Séries Numéricas e de Funções

1. Séries Numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1.1. Série Geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \text{ converge se e só se } |r| < 1.$$

Nesse caso, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ ou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}$.

1.2. Séries Telescópicas

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+k}) \text{ converge se e só se}$$
$$\lim\,(u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k}) \text{ existir e for finito.}$$

A soma efectua-se escrevendo a expressão da sucessão de somas parciais S_n, simplificando pela propriedade telescópica dos somatórios e calculando o seu limite.

1.3. Séries de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge se e só se } p > 1.$$

Se $p = 1$, temos a série harmónica, que é divergente.

1.4. Condição Necessária de Convergência

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ converge } \Rightarrow \lim u_n = 0$$

É utilizada apenas para provar que séries divergem.

$$\lim u_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ diverge}$$

1.5. Séries de Termos Não Negativos (STNN)

1.5.1. 1º Critério de Comparação para STNN

Sejam $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ duas STNN tais que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n.$$

Então:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge } \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge} \end{cases}$$

1.5.2. 2º Critério da Comparação para STNN

Sejam $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ duas STNN e

$$L = \lim \frac{a_n}{b_n}.$$

Se

- $L \in]0, +\infty[$ então as séries são da mesma natureza (ambas convergentes ou ambas divergentes);
- $L = 0$ então, a partir de certa ordem, o denominador é maior que o numerador;
- $L = +\infty$ então, a partir de certa ordem, o numerador é maior que o denominador.

Se $L = 0$ ou $L = +\infty$, a conclusão segue da aplicação do 1º Critério da Comparação.

1.5.3. Critério Integral

Seja $f : [1, +\infty[$ uma função contínua, positiva e decrescente. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge se e só se } \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergir.}$$

1.6. Séries Alternadas

1.6.1. Critério de Leibniz (Condição Suficiente de Convergência da Série Alternada)

Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ uma série alternada (a_n é uma STNN).

Se $a_n \searrow 0$ (a_n for decrescente e $\lim a_n = 0$) então a série alternada é convergente.

1.6.2. Convergência Simples e Absoluta

- Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ convergir e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ também, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é absolutamente convergente;
- Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ convergir mas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ não, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é simplesmente convergente.

É sempre verdade que se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ convergir então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ também.

Para verificar se a série dos módulos é convergente, basta notar que é uma STNN por definição e aplicar os critérios convenientes.

1.7. Critérios da Razão e da Raiz

Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não nulos (podem ser negativos).

- No critério da razão, seja $L = \lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$;
- No critério da raiz, seja $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$.

Se:

- $L < 1$ então a série é absolutamente convergente;
- $L > 1$ então a série é divergente;
- $L = 1$ então o teste é inconclusivo.

2. Séries de Potências (de Funções)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

chama-se uma série de potências de $x - a$ ou centrada em $a \in \mathbb{R}$.

2.1. Série de Taylor

Seja $f : D_f \in \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ e $a \in D_f$. Chama-se série de Taylor de f centrada em a à série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

que pode ser derivada e integrada termo-a-termo.

Se $a = 0$, chama-se série de MacLaurin, sendo as mais conhecidas:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2.2. Raio de Convergência

O raio de convergência da série é $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

- A série converge absolutamente quando $|x - a| < R$, ou seja, para $x \in]a - R, a + R[$;
- A série diverge quando $|x - a| > R$, ou seja, para $x \in]-\infty, a - R[\cup]a + R, +\infty[$;
- Pode convergir ou divergir para $x = a - R$ e $x = a + R$. Nestes dois pontos, obtemos uma série numérica cuja convergência tem de ser testada caso a caso, aplicando os critérios convenientes.