Contenido

Este trabajo está compuesto de un total de tres investigaciones matemáticas:

1. La primera de ellas dirigida al ámbito de las funciones polinómicas. Está ampliamente difundida la idea de que para conseguir los extremos relativos o las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva representativa de una función Real se requieren herramientas aportadas por el Cálculo Diferencial. Este trabajo revela que en el caso de las Funciones Polinómicas Reales, en virtud de ciertas propiedades inherentes a ellas, se puede obtener esta información sin recurrir al Cálculo Diferencial. Hemos denominado a esta:
"Teoría elemental de extremos relativos para funciones polinómicas."
Se consiguen condiciones necesarias y criterios de clasificación análogos a los aportados por el Cálculo basándose en propiedades y teoremas relativos a esta clase de funciones, empleando herramientas de cálculo provenientes del Álgebra elemental.

2. La segunda investigación tomando como punto de partida un triangulo rectángulo dividido en otros dos, por su altura, en el ámbito de la Geometría Métrica (o sintética) explora la posibilidad de advertir en ellos la vinculación entre dos cualidades:
La igualdad entre sus ángulos y la proporcionalidad entre sus lados.
Aunque estas cualidades son bien conocidas para triángulos cualesquiera es tradicional abordar el tema desarrollando el concepto de Semejanza. Para este camino seguido usualmente se requiere previamente el estudio del Teorema de Thales, la definición de Homotecia y sus propiedades. En esta investigación con claras connotaciones didácticas, se trata de emplear exclusivamente el Teorema de Pitágoras junto con algunas propiedades clásicas para, luego de probar las propiedades mencionadas en triángulos rectángulos, extenderlas a triángulos cualesquiera y finalmente inferir el Teorema de Thales, a partir del de Pitágoras.

3. La tercera investigación consiste en la búsqueda de estrategias geométricas que nos permitan la construcción de sucesiones convergentes al número π.
Definido este como la razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia cualquiera, se impone la delicada tarea de definir el perímetro de la misma.
Conviniendo que el perímetro es el límite de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos en ella cuando el número de lados tiende a infinito, se plantea la cuestión de la existencia de este límite y su cálculo.
Planteado este objetivo la tarea puede abordarse de una infinidad de maneras.
En este caso, partiendo inicialmente de un hexágono regular inscripto combinando razonamientos geométricos con la aplicación de diversas fórmulas trigonométricas, obtendremos como primer resultado de nuestra búsqueda la interesante doble desigualdad:

$$\frac{3}{\cos(15)\,.\cos\left(\frac{15}{2}\right)\cdots\cdots\cos\left(\frac{15}{2^{n-2}}\right)} < \pi < \frac{3}{\cos(15)\,.\cos\left(\frac{15}{2}\right)\cdots\cos\left(\frac{15}{2^{n-2}}\right)} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{15}{2^{n-2}}\right)}$$

donde las sucesiones de los extremos son monótonas convergentes a π.

A pesar de que empleando estas fórmulas se obtiene casi una decena de cifras exactas después de la coma con la ayuda de cualquier calculadora científica corriente, y varias decenas con ayuda de cualquier ordenador, se aborda en el curso de la investigación la cuestión de obtener fórmulas que aumenten la cantidad de cifras exactas por cada iteración realizada.
Esta segunda etapa se anuncia más ardua que la primera, particularmente al intentar construir la fórmula que hemos denominado de trigésima-sección, proporcionando el valor de una cuerda que divide al arco asociado a una cuerda inicial en treinta partes iguales, permitiendo multiplicar por treinta los lados de un polígono.
Luego de obtener el nuevo par de sucesiones de convergencia "más veloz" al número π se realiza un estudio teórico comparativo que revela que el nuevo par converge unas (aproximadamente) cinco veces más rápido que la primera.
Es decir que por cada iteración realizada se necesitan aproximadamente cinco iteraciones practicadas con el primer par para obtener el mismo grado de precisión.

