# Cálculo Numérico e Teoria dos Grafos aplicados em solução computacional de circuitos elétricos

Lucas Carvalho e Rafael Marasca Martins

***Resumo* — Neste artigo apresentaremos uma revisão sobre as operações possíveis entre matrtizes e sua aplicação na resolução de sistemas lineares, além de expor o conceito de circuitos elétricos e propor uma maneira de solucioná-los computacionalmente utilizando métodos baseados na teoria dos grafos. Demonstraremos a dificuldade em resolver tais circuitos manualmente e concluiremos o artigo mostrando a solução exata obtida trivialmente pela simulação.**

**Palavras-Chave — Circuitos, Grafos, Métodos numéricos, Simulação**

## I. INTRODUÇÃO

A análise de circuitos elétricos é um tópico de interesse das engenharias, já que todo o mundo moderno depende da eletricidade e suas aplicações. Contudo, é inegável que realizar esta análise manualmente é um processo laborioso, visto que são muitas variáveis para se considerar. A fim de aliviar tal fardo, apresentaremos neste artigo uma forma de resolver computacionalmente *qualquer* circuito elétrico composto apenas por fontes de tensão e resistores, além de uma revisão bibliográfica dos conceitos necessários para isso.

O trabalho é dividido em três partes: na primeira, discutiremos os fundamentos matemáticos de *sistemas lineares* e algumas formas de resolução destes. Na segunda, apresentaremos o conceito de *grafo* matematica e graficamente, junto com algumas de suas propriedades. Na última parte, introduziremos o conceito de *circuitos elétricos* e sintetizaremos tudo o que foi mostrado anteriormente na forma de um algoritmo solucionador de circuitos resistivos.

## II. MATRIZES

### *A. Definição*

De acordo com (ANTON; RORRES, 2010, p. 26), uma *matriz* é um agrupamento retangular de números com tamanho definido por *linhas* e *colunas*, sendo estas, respectivamente, o número de fileiras horizontais e verticais.

Uma matriz A com m linhas e n colunas $(m \times n)$ é representada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Onde $a_{ij}$ é o elemento na posição $(i, j)$.

### *B. Soma de Matrizes*

Sejam A e B matrizes com igual número de linhas e colunas na forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

A soma dessas duas matrizes é dada por:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

### *C. Igualdade de Matrizes*

Duas matrizes são ditas iguais se, e somente se, possuírem o mesmo número de linhas e colunas e todas as suas entradas forem iguais. Ou seja, dadas A e B:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Tem-se que:

$$A = B \iff \begin{bmatrix} a_{11} = b_{11} & \dots & a_{1n} = b_{1n} \\ a_{21} = b_{21} & \dots & a_{2n} = b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} = b_{m1} & \dots & a_{mn} = b_{mn} \end{bmatrix}$$

### D. *Multiplicação de Matrizes*

Seja A uma matriz $(m \times r)$ e B uma matriz $(r \times n)$, onde M e N não são necessariamente iguais, na seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & b_{r3} & \dots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

O produto matricial entre A e B, denotado AB, será uma matriz $(m \times n)$ seguindo a regra (ANTON; RORRES, 2010, p. 30):

$$AB = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Onde

$$c_{ij} = \sum_{n=1}^{r} a_{in} b_{nj}$$

Vale ainda ressaltar que o produto matricial não é comutativo, ou seja, $AB \neq BA$.

### E. *Matriz Transposta*

Se A for uma matriz $(m \times n)$, sua matriz transposta $A^T$ será uma matriz $(n \times m)$ obtida pela troca das linhas pelas colunas de A (ANTON; RORRES, 2010, p. 34). Ou seja, se:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Então:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

## III. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

### A. *Definição*

Segundo (ANTON; RORRES, 2010, p. 2), uma *equação linear de n variáveis* é uma equação que pode ser escrita na forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

Onde $a_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ são constantes e $x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ são variáveis. Note que todos os termos são monômios de grau 1, ou seja, todas os termos são *lineares* e, portanto, a soma de todos os termos é linear.

Então, tem-se que uma equação linear é uma equação na qual figuram apenas constantes e variáveis lineares.

Pode-se expandir esse conceito. Se as variáveis $x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ forem organizadas em $m$ equações lineares, cada uma com novos coeficientes $a_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ e uma nova constante $b$, essa organização será chamada de *sistema de equações lineares*. Matematicamente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \dots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \dots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \dots + & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

Um sistema de equações lineares pode ter uma, nenhuma ou infinitas soluções (ANTON; RORRES, 2010, p. 4) e sua solução, caso exista, pode ser expressa por $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, onde $s_1 = x_1, s_2 = x_2, \ldots, s_n = x_n$.

### B. *Forma Matricial*

É conveniente transformar o sistema anterior no produto de matrizes $Ax = b$, onde $A$ é a matriz $(m \times n)$ dos coeficientes, $b$ é a *matrix coluna* $(m \times 1)$ dos termos constantes e $x$ é a *matriz coluna* das incógnitas (ANTON; RORRES, 2010, p. 33). Então, o sistema pode ser representado da seguinte forma:

$$Ax = b \iff$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Existem diversos métodos, diretos e iterativos, que podem ser utilizado para resolver o sistema na forma matricial. Neste artigo, são abordados os métodos de Gauss-Jordan e Gauss-Seidel.

### C. *Método de Gauss-Jordan*

Dado um sistema linear determinado, é possível encontrar sua solução pelo metodo (direto) de Gauss-Jordan. Seja a matriz aumentada do sistema:

$$(A|B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} & | & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & | & b_n \end{bmatrix}$$

Onde $a_{ij}$ e $b_i$ são entradas das matrizes dos coeficientes e das constantes, respectivamente.

O método de Gauss-Jordan consiste em realizar operações elementares sobre a matriz aumentada a fim de reduzi-la à forma escalonada reduzida por linhas (ANTON; RORRES, 2010, p. 15) como segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & | & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & | & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & | & s_n \end{bmatrix}$$

As operações elementares permitidas são:

1. multiplicação da linha por escalar;
2. troca de linhas;
3. adição de uma linha com um múltilo de outra.

