Resolução do 2º teste de Cálculo I – agr. IV de 2014/15

1. (a) $\displaystyle\int x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx \underset{\text{por partes}}{=} \frac{x^2}{2} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} dx$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \int \frac{x}{x+1}\, dx$$

C.A.:

$$\begin{array}{r|l} x & x+1 \\ \hline -x-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$\int 1 - \frac{1}{x+1}\, dx = x - \ln|x+1| + \text{constante}$$

$$\therefore \int x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

(em intervalos do domínio da função dada)

(b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx$

C.A.: $\dfrac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$

irredutível

$x \neq 1$

$$\Leftrightarrow x+2 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x+2 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=1 \\ A-C=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ C=A-2 \\ A+A+A-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-x-1}{x^2+x+1} dx =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+x+1} dx - \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx}_{= \ln(x^2+x+1) + C^{te}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx - \int \frac{1}{x^2+x+1} dx}_{= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} dx}$$

C.A.: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$

$$= \int \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\overbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx}^{=du}}{\Big(\underbrace{\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}_{=u}\Big)^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C^{te}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$$

$$- \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

(em intervalos do domínio da função dada)

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}\,dx$.

Mudança de variável $x+1 = t^4 \Leftrightarrow x = t^4-1 = \varphi(t)$

$dx = 4t^3\,dt$ ← mantém sinal constante em $\mathbb{R}^+$, e $\varphi(\mathbb{R}^+)$ = domínio da função dada.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^4}+\sqrt[4]{t^4}}\cdot 4t^3\,dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2+t}\cdot 4t^3\,dt = \int \frac{4t^2}{t+1}\,dt$$

$$= \int 4t-4+\frac{4}{t+1}\,dt = 2t^2-4t+4\ln|t+1| + C$$

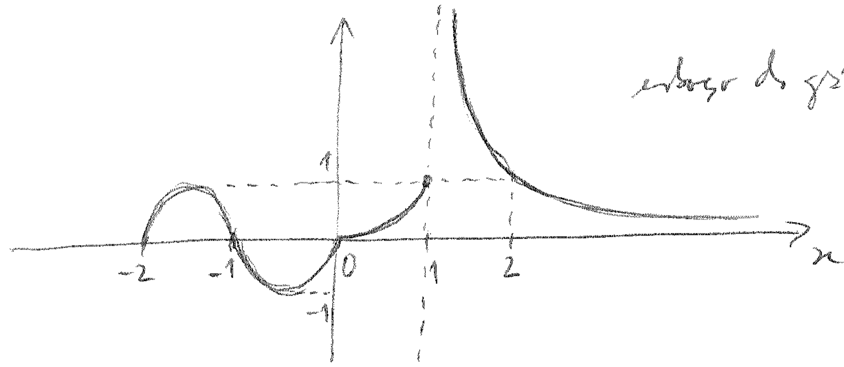
$$= 2\sqrt{x+1} - 4\sqrt[4]{x+1} + 4\ln\left(\sqrt[4]{x+1}+1\right) + C$$

(em intervalos do domínio da função dada)

C.A.:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{4t^2} & t+1 \\ \hline \cancel{-4t^2}-4t & 4t-4 \\ \hline \cancel{-4t} & \\ \cancel{+4t}+4 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$



esboço do gráfico de f

(a) Em $[-2,1]$ f é integrável pois é contínua.

Em $[1,2]$ f não é integrável pois é ilimitada.

Em $[-2,2]$ f não é integrável pois é ilimitada

(b) O integral existe em $[-2,0]$ pois f é contínua aí. Além disso, pelas conhecidas propriedades de simetria do seno, as áreas das regiões delimitadas pelo gráfico de f em $[-2,-1]$ e em $[-1,0]$ e pelo eixo das abcissas são iguais. Como num intervalo a função é positiva e no outro é negativa, pela interpretação geométrica do integral temos que o valor do integral em $[-1,0]$ é simétrico do valor do integral em $[-2,-1]$. Logo, pela aditividade do integral, $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = 0$.

