Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2013/14**

2º teste Duração: 2h30

- **Antes de entregares a prova, deves registar na folha de rosto da mesma, logo a seguir ao cabeçalho, a tua decisão acerca das possíveis trocas de questões por tads respetivos. Reserva desde já um espaço para isso! Se queres substituir a questão 3 pelo 3.º tad, deves escrever aí 3.º tad e a turma onde o realizaste (ou identificar o professor que a lecionava). Se queres substituir a questão 4 pelo 4.º tad, deves escrever aí 4.º tad e a turma onde o realizaste (ou identificar o professor que a lecionava). Ausência de uma tal indicação no local referido acima será interpretada como significando que não há trocas de questões deste teste com tads. ATENÇÃO: Reservamo-nos o direito de não atender a indicações de troca referidas nas páginas interiores da prova ou em folhas suplementares.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Determina os valores de $p \in \mathbb{R}$ para os quais o integral impróprio

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$$

converge e o valor do integral para cada um desses valores de p.

2. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável.

   (a) Sabemos que $|f|$ também é integrável em $[a,b]$ e que $|\int_a^b f(x)\,dx| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$. Explica porque é que também se verifica que

$$\Big|\int_b^a f(x)\,dx\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

   (b) Define o conceito de integral indefinido F de f.

   (c) Mostra que F é contínua em $[a,b]$.

3. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $x\arctan(2x)$;

   (b) $\dfrac{x+8}{x^3+4x}$;

   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) utiliza uma mudança de variável ou primitivação quase imediata.

4. (a) Determina a função F cuja derivada é dada por $F'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ e que satizfaz $F(1) = 0$.

   (b) Considera a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1\,, & -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ (\sin(x) + \cos(x))^2\,, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   i. Mostra que a função é integrável no seu domínio.

   ii. Determina o integral da função no primeiro ramo através da interpretação geométrica do integral, explicitando o teu raciocínio (em particular nesta alínea não serão aceites resoluções baseadas na Fórmula de Barrow).

   iii. Determina o integral da função de $-\frac{3}{2}$ até $\frac{\pi}{2}$.

5. Seja $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0 \text{ e } \frac{4}{x^2} \leq y \leq 5 - x^2\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = \frac{4}{x^2}$ e de $y = 5 - x^2$ com abcissa positiva.

   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(1, 4)$ e $(2, 1)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

FIM

Cotação:

1. 2; 2. 3; 3. 4; 4. 4; 5. 7.