A fase direta (ou eliminação gaussiana) é aquela em que os números abaixo do elemento da diagonal principal são zerados, enquanto na fase inversa são zerados os elementos acima (ANTON; RORRES, 2010, p.15).

De modo geral, a linha $i$ é multiplicada pelo recíproco do elemento na diagonal principal $a_{ii}$, que transforma o elemento na diagonal principal (pivô) em 1. Então, as linhas $L_j$ abaixo e acima de $i$ serão somadas com $-a_{ji} \cdot L_i$, sendo $L_i$ a linha de partida, o que zera todos os elementos acima e abaixo do pivô, já que o este passou a ser unitário.

Um dos problemas do passo a passo descrito é o caso do pivô ser nulo, o que resulta em uma divisão por zero.

Para garantir a generalidade e tornar o algoritmo computacionalmente viável, é preciso adicionar um passo extra: antes de efetuar as divisões, buscar na coluna $i$ o maior elemento em valor absoluto e, se necessário, trocar sua linha com $L_i$. Esse passo é chamado de Pivoteamento Parcial e é descrito por (RUGGIERO; LOPES, 1988, p. 127).

O seguinte algoritmo descreve uma implementação computacional do método, assumindo um sistema determinado de n equações e n variáveis:

**Algoritmo 1** Gauss-Jordan

**função** PIVOPARCIAL(A, b, i)
    maior $\leftarrow Aii$
    indice $\leftarrow i$
    **para** j $\leftarrow$ i até N **faça**
        **se** |maior| $< |A_{ji}|$ **então**
            maior $\leftarrow A_{ji}$
            indice $\leftarrow j$
        **fim se**
    **fim para**
    **se** indice $\neq$ i **então**
        troque $A_i$ por $A_{indice}$
        troque $b_i$ por $b_{indice}$
    **fim se**
**fim função**
**função** GAUSSJORDAN(A, b)
    **para** i $\leftarrow$ 1 até N **faça**
        pivoParcial(A, b, i)
        div $\leftarrow A_{ii}$
        **para** j $\leftarrow i$ até N **faça**
            $A_{ij} \leftarrow A_{ij} \cdot \frac{1}{div}$
        **fim para**

```
        b_i ← b_i · 1/div
        para k ← 1 até N faça
            se k = i então
                continue
            fim se
            mult ← A_ki
            para l ← i até N faça
                A_kl ← A_kl − mult · A_il
            fim para
            b_k ← b_k − mult · b_i
        fim para
    fim para
fim função
```

### D. *Método de Gauss-Seidel*

Muitas vezes, a utilização de métodos diretos leva a erros significativos de arredondamento (PIRES, 2015, p. 173), além de serem computacionalmente custosos. Uma possível solução para isso é o emprego de *métodos iterativos*, que consistem em gerar uma nova aproximação à solução real a cada *passo iterativo* com base em uma *função de iteração*.

Então, dado um sistema de equações lineares qualquer $Ax = b$, é necessário transformá-lo em um sistema do tipo $x = Cx + g$ para resolvê-lo iterativamente (RUGGIERO; LOPES, 1988, p. 167). Feita a transformação, toma-se o $x$ do lado esquerdo da equação como o vetor solução aproximada no passo $k + 1$ e o $x$ do lado direito como o vetor solução aproximada no passo $k$. Ou seja:

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$$

Então, dado um "chute" inicial $x^{(0)}$, define-se $x^{(k+1)}$ como a função de iteração $\varphi(x)$ do sistema:

$$\varphi(x) = Cx^{(k)} + g$$

Com $k = 0, 1, 2, \dots, n; n \in \mathbb{N}$.

Existem diversos meios de encontrar as matrizes $C$ e $g$. Um deles é o método de Gauss-Seidel, que consiste em separar a matriz $A$ em três matrizes: $L$ (triangular inferior), $D$ (diagonal) e $R$ (triangular inferior), ou seja:

$$A = L + D + R \iff$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Então, (RUGGIERO; LOPES, 1988, p. 164) dá a seguinte demonstração:

$$Ax = b \iff (L + D + R)x = b$$

Seria conveniente ainda fatorar a matriz $D$ da expressão $A = (L + D + R)$. Para tal, é necessário dividir cada linha pelo elemento na diagonal principal, o que resulta nas seguintes matrizes:

$$D_1 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $Ax = b$ pode ser reescrito como:

$$Ax = b \iff D(L_1 + I + R_1)x = b$$

$$\iff (L_1 + I + R_1)x = D^{-1}b$$

$$\iff L_1x + Ix + R_1x = D^{-1}b$$

$$\iff Ix = -L_1x - R_1xD^{-1}b$$

$$\iff x = -L_1x - R_1x + D^{-1}b$$

Portanto, o método de Gauss-Seidel é dado por:

$$x^{(k+1)} = \varphi(x) = -L_1x^{(k+1)} - R_1x^{(k)} + D^{-1}b$$

Ou ainda:

$$x^{(k+1)} + L_1 x^{(k+1)} = -R_1 x^{(k)} + D^{-1} b$$

$$\iff (L_1 + I) x^{(k+1)} = -R_1 x^{(k)} + D^{-1} b$$

$$\iff x^{(k+1)} = -(L_1+I)^{-1} R_1 x^{(k)} + (L_1+I)^{-1} D^{-1} b$$

Se $C = -(L_1 + I)^{-1} R_1$ e $G = (L_1 + I)^{-1} D^{-1} b$, fica demonstrado que o método de Gauss-Seidel obedece a hipótese $x^{(k+1)} = \varphi(x) = Cx^{(k)} + g$.

Para o cálculo computacional do vetor solução aproximada $x^{(k+1)}$ é dada pela seguinte fórmula (GOLUB; LOAN, 2015, p. 513):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Onde $x_i$ é a i-ésima linha do vetor solução aproximada, $b_i$ é a i-ésima linha do vetor das constantes e $a_{ij}$ é a entrada da matriz dos coeficientes na posição $(i, j)$.

