Parte I - Atividades teóricas

Exercício 1

a) $P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

b) $P(A^C \cup B) = P(A^C) + P(B) - P(A^C B) = P(A^C) + P(B) - (P(B) - P(AB)) = P(A^C) + P(AB) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

c) $P(A \cup B^C) = P(A) + P(B^C) - P(AB^C) = P(B^C) + P(AB) = (1 - P(B)) + P(AB) = (1 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$

d) $P(AB^C) = P(A) + P(B^C) - P(A \cup B^C) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{11}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

e) $P(A^C \cup B^C) = 1 - P(AB) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Exercício 2

a)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} d\xi = \left[\frac{1}{2}\xi\right]_0^x = \frac{1}{2}x, \forall X \in [0,2]$$

b) $E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 1$

$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$

$E\{X^3\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$

Exercício 3

a) X_2, pois quanto mais próximo da distribuição uniforme, mais difícil é acertar o resultado de um evento aleatório "chutando um valor", ou seja, a variável aleatória X_2 carrega mais informação que a variável aleatória X_1, pois neste último eu poderia supor que o resultado será sempre 3 com uma taxa de acertos de 40% contra uma taxa de acertos de 25% para qualquer valor estimado para X_2 se não tivermos nenhuma informação *a priori*.

b) $H(X_1) = -\sum_x p(X_1) log_2[p(X_1)] = -[0,1(-3,32) + 0,2(-2,32) + 0,3(-1,74) + 0,4(-1,32)] = 1,85$

$H(X_2) = -\sum_x p(X_2) log_2[p(X_2)] = -[0,25(-2) + 0,25(-2) + 0,25(-2) + 0,25(-2)] = 2$

c) $D(P_1||P_2) = \sum_x p(X_1) log_2 \left[\frac{p(X_1)}{p(X_2)}\right] = 0,1(-1,32) + 0,2(-0,32) + 0,3(-0,26) + 0,4(-0,68) = -0,54$

$D(P_2||P_1) = \sum_x p(X_2) log_2 \left[\frac{p(X_2)}{p(X_1)}\right] = 0,25(1.32 + 0.32 - 0.26 - 0.68) = 0,18$

Exercício 4

a) $\mu_{ML} = argmax_\mu p(x|\mu) = argmax_\mu log[p(x|\mu)] = argmax_\mu \frac{p(x\mu)}{p(\mu)} = x$

b) $\mu_{ML} = argmax_\mu p(\mathbf{x}|\mu) = argax_\mu log[p(\mathbf{x}|\mu)] = argmax_\mu \sum_{k=1}^{N} log[p(x_k|\mu)] = argmax_\mu \sum_{k=1}^{N} log \left[\frac{p(x_k\mu)}{p(\mu)}\right]$

c) $\mu_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k$

Parte II - Atividade computacional

a) Solução fechada com MMQ

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x_1} \\ 1 & \mathbf{x_2} \\ & \vdots \\ 1 & \mathbf{x_N} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Modelo:

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Phi}\mathbf{w} \tag{1}$$

Solução ótima com o método de mínimos múltiplos quadrados (MMQ):

$$\mathbf{w} = (\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{y} \tag{2}$$

Raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE) para o modelo treinado com o conjunto de treino:

$RMSE_{train} = 15.3702$ $\qquad$ $RMSE_{test} = 14.2495$

Resultado no conjunto de test:

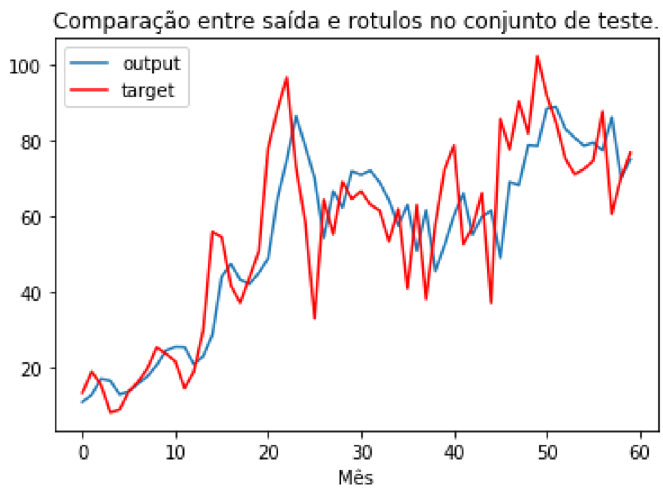

Figura 1: Saída prevista pelo modelo (azul) em comparação com valores reais dos últimos 5 anos (60 meses).

