1

Cálculo 1 – agr. 4

2013/14

teste global

Resolução (ou indicações para resolução) das questões

1 e 2 (para as restantes questões, consultar a resolução do 2º teste).

1. (a) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(x^2) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \ln(x^2) = -\infty.$

$\therefore$ f não é diferenciável em 0.

Regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\ln(x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x}} \underset{\left(\frac{-\infty}{\pm\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\right) = 0 = f(0),$$

logo f é contínua em 0.

(b) $f(0) = 0$; $f(e) = e\ln(e^2) = 2e$; $0 < e < 2e$.
Como f é contínua em $[0,e]$, o Teorema dos valores intermédios é aplicável, permitindo concluir-se sobre a existência de $x \in]0,e[$ tal que $f(x) = e$.

(c) Para $x \neq 0$, $f'(x) = x \cdot \dfrac{2x}{x^2} + 1\cdot\ln(x^2) = 2 + \ln(x^2)$.
Já vimos (alínea (a)) que $f'(0)$ não é um nº real.
Então

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2 + \ln(x^2) \end{aligned}$$

(d) $f'(e) = 2 + \ln(e^2) = 4$.

$y - f(e) = 4.(x-e) \Leftrightarrow y - 2e = 4x - 4e$

$\Leftrightarrow y = 4x - 2e$. ← equação pedida

(e) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = -2$

$\Leftrightarrow x^2 = e^{-2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{e}$.

Pontos críticos de $f|_{[-1,e]}$: $-\frac{1}{e}$ e $\frac{1}{e}$.

$f(-1) = -\ln 1 = 0$; $f(e) = 2e$;

$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}\ln(e^{-2}) = -\frac{2}{e}$; $f(-\frac{1}{e}) \underset{f \text{ é ímpar}}{=} -f(\frac{1}{e}) = \frac{2}{e}$.

Como f é contínua em $[-1,e]$ e tem derivada em $]-1,e[$ (mesmo em zero também tem derivada, embora sendo $-\infty$), então

$\max f|_{[-1,e]} = \max\{0, 2e, -\frac{2}{e}, \frac{2}{e}\} = 2e$

e $\min f|_{[-1,e]} = \min\{0, 2e, -\frac{2}{e}, \frac{2}{e}\} = -\frac{2}{e}$.

2. (a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^4} \underset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ } Impossível

Não há interseção com os eixos coordenados.

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} - \frac{1}{(-x)^4} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} = f(x)$: f é par.

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x^4} = -\infty$; $x=0$ é a única assíntota vertical (tanto quando $x \to 0^-$ como quando $x \to 0+$).

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} = 0$; $y=0$ é assíntota horizontal tanto quando $x \to -\infty$ como quando $x \to \infty$; não há outras assíntotas não verticais.

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)' = (x^{-2})' - (x^{-4})' = -2 \cdot x^{-3} - (-4)x^{-5}$$

$$= -\frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5}$$

Caso $x>0$: $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)' > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x^5} > \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow x^2 < 2$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{2}$$

	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		∞
f'					n.d.	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$ $-\infty$	n.d.	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

pois f é par

Assim, f cresce estritamente em $]-\infty, -\sqrt{2}]$ e $]0, \sqrt{2}]$ e decresce estritamente em $[-\sqrt{2}, 0[$ e $[\sqrt{2}, \infty[$.

Tem o máximo (absoluto) $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ atingido em $\sqrt{2}$ e em $-\sqrt{2}$.

Não tem outros extremos.

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)'' = \left(-2x^{-3} + 4x^{-5}\right)' = 6x^{-4} - 20x^{-6} = \frac{6}{x^4} - \frac{20}{x^6}.$$

Caso $x>0$: $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)'' > 0 \Leftrightarrow \frac{6}{x^4} > \frac{20}{x^6} \Leftrightarrow x^2 > \frac{10}{3}$

$$\Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$$

	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$		∞
f''					n.d.	$-$	0	$+$	
f		$\cup$		$\cap$	n.d.	$\cap$		$\cup$	

pois f é par

$$f\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\frac{10}{3}} - \frac{1}{\frac{10^2}{3^2}} = \frac{3}{10} - \frac{9}{100} = \frac{21}{100}$$

Assim, f é estritamente convexa em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\right[$ e $\left]-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}, \infty\right[$ e estritamente côncava em $\left]-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}, 0\right[$ e $\left]0, \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\right[$.

O gráfico de f tem dois pontos de inflexão:

$$\left(-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}, \frac{21}{100}\right) \text{ e } \left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}, \frac{21}{100}\right).$$

(b) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} \overset{?}{>} \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{10} > \sqrt{6}$ ✓

Não há conflitos entre o estudo analítico feito na alínea (a) e o esboço feito pelo CAS.