Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2013/14**

exame de recurso Duração: 3h00

- **Não é possível trocar questões deste teste com tads.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{1}{x^2}) & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

   (a) Estuda a continuidade e a diferenciabilidade de f no ponto 0.

   (b) Mostra que a equação $f(x) = \frac{3\pi}{8}$ tem solução no intervalo $[0, 1]$.

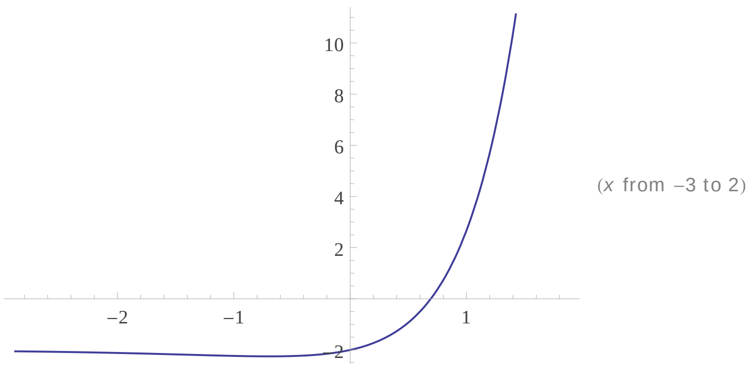
   (c) Determina a função derivada de f.

   (d) Escreve a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

   (e) Determina, caso existam, os pontos críticos e os extremos absolutos de $f|_{[-1, \sqrt[4]{3}]}$.

2. Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := e^{2x} - e^x - 2$.

   Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).



   (a) Faz o estudo analítico completo desta função (segue a seguinte lista de verificação: domínio; interseção com os eixos coordenados; *simetria*; assíntotas; intervalos de monotonia e extremos (e extremantes) locais; concavidades e pontos de inflexão).

   (b) Resolve eventuais conflitos com a figura produzida pelo CAS, apresentando também um esboço alternativo no caso de achares que o esboço acima não é o mais adequado.

3. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $\dfrac{x}{\sin^2 x}$;

   (b) $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^3}$;

   (c) $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}+2}$.

   Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) utiliza uma mudança de variável ou primitivação quase imediata.

4. Seja $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x - 2 \leq y \leq 1 - |x|\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = x^2 - x - 2$ e de $y = 1 - |x|$.
   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(-1, 0)$ e $(\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

5. Calcula, caso exista, o

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{3-t^2}\, dt}{x^2}.$$

6. (a) Define o conceito matemático de extremo local $f(c)$ de uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (b) Indica por ordem na tua folha de prova as quatro expressões em falta no seguinte enunciado do Teorema de Fermat:
   Se $f(c)$ é um .... de uma função f cuja derivada .... no ponto .... c do domínio D de f, então ....

   (c) Prova o Teorema de Fermat de um modo estritamente matemático (em particular, argumentos somente justificados por figuras não serão considerados).

FIM

Cotação:

1. 3; 2. 5; 3. 3; 4. 4; 5. 2; 6. 3.