b) Seleção de atributos usando wrapper (backward elimination), validação cruzada (k-fold) e regularização L2

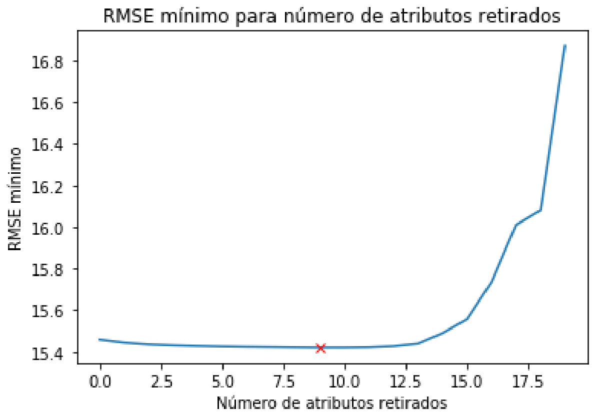

Figura 2: Menor RMSE para cada passo do wrapper (atributo retirado).

Modelo escolhido pelo wrapper utilizando k-fold com 5 pastas:

N de atributos removidos: 9 λ : 10000 $RMSE_{CV}$: 15.4201 $RMSE_{test}$: 14.4200

Atributos escolhidos: 0 (bias) , 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 18, 20

Solução por MMQ com regularização ridge (L2):

$$\mathbf{w} = (\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi} + \lambda\mathbf{I}')^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{y} \tag{3}$$

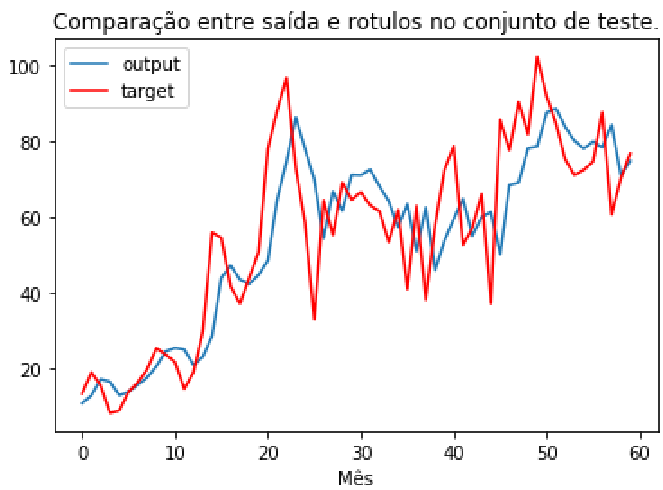

Figura 3: Saída prevista pelo modelo (azul) em comparação com valores reais dos últimos 5 anos (60 meses) com seleção de atributos usando wrapper.

Tabela 1: RMSE mínimo e respectivo lambda para cada número de atributos retirados.

N atributos retirados	min RMSE	lambda
0	15.4585	30000
1	15.4441	30000
2	15.4355	30000
3	15.4311	30000
4	15.4280	30000
5	15.4255	30000
6	15.4238	10000
7	15.4226	10000
8	15.4212	10000
9	15.4201	10000
10	15.4202	10000
11	15.4216	10000
12	15.4268	10000
13	15.4392	6000
14	15.4893	6000
15	15.5565	1000
16	15.7354	0
17	16.0103	0
18	16.0801	0
19	16.8718	0

c) Seleção de atributos usando filtro (correlação de Pearson)

