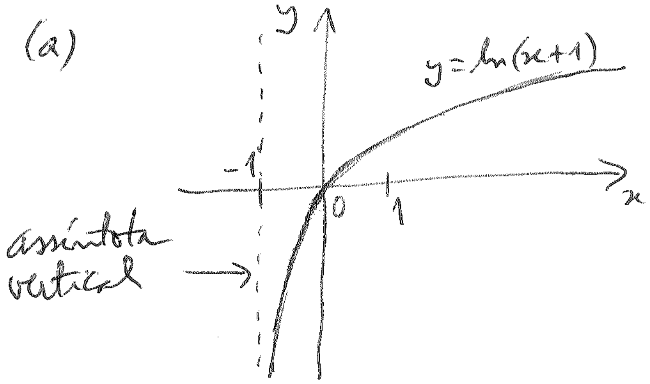
Resolução do 1º teste de Cálculo I - agr. IV de 2014/15:

1. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arccot}(\ln(x+1)) & \text{se } x>0 \\ \pi & \text{se } x=0 \\ x+1 & \text{se } x<0 \end{cases}$

(a)

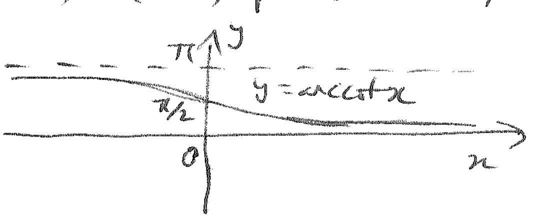


← a partir do conhecimento do gráfico de $\ln x$, fez-se uma translação de uma unidade para a esquerda

(b) $D_{\operatorname{arccot}} = \mathbb{R}$, logo apenas se teria que impor restrição ao argumento do logaritmo: $x+1>0$, ou seja, $x>-1$. Como, no entanto, esse é o caso do ramo $x>0$, acaba por não haver nenhuma restrição a impor nesse ramo. Nos outros ramos as expressões fazem sempre sentido.

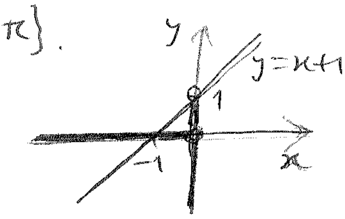
$$\therefore D_f = \mathbb{R}$$

(c) No ramo $x>0$, pela alínea (a) vemos que, à medida que x percorre $]0,\infty[$, também $\ln(x+1)$ percorre $]0,\infty[$. Conjugando com o gráfico ao lado, do arccot, à medida que o seu argumento



percorre $]0,\infty[$, o arccot percorre $]0,\frac{\pi}{2}[$.

No ramo $x=0$ o contradomínio é $\{\pi\}$.



No ramo $x<0$ o contradomínio é $]-\infty,1[$.

$$\therefore\ CD_f =]0,\pi/2[\cup \{\pi\} \cup]-\infty,1[$$
$$=]-\infty,\pi/2[\cup \{\pi\}.$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x+1 = 1$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{arccot}(\ln(x+1)) =$

pois as funções são contínuas nos pontos em causa $\longrightarrow$ $= \operatorname{arccot}(\ln(0+1)) = \operatorname{arccot} 0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} & \text{se } x\neq 2 \\ 1 & \text{se } x=2 \end{cases}$$

NOTA: Apresenta-se aqui uma resolução que se pensa ser a que a maioria dos alunos terá começado por fazer. Para uma resolução alternativa, mais simples, ver as indicações no APARTE que começa na página 4.

(a) Para $x\neq 2$ a função é dada por $\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ numa vizinhança de qualquer ponto, a qual, por ser função racional, é contínua e diferenciável no seu domínio (que é $\mathbb{R}\setminus\{2\}$).

No ponto 2: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{\text{Regra de Cauchy?}}{=}} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+1}{1} = 5$.

