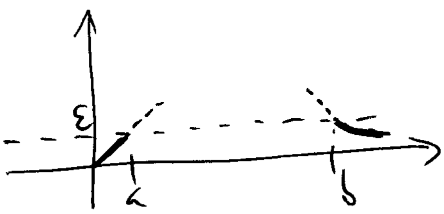
Cálculo I - agr. IV - 2014/15 - exame de recurso

Respostas a questões selecionadas

Nota prévia: Respostas — e até resoluções — a questões sobre expressões para derivadas ou primitivas podem ser facilmente obtidas usando as interfaces computacionais do WolframAlpha incorporadas em http://calculo.wikidot.com, na parte referente à matéria de Cálculo I.

1. (d) $f(0)=0$, $f(x)>0$ se $x>0$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.



Atendendo à continuidade de f em 0 e à definição de limite quando $x\to\infty$, atendendo ainda ao sinal de f, existem $a, b, \varepsilon>0$ tais que $f(a)=f(b)=\varepsilon$ (ver figura).

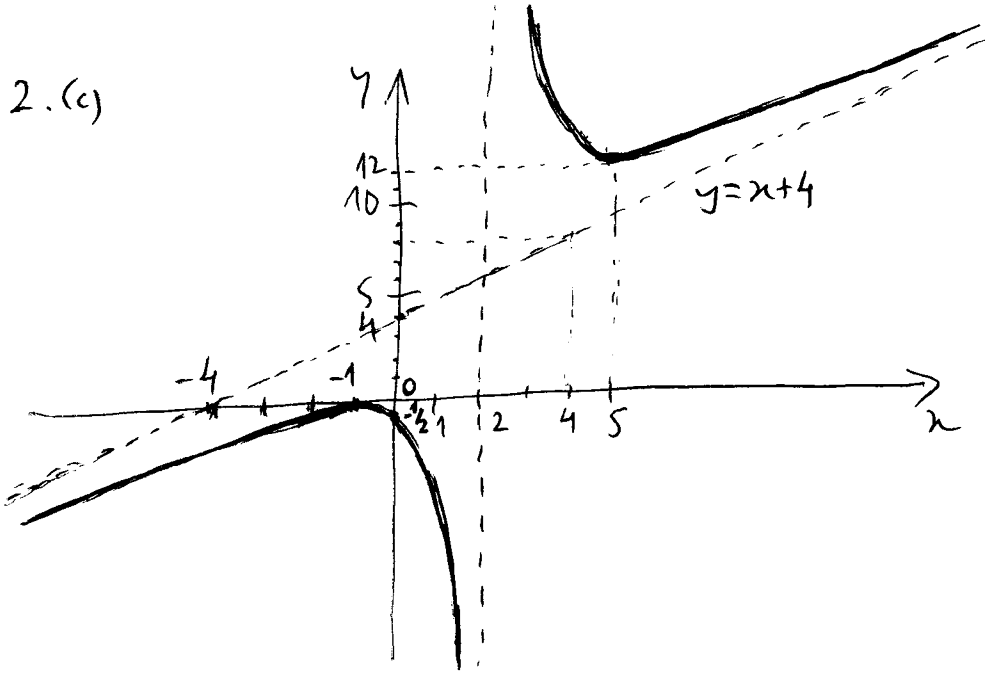
Como f é regular em $[a,b]$ (pelas alíneas (a) e (b)), então o Teorema de Rolle garante que

$$\exists\, c\in\,]a,b[\,:\ f'(c)=0.$$

Assim, existe pelo menos um ponto crítico de f em $\mathbb{R}^+$.

Como f é ímpar $\left(f(-x)=\dfrac{\ln(1+(-x)^2)}{-x}=-f(x)\right.$ para $x\neq 0$; $\left.f(0)=0\right)$, o seu gráfico é simétrico relativamente à origem das coordenadas, logo, por simetria, existe também outro ponto crítico de f em $\mathbb{R}^-$ (usou-se tb a interpretação geométrica da derivada nesta conclusão).

2. (c)



Para além da quantificação feita das assíntotas vertical $x=2$ e oblíqua $y=x+4$, no esboço acima clarifica-se também onde ocorre a intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados, algo que não se consegue perceber muito bem no esboço produzido pelo CAS, o qual pode dar erradamente a entender que a intersecção ocorre na origem das coordenadas.

