

# Cálculo Numérico e Teoria dos Grafos aplicados em simulação computacional de circuitos eletrônicos

Rafael Marasca Martins e Lucas Carvalho

*Resumo* —

**Palavras-Chave** — Circuitos, Grafos, Métodos numéricos, Simulação

## I. INTRODUÇÃO

## II. MATRIZES

### A. Definição

De acordo com (ANTON; RORRES, 2010, p. 26), uma *matriz* é um agrupamento retangular de números e tem tamanho definido por *linhas* e *colunas*, sendo estas, respectivamente, o número de fileiras horizontais e verticais.

Uma matriz A com m linhas e n colunas ( $m \times n$ ) é representada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Onde  $a_{ij}$  é o elemento na posição  $(i, j)$ .

### B. Soma de Matrizes

Sejam A e B matrizes com igual número de linhas e colunas na forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

A soma dessas duas matrizes é dada por:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

### C. Igualdade de Matrizes

Duas matrizes são ditas iguais se e somente se tiverem o mesmo número de linhas e colunas e todas as suas entradas forem iguais. Ou seja, dadas A e B:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Tem-se que:

$$A = B \iff \begin{bmatrix} a_{11} = b_{11} & \dots & a_{1n} = b_{1n} \\ a_{21} = b_{21} & \dots & a_{2n} = b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} = b_{m1} & \dots & a_{mn} = b_{mn} \end{bmatrix}$$

### D. Multiplicação de Matrizes

Seja A uma matriz ( $m \times r$ ) e B uma matriz ( $r \times n$ ), onde m e n não são necessariamente iguais, na seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & b_{r3} & \dots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

O produto matricial entre A e B, denotado AB, será uma matriz ( $m \times n$ ) seguindo a regra (ANTON; RORRES, 2010, p. 30):

$$AB = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Onde

$$c_{ij} = \sum_{n=1}^r a_{in} b_{nj}$$

Vale ainda ressaltar que o produto matricial é anticomutativo, ou seja,  $AB \equiv -BA$ .

### E. Matriz Transposta

Se  $A$  for uma matriz  $(m \times n)$ , sua matriz transposta  $A^T$  será uma matriz  $(n \times m)$  obtida pela troca das linhas pelas colunas de  $A$  (ANTON; RORRES, 2010, p. 34). Ou seja, se:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Então:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

### III. SISTEMAS DE EQUACÕES LINEARES

### A. Definição

Segundo (ANTON; RORRES, 2010, p. 2), uma *equação linear de n variáveis* é uma equação que pode ser

escrita na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Onde  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  são constantes e  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  são variáveis. Note que todos os termos são monômios de grau 1, ou seja, todos os termos são *lineares* e, portanto, a soma de todos os termos é linear.

Então, tem-se que uma equação linear é uma equação na qual figuram apenas constantes e variáveis lineares.

Pode-se expandir esse conceito. Se as variáveis  $x_k, k = 1, 2, \dots, n$  forem organizadas em  $m$  equações lineares, cada uma com novos coeficientes  $a_k, k = 1, 2, \dots, n$  e uma nova constante  $b$ , essa organização será chamada de *sistema de equações lineares*. Matematicamente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \cdots + & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

Um sistema de equações lineares pode ter uma, nenhuma ou infinitas soluções (ANTON; RORRES, 2010, p. 4) e sua solução, caso exista, pode ser expressa por  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , onde  $s_1 = x_1, s_2 = x_2, \dots, s_n = x_n$ .

### B. Forma Matricial

É conveniente transformar o sistema anterior no produto de matrizes  $Ax = b$ , onde  $A$  é a matriz ( $m \times n$ ) dos coeficientes,  $b$  é o *vetor* (matriz ( $m \times 1$ )) dos termos constantes e  $x$  é o vetor das incógnitas (ANTON; RORRES, 2010, p. 33). Então, o sistema pode ser representado da seguinte forma:

$$Ax = b \iff$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Dessa forma, existem diversos métodos, diretos e iterativos, que podem resolver o sistema na forma matricial.

### C. Método de Gauss-Jordan

Dado um sistema linear determinado, é possível encontrar sua solução pelo método (direto) de Gauss-Jordan. Seja a matriz aumentada do sistema:

$$(A|B) = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right]$$

Onde  $a_{ij}$  e  $b_i$  são entradas das matrizes dos coeficientes e das constantes, respectivamente.

