Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2014/15**

2.º teste Duração: 2h30

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $x\,\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;

   (b) $\dfrac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$;

   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$.

   Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) utiliza uma mudança de variável.

2. Considera a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x), & -2\leq x\leq 0\\ x^2, & 0<x\leq 1\\ \dfrac{1}{x-1}, & 1<x\leq 2\end{cases}.$$

   (a) Estuda a integrabilidade da função em cada um dos intervalos $[-2,1]$, $[1,2]$ e $[-2,2]$.

   (b) Determina, se existir, o integral da função no intervalo $[-2,0]$ através da interpretação geométrica do integral, explicitando o teu raciocínio (em particular nesta alínea não serão aceites resoluções baseadas na Fórmula de Barrow).

   (c) Determina, se existir, o integral da função no intervalo $[-2,1]$.

3. Seja $\mathcal{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\leq y\leq 2-|x|\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y=x^2$ e de $y=2-|x|$.
   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(-1,1)$ e $(1,1)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

4. Calcula

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{e^x}\frac{1}{\ln t}\,dt$$

   no conjunto dos pontos onde esta derivada existe (e indica que conjunto é esse).

5. Um condutor de automóvel, ao aperceber-se de veículos parados no meio da estrada alguns metros à sua frente, começa de imediato a travar, demorando exatamente 4 segundos até parar completamente. Supõe que o automóvel em causa desacelerou durante esses 4 segundos de acordo com a expressão $3t$, em metros por segundo ao quadrado, onde t designa a variável tempo.

   (a) Qual era a velocidade, em metros por segundo, do automóvel no início da travagem?

   (b) Qual foi a distância, em metros, percorrida pelo automóvel durante aqueles 4 segundos de travagem?

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável em qualquer intervalo $[\alpha, \beta]$ de números reais. Sejam $c, d \in \mathbb{R}$. Mostra que se os integrais impróprios $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ e $\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ convergem então também os integrais impróprios $\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx$ e $\int_{d}^{\infty} f(x)\,dx$ convergem e
$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\infty} f(x)\,dx.$$

   Nota: Não vale invocar a convergência do integral impróprio $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, pois é precisamente o resultado que se pede para se mostrar que justifica a conhecida definição de convergência para tal integral.

FIM

Cotação:

1. 5; 2. 5; 3. 5; 4. 1,5; 5. 2; 6. 1,5.