A convergência do método de Gauss-Seidel é garantida para qualquer aproximação inicial, contanto que seja cumprido o critério de Sassenfeld (RUGGIERO; LOPES, 1988, p. 171). Sejam:

$$\beta_1 = \frac{1}{|a_{11}|} \cdot \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$$

e

$$\beta_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \cdot \left( \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j \cdot |a_{ij}| - \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

O critério de Sassenfeld diz que o método convergirá se $\beta = max_{1 \leq i \leq n}(\beta_i) < 1$ (RUGGIERO; LOPES, 1988, p. 173).

Além disso, dada uma tolerância $\varepsilon$, as iterações do método de Gauss-Seidel devem ser interrompidas se $max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}| < \varepsilon$, ou seja se a maior distância entre os elementos do vetor solução aproximada nos passos $k$ e $k+1$ for menor do que a tolerância (RUGGIERO; LOPES, 1988, p. 155).

Assumindo um sistema com número igual de incógnitas e equações que cumpe o critério de Sassenfeld, tem-se o seguinte algoritmo para solução computacional:

**Algoritmo 2** Gauss-Seidel

**função** GAUSSSEIDEL(A, b, $x^{(0)}$, $\varepsilon$, maxiter)
  $x^{(k)} \leftarrow x^{(0)}$
  $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)}$
  **para** k $\leftarrow$ 1 até maxiter **faça**
    **para** i $\leftarrow$ 1 até N **faça**
      $S_1 \leftarrow 0$
      $S_2 \leftarrow 0$
      **para** j $\leftarrow$ 1 até $i-1$ **faça**
        $S_1 \leftarrow S_1 + A_{ij} * x_j^{(k+1)}$
      **fim para**
      **para** j $\leftarrow$ i+1 até N **faça**
        $S_2 \leftarrow S_2 + A_{ij} * x_j^{(k)}$
      **fim para**
      $x_i^{(k+1)} \leftarrow \frac{1}{A_{ii}} * (b_1 - S_1 - S_2)$
    **fim para**
    **se** $(max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}| < \varepsilon)$ **então**
      Pare
    **fim se**
    $x^{(k)} \leftarrow x^{(k+1)}$
  **fim para**
**fim função**

## IV. TEORIA DOS GRAFOS

### A. *Definição*

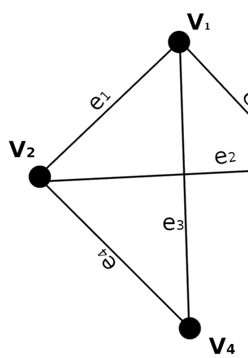
Segundo (BONDY; MURTY, 1976, p. 1), um *grafo* é o terno ordenado $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, onde $V(G) = v_1, v_2, \ldots, v_n, n \in \mathbb{N}$ é chamado de conjunto (não vazio) de *vértices*, $E(G) = e_1, e_2, \ldots, e_m, m \in \mathbb{N}$ é chamado de conjunto de *arestas* e $\psi_G$ é chamada de *função de incidência*, que associa a cada aresta um par de vértices. Dados dois vértices $u$ e $v$, a aresta $e$ conecta $u$ e $v$ se $\psi(e) = uv$.

O nome *grafo* se deve à possibilidade de representar tais objetos matemáticos *graficamente* (BONDY; MURTY, 1976, p. 2). Por exemplo, seja um grafo $G$ com 4 vértices e 5 arestas $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, onde:

$$V(G) = v_1, v_2, v_3, v_4$$
$$E(G) = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$$
$$\psi(e_1) = v_1 v_2,$$
$$\psi(e_2) = v_2 v_3,$$
$$\psi(e_3) = v_1 v_4,$$
$$\psi(e_4) = v_2 v_4,$$
$$\psi(e_5) = v_1 v_3$$

$G$ pode facilmente ser representado graficamente pelo seguinte diagrama, onde cada vértice representa um ponto e cada aresta representa uma linha:

Figura 1: Exemplo (1) de um grafo




Fonte: Compilação dos autores.

Um *caminho* é dado por uma sequência de vértices. Um *ciclo* é um caminho através do qual é possível "sair" de um vértice e "voltar" para o mesmo por uma aresta diferente (SEDGEWICK; WAYNE, 2011, p. 519). Se este caminho for impossível, para todos os vértices, o grafo é dito *acíclico*.

Um grafo é *conexo* se existir pelo menos um caminho de qualquer vértice à qualquer outro vértice (SEDGEWICK; WAYNE, 2011, p. 519).

### *B. Matriz de Incidência*

Uma forma conveniente de representar um grafo é pela chamada *matriz de incidência*. Seja $G$ um grafo com $v$ vértices e $e$ arestas. $G$ pode ser escrito em termos de uma matriz $v \times e$, isto é, $M(G) = [m_{ij}]$, onde $m_{ij}$ (a entrada da matriz na i-ésima linha e na j-ésima coluna) representa quantas vezes (entre 0 e 2) $v_i$ e $e_j$ são *incidentes*, ou seja, quantas vezes a aresta $e_j$ se "encontra" com o vértice $v_i$ (BONDY; MURTY, 1976, p. 7). Dois vértices $v_a$ e $v_a$ possuem uma aresta $e_c$ entre si se e somente se $m_{ac} = m_{bc} \neq 0$.

A matriz de incidência que representa o grafo do exemplo anterior é, nesse caso:

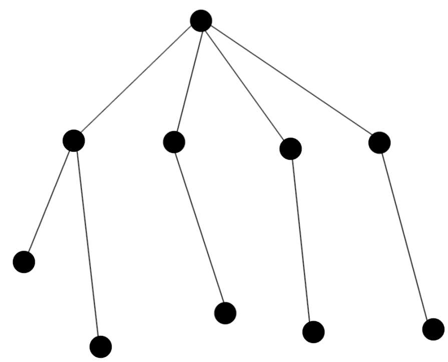
$$M(G) = \begin{bmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ & - & - & - & - & - \\ v_1| & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2| & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3| & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4| & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifica-se que, na matriz de incidência apresentada acima, $m_{11} = m_{21}$, o que indica que $e_1$ é uma conexão (aresta) entre $v_1$ e $v_2$. Nota-se também que três arestas incidem com $v_1$.