O método de Gauss-Jordan consiste em realizar operações elementares sobre a matriz aumentada a fim de reduzi-la à forma escalonada reduzida por linhas (ANTON; RORRES, 2010, p. 15) como segue:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_n \end{array} \right]$$

As operações elementares permitidas são:

1. multiplicação da linha por escalar;
2. troca de linhas;
3. adição de uma linha com um múltiplo de outra.

A fase direta (ou eliminação gaussiana) é aquela em que os números abaixo do elemento da diagonal principal são zerados, enquanto na fase inversa são zerados os elementos acima (ANTON; RORRES, 2010, p.15).

De modo geral, a linha  $i$  é multiplicada pelo recíproco do elemento na diagonal principal  $a_{ii}$ , que transforma o elemento na diagonal principal (pivô) em 1. Então, as linhas  $L_j$  abaixo e acima de  $i$  serão somadas com  $-a_{ji} \cdot L_i$ , sendo  $L_i$  a linha de partida, o que zera todos os elementos acima e abaixo do pivô, já que o este passou a ser unitário.

Um dos problemas do passo a passo descrito é o caso do pivô ser nulo, o que resulta em uma divisão por zero.

Para garantir a generalidade e tornar o algoritmo computacionalmente viável, é preciso adicionar um passo extra: antes de efetuar as divisões, buscar na coluna  $i$  o maior elemento em valor absoluto e, se necessário, trocar sua linha com  $L_i$ . Esse passo é chamado de Pivoteamento Parcial e é descrito por (RUGGIERO; LOPES, 1988, p. 127).

O seguinte algoritmo descreve uma implementação computacional do método, assumindo um sistema determinado de  $n$  equações e  $n$  variáveis:

---

#### Algoritmo 1 Gauss-Jordan

---

- 1: **função** PIVOParcial(A, b, i)
- 2:   maior  $\leftarrow A_{ii}$

```

3:   indice  $\leftarrow i$ 
4:   para j  $\leftarrow i$  até N faça
5:     se |maior| < |Aji| então
6:       maior  $\leftarrow A_{ji}$ 
7:       indice  $\leftarrow j$ 
8:     fim se
9:   fim para
10:  se indice  $\neq i$  então
11:   troque Ai por Aindice
12:   troque bi por bindice
13:  fim se
14:  fim função
15:  função GAUSSJORDAN(A, b)
16:   para i  $\leftarrow 1$  até N faça
17:     pivoParcial(A, b, i)
18:     div  $\leftarrow A_{ii}$ 
19:     para j  $\leftarrow i$  até N faça
20:       Aij  $\leftarrow A_{ij} \cdot \frac{1}{div}$ 
21:     fim para
22:     bi  $\leftarrow b_i \cdot \frac{1}{div}$ 
23:     para k  $\leftarrow 0$  até N faça
24:       se k = i então
25:         continue
26:       fim se
27:       mult  $\leftarrow A_{ki}$ 
28:       para l  $\leftarrow k$  faça
29:         Akl  $\leftarrow A_{kl} - mult \cdot A_{il}$ 
30:       fim para
31:       bk  $\leftarrow b_k - mult \cdot b_i$ 
32:     fim para
33:  fim para
34:  fim função

```

---

#### D. Método de Gauss-Seidel

Muitas vezes, a utilização de métodos diretos leva a erros significativos de arredondamento (PIRES, 2015, p. 173), além de serem computacionalmente custosos. Uma possível solução para isso é o emprego de *métodos iterativos*, que consistem em gerar uma nova aproximação à solução real a cada *passo iterativo* com base em uma *função de iteração*.

Então, dado um sistema de equações lineares qualquer  $Ax = b$ , é necessário transformá-lo em um sistema do tipo  $x = Cx + g$  para resolvê-lo iterativamente (RUGGIERO; LOPES, 1988, p. 167). Feita a transformação, toma-se o  $x$  do lado esquerdo da equação como o vetor solução aproximada no passo  $k + 1$  e o  $x$  do lado direito como o vetor solução aproximada no passo  $k$ . Ou seja:

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$$

Então, dado um “chute” inicial  $x^{(0)}$ , define-se  $x^{(k+1)}$  como a função de iteração  $\varphi(x)$  do sistema:

$$\varphi(x) = Cx^{(k)} + g$$

Com  $k = 0, 1, 2, \dots, n; n \in \mathbb{N}$ .

