Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2014/15**

exame de recurso Duração: 3h00

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

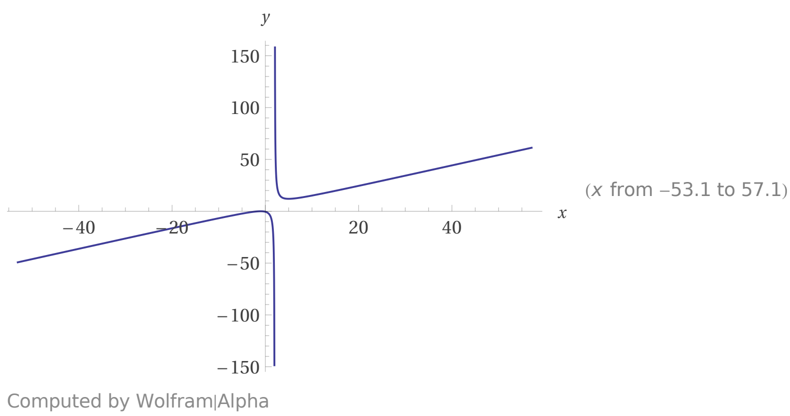
   (a) Mostra que f é contínua.

   (b) Mostra que f é diferenciável e calcula f'.

   (c) Mostra que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   (d) Porque é que se pode garantir que f tem pelo menos dois pontos críticos? [Sugestão: tira partido de todas as alíneas anteriores, para mais facilmente resolveres esta questão].

2. Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := \frac{(x+1)^2}{x-2}$.
   Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).



   (a) Mostra que, no seu domínio, $f'(x) = \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$ e $f''(x) = \frac{18}{(x-2)^3}$.

   (b) Faz o estudo analítico completo de f (segue a seguinte lista de verificação: domínio; interseção com os eixos coordenados; *simetria*; assíntotas; intervalos de monotonia e extremos (e extremantes) locais; concavidades e pontos de inflexão).

   (c) Com base no estudo realizado na alínea anterior, faz o teu próprio esboço do gráfico de f, evidenciando as características determinadas pelo estudo analítico e eliminando eventuais erros contidos na figura produzida pelo CAS (os quais deverás então apontar).

3. Considera $f(x) := \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$. Depois de explicares porque é que este integral de Riemann existe sempre que $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, calcula $f'(x)$ para x nesse intervalo, justificando.

4. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $x\,(\cos x\, \sin x)$; (b) $\dfrac{x^3+x+2}{x^4-2x^2+1}$; (c) $\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}}-e^{\frac{x}{2}}}$.

   Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) utiliza uma mudança de variável.

5. Seja $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 \le y \le 3-x\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y=(x-1)^2$ e de $y=3-x$.
   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(-1,4)$ e $(2,1)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

6. A conhecida empresa de animação NightmareWorks está com um problema no software que permitiria construir aquela cena de 5 segundos onde o super-herói da história parte do repouso para uma corrida em linha reta com uma aceleração violenta que vai decrescendo até se anular no final da cena. Imagina que és um dos engenheiros da NightmareWorks encarregue de resolver o problema, sabendo que a aceleração pretendida para a corrida referida é dada, em metros por segundo ao quadrado, pela expressão $6\sqrt{1-\frac{t}{5}}$, $t \in [0,5]$.

   (a) Qual é a expressão que indica, em metros a partir da posição de repouso, a posição p do super-herói em função do tempo t em segundos?

   (b) Já agora, a que velocidade, em metros por segundo, está o super-herói a correr no final da cena?

7. Caso exista, dá um exemplo (apresentando todos os cálculos) de duas funções $f, g : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ integráveis em qualquer intervalo $[1,\beta]$, com $\beta > 1$, tais que

   (a) $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [1,\infty[$,

   (b) $\int_1^\infty f(x)\, dx$ diverge,

   (c) $\int_1^\infty g(x)\, dx$ converge.

   No caso de ser impossível existir tal exemplo, explica porquê.

FIM

Cotação:

1. 3; 2. 5; 3. 1,5; 4. 4; 5. 3; 6. 2; 7. 1,5.