# ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

## Bacharelado em Sistema de Informação

Profª. Patrícia Stülp

Instituto Federal Catarinense - Campus Camboriú

27 de agosto de 2025

INSTITUTO FEDERAL
Catarinense
Campus
Camboriú

# Revisão de Conjuntos

- Os conjuntos são representados por letras maiúsculas ($A$, $B$, $C$, $\cdots$ ), enquanto seus elementos são representados por letras minúsculas ($a$, $b$, $c$, $\cdots$ ).

- A notação $a \in A$ significa "o elemento $a$ pertence ao conjunto $A$", enquanto $a \notin A$ significa "o elemento $a$ não pertence ao conjunto $A$".

## Exemplos

1) Conjunto dos números Reais: $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é número real}\}$

2) Conjunto dos números Naturais:

$$\mathbb{N} = \{n \mid n \text{ é número natural}\}$$

3) Conjunto dos números Inteiros: $\mathbb{Z} = \{n \mid n \text{ é número inteiro}\}$

4) Conjunto dos números Racionais:

$$\mathbb{Q} = \{n/m \mid n, m \in \mathbb{Z} \text{ e } m \neq 0\}$$

5) Conjunto dos números Primos:

$$P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ é divisível por 1 e por ele mesmo}\}$$

Observação: Todos os conjuntos anteriores foram descritos a partir de uma propriedade. Ao invés disso, poderíamos ter listado todos os seus elementos, por exemplo:

Conjunto dos números Naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

Conjunto dos números Inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

## Conjunto unitário

Chama-se conjunto unitário aquele que possui um único elemento.

Exemplos:

1º) conjunto dos divisores de 1, inteiros e positivos: $\{1\}$

2º) conjunto das soluções da equação $3x + 1 = 10$: $\{3\}$

3º) conjunto dos estados brasileiros que fazem fronteira com o Uruguai: {Rio Grande do Sul}

4º) $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 = 2\}$: $\{\sqrt{2}\}$

# Conjunto vazio

Chama-se conjunto vazio aquele que não possui elemento algum. O símbolo usual para o conjunto vazio é $\emptyset$. Pode também ser representado por $\{\}$.

Exemplos:

1º) $\{x : x \neq x\} = \emptyset$

2º) $\{x : x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \emptyset$

3º) $\{x : x > 0 \text{ e } x < 0\} = \emptyset$

4º) $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 2\};\ B = \emptyset$

# Conjunto universo

O conjunto universo é o conjunto que contém todos os elementos que estão sendo considerados em um dado contexto.

Geralmente, o conjunto universo é representado pela letra $U$, mas nesta disciplina usaremos a letra grega $\Omega$ para representar o conjunto universo.

# A relação de inclusão

Dizemos que $A$ está contido em $B$ ou que $A$ é um subconjunto de $B$, $A \subset B$, se todo elemento de $A$ for elemento de $B$. Formalmente, $A \subset B$ se

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

- Exemplo 1: sejam $T$ o conjunto dos triângulos e $P$ o conjunto dos polígonos do plano. Todo triângulo é um polígono, logo $T \subset P$.
- Exemplo 2: Para os conjuntos numéricos apresentados na aula anterior, temos $P \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Quando $A$ não é um subconjunto de $B$, escreve-se $A \not\subset B$. Isto significa que nem todo elemento de $A$ pertence a $B$, ou seja, que existe pelo menos um elemento $a$ tal que $a \in A$ e $a \notin B$.

- Exemplo: sejam $A$ o conjunto dos números pares e $B$ o conjunto dos múltiplos de 3. Tem-se $A \not\subset B$ pois $2 \in A$, mas $2 \notin B$. Além disso, $B \not\subset A$, pois $3 \in B$ mas $3 \notin A$.

## Observação

Há duas inclusões extremas:

1ª) Para todo conjunto $A$, então $A \subset A$ (pois é claro que todo elemento de $A$ pertence a $A$);

2ª) Para qualquer conjunto $A$, $\emptyset \subset A$.

