Cálculo I – agr. IV

2013/14

exame de recurso

Resolução (ou indicações para resolução)

1. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

(a) Regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} - \frac{\pi}{2}}{x-0} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}(-2)x^{-3}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2}{x^3+\frac{1}{x}} = 0.$$

Então f é diferenciável em 0, verificando-se que $f'(0)=0$. Como consequência, é também contínua em 0.

(b) $f(0)=\frac{\pi}{2}$; $f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; f é contínua em $[0,1]$;

$\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8} < \frac{3\pi}{8} < \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$. Então, pelo Teorema dos valores intermédios, existe $x \in]0,1[$ tal que $f(x)=\frac{3\pi}{8}$. Em particular, $f(x)=\frac{3\pi}{8}$ tem solução em $[0,1]$.

(c)
$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{-2}{x^3+\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
(cf. cálculos na alínea (a)).

(d) $f'(1) = \frac{-2}{1+1} = -1$; $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, ou seja,

$y - \frac{\pi}{4} = -x+1$, $\Leftrightarrow y = -x+1+\frac{\pi}{4}$.

(e) Pela expressão de f' vemos que tem um único zero, nomeadamente em 0 ($\in]-1, \sqrt[4]{3}[$), logo 0 é o único ponto crítico de $f|_{[-1,\sqrt[4]{3}]}$.

Sendo f contínua em $[-1, \sqrt[4]{3}]$ e diferenciável em $]-1, \sqrt[4]{3}[$, os extremos absolutos de $f|_{[-1,\sqrt[4]{3}]}$ são atingidos em -1 ou 0 (ponto crítico) ou $\sqrt[4]{3}$.

Ora $f(-1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $f(\sqrt[4]{3}) =$

$= \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{= \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\pi}{6}$, logo

<u>mínimo absoluto</u>: $\frac{\pi}{6}$ (atingido em $\sqrt[4]{3}$)

<u>máximo absoluto</u>: $\frac{\pi}{2}$ (atingido em 0).

2. $f(x) := e^{2x} - e^{x} - 2$.

(a) $D_f = \mathbb{R}$.

$f(0) = \cancel{1} - \cancel{1} - 2 = -2$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = -1$ impossível (a exponencial só toma valores positivos)

$\Leftrightarrow x = \ln 2$.

$\therefore$ Intersecção com os eixos coordenados: $(0,-2)$, $(\ln 2, 0)$.

$f(-x) = e^{-2x} - e^{-x} - 2$, não é par nem ímpar (por exemplo, como $f(0) = -2$, não pode ser ímpar; como $f(1) = e^2 - e - 2 > 0$ e $f(-1) = e^{-2} - e^{-1} - 2 < 0$, não pode ser par); não é periódica.

Como f é contínua em todo o $\mathbb{R}$, não tem assíntotas verticais.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^x(e^x-1)-2 = \infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0-0-2 = -2.$$

$\therefore$ $y=-2$ é assíntota horizontal quando $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-e^x-2}{x} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{\text{Regra de Cauchy}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}-e^x}{1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^x(2e^x-1) = \infty$$

$\therefore$ Não tem mais assíntotas.

$$f'(x) = 2e^{2x}-e^x = \underbrace{e^x}_{>0}(2e^x-1),$$ que é >0 sse $2e^x>1$,

sse $e^x > \frac{1}{2}$ sse $x > \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

	$-\infty$	$-\ln 2$	∞
f'	$-$	0	$+$
f	-2 $\searrow$		$\nearrow$ ∞

$$f(-\ln 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{-9}{4}$$

$\therefore$ f decresce estritamente em $]-\infty, -\ln 2]$ e cresce estritamente em $[-\ln 2, \infty[$; tem apenas um extremo local, que é o mínimo absoluto $-\frac{9}{4}$ atingido em $-\ln 2$.

$f''(x) = 4e^{2x} - e^{x} = \underbrace{e^{x}}_{>0}(4e^{x}-1)$, que é >0 se $4e^{x}>1$,

se $e^{x} > \frac{1}{4}$ se $x > \ln\frac{1}{4} = -\ln 4$.

	$-\infty$	$-\ln 4$		$-\ln 2$		∞
f''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
f						

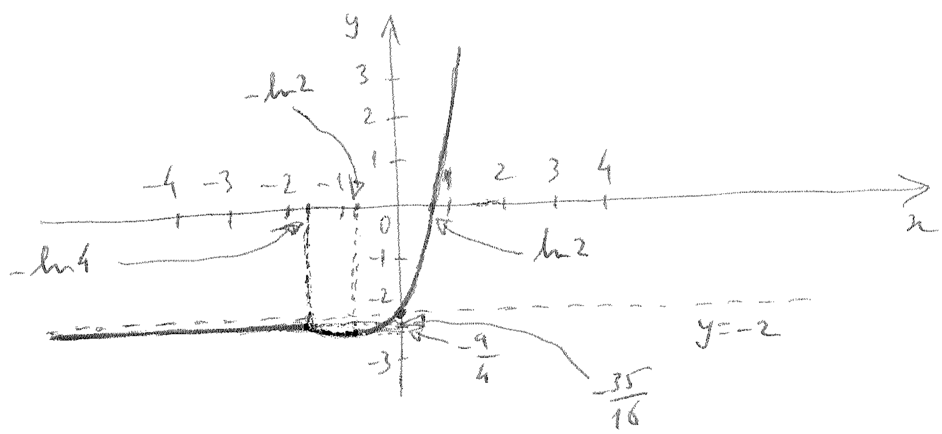
$f(-\ln 4) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 =$

$= \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 2 = \frac{-35}{16}$

$\therefore$ f é estritamente côncava em $]-\infty, -\ln 4[$ e estritamente convexa em $]-\ln 4, \infty[$. O seu gráfico tem um ponto de inflexão em $\left(-\ln 4, -\frac{35}{16}\right)$

(b) Não é propriamente um conflito, mas não é muito perceptível a existência de um ponto de inflexão no esboço produzido pelo CAS nem fica clara a existência da assíntota horizontal.