3. $f(x) := \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$

Se $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, então $\sin x \in \left]-1,1\right[$. Como a variável de integração t varia entre 0 e $\sin x$, onde $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ é contínua (pois $\sin x$ mantém-se dentro do intervalo $\left]-1,1\right[$), então esta função é também integrável à Riemann aí.

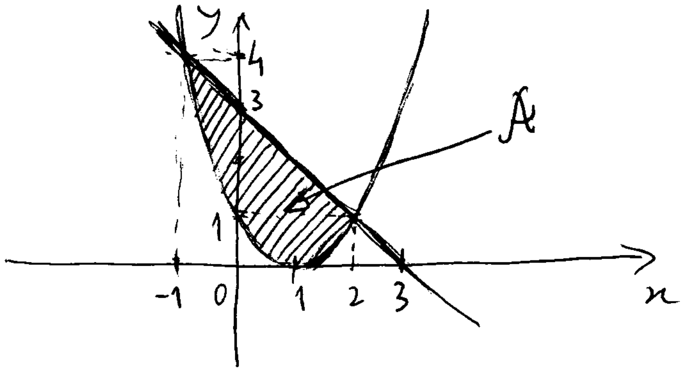
Sendo contínua podemos também aplicar o Teorema fundamental do Cálculo Integral e a regra da cadeia e obter, para $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} \cdot \cos x$$

$$= \frac{\cos x}{|\cos x|} \overset{\Delta}{=} -1$$

pois em $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ o cosseno é negativo

5. (b)

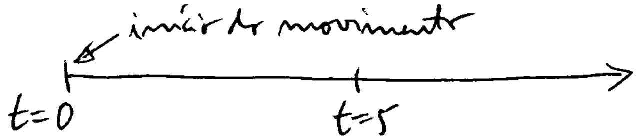


(c) área de A: $\displaystyle\int_{-1}^{2} 3-x-(x-1)^2\,dx =$

$$= \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 6-2-\frac{1}{3}+3+\frac{1}{2}-\frac{8}{3}$$

$$= 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

6. (a)



$$p''(t) = 6\sqrt{1-\frac{t}{5}}, \quad t \in [0,5].$$

$$p'(t) = \int 6\sqrt{1-\frac{t}{5}}\,dt = -30\int -\frac{1}{5}\left(1-\frac{t}{5}\right)^{1/2} dt$$

$$= -30\,\frac{\left(1-\frac{t}{5}\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C_1 = -20\left(1-\frac{t}{5}\right)^{3/2} + C_1$$

Como nos dizem que $p'(0)=0$, então

$$0 = p'(0) = -20 + C_1, \text{ donde } C_1 = 20,$$

e portanto $p'(t) = -20\left(1-\frac{t}{5}\right)^{3/2} + 20$.

$$p(t) = \int -20\left(1-\frac{t}{5}\right)^{3/2} + 20\, dt =$$

$$= 100 \int -\frac{1}{5}\left(1-\frac{t}{5}\right)^{3/2} dt + \int 20\, dt$$

$$= 100\, \frac{\left(1-\frac{t}{5}\right)^{5/2}}{\frac{5}{2}} + 20t + C_2$$

$$= 40\left(1-\frac{t}{5}\right)^{5/2} + 20t + C_2$$

Como escolhemos $t=0$ para início do movimento, então $p(0)=0$, logo

$$0 = p(0) = 40 + C_2 \text{ , donde } C_2 = -40$$

e portanto

$$p(t) = 40\left(1-\frac{t}{5}\right)^{5/2} + 20t - 40.$$

(b) Como escolhemos $t=0$ para início do movimento, o final da corrida ocorre quando $t=5$:

$$p'(5) = -20\left(1-\frac{5}{5}\right)^{3/2} + 20 = 20.$$

7. Existe o exemplo pedido. Por exemplo, $f(x)=-1$ e $g(x)=\frac{1}{x^2}$ para $x \in [1,\infty[$:

(a) $f(x) = -1 < 0 < \frac{1}{x^2} = g(x), \ \forall x \in [1,\infty[$.

(b) $\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty -1\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b -1\,dx = \lim_{b\to\infty} [-x]_1^b =$

$= \lim_{b\to\infty} (-b+1) = -\infty$: diverge.

(c) $\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b =$

$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1$: converge.

fev. 2015