# Operações de Conjuntos

- União:

  A união entre dois conjuntos $A$ e $B$, $A \cup B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a $A$ ou a $B$, isto é

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$$

**Exemplo**: Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Determinar o conjunto $A \cup B$.

- Interseção:

  A interseção entre dois conjuntos $A$ e $B$, $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a $A$ e a $B$, isto é

  $$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$$

  **Exemplo**: Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Determinar o conjunto $A \cap B$.

- Diferença:

  A diferença entre dois conjuntos $B$ e $A$, $B - A$, é o conjunto dos elementos que pertencem a $B$ e não pertencem a $A$, isto é

$$B - A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in B \text{ e } \omega \notin A\}$$

  **Exemplo**: Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Determinar o conjunto $A - B$.

- Complementar:

  O complementar de um conjunto $A$, $A^c$, é o conjunto dos elementos que pertencem a $\Omega$ e não pertencem a $A$, isto é

  $$A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$$

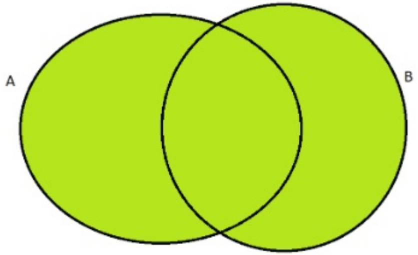
  **Exemplo**: Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Determinar o conjunto $A^c$ e $B^c$.

## Representação de Conjuntos
## Diagramas de Venn

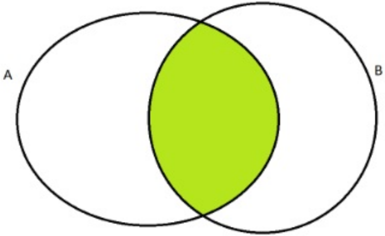
- Os diagramas de Venn são representações visuais que nos auxiliam a compreender as relações e interações entre conjuntos.
- Esses diagramas são compostos por círculos ou elipses que representam os conjuntos em questão.
- Cada conjunto é representado por um círculo separado, e a sobreposição entre os círculos indica a interseção entre os conjuntos.
- Os diagramas de Venn podem ser expandidos para representar mais de dois conjuntos, utilizando círculos sobrepostos adicionais.

# Representação gráfica de operações com conjuntos

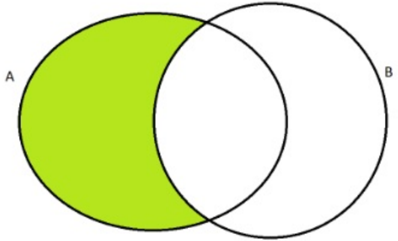
A união de dois conjuntos A e B é representada graficamente pela sobreposição dos círculos ou conjuntos correspondentes a cada um deles. A região que representa a união inclui todos os elementos presentes em pelo menos um dos conjuntos.



A interseção de dois conjuntos A e B é representada pela área em comum entre os círculos ou conjuntos correspondentes. Essa área representa os elementos que estão presentes em ambos os conjuntos.



A diferença entre dois conjuntos A e B é representada pela área do conjunto A sem a sobreposição com o conjunto B. Essa área corresponde aos elementos presentes apenas em A, excluindo aqueles que também pertencem a B.



# Introdução à Probabilidade

# Conceitos básicos de Probabilidades

- **Experimento aleatório**: Um experimento cujo resultado não se prevê com certeza, mesmo se repetido nas mesmas condições.

- **Espaço amostral** ($\Omega$): Conjunto cujos elementos são todos os possíveis resultados do experimento. Pode ser discreto (finito ou infinito enumerável) ou contínuo.

- **Evento** $(A, B, \cdots)$: Qualquer subconjunto de $\Omega$.

- **Eventos mutuamente excludentes**: $A$ e $B$ são dois eventos mutuamente exclusivos se não têm intersecção ($A \cap B = \emptyset$).

