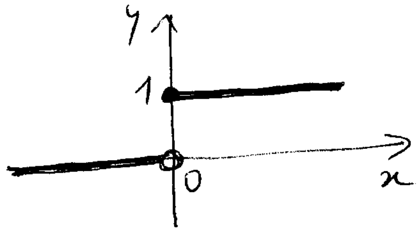
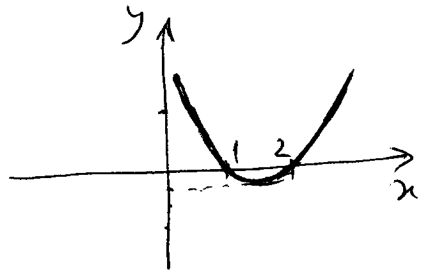
3º t.p.c. — resolução

1. $H(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x<0\\ 1 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$



$g(x)=x^2-3x+2$

Pela fórmula resolvente, obtêm-se os zeros 1 e 2



(a) Para qualquer $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ com $u_n<1$,

$g(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ com $g(u_n)>0$, logo

$H(g(u_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^-} H(g(x)) = 1$.

Para qualquer $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ com $u_n>1$,

$g(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ com $g(u_n)<0$ (a partir de certa ordem, pelo menos), logo $H(g(u_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^+} H(g(x)) = 0$

Como os limites laterais são diferentes, então não existe $\lim\limits_{x\to 1} H(g(x))$.

(b) Por um processo análogo se vê também que $\lim\limits_{x\to 2^-} H(g(x)) = 0$ e que $\lim\limits_{x\to 2^+} H(g(x)) = 1$, logo também não existe $\lim\limits_{x\to 2} H(g(x))$.

(c) Para qualquer $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ com $u_n<0$,

$H(u_n)=0$, logo $g(H(u_n)) = g(0) = 2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$,

logo $\lim\limits_{x\to 0^-} g(H(x)) = 2$.

Para qualquer $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ com $u_n>0$,

$H(u_n)=1$, logo $g(H(u_n)) = g(1) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

logo $\lim\limits_{x\to 0^+} g(H(x)) = 0$.

E também não existe $\lim\limits_{x\to 0} g(H(x))$.

2. Calcular $\int \sin x \cdot \cos(2x)\,dx$ por primitivação por partes:

$$\int \sin x\cdot\cos(2x)\,dx = -\cos x\cdot\cos(2x) - \int -\cos x\,(-\sin(2x))\,2\,dx$$

$$= -\cos x\cdot\cos(2x) - 2\left(\sin x\cdot\sin(2x) - \int \sin x\cdot\cos(2x)\cdot 2\,dx\right)$$

$$= -\cos x\cdot\cos(2x) - 2\sin x\cdot\sin(2x) + 4\int \sin x\cdot\cos(2x)\,dx.$$

<u>Formando uma equação com a incógnita</u>

$y = \int \sin x\cdot\cos(2x)\,dx$, obtém-se

justificado pelo facto de as primitivas da função dada existirem, pois a função é contínua

$$y = -\cos x\cdot\cos(2x) - 2\sin x\cdot\sin(2x) + 4y,$$

$$\Leftrightarrow\ 3y = \cos x\cdot\cos(2x) + 2\sin x\cdot\sin(2x),$$

logo

$$\int \sin x\cdot\cos(2x)\,dx = \frac{1}{3}\cos x\cdot\cos(2x) + \frac{2}{3}\sin x\cdot\sin(2x) + C$$

em intervalos.

3. Calcular $\int \frac{x^2+2}{x^2(x^2+2x+2)}\,dx$

$\nearrow$ função racional própria

x^2 tem raiz 0 de multiplicidade 2;

x^2+2x+2 é polinómio irredutível de grau 2, logo corresponde a um par de raízes complexas conjugadas de multiplicidade 1.

Sabemos então que existem constantes reais A, B, C e D tais que

$$\frac{x^2+2}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

$x\neq 0$

$$\Leftrightarrow x^2+2 = A(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2 = Ax^2+2Ax+2A+Bx^3+2Bx^2+2Bx+Cx^3+Dx^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B+C=0 \\ A+2B+D=1 \\ \cancel{2}A+\cancel{2}B=0 \\ 2A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \\ D=\cancel{1}-\cancel{1}-2(-1)=2 \end{cases}$$

Então $\int \frac{x^2+2}{x^2(x^2+2x+2)}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx +$

$$+\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x} - \ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\,dx$$

$=$

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx = \ln|x^2+2x+2| +$$

fazendo o completamento do quadrado $\longrightarrow$ $+\int \frac{2}{(x+1)^2+1}\,dx$

Em conclusão,

$$\int \frac{x^2+2}{x^2(x^2+2x+2)}\,dx = -\frac{1}{x} - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + $$
$$+ \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

em intervalos.

4. Calcular usando uma mudança de variável ou fazendo uma primitivação quase imediata:

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

Observando que $(x^{2/3})' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, então

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \sin(x^{2/3}) \cdot x^{-1/3}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \sin\underbrace{(x^{2/3})}_{u} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}x^{-1/3}\,dx}_{du} = \frac{3}{2}\int \sin u\,du =$$

$$= -\frac{3}{2}\cos u + C = -\frac{3}{2}\cos\sqrt[3]{x^2} + C \text{ em intervalos.}$$

Alternativa: Fazer a mudança de variável $x = t^3$; $\frac{dx}{dt} = 3t^2 > 0$ para $t \neq 0$:

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{\sin(t^2)}{t} \cdot 3t^2\,dt = \int \sin(t^2) \cdot 3t\,dt$$

$$= \frac{3}{2}\int \sin\underbrace{(t^2)}_{u} \cdot \underbrace{2t\,dt}_{du} = \frac{3}{2}\int \sin u\,du = -\frac{3}{2}\cos u + C$$

$$= -\frac{3}{2}\cos(t^2) + C = -\frac{3}{2}\cos\sqrt[3]{x^2} + C \text{ em intervalos.}$$