### *C. Árvore Geradora*

Por definição, uma *árvore* é um grafo conexo acíclico (SEDGEWICK; WAYNE, 2011, p. 520), como explicitado na figura 2:

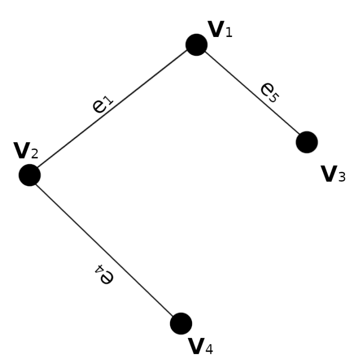
Figura 2: Exemplo de árvore



Fonte: Compilação dos autores.

Uma *árvore geradora* de um grafo conexo $G$ é um subgrafo que contém todos os vértices (e não necessariamente todas as arestas) de $G$ mas nenhum de seus ciclos. Uma árvore geradora do exemplo (1) pode ser:

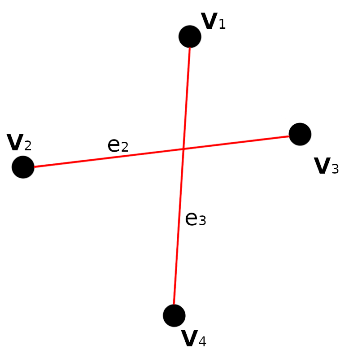
Figura 3: Árvore geradora de (1)




Fonte: Compilação dos autores.

Uma *árvore co-geradora* de um grafo conexo $G$ é uma árvore formada pelas arestas (e seus respectivos vértices) que não aparecem na árvore geradora (THULASIRAMAN, 2002, p. 834). Suas arestas são chamadas de *acordes*. A árvore co-geradora do exemplo anterior é:

Figura 4: Árvore co-geradora de (1)

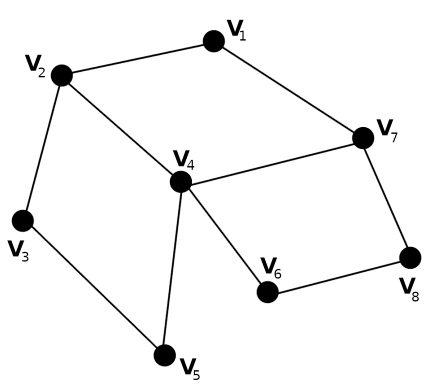



Fonte: Compilação dos autores.

É possível ainda encontrar uma árvore geradora para qualquer grafo conexo computacionalmente. Para tal, basta realizar uma *busca em profundidade* no grafo e então a árvore geradora será o caminho percorrido pela busca.

A busca em profundidade (ou DFS) consiste em dois passos simples: visitar um vértice inicial e recursivamente visitar todos os seus vizinhos ainda não visitados (SEDGEWICK; WAYNE, 2011, p. 531). Seja, por exemplo, o seguinte grafo $G$:

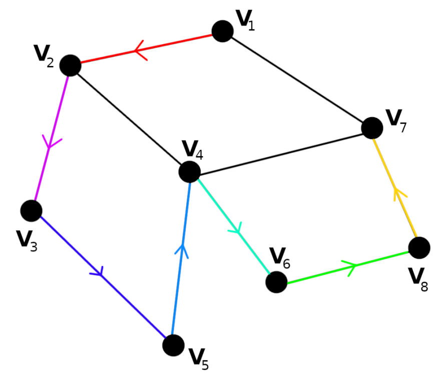
Figura 5: Exemplo (2) de um grafo




Fonte: compilação dos autores.

A seguinte figura mostra o percurso da DFS partindo de $v_1$, onde cada cor representa um passo do algoritmo:

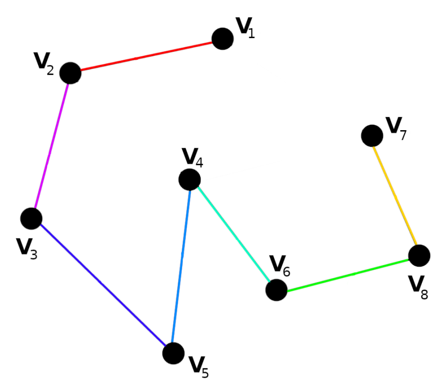
Figura 6: DFS sobre (2)




Fonte: Compilação dos autores.

É fácil perceber que o subgrafo formado pelas arestas destacadas é uma árvore geradora de $G$:

Figura 7: Arvore Gerada pela DFS




Fonte: Compilação dos autores.

O seguinte algoritmo representa uma implementação computacional do tópico discutido, assumindo um grafo conexo $G$ e uma árvore inicialmente vazia $T$:

**Algoritmo 3** Árvore Geradora

**função** ARVOREGERADORADFS($G$, $T$,$v$)
  Marque $v$ como visitado
  Insira $v$ em $T$
  **para** Todos os vizinhos $v_i$ não visitados de $v$ **faça**

Insira a aresta que conecta $v$ e $v_i$ em $T$
arvoreGeradoraDFS($G$, $T$, $v_i$)
**fim para**
**fim função**

### D. *Encontrando o Conjunto de Ciclos Fundamentais de um Grafo*

Assim como descrito por (THULASIRAMAN, 2002), ao adicionar um dos arcordes à árvore geradora de um grafo, obtém-se um grafo com exatamente um ciclo. Ao conjunto das arestas que formam este ciclo, dá-se o nome de ciclo fundamental. O conjunto dos ciclos obtidos ao se adicionar, separadamente, cada acorde à árvore geradora é denotado por conjunto fundamental de ciclos.