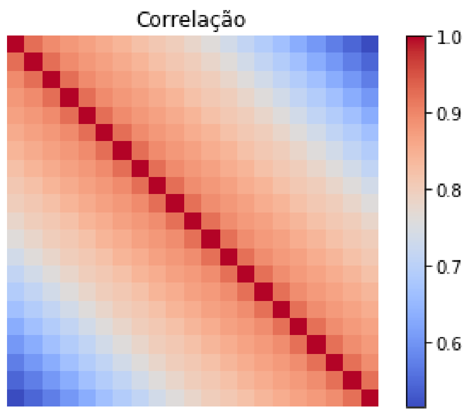

Figura 4: Matriz de correlação, onde uma cor mais avermelhada significa uma correlação maior (dados foram alinhados na matriz de forma que a primeira linha e coluna correspondem ao rótulo e as próximas linhas e colunas correspondem aos atributos - mês anterior até 20 meses atrás).

Modelo escolhido pelo filtro (10 atributos com maior correlação):

Atributos selecionados: 0 (bias) , 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

λ : 10000 $\quad RMSE_{CV}$: 15.7380 $\quad RMSE_{test}$: 13.8367

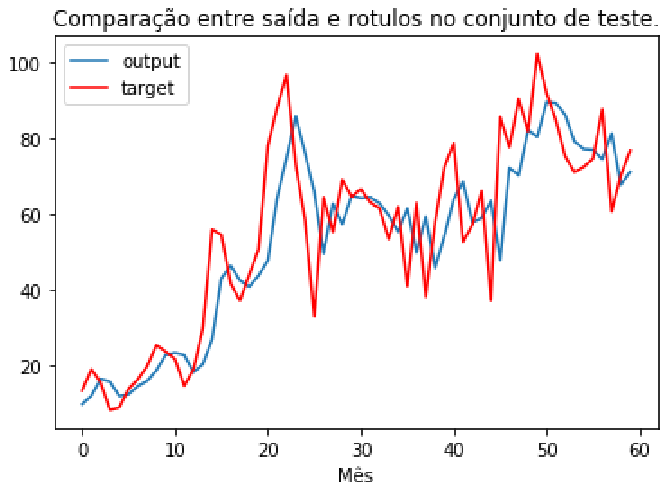

Figura 5: Saída prevista pelo modelo (azul) em comparação com valores reais dos últimos 5 anos (60 meses) com seleção de atributos usando filtro.

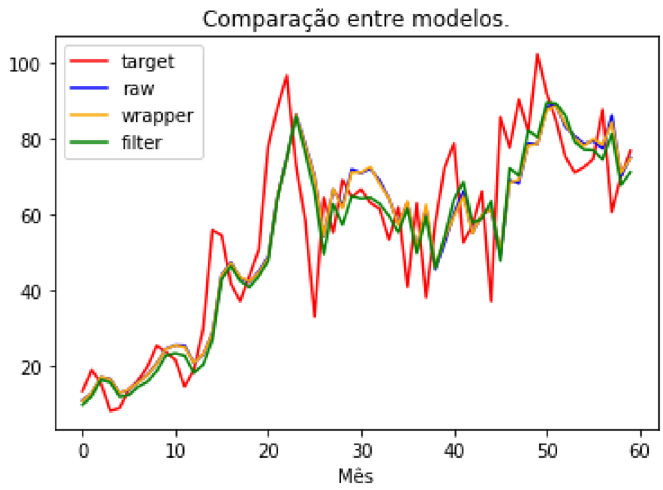

Figura 6: Saída prevista por cada modelo: azul - modelo inicial com 20 atributos, RMSE = 14.2495; amarelo - modelo criado usando wrapper, RMSE = 14.1138; verde - modelo criado usando filtro, RMSE = 13.8367; em comparação com valores reais (vermelho) dos últimos 5 anos (60 meses).

Ambas as estratégias de seleção de atributos em conjunto com a regularização L2 mostraram melhoria em relação ao uso de todos os 20 atributos sem regularização. Curiosamente, embora o erro de validação tenha sido menor na abordagem com seleção de atributos usando wrapper, o erro no conjunto de testes foi menor na abordagem de filtro. Isso pode ser consequência de (?)