Existem diversos meios de encontrar as matrizes  $C$  e  $g$ . Um deles é o método de Gauss-Seidel, que consiste em separar a matriz  $A$  em três matrizes:  $L$  (triangular inferior),  $D$  (diagonal) e  $R$  (triangular superior), ou seja:

$$A = L + D + R \iff$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Então, (RUGGIERO; LOPES, 1988, p. 164) dá a seguinte demonstração:

$$Ax = b \iff (L + D + R)x = b$$

Seria conveniente ainda fatorar a matriz  $D$  da expressão  $A = (L + D + R)$ . Para tal, é necessário dividir cada linha pelo elemento na diagonal principal, o que resulta nas seguintes matrizes:

$$D_1 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,  $Ax = b$  pode ser reescrito como:

$$Ax = b \iff D(L_1 + I + R_1)x = b$$

$$\iff (L_1 + I + R_1)x = D^{-1}b$$

$$\iff L_1x + Ix + R_1x = D^{-1}b$$

$$\iff Ix = -L_1x - R_1x + D^{-1}b$$

$$\iff x = -L_1x - R_1x + D^{-1}b$$

Portanto, o método de Gauss-Seidel é dado por:

$$x^{(k+1)} = \varphi(x) = -L_1x^{(k+1)} - R_1x^{(k)} + D^{-1}b$$

Ou ainda:

$$x^{(k+1)} + L_1x^{(k+1)} = -R_1x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$\iff (L_1 + I)x^{(k+1)} = -R_1x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$\iff x^{(k+1)} = -(L_1 + I)^{-1}R_1x^{(k)} + (L_1 + I)^{-1}D^{-1}b$$

Se  $C = -(L_1 + I)^{-1}R_1$  e  $G = (L_1 + I)^{-1}D^{-1}b$ , fica demonstrado que o método de Gauss-Seidel obedece a hipótese  $x^{(k+1)} = \varphi(x) = Cx^{(k)} + g$ .

Para o cálculo computacional do vetor solução aproximada  $x^{(k+1)}$  é dada pela seguinte fórmula (GOLUB; LOAN, 2015, p. 513):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right)$$

Onde  $x_i$  é a  $i$ -ésima linha do vetor solução aproximada,  $b_i$  é a  $i$ -ésima linha do vetor das constantes e  $a_{ij}$  é a entrada da matriz dos coeficientes na posição  $(i, j)$ .

A convergência do método de Gauss-Seidel, isto é, se a aproximação tende ao valor exato, é garantida para qualquer valor contanto que seja cumprido o critério de Sassenfeld (RUGGIERO; LOPES, 1988, p. 171). Sejam:

$$\beta_1 = \frac{1}{|a_{11}|} \cdot \sum_{j=2}^n |a_{1j}|$$

e

$$\beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \cdot \left( \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j \cdot |a_{ij}| - \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right)$$

O critério de Sassenfeld diz que o método convergirá se  $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} (\beta_i) < 1$  (RUGGIERO; LOPES, 1988, p. 173).

Além disso, dada uma tolerância esperada  $\varepsilon$ , as iterações do método de Gauss-Seidel devem ser interrompidas se  $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}| < \varepsilon$ , ou seja se a maior distância entre os elementos do vetor solução aproximada nos passos  $k$  e  $k + 1$  for menor do que a tolerância (RUGGIERO; LOPES, 1988, p. 155).

Assumindo um sistema com número igual de incógnitas e equações que cumpre o critério de Sassenfeld,

tem-se o seguinte algoritmo para solução computacional:

---

**Algoritmo 2** Gauss-Seidel

---

```

1: função GAUSSSEIDEL(A, b,  $x^{(0)}$ ,  $\varepsilon$ , maxiter)
2:    $x^{(k)} \leftarrow x^{(0)}$ 
3:    $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)}$ 
4:   para k  $\leftarrow$  1 até maxiter faça
5:     para i  $\leftarrow$  1 até N faça
6:        $S_1 \leftarrow 0$ 
7:        $S_2 \leftarrow 0$ 
8:       para j  $\leftarrow$  1 até i - 1 faça
9:          $S_1 \leftarrow S_1 + A_{ij} * x_j^{(k+1)}$ 
10:      fim para
11:      para j  $\leftarrow$  i+1 até N faça
12:         $S_2 \leftarrow S_2 + A_{ij} * x_j^{(k)}$ 
13:      fim para
14:       $x_i^{(k+1)} \leftarrow \frac{1}{A_{ii}} * (b_i - S_1 - S_2)$ 
15:    fim para
16:    se ( $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}| < \varepsilon$ ) então
17:      Pare
18:    fim se
19:     $x^{(k)} \leftarrow x^{(k+1)}$ 
20:  fim para
21: fim função