A seguir, é apresentado um algoritmo para a obtenção do conjunto de ciclos fundamentais de um grafo, com base nas ideias apresentadas por (THULASIRAMAN, 2002). A ideia geral é encontrar uma árvore geradora $T$ do grafo $G$ e a cada passo inserir um *acorde* $e_i \in (E(G) - E(T))$ em $T$, encontrar o ciclo gerado pela adição de $e_i$ através de um processo de busca em profundidade modificado, isto é, de forma a se tratar arestas como visitadas e não os vértices e, então, remover $e_i$ de $T$, até que todos os *acordes* tenham passado pelo processo.

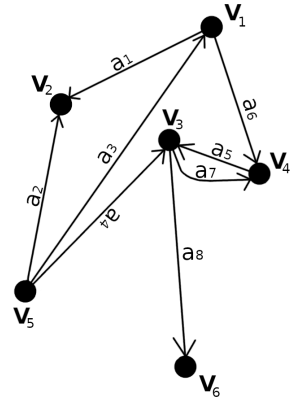
**Algoritmo 4** Encontra Ciclos

**função** ENCONTRACICLOS($G$)
$T \leftarrow arvoreGeradoraDFS(G, T, v_1)$
**para** Todas as arestas $e_i$ em $E(G)$ **faça**
Insira $e_i$ em $T$
Encontre o único ciclo presente em $T$ através da DFS modificada
Remova $e_i$ de $T$
**fim para**
**fim função**

### E. *Digrafo e Multigrafo*

Um grafo direcionado (ou digrafo) é um grafo no qual os vértices extremos de uma aresta podem (mas não necessariamente devem) estar conectados por uma via de mão única (SEDGEWICK; WAYNE, 2011, p. 566). Ou seja, dados dois vértices $v_1$ e $v_2$, uma aresta $e_1$ pode representar um caminho de $v_1$ à $v_2$ mas não necessariamente o contrário. Nesse caso, a aresta é chamada de *arco*. Graficamente, os arcos são representados por setas que ligam dois vértices:

Figura 8: Exemplo de digrafo




Fonte: Compilação dos autores.

Convencionando $m_{ij} = 1$ se o arco $a_j$ *sai* do vértice $v_i$ e $m_{ij} = -1$ se o arco $a_j$ *chega* ao vértice $v_i$, a seguinte matriz de incidência representa o digrafo anterior:

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Note que há mais de um arco entre $v_3$ e $v_4$. A um grafo que permite esse tipo de comportamento se dá o nome de *multigrafo*.

## V. Circuitos Elétricos

### A. *Definição*

Segundo (SADIKU; ALEXANDER, 2013, p. 4), um *circuito elétrico* é basicamente uma conexão entre componentes elétricos. Estes componentes são chamados de *elementos* do circuito. Nesse trabalho são abordados apenas *fontes de tensão constante* e *resistores*.

Fontes de tensão constante são dispositivos que geram uma *força eletromotriz* (ou diferença de potencial), ou seja, realizam *trabalho* para deslocar *cargas elétricas* (SADIKU; ALEXANDER, 2013, p. 8). A unidade da diferença de potencial (DDP) é o *volt* ($V$) (SADIKU; ALEXANDER, 2013, p. 9). A esse deslocamento de cargas se dá o nome de *corrente elétrica*, medida em *ampères* (A) (SADIKU; ALEXANDER, 2013, p. 6).

Resistores são elementos que se submetidos à uma DDP, *opõem-se* à passagem de corrente elétrica (SADIKU; ALEXANDER, 2013, p. 28) de acordo com sua *resistência*. Essas três quantidades são relacionadas pela *Lei de Ohm*:

$$V = R \cdot I$$

Onde $V$ é a diferença de potencial, $R$ é a resistência do elemento resistivo e $I$ é a corrente que atravessa o elemento (SADIKU; ALEXANDER, 2013, p. 28).

### *B. Diagramas*

É conveniente, ainda, representar os componentes elétricos graficamente para análise, sem ser necessário que se construa um circuito concreto.

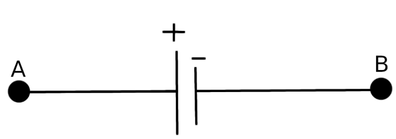
A seguinte figura mostra como um resistor inserido entre dois pontos A e B pode ser representado:

Figura 9: Diagrama de um resistor


Fonte: Compilação dos autores.

A próxima figura expõe a representação gráfica de uma fonte de tensão constante entre A e B:

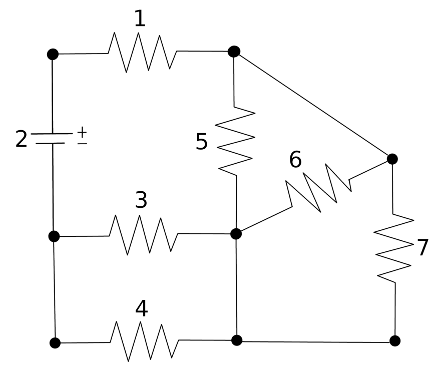
Figura 10: Diagrama de uma fonte de tensão




Fonte: Compilação dos autores.

Então, estes elementos podem ser combinados a fim de gerar circuitos mais complexos. A seguir, expõe-se um exemplo desse tipo:

Figura 11: Diagrama de um circuito resistivo

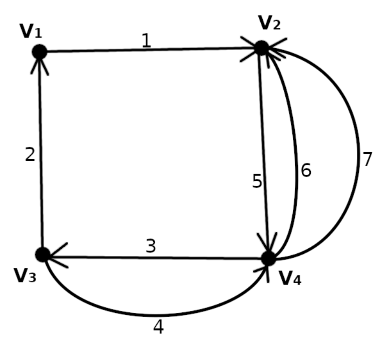



Fonte: Compilação dos autores.