(c) $$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-2}^{0} f(x)\,dx}_{\overset{\parallel}{0}\ (\text{por (b)})} + \int_{0}^{1} x^2\,dx \underset{\substack{\text{fórmula}\\ \text{de Barrow}}}{=} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2-|x|\}$.

(a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2-|x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2-|x| \\ \text{—} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x^2+|x|-2=0$

Caso $x \geq 0$: $x^2+|x|-2=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$

$\Leftrightarrow x=1$ (pois $x \geq 0$ aqui)

Caso $x<0$: $x^2+|x|-2=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$

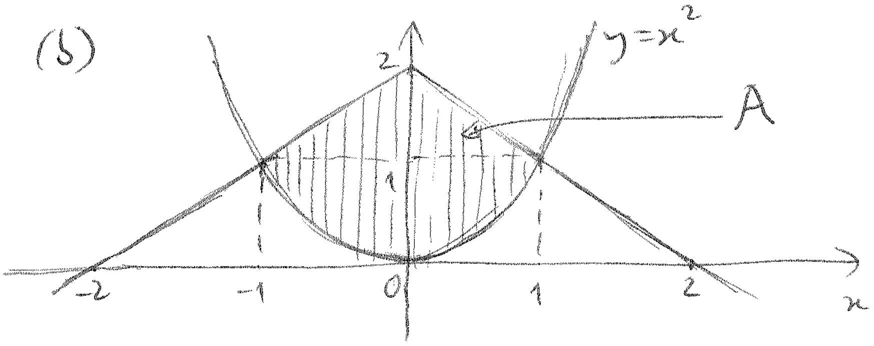
$\Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$

$\Leftrightarrow x=-1$ (pois $x<0$ aqui)

Assim, $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2-|x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=(-1)^2=1 \end{cases}$

$\therefore$ Pontos de interseção dos gráficos de $y=x^2$ e de $y=2-|x|$: $(1,1)$, $(-1,1)$.

(b)



(c) área de A: $\displaystyle\int_{-1}^{1} 2-|x|-x^2\,dx = \int_{-1}^{0} 2+x-x^2\,dx +$

$\displaystyle + \int_0^1 2-x-x^2\,dx = \left[2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$

$= +2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = 4-1-\frac{2}{3} = \frac{9-2}{3} = \frac{7}{3}$.

4. Como o domínio de $\frac{1}{\ln t}$ é $]0,1[\cup]1,\infty[$, antes de mais para que os integrais de Riemann $\int_{x^2}^{e^x} \frac{1}{\ln t}\,dt$ estejam definidos é necessário que

ou x^2 e e^x estejam ambos em $]0,1[$ ou

estejam ambos em $]1,\infty[$. Como, nessas condições, $\frac{1}{\ln t}$ é contínua no intervalo de extremos x^2 e e^x,

então essas condições são também suficientes para que tais integrais estejam definidos e também para a aplicação do Teorema fundamental do Cálculo Integral, que será feita mais abaixo.

C.A.: 1.º caso:

$$0<x^2<1 \wedge 0<e^x<1$$

$$\Leftrightarrow (-1<x<0 \vee 0<x<1) \wedge x<0$$

$$\Leftrightarrow -1<x<0$$

2.º caso:

$$x^2>1 \wedge e^x>1$$

$$\Leftrightarrow (x<-1 \vee x>1) \wedge x>0$$

$$\Leftrightarrow x>1$$

Assim, o conjunto onde a derivada que se calcula abaixo existe é o conjunto $]-1,0[\cup]1,\infty[$.