Índice temático

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 1

.1 Teoría elemental de extremos relativos para funciones polinómicas

En general para las funciones Reales ($f : R \to R$), se obtienen condiciones necesarias de existencia de extremo relativo, así como criterios de clasificación de los mismos, con el auxilio del Cálculo Diferencial.
Esto guarda una estrecha relación con el cálculo de la pendiente de la recta tangente a la curva representativa de una función Real, en aquellos puntos donde eventualmente existe.
En este trabajo, a partir de oportunas observaciones, definiciones y proposiciones demostradas, se desarrolla una teoría dirigida exclusivamente a las funciones polinómicas Reales según la cual se obtiene información sobre los tópicos anteriormente mencionados para funciones Reales prescindiendo del empleo del Cálculo Diferencial.
Esto es, se investigan propiedades inherentes a las funciones polinómicas, que permiten obtener candidatos a extremo relativo así como criterios (condiciones suficientes) de clasificación de los mismos.
Luego de una apropiada definición de recta tangente a la curva representativa de esta clase de funciones, como consecuencia del estudio realizado estaremos en condiciones de escribir su ecuación en un punto cualquiera de la misma.
A lo largo de la teoría expuesta se emplearán diversos teoremas clásicos sobre polinomios (Teoremas del Resto, de Descartes, de descomposición factorial, Unicidad del cociente y resto, de Identidad de polinomios, etc.), ellos no serán objeto de nuestro estudio.
Los citaremos oportunamente para justificar los razonamientos necesarios que permitirán concluir nuestras proposiciones. Añadiremos en esta presentación una breve definición de entorno de Reales y de extremo relativo para funciones polinómicas.

.2 Breve definición de entorno de Reales y de extremo relativo de una función polinómica

Definición de entorno de Reales de centro a

Dados un real a cualquiera y un $r > 0$, llamaremos entorno de Reales de centro a y radio r al conjunto:

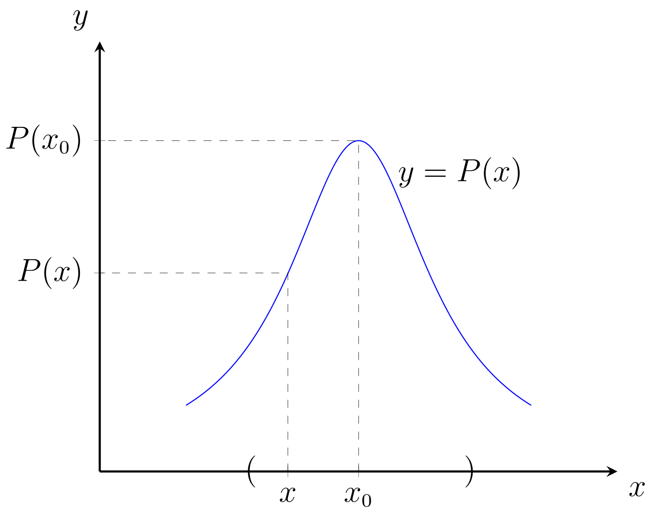
$$Ea, r = \{x : x \in R \ / \ a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r)$$

De forma más general, Ea puede denotar a cualquier intervalo de Reales que contenga al punto a sin que se trate necesariamente de un "entorno simétrico".

Cuando se habla de entorno reducido de centro a y radio r, se le suprime el centro y suele escribirse como:

$$E^{*}a, r = Ea, r - \{a\}$$

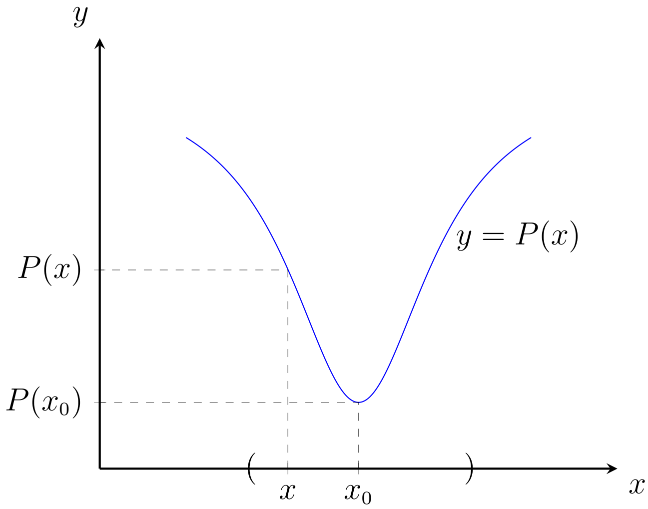
Definición de máximo relativo



Diremos que la función polinómica $y = P(x)$ presenta un máximo relativo en el punto $x = x_0$, si y solo si, existe un entorno centrado en x_0 tal que $P(x) < P(x_0)$ para todo x de dicho entorno con $x \neq x_0$.