### *C. Representação por Grafos*

Apesar dos diagramas serem convenientes para seres humanos visualizarem o comportamento de circuitos elétricos, a interpretação direta deles é muito difícil computacionalmente. Note, porém, que o diagrama é composto basicamente por vértices e arestas. Então, é possível redesenhar o diagrama como um digrafo, tomando os vértices como pontos sob diferentes potenciais e os arcos (com a mesma numeração) como os componentes elétricos, assim como mostrado por (THULASIRAMAN, 2002, p. 838). Então, o seguinte grafo representa o circuito anterior:

Figura 12: Grafo do circuito resistivo




Fonte: Compilação dos autores.

O sentido dos arcos representa o sentido da corrente que será assumido na simulação. Então, a matriz de incidência resultante é:

$$M = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Os arcos que se incidem nos mesmos dois vértices são componentes em *paralelo*. Dois arcos que formam um caminho $v_i - v_j$, $v_j - v_k$, sendo os únicos arcos incidentes entre $v_i$, $v_j$ e $v_j$, $v_k$, são dois componentes em *série*.

### *D. Solução Computacional*

*Resolver* um circuito elétrico consiste em utilizar o *princípio de conservação da carga elétrica* e o *princípio de conservação de energia* para encontrar todas as variáveis desconhecidas dos componentes. Comumente são conhecidas apenas a tensão da fonte e as resistências dos resistores.

O método utilizado neste artigo consiste em uma adaptação dos métodos expostos em (THULASIRAMAN, 2002) e (BORUAH; GOGOI; CHUTIA, 2017).

A *Lei das Tensões de Kirchhoff* é a aplicação do princípio de conservação de energia aos circuitos elétricos e diz que (BORUAH; GOGOI; CHUTIA, 2017, p. 945):

$$\sum_{k=1}^{e} b_{rk} V_k = 0$$

Onde $e$ é o número de arcos do grafo, $b_{rk}$ é a entrada na posição $rk$ da matriz $B$ dos ciclos de $G$ e $V_k$ é a tensão através de um arco. Em outras palavras, diz que a soma das tensões em um ciclo é nula.

Já a *Lei das Correntes de Kirchhoff* enuncia o emprego do princípio da conservação de carga elétrica aos circuitos elétricos da seguinte forma (BORUAH; GOGOI; CHUTIA, 2017, p. 945):

$$\sum_{k=1}^{e} a_{rk} I_k = 0$$

Onde $a_{rk}$ é a entrada na posição $rk$ da matriz de incidência $A$ do grafo $G$, $I_k$ é a corrente que flui pela aresta $k$ e $e$ é o número de arcos do grafo. Em outras palavras, diz que a soma das correntes em um nodo é nula.

A matriz $B$ dos ciclos fundamentais é uma matriz onde cada linha representa um ciclo fundamental do grafo $G$ e cada coluna representa um arco presente no ciclo de acordo com as seguintes regras (BORUAH; GOGOI; CHUTIA, 2017, p. 948):

- $b_{ij} = 1$ se o galho $b_j$ pertence ao ciclo fundamental $c_i$ e sua referência têm a mesma orientação;
- $b_{ij} = -1$ se o galho $b_j$ pertence ao ciclo fundamental $c_i$ e sua referência têm orientações opostas;
- $b_{ij} = 0$ se o galho $b_j$ não pertence ao ciclo fundamental $c_i$.

A matriz $R$ das resistências é uma matriz diagonal quadrada $e \times e$, onde $e$ é o número de arcos no grafo, cujos elementos $r_{ii}$ representam a resistência no arco $i$.

Seja $V$ a matriz coluna que representa as tensões das fontes de corrente contínua do circuito, $R$ a matriz das resistências e $I_b$ a matriz coluna que representa as correntes em cada um dos galhos (arestas) do circuito, tem-se, pela lei das tensões de kirchoff:

$$B(V - RI_b) = 0$$

$$\iff BV = BRI_b$$

Mas, sabemos que $I_b = B^t I_L$, onde $I_L$ é a matriz de correntes em cada ciclo fundamental e $B^t$ é a transposta de $B$. Então:

$$BV = BRB^t I_L$$

Como $B$, $R$ e $B^t$ são conhecidos e formam uma matriz quadrada, $I_L$ é uma matriz coluna de incógnitas e $BV$ é uma matriz coluna de constantes, a equação anterior é equivalente a um sistema linear na forma $Ax = b$. Logo, basta resolver o sistema e substituir em $I_b = B^t I_L$ para encontrar todas as correntes.

Desta forma, neste artigo, utilizou-se o seguinte algoritmo para a solução computacional de circuitos elétricos, assumindo $A$ como a matriz de incidência do grafo, $R$ como a matriz de resistência, $B$ como a matriz dos ciclos fundamentais, $I$ como a matriz das correntes e $V$ como a matriz das tensões das fontes:

**Algoritmo 5** Solucionador de Circuitos

**função** RESOLVECIRCUITO($A$, $R$, $B$, $I$, $V$)
  $B \leftarrow encontraCiclos(A)$
  $M \leftarrow BR_bB^t$
  $n \leftarrow BV_s$
  $x^{(0)} \leftarrow$ vetor nulo
  **se** $M$ atende ao critério de Sassenfeld **então**
    $I_L \leftarrow gaussSeidel(M, n, x^{(0)}, 10^{-8}, 10^3)$

**senão**
    $I_L \leftarrow gaussJordan(M, n)$
**fim se**
$I_b \leftarrow B^t I_L$
**fim função**

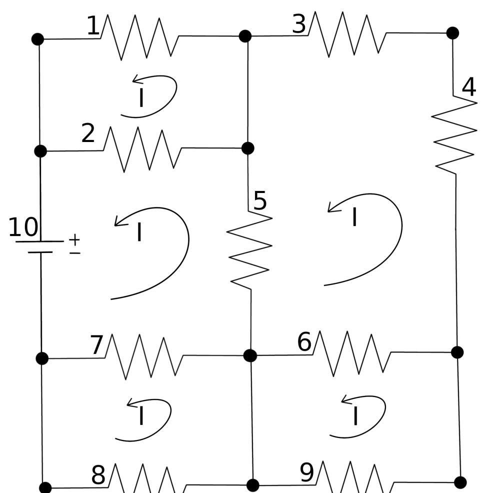
---

Ao fim do algoritmo, são conhecidas todas as correntes e tensões e, portanto, o circuito passa a ser determinado.

