

EFC1 - Regressão Linear

Rafael Gonçalves - RA: 186062

22 de Abril de 2019

Parte I - Atividades teóricas

Exercício 1

- a) $P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- b) $P(A^C \cup B) = P(A^C) + P(B) - P(A^C B) = P(A^C) + P(B) - (P(B) - P(AB)) = P(A^C) + P(AB) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- c) $P(A \cup B^C) = P(A) + P(B^C) - P(AB^C) = P(B^C) + P(AB) = (1 - P(B)) + P(AB) = (1 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$
- d) $P(AB^C) = P(A) + P(B^C) - P(A \cup B^C) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{11}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
- e) $P(A^C \cup B^C) = 1 - P(AB) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Exercício 2

a)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} d\xi = \left[\frac{1}{2} \xi \right]_0^x = \frac{1}{2} x, \forall x \in [0, 2]$$

b) $E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^2 = 1$

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$E\{X^3\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^2 = 2$$

Exercício 3

- a) X_2 , pois quanto mais próximo da distribuição uniforme, mais difícil é acertar o resultado de um evento aleatório "chutando um valor", ou seja, a variável aleatória X_2 carrega mais informação que a variável aleatória X_1 , pois neste último eu poderia supor que o resultado será sempre 3 com uma taxa de acertos de 40% contra uma taxa de acertos de 25% para qualquer valor estimado para X_2 se não tivermos nenhuma informação *a priori*.
- b) $H(X_1) = - \sum_x p(X_1) \log_2[p(X_1)] = -[0,1(-3,32) + 0,2(-2,32) + 0,3(-1,74) + 0,4(-1,32)] = 1,85$
- $H(X_2) = - \sum_x p(X_2) \log_2[p(X_2)] = -[0,25(-2) + 0,25(-2) + 0,25(-2) + 0,25(-2)] = 2$
- c) $D(P_1||P_2) = \sum_x p(X_1) \log_2 \left[\frac{p(X_1)}{p(X_2)} \right] = 0,1(-1,32) + 0,2(-0,32) + 0,3(0,26) + 0,4(0,68) = 0,15$
- $D(P_2||P_1) = \sum_x p(X_2) \log_2 \left[\frac{p(X_2)}{p(X_1)} \right] = 0,25(1,32 + 0,32 - 0,26 - 0,68) = 0,18$

Exercício 4

- a) $\mathcal{L}(\mu) = p(x|\mu) = \frac{p(x\mu)}{p(\mu)} = p(x) = f_\mu(x)$
- b) $\mathcal{L}(\mu) = p(\mathbf{x}|\mu) = \prod_{k=1}^N p(x_k|\mu) = \prod_{k=1}^N \frac{p(x_k|\mu)}{p(\mu)} = \prod_{k=1}^N f_\mu(x_k)$
- c) $\mu_{ML} = \operatorname{argmax}_\mu \mathcal{L}(\mu) = \operatorname{argmax}_\mu \ln \left[\prod_{k=1}^N f_\mu(x_k) \right] = \operatorname{argmax}_\mu \sum_{k=1}^N \ln[f_\mu(x_k)] =$
 $\operatorname{argmax}_\mu \sum_{k=1}^N \ln \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \right] = \operatorname{argmax}_\mu \sum_{k=1}^N \left[\ln \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] =$
 $\operatorname{argmax}_\mu \sum_{k=1}^N -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 - N \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) = \operatorname{argmax}_\mu A \iff \frac{dA}{d\mu} = 0 \Rightarrow$
 $\sum_{k=1}^N \frac{-2}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) (-1) = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^N x_k - N\mu = 0 \Rightarrow \mu_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$

Parte II - Atividade computacional

a) Solução fechada com MMQ

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \quad \Phi = \Phi(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_1 \\ 1 & \mathbf{x}_2 \\ & \vdots \\ 1 & \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Modelo:

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{X}) = \Phi \mathbf{w} \quad (1)$$

Solução ótima com o método de mínimos múltiplos quadrados (MMQ):

$$\mathbf{w} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \quad (2)$$

Raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE) para o modelo treinado com o conjunto de treino:

$$RMSE_{train} = 15.3702 \quad RMSE_{test} = 14.2495$$

Resultado no conjunto de teste:

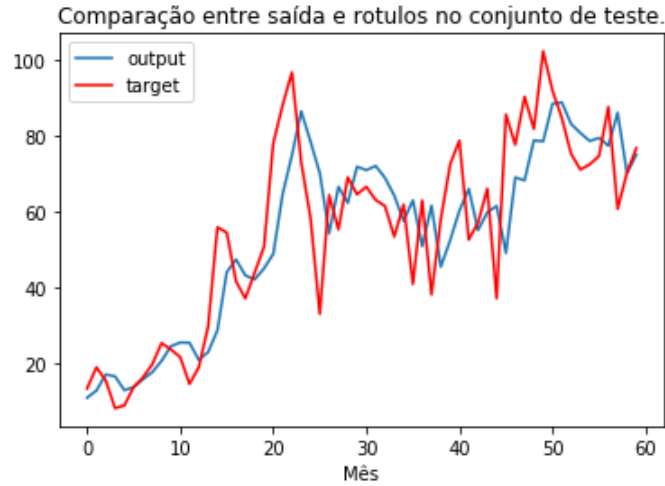


Figura 1: Saída prevista pelo modelo (azul) em comparação com valores reais dos últimos 5 anos (60 meses).

b) Seleção de atributos usando wrapper (backward elimination), validação cruzada (k-fold) e regularização L2

Solução por MMQ com regularização ridge (L2):

$$\mathbf{w} = (\Phi^T \Phi + \lambda \mathbf{I}')^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \quad (3)$$

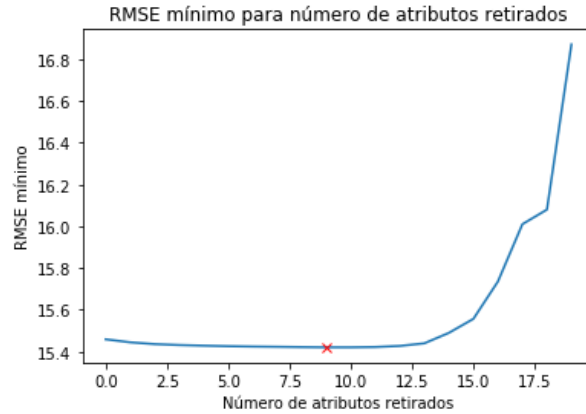


Figura 2: Menor RMSE para cada passo do wrapper (atributo retirado).

Modelo escolhido pelo wrapper utilizando k-fold com 5 pastas:

N de atributos removidos: 9 λ : 10000 $RMSE_{CV}$: 15.4201 $RMSE_{test}$: 14.4200

Atributos escolhidos: 0 (bias) , 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 18, 20

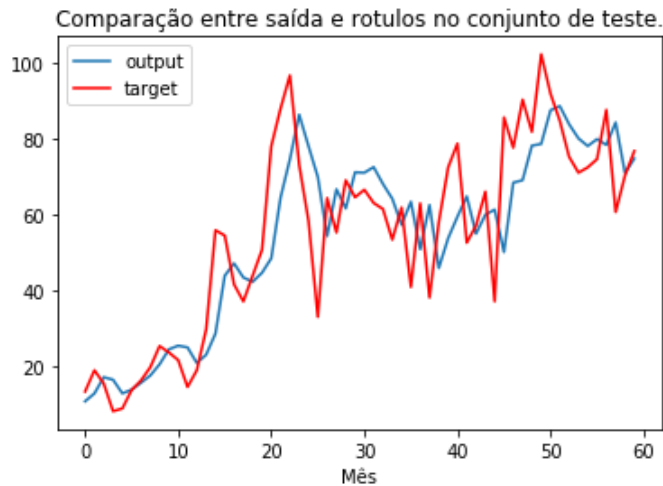


Figura 3: Saída prevista pelo modelo (azul) em comparação com valores reais dos últimos 5 anos (60 meses) com seleção de atributos usando wrapper.

Tabela 1: RMSE mínimo e respectivo lambda para cada número de atributos retirados.

N atributos retirados	min RMSE	lambda
0	15.4585	30000
1	15.4441	30000
2	15.4355	30000
3	15.4311	30000
4	15.4280	30000
5	15.4255	30000
6	15.4238	10000
7	15.4226	10000
8	15.4212	10000
9	15.4201	10000
10	15.4202	10000
11	15.4216	10000
12	15.4268	10000
13	15.4392	6000
14	15.4893	6000
15	15.5565	1000
16	15.7354	0
17	16.0103	0
18	16.0801	0
19	16.8718	0

c) Seleção de atributos usando filtro (correlação de Pearson)

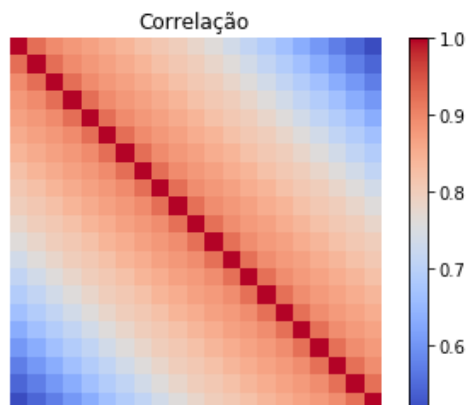


Figura 4: Matriz de correlação, onde uma cor mais avermelhada significa uma correlação maior (dados foram alinhados na matriz de forma que a primeira linha e coluna correspondem ao rótulo e as próximas linhas e colunas correspondem aos atributos - mês anterior até 20 meses atrás).

