Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2014/15**

1.º teste Duração: 2h00
+15mn de tolerância

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arccot}(\ln(x+1)) & \text{se } x > 0 \\ \pi & \text{se } x = 0 \\ x+1 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

   (a) Esboça o gráfico de $y = \ln(x+1)$.

   (b) Determina o domínio de definição de f.

   (c) Determina o contradomínio de f.

   (d) Calcula, caso exista, o $\lim_{x\to 0} f(x)$ ou, no caso em que não exista, os respetivos limites laterais.

2. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}.$$

   (a) Estuda a continuidade e a diferenciabilidade de f.

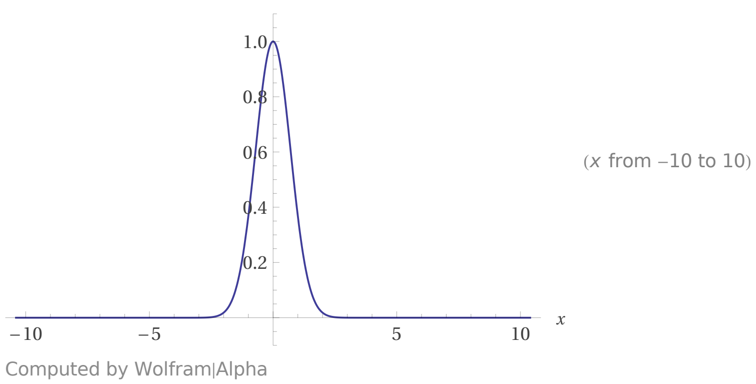
   (b) Determina a função derivada de f.

   (c) Diz, justificando, se a equação $f(x) = 5$ tem ou não solução no intervalo $[0,3]$.

   (d) Determina, caso existam, os pontos críticos e os extremos absolutos de $f|_{[0,3]}$.

3. Considera a função real de variável real dada pela expressão $f(x) := e^{-x^2}$.

   Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).



(a) Faz o estudo analítico completo desta função (segue a seguinte lista de verificação: domínio; interseção com os eixos coordenados; *simetria*; assíntotas; intervalos de monotonia e extremos (e extremantes) locais; concavidades e pontos de inflexão).

(b) Com base no estudo realizado na alínea anterior, faz o teu próprio esboço do gráfico da função, evidenciando as características determinadas pelo estudo analítico e eliminando eventuais erros contidos na figura produzida pelo CAS (os quais deverás então apontar).

4. (a) Define o conceito de limite de uma função $f(x)$ quando x tende para um ponto de acumulação a do domínio da função.

   (b) Considera $f(x)$ a função pico (igual a 0 se $x \neq 0$; igual a 1 se $x = 0$) e $g(x) = x^2 - 2x - 3$. Calcula, caso exista,

      i. $\lim\limits_{x \to -1} f(g(x))$.

      ii. $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$.

5. Se possível, dá um exemplo (pode ser gráfico) de uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) > f(1)$ e, quando exista, f' valha sempre zero. Se não for possível, explica porquê.

6. O Teorema de Lagrange diz-nos que se uma função f, real de variável real, é contínua em $[a,b]$ (com $a < b$) e diferenciável em $]a,b[$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Mostra que se, além disso, $|f'|$ também for limitada com majorante M em $]a,b[$ (i.e., $\forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \leq M$), então também é verdade que $\forall x, y \in [a,b],\ |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$.

FIM

Cotação:

1. 4; 2. 4; 3. 7; 4. 2,5; 5. 1; 6. 1,5.