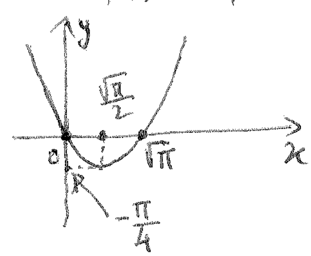
Cálculo 1 — agr. 4 2013/14

1.º teste

Soluções e algumas resoluções

1. Há vários textos com resoluções, de modo que só se apresentam as soluções aqui:

(a)



(b) $D_f = [-\pi, \sqrt{\pi}]$.

(c) $CD_f = [-1, \pi]$.

(d) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

(e) $[-\pi, \sqrt{\pi}] \setminus \{0\}$.

2. Há vários textos com resoluções, de modo que só se apresentam as soluções aqui:

(a) f é contínua em 0 mas não é diferenciável em 0.

(b) — [cf. tipo de resolução nos textos].

(c)
$$f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$$

(d) $y = \frac{\pi+2}{4}x - \frac{1}{2}$ $\left(\text{ou } y - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi+2}{4}(x-1)\right)$.

(e) Não tem pontos críticos.

Mínimo absoluto: 0 (obtido em 0).

Máximo absoluto: $\frac{\pi}{4}$ (obtido em 1).

3. (a) • $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

• $f(0)$ não existe ($0 \notin D_f$)

$f(x)=0 \Leftrightarrow |x| = \ln|x|$; não parece ter soluções, o que poderá ser confirmado mais à frente

• $f(-x) = |-x| - \ln|-x| = |x| - \ln|x| = f(x)$, $\forall x \in D_f$, logo f é par, por isso continuaremos o estudo para já só para $x>0$.

• $\lim\limits_{x\to 0+} x - \ln x = \infty$, logo o gráfico de f tem uma assíntota vertical quando $x \to 0+$ (e, por simetria, também quando $x\to 0-$). Não tem outras assíntotas verticais.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\ln x}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{álgebra de} \\ \text{limites}}}{=} 1 - \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\frac{\infty}{\infty}} =$$

$$= 1 - \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}}_{\substack{\| \\ 0}} = 1 \; ;$$

Regra de Cauchy, atendendo a que aquele limite existe

$$\lim_{x\to\infty} (x - \ln x - 1.x) = \lim_{x\to\infty} (-\ln x) = -\infty;$$

logo o gráfico de f não tem assíntotas não verticais.

• $x>0$: $f'(x) = (x-\ln x)' = 1 - \frac{1}{x}$;

$f'(x) > 0$ sse $\frac{1}{x} < 1$ sse $x > 1$.

pois $x>0$

	0		1		∞
f'		$-$	0	$+$	
f	∞	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞

$$\infty \longleftarrow \lim_{x\to\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{x-\ln x}{x}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{x}_{\downarrow\, \infty} = \infty$$

já determinado atrás

álgebra de limites

Intervalos de monotonia: $]0,1]$, onde f decresce; $[1,\infty[$, onde f cresce; por simetria, também $[-1,0[$, onde f cresce, e $]-\infty,-1]$, onde f decresce.

Extremos e extremantes locais: mínimo 1 atingido em 1 e (por simetria) em -1. Não tem outros mínimos nem minimizantes. Não tem máximos.

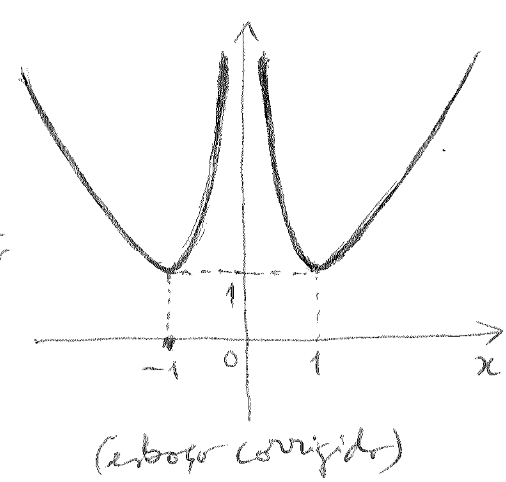
- $x>0$: $f''(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0$.

	0	∞
f''	$+$	
f	$\smile$	

f é convexa em $]0,\infty[$ e, por simetria, também em $]-\infty,0[$.

O seu gráfico **não** tem pontos de inflexão.

(b) O esboço apresentado no enunciado parece indicar haver um máximo local em 0, mas isso é falso. Pelo gráfico poderia também ter-se a impressão que existem duas assíntotas oblíquas, mas isso também não é verdade.



(esboço corrigido)

4. Não é possível usar a regra prática para o cálculo do limite da composição porque f não é contínua em 0. Assim, devemos aplicar diretamente a definição de limite de função:

dada uma qualquer sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_n \in D_f \setminus \{0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $n\in\mathbb{N}$, e $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, tem-se que $f(u_n) = 0$ e, portanto, $f(f(u_n)) = f(0) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, o que garante que $\lim_{x\to 0} f(f(x)) = 1$.

5. (a) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se estritamente decrescente se e só se $\forall x,y \in D,\ x<y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

(b)
(c) } – [Cf. parte 5 da secção 1.4, onde é enunciado o Teorema de Lagrange e se dá indicação de como se prova o Critério de monotonia, o qual contém, como caso particular, aquilo que se pede para se provar no teste.]

A. Caetano
15-11-2013