CÁLCULO 2

Sem epsilon
Sem delta
Lista 1

Flaudio Nascimento

1 – A antiderivada ou primitiva de uma função (A integral indefinida)

Agora, chegou o grande momento de apresentarmos a operação inversa da derivação. Para isso, dizemos que uma função F(x) é uma ***antiderivada*** ou ***primitiva*** de uma função f(x) quando F'(x) = f(x) para todo x no domínio de f.

Exemplo 1

A função $F(x) = x^3$ é uma antiderivada da função $f(x) = 3x^2$, pois F'(x) = f(x).

Atenção!

Observe que as funções $G(x) = x^3 + 5$ e $H(x) = x^3 - 10$ também são antiderivadas da função $f(x) = 3x^2$.

Na verdade, é fácil ver que se uma função possui uma antiderivada, então ela possui infinitas antiderivadas.

Assim, toda função da forma $x^3 + C$, onde C é um número real qualquer, é antiderivada de $3x^2$.

Exemplo 2

A função $F(x) = x^2 + 5x + 2$ é uma antiderivada da função f(x) = 2x + 5.
E mais uma vez, veja que toda função da forma $x^2 + 5x + C$, onde C um número real qualquer, é antiderivada de f(x) = 2x + 5.

Assim, podemos dizer que antidiferenciação é o processo de encontrar todas as antiderivadas de uma dada função. A antiderivada é também chamada de primitiva ou de integral indefinida. A notação usada para representar todas as antiderivadas de uma função f(x) é simbolizada por

$$\int f(x)dx$$, que se lê: integral indefinida de f(x) dê x,

e escrevemos

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

onde F(x) é uma antiderivada de f(x), ou seja F'(x) = f(x), e C é uma constante real qualquer.

Atenção!

Ao escrevermos $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, estamos também dizendo que

$\int F'(x)\,dx = F(x) + C$, ou seja, a integral da derivada de uma função é a própria função somada a uma constante real C qualquer.

Voltando aos nossos primeiros exemplos, podemos escrever:

1) $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$

e

2) $\int (2x+5)\,dx = x^2 + 5x + C$

Atenção!
Decorre imediatamente da definição que:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

Exemplo

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

2 – Propriedades Básicas

P1. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

P2. $\int a.f(x)\,dx = a.\int f(x)\,dx$, onde a é uma constante real qualquer.

P3. $\int dx = x + C$

Exemplo Resolvido

Usando as propriedades dadas acima, calcule $\int (x^3 - 5x^2 + 4x + 7)dx$.

Solução

$$\int (x^3 - 5x^2 + 4x + 7)dx = \frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 7x + C$$

3 – Exercícios Propostos

1. Encontre as integrais indefinidas a seguir:

a) $\int (4x + 3)dx$

b) $\int (x^4 - 3x^3 + 1)dx$

c) $\int (2 + 2t + 3t^2)dt$

d) $\int x^{\frac{4}{5}}\, dx$

e) $\int \frac{3}{x^4} dx$

f) $\int (1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})dx$

g) $\int \left(\frac{x+1}{x^3}\right)dx$

h) $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

i) $\int \sqrt{x}(x+\frac{1}{x})dx$

j) $\int \frac{2x^2+5}{\sqrt[3]{x}}dx$

4 – Gabarito de 3

1. a) $2x^2 + 3x + C$ b) $\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}+x+C$ c) $2t+t^2+t^3+C$

d) $\frac{5x^{\frac{9}{5}}}{9}+C$ e) $-\frac{1}{x^3}+C$ f) $x-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$

g) $-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$ h) $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-2x^{\frac{1}{2}}+C$ i) $\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+2x^{\frac{1}{2}}+C$

j) $\frac{3x^{\frac{8}{3}}}{4}+\frac{15x^{\frac{2}{3}}}{2}+C$

5 – Exercícios Complementares

2. Encontre as integrais.

a) $\int 3x^4\,dx$

b) $\int 2x^7\,dx$

c) $\int \frac{1}{x^3}dx$

d) $\int \frac{3}{x^5}dx$

e) $\int 5x^{\frac{3}{2}}\,dx$

f) $\int 10\sqrt[3]{x^2}\,dx$

g) $\displaystyle\int (4x^3 + x^2)dx$

h) $\displaystyle\int (3x^5 - 2x^3)dx$

i) $\displaystyle\int x^3(2x^2 - 3)dx$

j) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 5\right)dx$

k) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x^2 - 2}{\sqrt{x}}dx$

l) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2}{\sqrt[3]{x}}dx$

6 – Gabarito de 5

2. a) $\dfrac{3x^5}{5} + C$ b) $\dfrac{x^8}{4} + C$ c) $\dfrac{-1}{2x^2} + C$

d) $\dfrac{-3}{4x^4} + C$ e) $2x^{\frac{5}{2}} + C$ f) $6x\sqrt[3]{x^2} + C$

g) $x^4 + \dfrac{x^3}{3} + C$ h) $\dfrac{x^6}{2} - \dfrac{x^4}{2} + C$ i) $\dfrac{x^6}{3} - \dfrac{3x^4}{4} + C$

j) $-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{x} + 5x + C$ k) $\dfrac{2x^{\frac{9}{2}}}{9} + \dfrac{4x^{\frac{5}{2}}}{5} - 4x^{\frac{1}{2}} + C$ l) $\dfrac{3x^{\frac{11}{3}}}{11} - 3x^{\frac{2}{3}} + C$