Modelo escolhido pelo filtro (11 atributos com maior correlação):

Atributos selecionados: 0 (bias) , 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

$\lambda : 10000$ $RMSE_{CV} : 15.7380$ $RMSE_{test} : 13.8367$

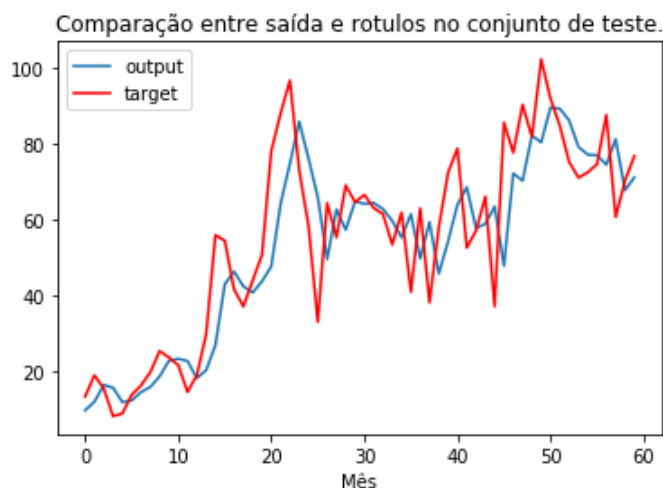


Figura 5: Saída prevista pelo modelo (azul) em comparação com valores reais dos últimos 5 anos (60 meses) com seleção de atributos usando filtro.

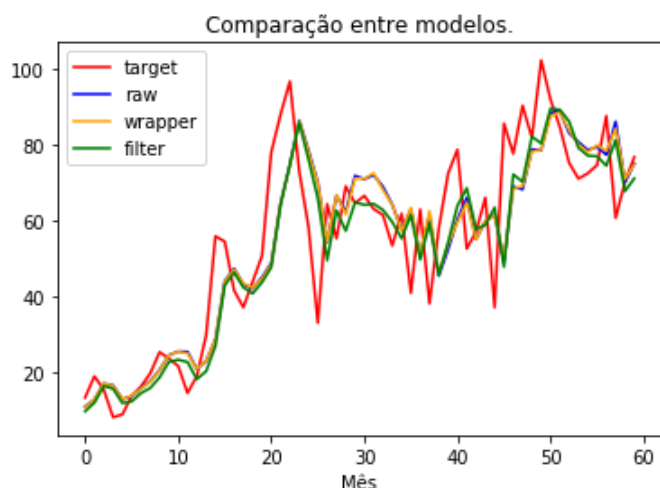


Figura 6: Saída prevista por cada modelo: azul - modelo inicial com 20 atributos, $RMSE = 14.2495$; amarelo - modelo criado usando wrapper, $RMSE = 14.1138$; verde - modelo criado usando filtro, $RMSE = 13.8367$; em comparação com valores reais (vermelho) dos últimos 5 anos (60 meses).

Ambas as estratégias de seleção de atributos em conjunto com a regularização L2 mostraram melhoria em relação ao uso de todos os 20 atributos sem regularização. Podemos observar que embora o erro de validação tenha sido menor na abordagem com seleção de atributos usando wrapper, o erro no conjunto de testes foi menor na abordagem de filtro. Isso pode ser consequência de o modelo utilizado ser linear e portanto se beneficiar diretamente por atributos que tenha uma correlação com os rótulos.

Também vale notar que o modelo gerado com seleção de atributos pelo wrapper leva em consideração o erro da validação para escolher quais atributos usar, enquanto que o modelo gerado pelo filtro não leva em conta o erro da validação para seleção de atributos, apenas a correlação entre cada atributo e o rótulo e, sendo assim, faz sentido que o modelo do wrapper apresente um erro menor de validação em comparação ao modelo gerado usando filtro. Em todo o caso o resultado nos mostra que o modelo que obteve um melhor desempenho em dados novos foi o modelo gerado com o filtro e é o modelo que deve ser usado em uma aplicação - provavelmente terá melhor desempenho.