```

---

## IV. TEORIA DOS GRAFOS

### A. Definição

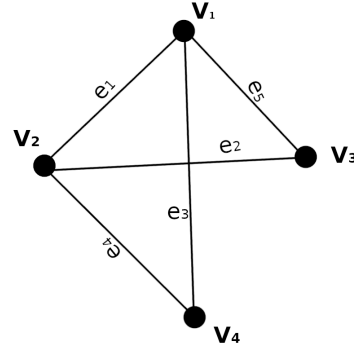
Segundo (BONDY; MURTY, 1976, p. 1), um *grafo* é o terno ordenado  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ , onde  $V(G) = v_1, v_2, \dots, v_n, n \in \mathbb{N}$  é chamado de conjunto (não vazio) de *vértices*,  $E(G) = e_1, e_2, \dots, e_m, m \in \mathbb{N}$  é chamado de conjunto de *arestas* e  $\psi_G$  é chamada de *função de incidência*, que associa a cada aresta um par de vértices. Dados dois vértices  $u$  e  $v$ , a aresta  $e$  conecta  $u$  e  $v$  se  $\psi(e) = uv$ .

O nome *grafo* se deve à possibilidade de representar tais objetos matemáticos *graficamente* (BONDY; MURTY, 1976, p. 2). Por exemplo, seja um grafo  $G$  com 4 vértices e 5 arestas  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ , onde:

$$\begin{aligned}
 V(G) &= v_1, v_2, v_3, v_4 \\
 E(G) &= e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \\
 \psi(e_1) &= v_1 v_2, \\
 \psi(e_2) &= v_2 v_3, \\
 \psi(e_3) &= v_1 v_4, \\
 \psi(e_4) &= v_2 v_4, \\
 \psi(e_5) &= v_1 v_3
 \end{aligned}$$

$G$  pode facilmente ser representado graficamente pelo seguinte diagrama, onde cada vértice representa um ponto e cada aresta representa uma linha:

Figura 1: Exemplo (1) de um grafo



Fonte: compilação dos autores.

Um *caminho* é dado por uma sequência de vértices. Um *ciclo* é um caminho através do qual é possível “sair” de um vértice e “voltar” para o mesmo por uma aresta diferente (SEdgeWICK; WAYNE, 2011, p. 519). Se este caminho for impossível, para todos os vértices, o grafo é dito *acíclico*.

Um grafo é *conexo* se existir pelo menos um caminho de qualquer vértice à qualquer outro vértice (SEdgeWICK; WAYNE, 2011, p. 519).

### B. Matriz de Incidência

Uma forma conveniente de representar um grafo é pela chamada *matriz de incidência*. Seja  $G$  um grafo com  $v$  vértices e  $e$  arestas.  $G$  pode ser escrito em termos de uma matriz  $v \times e$   $M(G) = [m_{ij}]$ , onde  $m_{ij}$  (a entrada da matriz na  $i$ -ésima linha e na  $j$ -ésima coluna) representa quantas vezes (entre 0 e 2)  $v_i$  e  $e_j$  são *incidentes*, ou seja, quantas vezes a aresta  $e_j$  se “encontra” com o vértice  $v_i$  (BONDY; MURTY, 1976, p. 7). Dois vértices  $v_a$  e  $v_b$  possuem uma aresta  $e_c$  entre si se e somente se  $m_{ac} = m_{bc} \neq 0$ .

A matriz de incidência que representa o grafo do exemplo anterior é, nesse caso:

$$M(G) = \begin{bmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ v_1 | & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 | & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 | & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 | & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

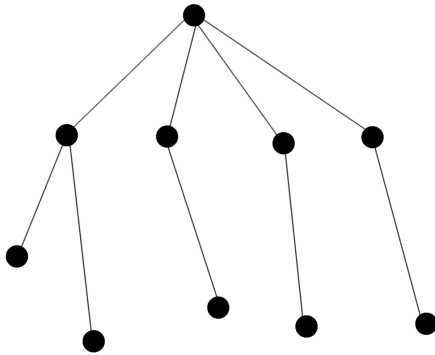
Pode-se reparar que, por exemplo,  $m_{11} = m_{21}$ , o

que indica (e pode ser verificado na figura 1) que  $e_1$  é uma conexão entre  $v_1$  e  $v_2$ . Nota-se também que três arestas incidem com  $v_1$ .

### C. Árvore Geradora

Por definição, uma *árvore* é um grafo conexo acíclico (SEGEWICK; WAYNE, 2011, p. 520), como explicitado na figura 2:

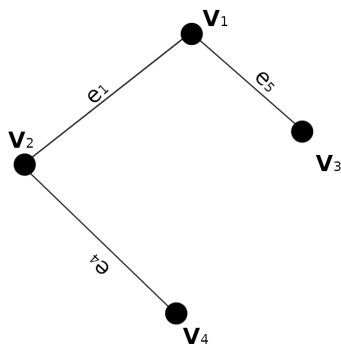
Figura 2: Exemplo de árvore



Fonte: compilação dos autores.

