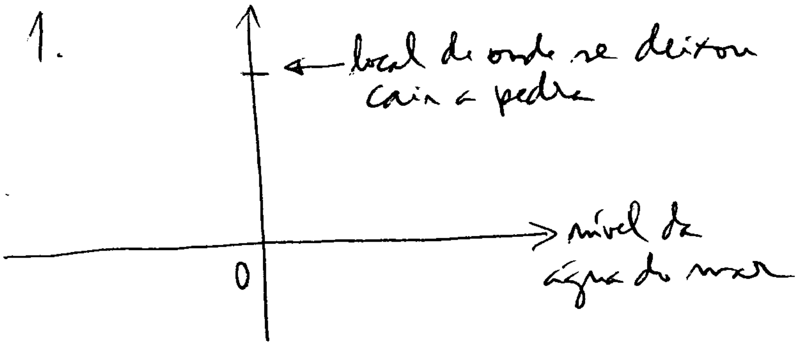
4º T.P.C. – Resolução

1.



Se a aceleração da pedra é 9,8 durante todo o tempo, então, por definição (e por propriedades de primitivização),

$$v = -9,8t + c_1 ,$$

escolheu-se o sinal menos para ser coerente com o sentido positivo escolhido no diagrama acima

onde v é a velocidade da pedra ao longo do trajeto. Considerando o início da queda quando $t=0$, c_1 será então a velocidade inicial, ou seja, $c_1=0$ (pois se diz que a pedra é deixada cair).

Novamente por definição (e por propriedades de primitivização),

$$e = -9,8\frac{t^2}{2} + c_2 ,$$

onde e é a posição da pedra ao longo do trajeto.

Como consideramos que $t=0$ corresponde ao início da queda, c_2 será a posição inicial, que é o que queremos determinar.

Como nos é dito que $e=0$ quando $t=5$, então $c_2 = 0 + 4,9\times 5^2 = 122,5$ m.

2. $$f(x)=\begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2}(x+2)\right), & -2\leq x<-1 \\ -x+1, & -1\leq x<\frac{3}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2x+5}}, & \frac{3}{2}\leq x\leq 2 \end{cases}$$

(a) $-2\leq x<-1 \Leftrightarrow 0\leq x+2<1 \Leftrightarrow 0\leq \frac{\pi}{2}(x+2)<\frac{\pi}{2}$.

Quando x se aproxima de -1, $\frac{\pi}{2}(x+2)$ aproxima-se de $\frac{\pi}{2}$ por valores inferiores, logo $\tan\left(\frac{\pi}{2}(x+2)\right)$ tende então para $+\infty$.

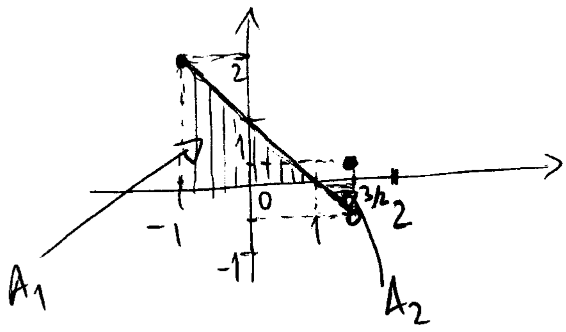
Em particular, f é ilimitada em $[-2,-1]$, logo não é integrável aí.

Como $2x+5>0 \Leftrightarrow x>-\frac{5}{2}$ e $[\frac{3}{2},2]\subset]-\frac{5}{2},\infty[$, atendendo às expressões para f em $[-1,2]$ vemos que f só não é contínua em $\frac{3}{2}$, sendo limitada em $[-1,2]$: de facto, $-x+1$ é contínua em $[-1,\frac{3}{2}]$, logo limitada aí (e portanto também em $[-1,\frac{3}{2}[$) e $\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$ é contínua em $[\frac{3}{2},2]$, logo também limitada aí.

Por um dos critérios de integrabilidade, f é então integrável em $[-1,2]$.

Em $[-2,2]$ a função f não é integrável, pois se fosse também teria que ser em $\underbrace{[-2,-1]}_{\subset[-2,2]}$, onde já vimos que não é.

(b) Vimos na alínea anterior que f é integrável em $[-1,2]$, logo também é em $[-1,\frac{3}{2}] \subset [-1,2]$.



Pela interpretação geométrica do integral, se A_1 e A_2 forem as áreas das superfícies assinaladas, então

$$\int_{-1}^{3/2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3/2} f(x)\,dx$$

$$= A_1 - A_2 = \frac{2\times 2}{\cancel{2}} - \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{2}$$

$$= 2 - \frac{1}{8} = \frac{15}{8}.$$

Obs: Para efeitos do cálculo do integral, em $\frac{3}{2}$ podemos redefinir o valor da função para $-\frac{1}{2}$.

(c) $$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3/2} f(x)\,dx + \int_{3/2}^{2} f(x)\,dx$$

Obs: na alínea (a) vimos que f é integrável em $[-1,2]$

aditividade do integral

pela alínea anterior

$$= \frac{15}{8} + \int_{3/2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2x+5}}\,dx$$

$$= \frac{15}{8} + \frac{1}{2}\int_{3/2}^{2} 2.(2x+5)^{-1/2}\,dx$$

Fórmula de Barrow (pois a função também é primitivável no intervalo $[\frac{3}{2},2]$)

$$= \frac{15}{8} + \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{(2x+5)^{1/2}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right]_{3/2}^{2}$$

$$= \frac{15}{8} + \sqrt{9} - \sqrt{8} = \frac{15}{8} + 3 - 2\sqrt{2} = \frac{39}{8} - 2\sqrt{2}.$$