INSTITUTO FEDERAL Catarinense Campus Camboriú	Discente:	
	Turma: BSI25	Disciplina: Matemática Discreta
	Docente: Lucas Martini	
	Lógica formal: álgebra booleana com base em Gersting (2013) e Daghlian (2008)	

Parte 3: Princípios da álgebra booleana

- A álgebra Booleana fornece operações e regras para trabalharmos com conjuntos {0,1} semelhantes aos valores-verdade {F, V}, **associando os valores V e F a 1 e 0, respectivamente**. Logo perceberemos que:

  $V \wedge F \vee \neg(F \vee V) \equiv F$ é equivalente a $1 \cdot 0 + \overline{(0+1)} = 0$.

- Chama-se **operador binário** ou **operação binária** a lei pela qual todo par ordenado de elementos (x, y) leva um terceiro elemento z, seja pela soma, multiplicação, etc…
- Na álgebra booleana:
  - a operação de soma (+) equivale-se ao conectivo lógico **OU**, como segue:

    $0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+0=1, \quad 1+1=1$.
  - a multiplicação (*) equivale-se ao conectivo lógico **E**, como segue:

    $0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1$
  - a complementação ou assemelha-se a **negação**, notado por uma barra, como segue:

    $\overline{0} = 1,$ e $\overline{1} = 0$
- Mediante as tabelas-verdade e operações, obtemos (Daghlian, 2008):

a	b	a + b	b + a	a • b	b • a
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0 + \overline{(0+1)} &= 1 \cdot 0 + \overline{1} \\ &= 1 \cdot 0 + 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Observe que, na resolução:
  - realizamos (1º) complementos, (2º) produtos e (3º) somas.
  - a comutatividade é valida para + e *, isto é, **a ordem não importa**. ex: a+b = b+a.
- Dado sua correspondência com os valores-verdades, a álgebra booleana segue propriedades semelhantes as que vimos na parte 2, a saber (Gersting, 2013):

Definição

Uma **álgebra booleana** é um conjunto B no qual são definidas duas operações binárias + e . e uma operação unária' e no qual há dois elementos distintos 0 e 1 tais que valem as seguintes propriedades para todos x, y, $z \in B$:

1a. $x + y = y + x$	1b. $x \, . \, y = y \, . \, x$	(propriedades comutativas)
2a. $(x + y) + z = x + (y + z)$	2b. $(x \, . \, y) \, . \, z = x \, . \, (y \, . \, z)$	(propriedades associativas)
3a. $x + (y \, . \, z) = (x + y) \, . \, (x + z)$	3b. $x \, . \, (y + z) = (x \, . \, y) + (x \, . \, z)$	(propriedades distributivas)
4a. $x + 0 = x$	4b. $x \, . \, 1 = x$	(propriedades de identidade)
5a. $x + x' — 1$	5b. $x \, . \, x' = 0$	(propriedades complementativas)

- Outra propriedade importante, refere-se a idempotência, conforme sinaliza Gersting (2013):

> EXEMPLO 3 A **propriedade idempotente,** $x + x = x$, vale em qualquer álgebra booleana porque
>
> $$\begin{aligned} x + x &= (x + x) \cdot 1 && (4b) \\ &= (x + x).(x + x') && (5a) \\ &= x + (x \cdot x') && (3a) \\ &= x + 0 && (5b) \\ &= x && (4a) \end{aligned}$$

- A definição das operações, nos permitem associar os conjuntos com determinadas operações, de modo a obtermos **funções booleanas**.
- Em termos gerais, seja B = {0, 1} o conjunto de valores Booleanos. Então:

$$B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in B \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

  - Este é o conjunto de todas as n-uplas formadas por 0s e 1s
  - Uma função de B^n para B é chamada de função Booleana de grau n.
- Caso pareça estranho, o seguinte exemplo elucida sobre:

  A função booleana $F(x, y) = x\overline{y}$ de tipo $B^2 \to B$ é dada por:

x	y	$F(x, y) = x\overline{y}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

- Por fim, disponho outro exemplo da Gersting (2013) que elucida sobre:

> **EXEMPLO 2** Seja $B = \{0, 1\}$ (o conjunto dos inteiros 0 e 1) e defina as operações binárias + e . em B por $x + y = \text{máx}(x, y)$, $x \cdot y = \text{mín}(x, y)$. Então, podemos ilustrar as operações de + e • pelas tabelas abaixo.

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

> Uma operação unária, pode ser definida através de uma tabela, como mostrado a seguir, ao invés de uma expressão verbal.

'	
0	1
1	0

> Portanto, 0' = 1 e 1' = 0. Então [B, +, ., ', 0, 1] é uma álgebra booleana. Podemos verificar as 10 propriedades testando todos os casos possíveis. Por isso, para a propriedade 2b, a associatividade de ., mostramos que

$$(0 \cdot 0) \cdot 0 = 0 \cdot (0 \cdot 0) = 0$$
$$(0 \cdot 0) \cdot 1 = 0 \cdot (0 \cdot 1) = 0$$

$$(0 \cdot 1) \cdot 0 = 0 \cdot (1 \cdot 0) = 0$$
$$(0 \cdot 1) \cdot 1 = 0 \cdot (1 \cdot 1) = 0$$
$$(1 \cdot 0) \cdot 0 = 1 \cdot (0 \cdot 0) = 0$$
$$(1 \cdot 0) \cdot 1 = 1 \cdot (0 \cdot 1) = 0$$
$$(1 \cdot 1) \cdot 0 = 1 \cdot (1 \cdot 0) = 0$$
$$(1 \cdot 1) \cdot 1 = 1 \cdot (1 \cdot 1) = 1$$

Praticando

1) Converta a equivalência $(V \wedge V) \vee \neg F \equiv V$ na igualdade Booleana correspondente.
2) Verifique a propriedade 1b e 4b para a álgebra booleada do Exemplo 2 de Gersting (2013). Obs: o exemplo está ao final da folha anterior.
3) Disserte sobre o significado da propriedade idempotente (Exemplo 3) no contexto da lógica proposicional.
4) Mostre que a + (b * c) = (a+ b) * (a + c)
5) Determine os valores da função Booleana $F(x, y, z) = xy + \overline{z}.$
6) Seja o conjunto $C = \{\top, \bot, \bigcirc\}$, suponha-se dois operadores binários * e $\square$ pelos quadros abaixo. Dica: confira as propriedades na outra folha.

*	$\top$	$\bot$	$\bigcirc$
$\top$	$\top$	$\bigcirc$	$\bot$
$\bot$	$\bigcirc$	$\bot$	$\top$
$\bigcirc$	$\bot$	$\top$	$\bigcirc$

$\square$	$\top$	$\bot$	$\bigcirc$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bigcirc$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bigcirc$
$\bigcirc$	$\top$	$\bot$	$\bigcirc$

   a) O operador * é comutativo? é associativo?
   b) O operador $\square$ é comutativo? é associativo?
   c) Os dois operadores são distributivos um em relação ao outro?
7) Com base na definição e nas propriedades fundamentais da Álgebra Booleana e utilizando da **soma** e **produto**, **reduza** as quatro expressões a seguir o máximo que conseguir e finalize apresentando seu valor-verdade. Indicando a propriedade utilizada, quando necessário. Dica: confira as propriedades na outra folha.

   a) $(x + y) \cdot (x + y')$

   b) $(a + a' \cdot b) \cdot (b + b')$

   c) $x \cdot y \cdot (x' + y' + z)$

   d) $x + y + (x' \cdot y') \cdot z$