Como este último limite existe, a regra de Cauchy é de facto aplicável e podemos concluir as igualdades acima. Como $f(2) = 1 \neq 5$, f não é contínua em 2.

Não sendo contínua em 2, também não é diferenciável nesse ponto (sabemos que diferenciável ⇒ contínua)

(b) Pelo que vimos na alínea anterior, o domínio de f' é $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Nesse domínio tem-se que

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2) - x^2 - x + 6}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 - x + 6}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2}.$$

(c) $f(0) = 3$ e $f(3) = \frac{9+3-6}{3-2} = 6$, e 5 está entre 3 e 6. No entanto, f não é contínua em $[0,3]$ (vimos, na alínea (a), que f não é contínua em 2), logo não podemos aplicar o Teorema de Bolzano-Cauchy.

Mas podemos tentar averiguar directamente se existe ou não x tal que $f(x) = 5$.

Claramente não pode ser $x = 2$, pois $f(2) = 1$.

Averiguemos então se pode ser $x \neq 2$, ou seja, se $\frac{x^2+x-6}{x-2}$ pode ser igual a 5 (com $x \neq 2$):

$$\frac{x^2+x-6}{x-2} = 5 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 5x - 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vemos que teria que ser $x = 2$, que é precisamente o caso que estamos a excluir agora (aliás, nem sequer a fracção estaria definida).

Em conclusão, a equação $f(x)=5$ não tem solução no intervalo $[0,3]$.

(d) Os pontos críticos só podem ser procurados em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (domínio de f'): nesse conjunto,

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow \underbrace{1=0}_{\text{Falso}}$$

pelos cálculos da alínea anterior (ou simplesmente desenvolvendo o denominador)

$\therefore$ f não tem pontos críticos; em particular, $f|_{[0,3]}$ também não.

No que diz respeito aos extremos de $f|_{[0,3]}$, aqui não se pode argumentar via Teorema de Weierstrass, pois já vimos que f não é contínua em $[0,3]$. No entanto, se não saltou à vista na alínea (b), deve ter saltado à vista em cima que $f'(x)=1>0$, logo

	0		2		3
f'		+	n.d.	+	
f	3	$\nearrow$ 5	1	5 $\nearrow$	6

e portanto $f(2)=1$ é o mínimo absoluto e $f(3)=6$ é o máximo absoluto.) em particular, existem

APARTE (e possível alternativa para resolver a questão 2):

Se $f'(x)=1$ para $x\neq 2$, a função f tem que ser muito simples (o seu gráfico deverá estar contido numa reta quando $x\neq 2$).

De facto, se, na alínea (a), em vez de se ter aplicado a regra de Cauchy para levantar a indeterminação, se tivesse usado o procedimento usual do ensino secundário, que consiste em fatorizar numerador e denominador, com vista a uma possível simplificação, ter-se-ia visto, com a ajuda da fórmula resolvente para equações do 2.º grau, que

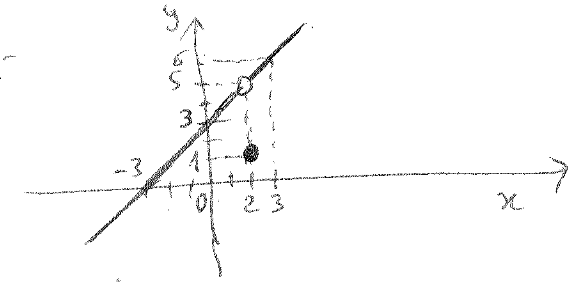
$$\frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = x+3 \qquad (x \neq 2).$$

OBS: Tendo-se uma indet. $\frac{0}{0}$ num $\lim\limits_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinómios, então a é raiz comum de $p(x)$ e $q(x)$, logo a fatorização permitirá sempre simplificar. Para polinómios de grau superior a 2 pode-se usar a Regra de Ruffini para descobrir a fatorização.

