Cálculo 1 – agr. 4 2013/14

2º teste

Resolução (ou indicações para resolução)

1. $$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_e^\beta \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx =$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\int_e^\beta \underbrace{(\ln x)}_{u}{}^{-p}\,\underbrace{\tfrac{1}{x}dx}_{du} \underset{\text{caso } p\neq 1}{=} \lim_{\beta\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1}\right]_e^\beta =$$

$$= \frac{1}{1-p}\lim_{\beta\to\infty}\left((\ln\beta)^{1-p}-1\right) = \begin{cases}\infty & \text{se } p<1\\ \frac{1}{p-1} & \text{se } p>1\end{cases}.$$

Caso $p=1$: $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\left[\ln|\ln x|\right]_e^\beta = \infty.$

$\therefore$ O integral impróprio dado converge sse $p>1$; no caso de convergência vale $\frac{1}{p-1}$.

2. (a) $$\left|\int_b^a f(x)\,dx\right| = \left|-\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

propriedade dos integrais; propriedade dos módulos; pela desigualdade dada no enunciado

(b) $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$.

(c) [cf. parte 4 da secção 2.2].

3. (a) $\int x \operatorname{arctg}(2x)\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(2x) - \int \frac{x^2}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{1+4x^2}\,dx$

primitivação por partes, tal como sugerido

$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(2x) - \int \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+4x^2}\,dx$

$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\int\frac{2}{1+(2x)^2}\,dx$

$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(2x) + C.$

C.A.:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 4x^2+1 \\ \hline -x^2-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline -\frac{1}{4} & \end{array}$$

(b) $\int \frac{x+8}{x^3+4x}\,dx = \int\frac{x+8}{x(x^2+4)}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx + \int\frac{-2x+1}{x^2+4}\,dx$

$= 2\ln|x| - \int\frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int\frac{1}{x^2+4}\,dx$

$= 2\ln|x| - \ln|x^2+4| + \int\frac{1/4}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx$

$= 2\ln|x| - \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$

C.A.:

$\frac{x+8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$\Rightarrow x+8 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=1 \\ 4A=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ A=2 \\ B=-2 \end{cases}$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\,dx = \int \frac{1}{\cancel{t}(1+t)^2}\cdot 2\cancel{t}\,dt = 2\int (1+t)^{-2}\,dt$

mudança de variável, tal como sugerido $\begin{cases} x=t^2,\ t>0; \\ \frac{dx}{dt} = 2t > 0 \end{cases}$

$= 2\,\frac{(1+t)^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{1+\sqrt{x}} + C.$

4. (a) $F'(x) = 3x^2-6x+3 \Rightarrow F(x) = \int 3x^2-6x+3\,dx =$

$= x^3 - 6\cdot\frac{x^2}{2} + 3x + C = x^3-3x^2+3x+C.$

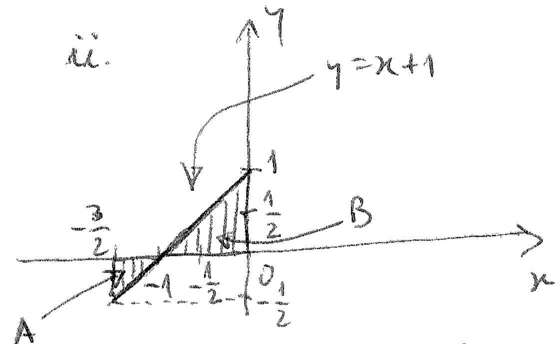
$0 = F(1) = 1^3 - 3\cdot(1)^2 + 3\cdot 1 + C = 1 \cancel{-3} + \cancel{3} + C \Rightarrow C = -1.$

$\therefore\ F(x) = x^3-3x^2+3x-1.$

(b) i. sin e cos são limitadas, logo o mesmo sucede a $(\sin x + \cos x)^2$; $x+1$ é limitada em $[-\frac{3}{2}, 0[$; ambas as funções são contínuas nos seus ramos. Quando muito poderá haver uma descontinuidade de f em 0, logo um dos critérios de integrabilidade dados garante que f é integrável em $\left[-\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

[<u>aparte:</u> na verdade, f é mesmo contínua em todo o $\left[-\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, como facilmente se verifica, de modo que por aí também se poderia concluir a sua integrabilidade nesse intervalo]

ii.



Pela interpretação geométrica do integral,

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} x+1\,dx =$$

$$= \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} x+1\,dx + \int_{-1}^{0} x+1\,dx = -(\text{área do triângulo } A) +$$

$$+ (\text{área do triângulo } B) = -\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} : 2\right) + \left(1\times 1 : 2\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

iii. $$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{3}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + 2\sin x . \cos x\,dx =$$

$$= \frac{3}{8} + \left[x + \sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} + \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{11}{8} + \frac{\pi}{2}.$$

5. (a) $$\begin{cases} y = \frac{4}{x^2} \\ y = 5 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x^2 = \frac{4}{x^2} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - x^4 = 4 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \\ \text{---} \end{cases}.$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

para obedecer à restrição de a abcissa ser positiva

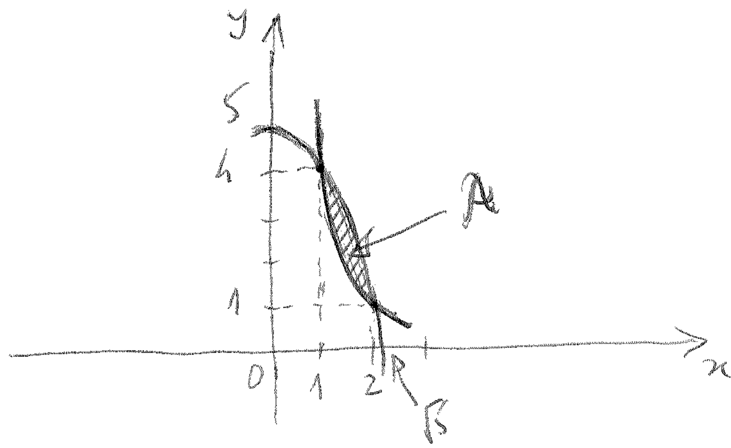
Substituindo em $y = 5 - x^2$ obtém-se

$$x = 2 \Rightarrow y = 5 - 4 = 1$$

e $\quad x = 1 \Rightarrow y = 5 - 1 = 4$

Assim, os pontos pedidos são $(2,1)$ e $(1,4)$.

(b)



(c) $\displaystyle (\text{área de } A) = \int_1^2 5 - x^2 - \frac{4}{x^2}\,dx = \left[5x - \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2 =$

$$= 10 - \frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 5 + \frac{1}{3} - 4 = \frac{74 - 70}{6} = \frac{2}{3}.$$