## VI. RESULTADOS

Considere o seguinte circuito, onde a tensão na fonte é de $5V$ e todos os resistores possuem resistência de $100\Omega$:

Figura 13: Exemplo (1) de circuito



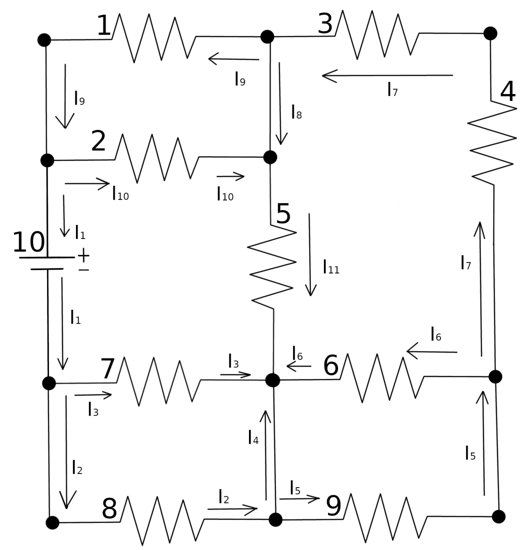

Fonte: Compilação dos autores.

É possível aplicar a lei das Tensões de Kirchhoff para cada malha, que resulta no seguinte sistema:

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = 0 \\ V_{10} + V_7 + V_5 + V_2 = 0 \\ V_3 + V_4 + V_5 + V_6 = 0 \\ V_7 + V_8 = 0 \\ V_6 + V_9 = 0 \end{cases}$$

As correntes do circuito podem ser desenhadas, assumindo um sentido arbitrário e o sentido anti-horário como positivo, da seguinte forma:

Figura 14: Correntes de (1)




Fonte: Compilação dos autores.

Então, pode-se aplicar a lei das correntes de Kirchhoff ao circuito. Tem-se, então, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_2 - I_4 - I_5 = 0 \\ I_5 - I_6 - I_7 = 0 \\ I_3 + I_4 + I_6 + I_{11} = 0 \\ I_7 - I_8 - I_9 = 0 \\ -I_1 + I_9 - I_{10} + = 0 \\ I_8 + I_{10} - I_{11} = 0 \end{cases}$$

É possível ainda reescrever o primeiro sistema em função da Lei de Ohm:

$$\begin{cases} I_9 R + I_{10} R = 0 \\ V_{10} - I_3 R + I_{10} R + I_{11} R = 0 \\ -I_7 R - I_7 R + I_6 R - I_{11} R = 0 \\ -I_3 R + I_2 R = 0 \\ I_5 R + I_6 R = 0 \end{cases}$$

Que pode ser juntado com o segundo sistema:

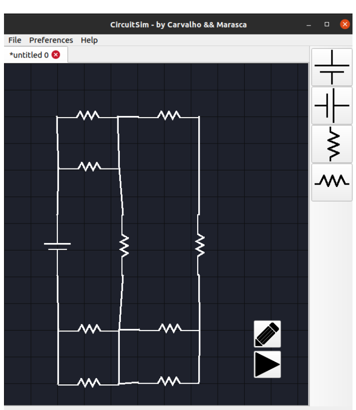
$$
\begin{cases}
I_9R + I_{10}R = 0 \\
V_{10} - I_3R + I_{10}R + I_{11}R = 0 \\
-I_7R - I_7R + I_6R - I_{11}R = 0 \\
-I_3R + I_2R = 0 \\
I_5R + I_6R = 0 \\
I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\
I_2 - I_4 - I_5 = 0 \\
I_5 - I_6 - I_7 = 0 \\
I_3 + I_4 + I_6 + I_{11} = 0 \\
I_7 - I_8 - I_9 = 0 \\
-I_1 + I_9 - I_{10} + = 0 \\
I_8 + I_{10} - I_{11} = 0
\end{cases}
$$

Substituindo $V_{10}$ e $R$ e resolvendo para o vetor I, notando que os sinais negativos indicam uma escolha equivocada de sentido inicial para a corrente, temos:

$$
I = \begin{bmatrix} 0,0291\bar{6} \\ 0,01458\bar{3} \\ 0,01458\bar{3} \\ 0,010417 \\ 0,0041\bar{6} \\ -0,0041\bar{6} \\ 0,008\bar{3} \\ -0,00625 \\ 0,01458\bar{3} \\ -0,01458\bar{3} \\ -0,0208\bar{3} \end{bmatrix}
$$

Este mesmo circuito pode ser resolvido computacionalmente de forma trivial. Basta inserí-lo no programa desenvolvido para este artigo e checar os resultados, da seguinte forma:

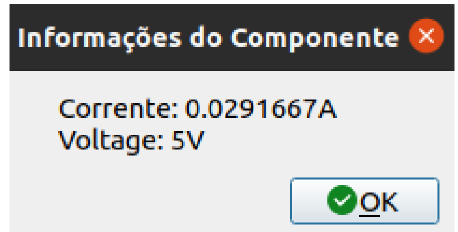
Figura 15: Simulação de (1)




Fonte: Compilação dos autores.

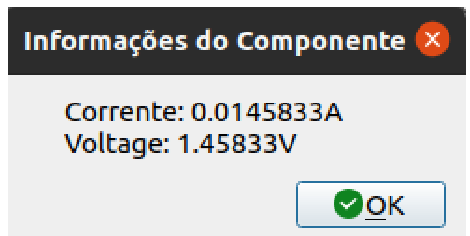
Com o mesmo sentido de corrente assumido, são dadas as seguintes correntes nos componentes:

Figura 16: Corrente na fonte



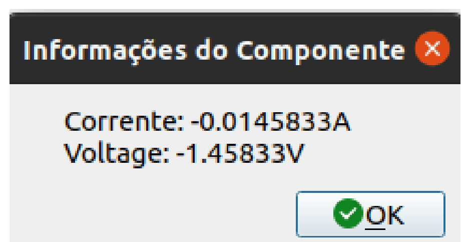

Fonte: Compilação dos autores.