Uma *árvore geradora* de um grafo conexo  $G$  é um subgrafo que contém todos os vértices (e não necessariamente todas as arestas) de  $G$  mas nenhum de seus ciclos. Uma árvore geradora do exemplo (1) pode ser:

Figura 3: Árvore geradora de (1)

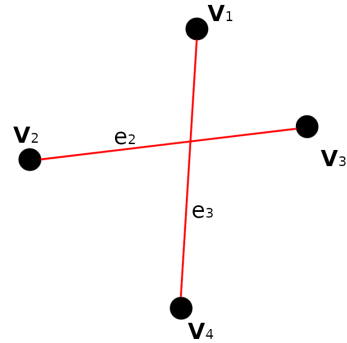


Fonte: compilação dos autores.

Uma *árvore co-geradora* de um grafo conexo  $G$  é uma árvore formada pelas arestas (e seus respectivos

vértices) que não aparecem na árvore geradora (THULASIRAMAN, 2002, p. 834). Suas arestas são chamadas de *acordes*. A árvore co-geradora do exemplo anterior é:

Figura 4: Árvore co-geradora de (1)

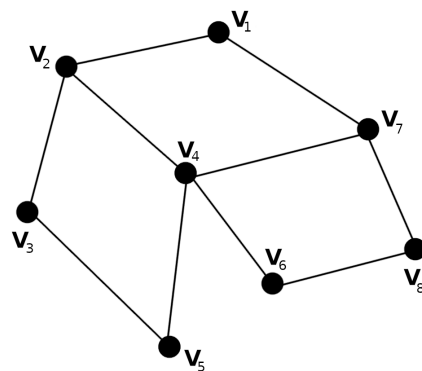


Fonte: compilação dos autores.

É possível ainda encontrar uma árvore geradora para qualquer grafo conexo computacionalmente. Para tal, basta realizar uma *busca em profundidade* no grafo e então a árvore geradora será o caminho percorrido pela busca.

A busca em profundidade (ou DFS) consiste em dois passos simples: visitar um vértice inicial e recursivamente visitar todos os seus vizinhos ainda não visitados (SEGEWICK; WAYNE, 2011, p. 531). Seja, por exemplo, o seguinte grafo  $G$ :

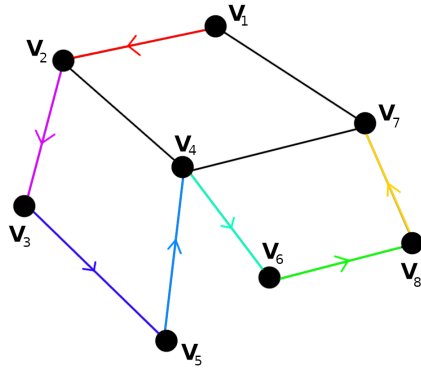
Figura 5: Exemplo (2) de um grafo



Fonte: compilação dos autores.

A seguinte figura mostra o percurso da DFS partindo de  $v_1$ , onde cada cor representa um passo do algoritmo:

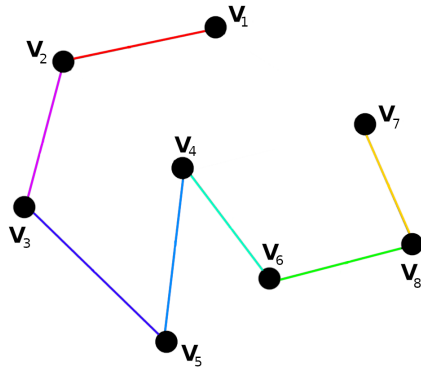
Figura 6: DFS sobre (2)



Fonte: compilação dos autores.

É fácil perceber que o subgrafo formado pelas arestas destacadas é uma árvore geradora de  $G$ :

Figura 7: Árvore Gerada pela DFS



Fonte: compilação dos autores.