1.º caso: $$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{e^x} \frac{1}{\ln t}\,dt = \frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln t}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{e^x} \frac{1}{\ln t}\,dt\right) =$$

$$= -\frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{2}}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt + \frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{2}}^{e^x} \frac{1}{\ln t}\,dt$$

← Teorema fundamental do Cálculo Integral e regra da cadeia

$$= -\frac{2x}{\ln(x^2)} + \frac{e^x}{\ln(e^x)}$$

$$= -\frac{x}{\ln|x|} + \frac{e^x}{x}.$$

2º caso: $$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{e^x} \frac{1}{\ln t}\,dt = \frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{2} \frac{1}{\ln t}\,dt + \int_{2}^{e^x} \frac{1}{\ln t}\,dt\right)$$

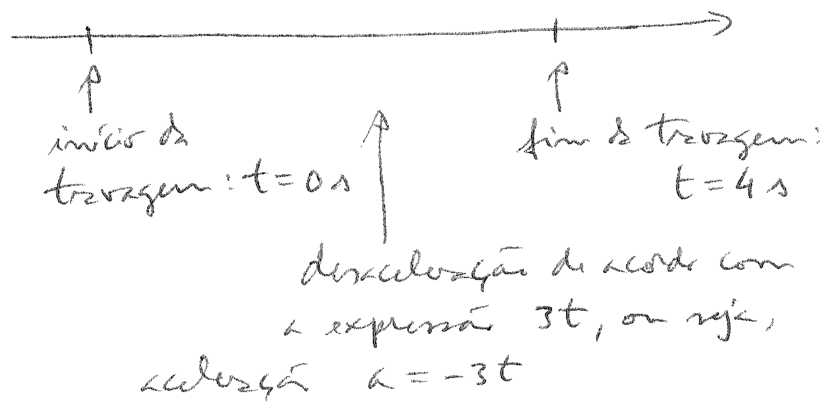
$$= -\frac{d}{dx}\int_{2}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt + \frac{d}{dx}\int_{2}^{e^x} \frac{1}{\ln t}\,dt$$

← Teorema fundamental do Cálculo Integral e regra da cadeia

$$= -\frac{2x}{\ln(x^2)} + \frac{e^x}{\ln(e^x)}$$

$$= -\frac{x}{\ln x} + \frac{e^x}{x}.$$

5.



(a) velocidade $= v = \int -3t\,dt = -3\frac{t^2}{2} + c_1$,

onde $v(0) = -3\times\frac{0^2}{2} + c_1$, ou seja, c_1 é a velocidade inicial. Como $0 = v(4) = -3\times\frac{4^2}{2} + c_1$, então $c_1 = 24$ (em m/s).

(b) $$\text{distância} = e = \int -\frac{3t^2}{2} + c_1 \, dt$$

$$= -\frac{t^3}{2} + c_1 t + c_2 ,$$

onde $0 = e(0) = -\frac{0^3}{2} + c_1 \times 0 + c_2$. Ou seja, e conjugando com o que se obteve em (a),

$$e = -\frac{t^3}{2} + 24t .$$

$$e(4) = -\frac{4^3}{2} + 24 \times 4 = -32 + 96 = 64 ,$$

ou seja, durante os 4 segundos de travagem o automóvel percorreu 64 metros.

6. $$\lim_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^d f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \left(\int_\alpha^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx \right)$$

aditividade do integral de Riemann e hipótese de f ser integrável em qualquer intervalo $[\alpha,\beta]$ de nºs reais

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} \int_\alpha^c f(x)\,dx + \lim_{\alpha \to -\infty} \int_c^d f(x)\,dx$$

constante relativamente a α

pois, por hipótese, $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ converge $\longrightarrow$

$$= \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx .$$

Por outro lado (e com justificações análogas)

$$\lim_{\beta \to \infty} \int_d^\beta f(x)\,dx = \lim_{\beta \to \infty} \left(\int_d^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx \right)$$

$$= \lim_{\beta \to \infty} \int_d^c f(x)\,dx + \lim_{\beta \to \infty} \int_c^\beta f(x)\,dx$$

$$= \int_d^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx .$$

Então, por definição, $\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx$ e $\int_{d}^{\infty} f(x)\,dx$

convergem e

$$\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{d} f(x)\,dx$$

e $$\int_{d}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{d}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx .$$

Somando membro a membro obtém-se

$$\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \cancel{\int_{c}^{d} f(x)\,dx}$$

$$+ \cancel{\int_{d}^{c} f(x)\,dx} + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx ,$$

que era o que se pretendia.

[illegible]
15-01-2015