Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2013/14**

teste global Duração: 3h00

- **Não é possível trocar questões deste teste com tads.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \begin{cases} x\ln(x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

   (a) Estuda a continuidade e a diferenciabilidade de f no ponto 0.

   (b) Mostra que a equação $f(x) = e$ tem solução no intervalo $[0, e]$.

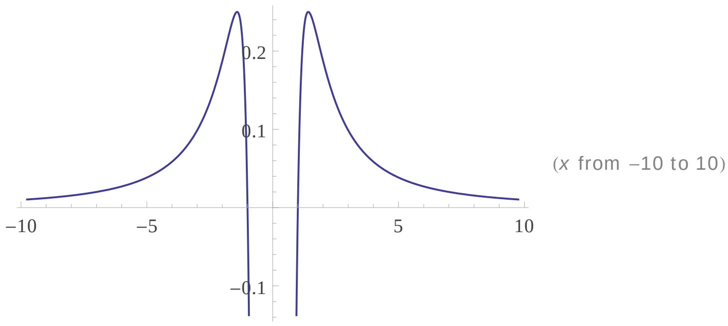
   (c) Determina a função derivada de f.

   (d) Escreve a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e.

   (e) Determina, caso existam, os pontos críticos e os extremos absolutos de $f|_{[-1,e]}$.

2. Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}$.

   Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).



   (a) Faz o estudo analítico completo desta função (segue a seguinte lista de verificação: domínio; interseção com os eixos coordenados; *simetria*; assíntotas; intervalos de monotonia e extremos (e extremantes) locais; concavidades e pontos de inflexão).

   (b) Resolve eventuais conflitos com a figura produzida pelo CAS, apresentando também um esboço alternativo no caso de achares que o esboço acima não é o mais adequado.

3. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $x \arctan(2x)$;

   (b) $\dfrac{x+8}{x^3+4x}$;

   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

   Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) utiliza uma mudança de variável ou primitivação quase imediata.

4. Seja $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0 \text{ e } \frac{4}{x^2} \leq y \leq 5 - x^2\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = \frac{4}{x^2}$ e de $y = 5 - x^2$ com abcissa positiva.

   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(1,4)$ e $(2,1)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

5. Determina os valores de $p \in \mathbb{R}$ para os quais o integral impróprio

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx$$

   converge e o valor do integral para cada um desses valores de p.

6. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável.

   (a) Sabemos que $|f|$ também é integrável em $[a,b]$ e que $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. Explica porque é que também se verifica que

$$\Big|\int_b^a f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

   (b) Define o conceito de integral indefinido F de f.

   (c) Mostra que F é contínua em $[a,b]$.

FIM

Cotação:

1. 3; 2. 5; 3. 3; 4. 4; 5. 2; 6. 3.