O seguinte algoritmo representa uma implementação computacional do tópico discutido, assumindo um grafo conexo  $G$  e uma árvore inicialmente vazia  $T$ :

---

**Algoritmo 3** Árvore Geradora

---

```

1: função ARVOREGERADORADFS( $G, T, v$ )
2:   Marque  $v$  como visitado
3:   Insira  $v$  em  $T$ 
4:   para Todos os vizinhos  $v_i$  não visitados de  $v$  faça
5:     Insira a aresta que conecta  $v$  e  $v_i$  em  $T$ 
6:     arvoreGeradoraDFS( $G, T, v_i$ )
7:   fim para
8: fim função

```

---

#### D. Encontrando os Ciclos de um Grafo

Uma forma possível de encontrar os ciclos em um grafo é através de uma adaptação do algoritmo descrito por (PATON, 1969). A ideia geral é encontrar uma árvore geradora  $T$  do grafo  $G$  e a cada passo inserir uma aresta  $e_i \in (E(G) - E(T))$  em  $T$ , encontrar o ciclo gerado pela adição de  $e_i$  e remover  $e_i$  de  $T$ , até que todas as arestas tenham passado pelo processo.

---

**Algoritmo 4** Encontra Ciclos

---

```

1: função ENCONTRACICLOS( $G$ )
2:    $T \leftarrow arvoreGeradoraDFS(G, T, v_1)$ 
3:   para Todas as arestas  $e_i$  em  $E(G)$  faça
4:     Insira  $e_i$  em  $T$ 
5:     Encontre o único ciclo presente em  $T$ 
6:     Remova  $e_i$  de  $T$ 
7:   fim para
8: fim função

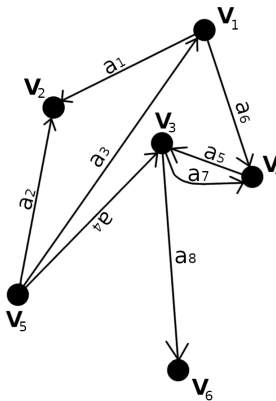
```

---

#### E. Digrafo e Multigrafo

Um grafo direcionado (ou digrafo) é um grafo no qual os vértices extremos de uma aresta podem (mas não necessariamente devem) estar conectados por uma via de mão única (SEGEWICK; WAYNE, 2011, p. 566). Ou seja, dados dois vértices  $v_1$  e  $v_2$ , uma aresta  $e_1$  pode representar um caminho de  $v_1$  à  $v_2$  mas não necessariamente o contrário. Nesse caso, a aresta é chamada de *arco*. Graficamente, os arcos são representados por setas que ligam dois vértices:

Figura 8: Exemplo de digrafo



Fonte: compilação dos autores.

Convencionando na matriz de incidência  $m_{ij} = 1$  se o arco  $a_j$  sai do vértice  $v_i$  e  $m_{ij} = -1$  se o arco  $a_j$  chega ao vértice  $v_i$ , a seguinte matriz de incidência representa o

digrafo anterior:

$$M = \begin{bmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ v_1 | & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 | & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 | & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ v_5 | & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_6 | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Note que há mais de um arco entre  $v_3$  e  $v_4$ . A um grafo que permite esse tipo de comportamento se dá o nome de *multigrafo*.

## V. Circuitos Elétricos

### A. Definição

Segundo (SADIKU; ALEXANDER, 2013, p. 4), um *circuito elétrico* é basicamente uma conexão entre componentes elétricos. Estes componentes são chamados de *elementos* do circuito. Nesse trabalho são abordados apenas *fontes de tensão constante e resistores*.

Fontes de tensão constante são dispositivos que geram uma *força eletromotriz* (ou diferença de potencial), ou seja, realizam *trabalho* para deslocar *cargas elétricas* (SADIKU; ALEXANDER, 2013, p. 8). A unidade da diferença de potencial (DDP) é o *volt (V)* (SADIKU; ALEXANDER, 2013, p. 9). A esse deslocamento de cargas se dá o nome de *corrente elétrica*, medida em *ampères (A)* (SADIKU; ALEXANDER, 2013, p. 6).

Resistores são elementos que se submetidos à uma DDP, *opõem-se* à passagem de corrente elétrica (SADIKU; ALEXANDER, 2013, p. 28) de acordo com sua *resistência*. Essas três quantidades são relacionadas pela *Lei de Ohm*:

$$V = R \cdot I$$

Onde  $V$  é a diferença de potencial,  $R$  é a resistência do elemento resistivo e  $I$  é a corrente que atravessa o elemento (SADIKU; ALEXANDER, 2013, p. 28).

### B. Diagramas

É conveniente ainda representar os componentes elétricos graficamente para análise, sem ser necessário que se construa um circuito concreto.

A seguinte figura mostra como um resistor inserido entre dois pontos A e B pode ser representado:

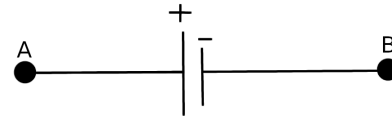
Figura 9: Diagrama de um resistor



Fonte: compilação dos autores.

