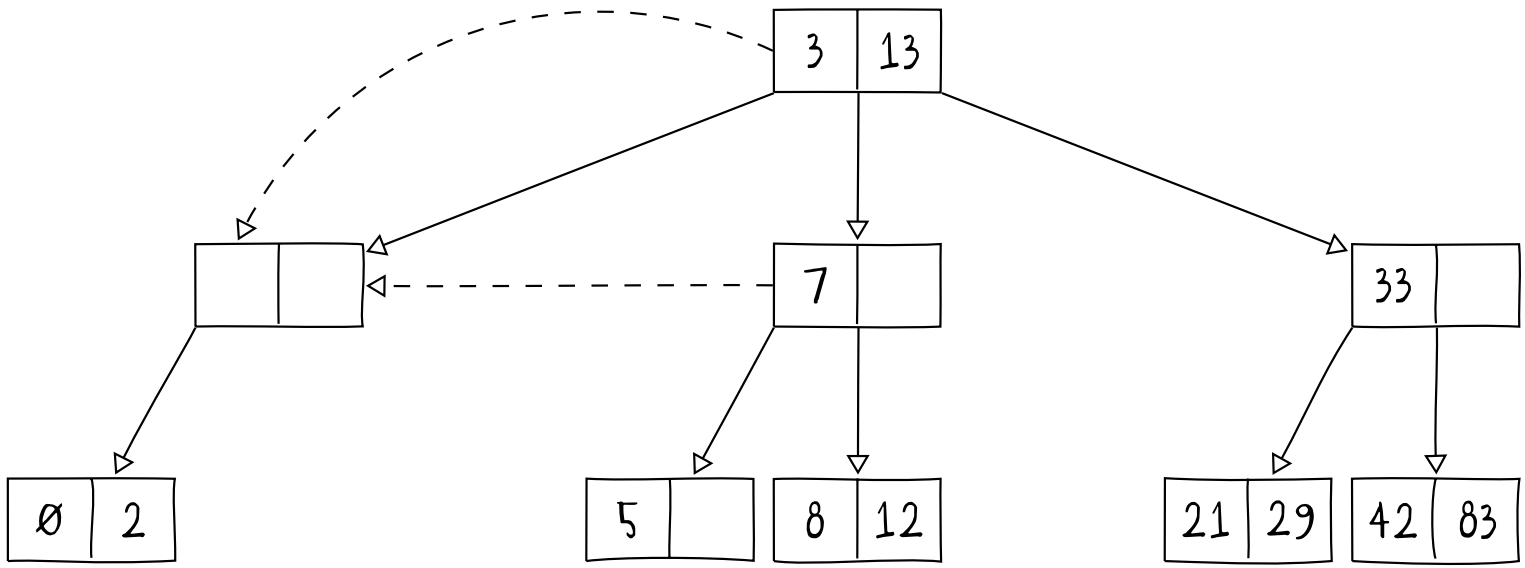
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 1
  - Caso 4: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



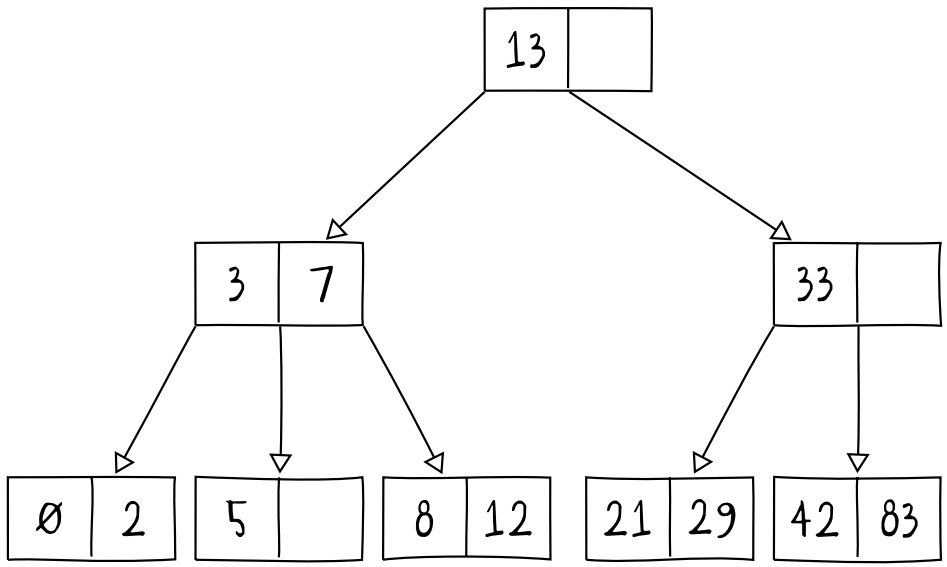
Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 1
  - Caso 4: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



Árvore B

- Operação de remoção
  - Parâmetro de chave: 1
  - Caso 4: nó interno com filhos $n = \frac{k}{2}$



Árvore B

- Análise de complexidade
  - Com ordem k, no pior caso, as operações percorrem a altura $h = log_k n$ da árvore com n nós
  - Espaço: $\Theta(n)$
  - Tempo: $\Omega(1)$ e $O(\log_k n)$

Exemplo

- Construa uma árvore B de ordem 3
  - Insira os elementos com chaves 13, 2, 34, 11, 7, 43 e 9
  - Realize a remoção dos elementos de chave 7 e 9
  - Compare a eficiência desta estrutura com relação às árvores binárias balanceadas

Exercício

- A empresa de tecnologia Poxim Tech está desenvolvendo um banco de dados distribuído para arquivos baseado em *blockchain* e árvore B
  - Os arquivos possuem nomes + extensão com até 30 caracteres, compostos exclusivamente por letras
  - A codificação do código *hash* é feita em hexadecimal de 128 bits com caracteres maiúsculos, sendo utilizado como chave para buscas
  - Operações disponíveis:
    - **INSERT** nome tamanho hash
    - **SELECT** hash

Exercício

- Formato de arquivo de entrada
  - [#*Ordem da árvore*]
  - [#*Quantidade de arquivos* (n)]
  - [$Nome_1$] [$Tamanho_1$] [$Hash_1$]
  - $\vdots$
  - [$Nome_n$] [$Tamanho_n$] [$Hash_n$]
  - [#*Número de operações* (m)]
  - [$Operação_1$]
  - $\vdots$
  - [$Operação_m$]

Exercício

- Formato de arquivo de entrada

```
3
5
f.b 1 00000000000000000000000000000000
f.c 2 00000000000000000000000000000001
f.d 3 00000000000000000000000000000002
f.e 4 00000000000000000000000000000003
f.f 5 00000000000000000000000000000004
3
INSERT f.a 0 FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
SELECT 00000000000000000000000000000004
SELECT 123456789ABCDEF0123456789ABCDEF0
```

Exercício

- Formato de arquivo de saída
  - Conteúdo armazenado pelo nó da árvore

```
1 [0000000000000000000000000000004]
2 f.f:size=5,hash=0000000000000000000000000000004
3 f.a:size=0,hash=FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
4 [123456789ABCDEF0123456789ABCDEF0]
5 -
```