Assim, afinal f é a função

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases},$$

cujo esboço do gráfico é



Tendo reparado nisto, as quatro alíneas da questão 2 teriam resposta praticamente imediata!

3. $f(x) = e^{-x^2}$.

(a) $D_f = \mathbb{R}$

$f(0) = e^{-0^2} = 1$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} = 0$: Impossível (a exponencial só assume valores positivos).

Assim, a única interseção com os eixos coordenados é no ponto $(0,1)$.

$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$: a função é par, logo podemos estudar 1.º só em $\mathbb{R}_0^+$.

O gráfico de f não tem assíntotas verticais (f é contínua em todo o $\mathbb{R}$).

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim_{y\to-\infty} e^{y} = 0:$$

o gráfico de f tem $y=0$ como assíntota horizontal (tanto para $x\to\infty$ como para $x\to-\infty$, pela paridade).

Não tem mais assíntotas.

$$f'(x) = \underbrace{e^{-x^2}}_{>0}(-2x); \quad f'(x)\geq 0 \text{ sse } -2x\geq 0 \text{ sse } x\leq 0.$$

	$-\infty$	0	∞
f'	+	0	−
f	0 ↗	1	↘ 0

por simetria, se preferirmos

Então f cresce estritamente em $]-\infty,0]$ e decresce estritamente em $[0,\infty[$. tem um máximo (igual a 1 e que é absoluto) em 0.

Não tem outros extremos.

$$f''(x) = e^{-x^2}\cdot 4x^2 - 2e^{-x^2} = \underbrace{e^{-x^2}}_{>0}(4x^2-2);$$

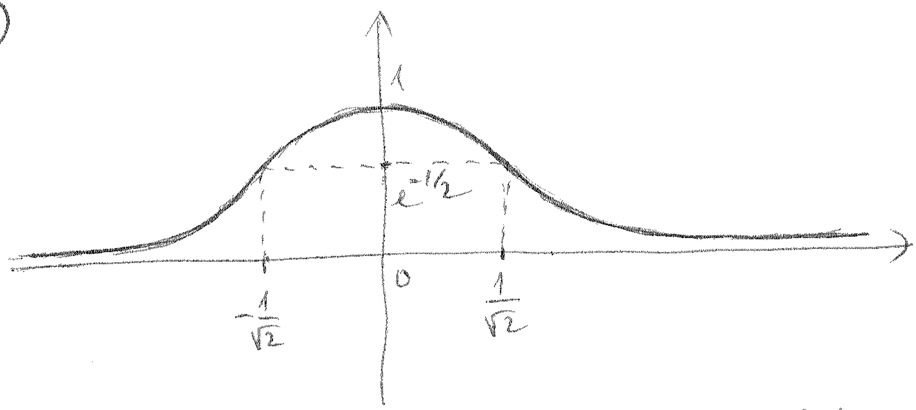
$$f''(x)\geq 0 \text{ sse } 4x^2-2\geq 0 \text{ sse } x\leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x\geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	∞
f''	+	0	−	−	−	0	+
f	∪			∩			∪

por simetria, se preferirmos

Então f é convexa em $]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}[$ e $]\frac{1}{\sqrt{2}},\infty[$ e é côncava em $]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}[$. O seu gráfico tem dois pontos de inflexão: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-1/2}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-1/2}\right)$.

(b)



No esboço produzido pelo CAS é difícil localizar com precisão os pontos de inflexão, mas o principal defeito é mesmo parecer que a função se anula aproximadamente para $x \geq 2,5$ e para $x \leq -2,5$.

4. (a) Diz-se que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ (com a ponto de acumulação de D_f) se:

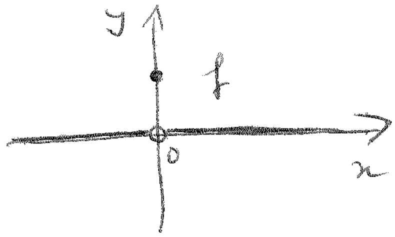
Vale tanto para $b \in \mathbb{R}$ como para $b=\infty$ ou $b=-\infty$ $\Big\{$ sempre que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ com $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b$.