Um esboço mais apropriado seria, por exemplo,



3. (a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = \int x \cdot \operatorname{cosec}^2 x\,dx =$

$$= -(\operatorname{cotg} x)\cdot x + \int \operatorname{cotg} x\,dx$$

$$= -x \cdot \operatorname{cotg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$= -x \cdot \operatorname{cotg} x + \ln|\sin x| + C.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^3}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}\,dx =$

$$= \frac{(x+1)^{-2}}{-2} - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ln|x+1| + C$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + \ln|x+1| + C$$

C.A.:

$$\frac{x^2+x+1}{(x+1)^3} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$\Rightarrow x^2+x+1 = A + B(x+1) + C(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+x+1 = Cx^2 + Bx + 2Cx + A + B + C$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ B+2C=1 \\ A+B+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ B=1-2=-1 \\ A=1+\cancel{1}-\cancel{1}=1 \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}\,dx = \int \frac{1}{t+t^{-1}+2}\cdot\frac{1}{t}\,dt =$

$e^x = t \Leftarrow x = \ln t,\ t>0$

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t} > 0$

$$= \int \frac{1}{t^2+1+2t}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt =$$

$$= \frac{(t+1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{e^x+1} + C.$$

4. $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x - 2 \leq y \leq 1 - |x| \}$

(a) $x^2 - x - 2 = 1 - |x|$

Caso $x \geq 0$: $x^2 - \cancel{x} - 2 = 1 - \cancel{x}$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

Caso $x < 0$: $x^2 - x - 2 = 1 + x$

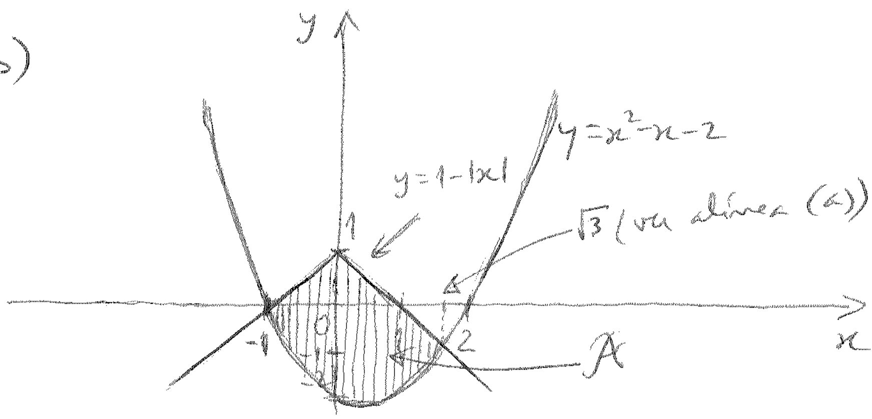
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$.

Impossível pois $x < 0$ aqui

Como $1 - |\sqrt{3}| = 1 - \sqrt{3}$ e $1 - |-1| = 0$, os pontos pedidos são $(\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$ e $(-1, 0)$.

(b)



C.A.: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

(c) $(\text{área de } A) = \displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} 1 - |x| - x^2 + x + 2 \, dx =$

$= \displaystyle\int_{-1}^{0} 1 + \overbrace{x - x^2 + x}^{2x} + 2 \, dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} 1 - \cancel{x} - x^2 + \cancel{x} + 2 \, dx =$

(com $1 + 2 = 3$ em ambos os integrais)

$= \left[-\dfrac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{0} + \left[-\dfrac{x^3}{3} + 3x \right]_{0}^{\sqrt{3}} = 0 - \dfrac{1}{3} - 1 + 3 - \dfrac{3\sqrt{3}}{3} + 3\sqrt{3} - 0$

$= \dfrac{-1 + 6 - 3\sqrt{3} + 9\sqrt{3}}{3} = \dfrac{5 + 6\sqrt{3}}{3}$.

5. $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x}\sqrt{3-t^2}\,dt}{x^2}.$$

Atendendo à continuidade do integral indefinido, $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{x^2}\sqrt{3-t^2}\,dt = 0$, logo temos aí em cima uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Tentemos aplicar a regra de Cauchy.

Como $\sqrt{3-t^2}$ é contínua, podemos aplicar o Teorema fundamental do Cálculo Integral e dizer que

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{3-t^2}\,dt = \sqrt{3-(x^2)^2}\cdot 2x$$

usando também a regra da cadeia

Temos então que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{3-t^2}\,dt}{\frac{d}{dx}x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x^4}\cdot\cancel{2x}}{\cancel{2x}} = \sqrt{3},$$

logo a regra de Cauchy é aplicável e permite concluir que o limite dado também é $\sqrt{3}$.

[<u>Obs.</u>: Também é possível resolver este exercício calculando-se primeiro o integral no numerador, mas essa via dá muito mais trabalho e está muito mais sujeita a enganos].

6. (a) $f(c)$ é um extremo local de $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se for um máximo local ou um mínimo local de f, onde $f(c)$ é um máximo local $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(c)$ é o máximo absoluto de $f|_{]c-\varepsilon, c+\varepsilon[}$ e é um mínimo local de f se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(c)$ é o mínimo absoluto de $f|_{]c-\varepsilon, c+\varepsilon[}$.

(b) 1.ª: extremo local.

2.ª: existe.

3.ª: interior.

4.ª: $f'(c) = 0$.

(c) [ver indicações para a prova na parte 4 da secção 1.3].

A. Caetano
22-01-2014