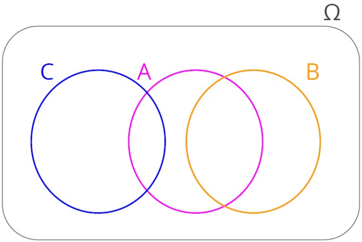
- **Eventos complementares**: $A$ e $B$ são dois eventos complementares se não têm intersecção e se sua união formam o espaço amostral:

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = \Omega$$

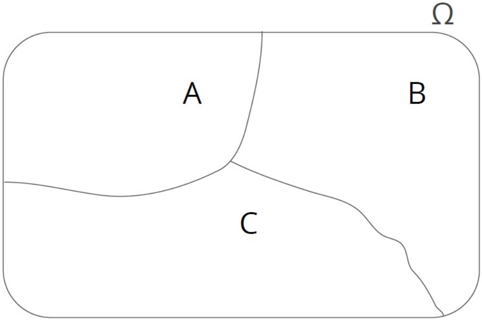
# Operações com Eventos

Diagrama de Venn:




- União: $A \cup B$
- Intersecção: $A \cap B$
- Mutuamente exclusivos ou disjuntos: $B \cap C = \emptyset$
- Complementares: $A \cap A^c = \emptyset$ e $A \cup A^c = \Omega$

Partição do espaço amostral:




$A$, $B$ e $C$ formam uma partição de $\Omega$ se forem mutuamente exclusivos e se $(A \cup B \cup C) = \Omega$.

Leis de De Morgan:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

- Demonstração $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$.

  ($\Rightarrow$) Mostrar que $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right)$.

  Seja $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c$, então $x \notin \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$, ou seja, $x \notin A_1$ e $x \notin A_2$ e $\cdots$ e $x \notin A_n$. Com isso, $x \in (A_1)^c$ e $x \in (A_2)^c$ e $\cdots$ e $x \in (A_n)^c$. Logo, $x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right)$.

  ($\Leftarrow$) Mostrar que $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c$.

  Exercício.

- Demonstração $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$.

  Exercício.

# Probabilidade

# Probabilidade Clássica

Se os elementos de $\Omega$ são equiprováveis e mutuamente exclusivos, a probabilidade de um evento $A$ (subconjunto de $\Omega$) é:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

$\#A$: número de elementos no conjunto $A$.

# Exemplo

Considere o lançamento de dois dados balanceados. Calcular a probabilidade de:

a) se obter soma das faces igual a 7;

b) se obter soma maior do que 5;

c) que o resultado do primeiro dado seja maior do que o resultado do segundo.

# Axiomas da Probabilidade

1º) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, \quad \forall A \subset \Omega$

2º) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

3º) Se $A_1, A_2, \cdots$ são mutuamente exclusivos, então

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

# Propriedades

Dado $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, considere que os conjuntos são eventos nesse espaço de probabilidade, então:

P1) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$

P2) Sendo $A$ e $B$ dois eventos quaisquer, então

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$$

P3) Se $A \subset B$, então $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$

P4) Regra da adição de probabilidade:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Exemplo: Um inteiro é escolhido ao acaso, dentre os números $1, 2, \cdots, 50$. Qual será a probabilidade de que o número escolhido seja divisível por 6 ou por 8?

- Se $A, B, C \subset \Omega$, então

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &\quad - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Exemplo: Sejam $A$, $B$ e $C$ eventos tais que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{5}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ e $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{7}$. Calcule a probabilidade de que pelo menos um dos eventos $A$, $B$ ou $C$ ocorra.

P5) Para quaisquer eventos $A_1, A_2, \cdots$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

P6) Se $A_n \uparrow A$, então $\mathbb{P}(A_n) \uparrow \mathbb{P}(A)$. De forma similar, se $A_n \downarrow A$, então $\mathbb{P}(A_n) \downarrow \mathbb{P}(A)$.

P7) Se $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$, então

$$\mathbb{P}(lim_{n\rightarrow\infty} infA_n) \leq \mathbb{P}(lim_{n\rightarrow\infty} supA_n)$$

## Demonstração

P1) Os eventos $A$ e $A^c$ formam uma partição de $\Omega$, portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \\ 1 &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \\ \Rightarrow \mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

P2) Da teoria de conjuntos, $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$. Aplicando probabilidade,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) \\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

P3) Se $A \subset B$, o evento $B$ pode ser particionado como

$$\begin{aligned} B &= (B \cap A) \cup (B \cap A^c) \\ &= A \cup (B \cap A^c) \end{aligned}$$

Portanto, aplicando probabilidade,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cup (B \cap A^c)) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(B \cap A^c) \geq 0$, então $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$.

$\blacksquare$

P4) Exercício.
Dica: escreva $(A \cup B)$ como a união de eventos disjuntos.