A próxima figura expõe a representação gráfica de uma fonte de tensão constante entre A e B:

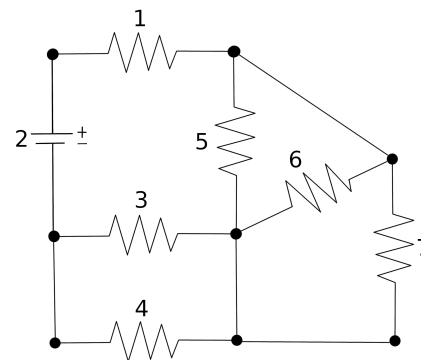
Figura 10: Diagrama de uma fonte de tensão



Fonte: compilação dos autores.

Então, estes elementos podem ser combinados a fim de gerar circuitos mais complexos. A seguir, expõe-se um exemplo desse tipo:

Figura 11: Diagrama de um circuito resistivo



Fonte: compilação dos autores.

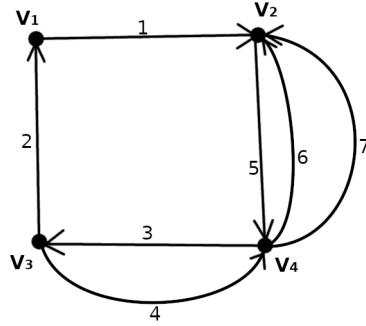
### C. Representação por Grafos

Apesar dos diagramas serem convenientes para seres humanos visualizarem o comportamento de circuitos elétricos, a interpretação direta deles é muito difícil computacionalmente. Note, porém, que o diagrama é composto



basicamente por vértices e arestas. Então, é possível redesenhar o diagrama como um digrafo, tomando os vértices como pontos sob diferentes potenciais e os arcos (com a mesma numeração) como os componentes elétricos, assim como mostrado por (THULASIRAMAN, 2002, p. 838). Então, o seguinte grafo representa o circuito anterior:

Figura 12: Grafo do circuito resistivo



Fonte: compilação dos autores.

O sentido dos arcos representa o sentido da corrente que será assumido na simulação. Então, a matriz de incidência resultante é:

$$M = \begin{bmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ v_1| & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2| & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3| & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4| & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os arcos que se incidem nos mesmos dois vértices são componentes em *paralelo*. Dois arcos que formam um caminho  $v_i - v_j, v_j - v_k$ , sendo os únicos arcos incidentes entre  $v_i, v_j$  e  $v_j, v_k$ , são dois componentes em *série*.

#### D. Solução Computacional

*Resolver* um circuito elétrico consiste em utilizar o *princípio de conservação da carga elétrica* e o *princípio de conservação de energia* para encontrar todas as variáveis desconhecidas dos componentes. Comumente são conhecidas apenas a tensão da fonte e as resistências dos resistores.

O método utilizado neste artigo consiste em uma adaptação dos métodos expostos em (THULASIRAMAN, 2002) e (BORUAH; GOGOI; CHUTIA, 2017).

A *Lei das Tensões de Kirchhoff* é a aplicação do princípio de conservação de energia aos circuitos elétricos

e diz que (BORUAH; GOGOI; CHUTIA, 2017, p. 945):

$$\sum_{k=1}^e b_{rk} V_k = 0$$

Onde  $e$  é o número de arcos do grafo,  $b_{rk}$  é a entrada na posição  $rk$  da matriz  $B$  dos ciclos de  $G$  e  $V_k$  é a tensão através de um arco. Em outras palavras, diz que a soma das tensões em um ciclo é nula.

Já a *Lei das Correntes de Kirchhoff* enuncia o emprego do princípio da conservação de carga elétrica aos circuitos elétricos da seguinte forma (BORUAH; GOGOI; CHUTIA, 2017, p. 945):

$$\sum_{k=1}^e a_{rk} I_k = 0$$

Onde  $a_{rk}$  é a entrada na posição  $rk$  da matriz de incidência  $A$  do grafo  $G$ ,  $I_k$  é a corrente que flui pela aresta  $k$  e  $e$  é o número de arcos do grafo. Em outras palavras, diz que a soma das correntes em um nodo é nula.

A matriz  $B$  dos ciclos fundamentais é uma matriz onde cada linha representa um ciclo fundamental do grafo  $G$  e cada coluna representa um arco presente no ciclo de acordo com as seguintes regras (BORUAH; GOGOI; CHUTIA, 2017, p. 948):

- $b_{ij} = 1$  se o galho  $b_j$  no ciclo fundamental e sua referência têm a mesma orientação;
- $b_{ij} = -1$  se o galho  $b_j$  no ciclo fundamental e sua referência têm orientações opostas;
- $b_{ij} = 0$  se o galho  $b_j$  não está no ciclo fundamental.