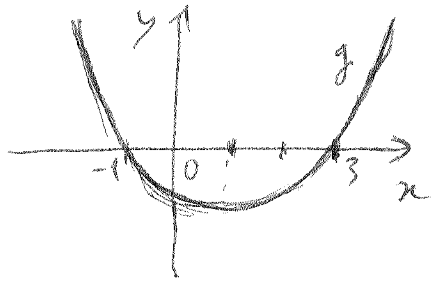
(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$; $g(x) = x^2 - 2x - 3$

É mais fácil argumentar tendo presente os gráficos das funções.

C.A.: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$.





i. $\lim\limits_{x \to -1} f(g(x))$. $\quad$ -1 é pto acumulação de $D_{f \circ g}$.

Sempre que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$ com $x_n \neq -1$,

$g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ com $g(x_n) \neq 0$ (a possibilidade de ser $x_n = 3$, onde g vale 0, pode-se descartar, por 3 estar afastado de -1),

logo $f(g(x_n)) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\therefore \lim\limits_{x \to -1} f(g(x)) = 0$.

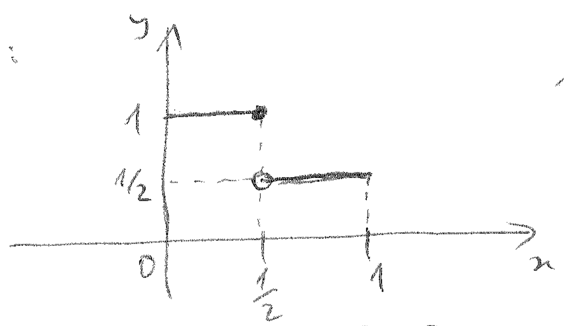
ii. $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$. $\quad$ 0 é pto de acumulação de $D_{g \circ f}$.

Sempre que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ com $x_n \neq 0$,

$f(x_n) = 0$, logo $g(f(x_n)) = g(0) = -3 \xrightarrow[n\to\infty]{} -3$.

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} g(f(x)) = -3$.

5. É possível:



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1/2 & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

f' calcula-se no interior de $[0,1]$ (ou seja, $]0,1[$) e é sempre 0 aí exceto em $\frac{1}{2}$, onde não existe.

($f'_e(\frac{1}{2})=0$; $f'_d(\frac{1}{2})=-\infty$). Além disso,

$f(0)=1>\frac{1}{2}=f(1)$, como também se exigia.

6. <u>Hipóteses</u>: f contínua em $[a,b]$ (com $a<b$),
f diferenciável em $]a,b[$,
$\forall x\in]a,b[, \ |f'(x)|\leq M$ (com $M\in\mathbb{R}$).

Da conclusão do Teorema de Lagrange,
a saber $$\exists c\in]a,b[: \ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

salta à vista que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$,
logo $|f(b)-f(a)|=|f'(c)|\,|b-a|\leq M|b-a|$.

No entanto o que se pede para ser provado é que esta desigualdade vale mesmo para quaisquer $x,y\in[a,b]$, e não apenas quando coincidem com a,b.

Dados quaisquer $x,y\in[a,b]$ com $x<y$, o Teorema de Lagrange também pode ser aplicado a f em $[x,y]$, caso em que se obtém que
$$\exists c\in]x,y[: \ f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

e, tal como acima,

$$|f(x)-f(y)|=|f(y)-f(x)|\leq M|y-x|=M|x-y|.$$

No caso de $x>y$, trocam-se os papéis de x e y no argumento acabado de escrever e obtém-se novamente o que se pretende.
Finalmente, o caso $x=y$ é trivial:
$$|f(x)-f(x)|=0\leq M.0=M|x-x|.$$

[illegible]
11-11-2014