Figura 17: Corrente em $R_1$



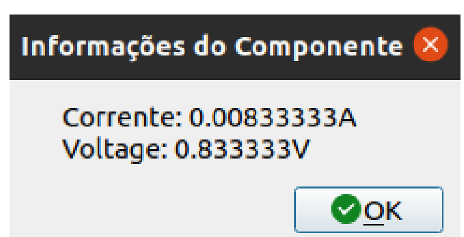

Fonte: Compilação dos autores.

Figura 18: Corrente em $R_2$



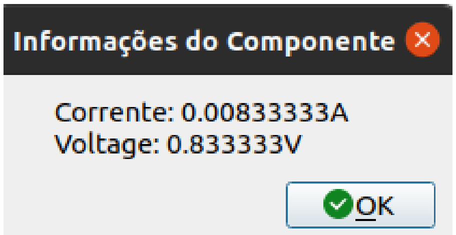

Fonte: Compilação dos autores.

Figura 19: Corrente em $R_3$



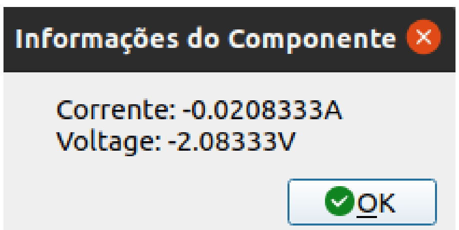

Fonte: Compilação dos autores.

Figura 20: Corrente em $R_4$



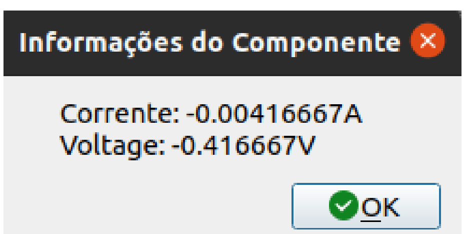

Fonte: Compilação dos autores.

Figura 21: Corrente em $R_5$



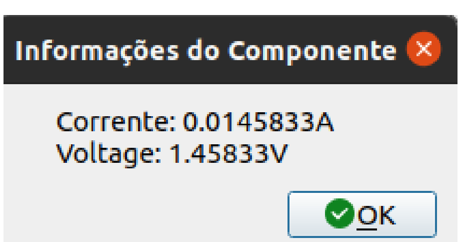

Fonte: Compilação dos autores.

Figura 22: Corrente em $R_6$



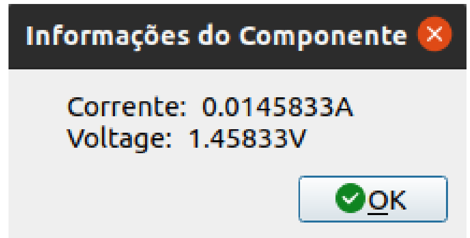

Fonte: Compilação dos autores.

Figura 23: Corrente em $R_7$



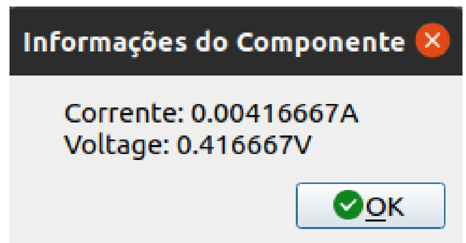

Fonte: Compilação dos autores.

Figura 24: Corrente em $R_8$




Fonte: Compilação dos autores.

Figura 25: Corrente em $R_9$




Fonte: Compilação dos autores.

Note que não há diferença entre os resultados obtidos pela simulação e manualmente. Portanto, não há um erro envolvido na simulação.

## VII. CONCLUSÃO

Então, concluímos que embora seja necessário o estudo de diversos tópicos para realizar a implementação, o resultado final é satisfatório, já que apresenta a solução exata do problema proposto com um esforço muito menor necessário.

Vale ressaltar ainda que seria possível expandir os assuntos aqui discutidos a fim de produzir um solucionador mais geral. Contudo, nosso objetivo inicial era simular circuitos resistivos e isto foi alcançado de forma suficientemente boa.

Além disso, concluimos que há uma alta generalidade nos tópicos discutidos nas partes 1 e 2 do trabalho, ou seja, seria possível ainda utilizar os conhecimentos expostos sobre sistemas lineares e teoria dos grafos em outras aplicações.

## REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear*: com aplicações. 10. ed. São Paulo: BOOKMAN COMPANHIA EDITORA LTDA., 2010. 762 p. ISBN 978-04-704-3205-1.

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph Theory*: With applications. 1. ed. Ontario: North Holland, 1976. 264 p. ISBN 0-444-19451-7.

BORUAH, C.; GOGOI, K.; CHUTIA, C. Analysis of some electrical circuits with the help of graph theory using network equilibrium equations. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, India, v. 6, n. 1, p. 944–953, jan. 2017.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix Computations*. 3. ed. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2015. 694 p. ISBN 978-0-8018-5414-9.

PIRES, A. de A. *Cálculo Numérico*: Prática com algoritmos e planilhas. 1. ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2015. 225 p. ISBN 978-85-224-9882-6.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo Numérico*: Aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1988. 424 p. ISBN 978-85-346-0204-4.

SADIKU, M. N. O.; ALEXANDER, C. K. *Fundamentos de Circuitos Elétricos*. 5. ed. São Paulo: AMGH Editora Ltda., 2013. 874 p.

SEDGEWICK, R.; WAYNE, K. *Algorithms*. 4. ed. Nova Jersey: Addison-Wesley, 2011. 956 p. ISBN 978-0-321-57351-3.

THULASIRAMAN, K. Circuit theory. *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, Oklahoma, v. 2, p. 831–841, 2002.