7 – Derivadas das Funções Trigonométricas

[**1**] Se $f(x) = \text{sen}x$, então $f'(x) = \cos x$

[**2**] Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\text{sen}x$

[**3**] Se $f(x) = \text{tg}x$, então $f'(x) = \sec^2 x$

[**4**] Se $f(x) = \text{cotg}x$, então $f'(x) = -\text{cosec}^2 x$

[**5**] Se $f(x) = \sec x$, então $f'(x) = \sec x . \text{tg}x$

[**6**] Se $f(x) = \text{cosec}x$, então $f'(x) = -\text{cosec}x . \text{cotg}x$

8 – Exercícios Propostos

3. Encontre as derivadas das funções a seguir:

a) $f(x) = 3\text{senx}$

b) $f(x) = \text{senx} + \cos x$

c) $f(x) = \text{tgx} + \text{cotgx}$

d) $f(x) = 4\sec x - 2\text{cosecx}$

e) $f(x) = x\cos x$

f) $f(x) = x^2 \cos x$

g) $f(x) = x\text{senx} + \cos x$

h) $f(x) = 3\text{senx} - x\cos x$

i) $f(x) = 2\text{sen}3x^2$

j) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$

k) $f(x) = 4\cos 3x - 3\text{sen}4x$

l) $f(x) = \cos(3x^2 + 1)$

9 – Gabarito de 8

3. a) 3cosx   b) cosx – senx   c) $\sec^2 x - \text{cosec}^2 x$

d) 4secx.tgx + 2cosecx.cotgx   e) cosx – x.senx

f) x(2cosx – xsenx)   g) x.cosx   h) 2cosx + x.senx

i) $12x\cos 3x^2$ j) sen2x   k) –12(sen3x + cos4x)

l) $-6x.\text{sen}(3x^2 + 1)$

10 – Integrais Elementares Envolvendo Trigonometria

As integrais a seguir são decorrências imediatas da definição, e são extremamente importantes:

(1) $\int \text{senx}\,dx = -\cos x + C$ (2) $\int \cos x\,dx = \text{senx} + C$

(3) $\int \sec^2 x\,dx = \text{tgx} + C$ (4) $\int \text{cosec}^2 x\,dx = -\text{cotgx} + C$

(5) $\int \sec x\,\text{tgx}\,dx = \sec x + C$ (6) $\int \text{cosecx}\,\text{cotgx}\,dx = -\text{cosecx} + C$

11 – Exercícios Propostos

4. Encontre as integrais indefinidas a seguir:

a) $\displaystyle\int \frac{3}{4} \cdot \cos x \; dx$

b) $\displaystyle\int \frac{5}{\text{cosecx}} dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\sec x}{\text{cosx}} dx$

d) $\displaystyle\int \text{cosecx.cotgx.secx} \; dx$

e) $\displaystyle\int (4 + 4\text{tg}^2 x) \; dx$

5. Encontre as integrais indefinidas a seguir:

a) $\displaystyle\int (5x^3 + 2\cos x) \; dx$

b) $\displaystyle\int (\sqrt{x} + \text{senx}) \; dx$

c) $\displaystyle\int \frac{10 \sec x .\text{senx}}{\cos x} \; dx$

d) $\displaystyle\int \frac{3\text{cosecx} . \cos x}{\text{senx}} \; dx$

e) $\displaystyle\int \frac{(1 + \text{cotg}^2 x).\text{cotgx}}{\text{cosecx}} \; dx$

f) $\displaystyle\int \frac{8\text{tgx}}{\text{cosx}} \; dx$

g) $\int (\sqrt[3]{x^2} - \text{sen}x)\,dx$

12 – Gabarito de 11

4.a) $\frac{3}{4} \cdot \text{sen}x + C$ b) $-5\cos x + C$ c) $\text{tg}x + C$

d) $-\text{cotg}x + C$ e) $4\text{tg}x + C$

5. a) $\frac{5x^4}{4} + 2\text{sen}x + C$ b) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \cos x + C$

c) $10\sec x + C$ d) $-3\text{cosec}x + C$

e) $-\text{cosec}x + C$ f) $8\text{sec}x + C$

g) $\frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + \cos x + C$