A matriz  $R$  das resistências é uma matriz diagonal quadrada  $e \times e$ , onde  $e$  é o número de arcos no grafo, cujos elementos  $r_{ii}$  representam a resistência no arco  $i$ . Então, (BORUAH; GOGOI; CHUTIA, 2017, p. 949) fornece a seguinte dedução:

Dada uma tensão  $V_{sk}$  em um galho  $k$ , com corrente  $r_k$  e resistência  $r_k$ . Pela lei de Ohm:

$$v_k = z_k i_k + V_{sk}$$

Na forma matricial:

$$V_b = R_b I_b + V_s$$

Mas a lei das tensões de Kirchhoff na forma matricial é escrita como:

$$BV_b = 0$$

$$\iff B(R_b I_b + V_s) = 0$$

$$\iff BR_b I_b = -BV_s$$

Mas, sabemos que  $I_b = B^t I_L$ , onde  $I_L$  é a corrente no ciclo e  $B^t$  é a transposta de  $B$ . Então:

$$BR_b B^t I_L = -BV_s$$

Como  $B$ ,  $R$  e  $B^t$  são conhecidos e formam uma matriz quadrada,  $I_L$  é uma matriz coluna de incógnitas e  $-BV_s$  é uma matriz coluna de constantes, a equação anterior é equivalente a um sistema linear na forma  $Ax = b$ . Logo, basta resolver o sistema e substituir em  $I_b = B^t I_L$  para encontrar todas as correntes.

Então, foi implementado o seguinte algoritmo para a solução computacional de circuitos elétricos, assumindo  $A$  como a matriz de incidência do grafo,  $R$  como a matriz de resistência,  $B$  como a matriz dos ciclos fundamentais,  $I$  como a matriz das correntes e  $V$  como a matriz das tensões:

---

**Algoritmo 5** Solucionador de Circuitos

---

```

1: função RESOLVECIRCUITO( $A, R, B, I, V$ )
2:    $B \leftarrow \text{encontraCiclos}(A)$ 
3:    $M \leftarrow BR_b B^t$ 
4:    $n \leftarrow -BV_s$ 
5:    $x^{(0)} \leftarrow \text{vetor nulo}$ 
6:   se  $M$  atende ao critério de Sassenfeld então
7:      $I_L \leftarrow \text{gaussSeidel}(M, n, x^{(0)}, 10^{-8}, 10^3)$ 
8:   senão
9:      $I_L \leftarrow \text{gaussJordan}(M, n)$ 
10:  fim se
11:   $I_b \leftarrow B^t I_L$ 
12: fim função
```

---

Ao fim do algoritmo, são conhecidas todas as correntes e tensões e, portanto, o circuito passa a ser determinado.

## VI. RESULTADOS

## VII. CONCLUSÃO

## REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear: com aplicações*. 10. ed. São Paulo: BOOKMAN COMPANHIA EDITORA LTDA., 2010. 762 p. ISBN 978-04-704-3205-1.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph Theory: With applications*. 1. ed. Ontario: North Holland, 1976. 264 p. ISBN 0-444-19451-7.
- BORUAH, C.; GOGOI, K.; CHUTIA, C. Analysis of some electrical circuits with the help of graph theory using

network equilibrium equations. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, India, v. 6, n. 1, p. 944–953, jan. 2017.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix Computations*. 3. ed. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2015. 694 p. ISBN 978-0-8018-5414-9.

PATON, K. An algorithm for finding a fundamental set of cycles of a graph. *Communications of the ACM*, Londres, v. 12, n. 9, p. 514–518, set. 1969.

PIRES, A. de A. *Cálculo Numérico: Prática com algoritmos e planilhas*. 1. ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2015. 225 p. ISBN 978-85-224-9882-6.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1988. 424 p. ISBN 978-85-346-0204-4.

SADIKU, M. N. O.; ALEXANDER, C. K. *Fundamentos de Circuitos Elétricos*. 5. ed. São Paulo: AMGH Editora Ltda., 2013. 874 p.

SEGEWICK, R.; WAYNE, K. *Algorithms*. 4. ed. Nova Jersey: Addison-Wesley, 2011. 956 p. ISBN 978-0-321-57351-3.

THULASIRAMAN, K. Circuit theory. *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, Oklahoma, v. 2, p. 831–841, 2002.