Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2013/14**

1º teste Duração: 2h00

- **Antes de entregares a prova, deves registar na folha de rosto da mesma, logo a seguir ao cabeçalho, a tua decisão acerca das possíveis trocas de questões por tads respetivos. Reserva desde já um espaço para isso! Se queres substituir a questão 1 pelo 1.º tad, basta escreveres aí 1.º tad . Se queres substituir a questão 2 pelo 2.º tad, basta escreveres aí 2.º tad. Ausência de uma tal indicação no local referido acima será interpretada como significando que não há trocas de questões deste teste com tads.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \begin{cases} \tan(x^2 - \sqrt{\pi}\,x) & \text{se } 0 < x \leq \sqrt{\pi} \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}.$$

   (a) Esboça o gráfico de $y = x^2 - \sqrt{\pi}\,x$.

   (b) Determina o domínio de definição de f.

   (c) Determina o contradomínio de f.

   (d) Calcula, caso exista, o $\lim_{x\to 0} f(x)$ ou, no caso em que não exista, os respetivos limites laterais.

   (e) Determina o conjunto dos pontos do domínio de f onde esta função é contínua.

2. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \begin{cases} x \operatorname{arccot} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

   (a) Estuda a continuidade e a diferenciabilidade de f no ponto 0.

   (b) Mostra que a equação $f(x) = \frac{\pi}{8}$ tem solução no intervalo $[0, 1]$.

   (c) Determina a função derivada de f.

   (d) Escreve a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

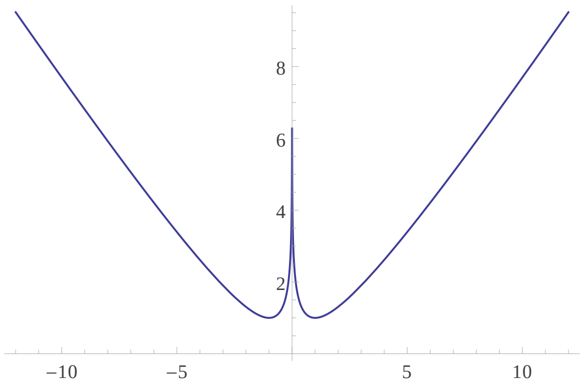
   (e) Determina, caso existam, os pontos críticos e os extremos absolutos de $f|_{[0,1]}$.

3. Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := |x| - \ln|x|$.

   Do outro lado da folha podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).

   (a) Faz o estudo analítico completo desta função (segue a seguinte lista de verificação: domínio; interseção com os eixos coordenados; *simetria*; assíntotas; intervalos de monotonia e extremos (e extremantes) locais; concavidades e pontos de inflexão).

   (b) Resolve eventuais conflitos com a figura produzida pelo CAS, apresentando também um esboço alternativo no caso de achares que o esboço da página seguinte não é o mais adequado.



(x from -10 to 10)

4. Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

   Calcula $\lim_{x \to 0} f(f(x))$.

   Nota: O mero cálculo sem justificações ou com justificações erradas não dá origem a nenhuma pontuação, mesmo que o resultado final seja o correto.

5. (a) Define o conceito matemático de função estritamente decrescente.

   (b) Enuncia o Teorema de Lagrange.

   (c) Prova o seguinte resultado, válido para qualquer função f contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, de um modo estritamente matemático (em particular, argumentos baseados em figuras não serão considerados):

   Se f' assume somente valores negativos em $]a, b[$ então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.

FIM

Cotação:

1. 4; 2. 4; 3. 7; 4. 1,5; 5. 3,5.