Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2014/15**

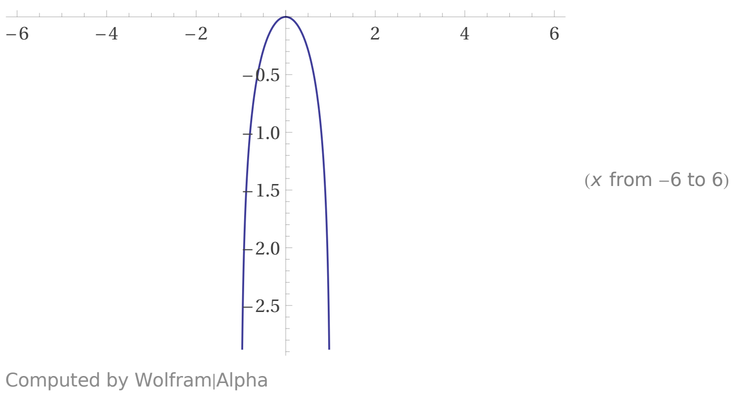
teste global Duração: 3h00

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão
$$f(x) = -x + \sqrt{(x-2)^2}.$$
   (a) Estuda a continuidade e a diferenciabilidade de f.
   (b) Determina a função derivada de f.
   (c) Diz, justificando, se a equação $f(x) = 1$ tem ou não solução no intervalo $[0, 1]$.
   (d) Escreve a equação da reta perpendicular ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.
   (e) Determina, caso existam, os pontos críticos e os extremos absolutos de $f|_{[0,2]}$.

2. Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := \ln(1 - x^2)$.
Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).



   (a) Faz o estudo analítico completo desta função (segue a seguinte lista de verificação: domínio; interseção com os eixos coordenados; *simetria*; assíntotas; intervalos de monotonia e extremos (e extremantes) locais; concavidades e pontos de inflexão).
   (b) Com base no estudo realizado na alínea anterior, faz o teu próprio esboço do gráfico da função, evidenciando as características determinadas pelo estudo analítico e eliminando eventuais erros contidos na figura produzida pelo CAS (os quais deverás então apontar).

3. Calcula
$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{e^x} \frac{1}{\ln t}\, dt$$
no conjunto dos pontos onde esta derivada existe (e indica que conjunto é esse).

4. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$;

   (b) $\dfrac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$;

   (c) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}}$.

   Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) utiliza uma mudança de variável.

5. Seja $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 \leq y \leq 2 - |x|\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = x^2$ e de $y = 2 - |x|$.
   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(-1,1)$ e $(1,1)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

6. Um condutor de automóvel, ao aperceber-se de veículos parados no meio da estrada alguns metros à sua frente, começa de imediato a travar, demorando exatamente 4 segundos até parar completamente. Supõe que o automóvel em causa desacelerou durante esses 4 segundos de acordo com a expressão $3t$, em metros por segundo ao quadrado, onde t designa a variável tempo.

   (a) Qual era a velocidade, em metros por segundo, do automóvel no início da travagem?

   (b) Qual foi a distância, em metros, percorrida pelo automóvel durante aqueles 4 segundos de travagem?

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável em qualquer intervalo $[\alpha, \beta]$ de números reais. Sejam $c, d \in \mathbb{R}$. Mostra que se os integrais impróprios $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ e $\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ convergem então também os integrais impróprios $\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx$ e $\int_{d}^{\infty} f(x)\,dx$ convergem e

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\infty} f(x)\,dx.$$

   Nota: Não vale invocar a convergência do integral impróprio $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, pois é precisamente o resultado que se pede para se mostrar que justifica a conhecida definição de convergência para tal integral.

FIM

Cotação:

1. 3;   2. 5;   3. 1,5;   4. 4;   5. 3;   6. 2;   7. 1,5.