1. Se eu correr 5 Km a uma velocidade média de 12 Km/h e depois outros 5 Km a uma velocidade média de 8 Km/h, qual é a velocidade média com que eu corri os 10 Km totais?

   A relação entre velocidade média v, distância percorrida d e tempo t gasto para a percorrer é $v = d/t$. Assim, demorei $\frac{5}{12}$ h a percorrer os primeiros 5 Km e $\frac{5}{8}$ h a percorrer os restantes 5 Km. A velocidade média pedida é então dada por

$$\frac{10}{\frac{5}{12}+\frac{5}{8}} = \frac{240}{25} = 9,6 \text{ Km/h}.$$

2. Considera a função f, real de variável real, dada pela seguinte expressão:

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Estuda a continuidade e a diferenciabilidade de f no ponto 0.

   $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$
   Logo a função é diferenciável em $x = 0$, sendo 0 o valor da sua derivada nesse ponto. Consequentemente f é contínua em $x = 0$.

   (b) Mostra que a equação $f(x) = \frac{1}{3}$ tem solução no intervalo $[0, 1]$.

   A função f é contínua em $[0, 1]$, $f(0) = 0$ e $f(1) = e^{-1}$. Como $f(0) < \frac{1}{3} < f(1)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy existe $x \in \,]0, 1[$ tal que $f(x) = \frac{1}{3}$.

   (c) Determina a função derivada de f.

   Na alínea 2a determinou-se que $f'(0) = 0$. No caso $x \neq 0$, $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + x(-x^{-2})'e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$. Logo,

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}(1+\frac{2}{x^2}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   (d) Escreve a equação da reta perpendicular ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

   $m = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{e}{3}$
   $y - e^{-1} = -\frac{e}{3}(x-1)$
   $y = -\frac{e}{3}x + \frac{e^2+3}{3e}$

   (e) Determina, caso existam, os pontos críticos e os extremos absolutos de $f|_{[-1,1]}$.

   Os pontos críticos de $f|_{[-1,1]}$ são os pontos do intervalo $]-1, 1[$ tais que $f'(x) = 0$.

   Como $e^{-\frac{1}{x^2}}(1+\frac{2}{x^2}) \neq 0$, qualquer que seja $x \neq 0$, e $f'(0) = 0$, $x = 0$ é o único ponto crítico de $f|_{[-1,1]}$.
   Como $f|_{[-1,1]}$ é contínua e $[-1, 1]$ é um intervalo limitado e fechado, pelo Teorema de Weierstrass a função tem máximo e mínimo absolutos. Como a função é diferenciável em $]-1, 1[$ e tem apenas um ponto crítico, os extremos absolutos são atingidos nos pontos fronteira do intervalo ou no ponto crítico.

$$f(-1) = -e^{-1} \quad f(1) = e^{-1}$$

   Como $f(-1) < f(0) < f(1)$, $f(-1)$ é mínimo absoluto e $f(1)$ é máximo absoluto.