La condición $P(x) < P(x_0)$ la expresaremos más frecuentemente en su forma equivalente: $P(x) - P(x_0) < 0$.

Definición de mínimo relativo



Diremos que la función polinómica $y = P(x)$ presenta un mínimo relativo en el punto $x = x_0$, si y solo si, existe un entorno centrado en x_0 tal que $P(x) > P(x_0)$ para todo x de dicho entorno con $x \neq x_0$.

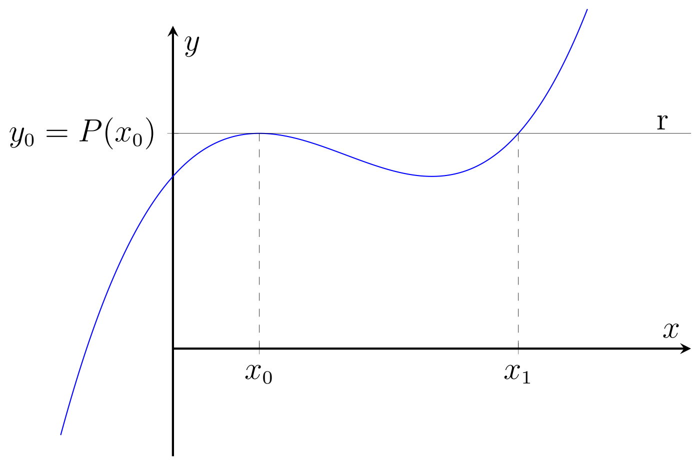
La condición $P(x) > P(x_0)$ la expresaremos más frecuentemente en su forma equivalente: $P(x) - P(x_0) > 0$.

.3 Planteo de un problema concreto como factor desencadenante de la Teoría

Propondremos ahora un problema concreto que nos servirá de inicio para nuestro desarrollo.

Planteo:
Determinar si existen los extremos relativos de la función polinómica:
$P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$

Suponiendo estos extremos existentes, nos valdremos de una posible representación gráfica que emplearemos como figura de análisis.



Tracemos ahora una recta r paralela a Ox por el punto (x_0, y_0), con x_0 la abscisa de nuestro extremo relativo y $P(x_0) = y_0$

Para hallar los puntos en común entre la recta y la curva representativa de $P(x)$ debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} y = P(x) \\ y = y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad P(x) = y_0 \quad \Rightarrow \quad P(x) = P(x_0) \quad \Rightarrow \quad P(x) - P(x_0) = 0$$

Dado que la recta r, por construcción contiene al punto (x_0, y_0) que además pertenece al gráfico de $y = P(x)$, es previsible que (x_0, y_0) sea solución del sistema planteado y al eliminar y del sistema, x_0 sea solución de la ecuación $P(x) - P(x_0) = 0$, que tendrá el grado de $P(x)$.
Como veremos a continuación, como consecuencia de haber trazado la recta r horizontal por el punto (x_0, y_0) donde $P(x)$ alcanza un extremo relativo, la ecuación de tercer grado tendrá raíz doble x_0.
En efecto, consideremos el polinomio $A(x)$ definido por la igualdad:

$$A(x) = P(x) - P(x_0)$$

Este polinomio admite raíz x_0 ya que $A(x_0) = P(x_0) - P(x_0) = 0$. Por el teorema de Descartes $A(x)$ es divisible por $(x - x_0)$, por lo que existirá un $Q(x)$ tal que:

$$A(x) = (x - x_0)Q(x), \quad \text{con} \quad gr\ Q(x) = 2$$

Para $Q(x)$ cociente de esta división tenemos dos posibilidades:

$$\text{Es } Q(x) = 0 \text{ ó } Q(x) \neq 0.$$

La segunda opción nos conduce a una contradicción ya que si x_0 fuese raíz simple de $A(x)$ este cambiaría de signo en el punto x_0, pero la hipótesis inicial de existencia de extremo en dicho punto, exige que sea $A(x) = P(x) - P(x_0) > 0$ ó $P(x) - P(x_0) < 0$ para todos los x de un entorno centrado en x_0, con $x \neq x_0$
Debe ser entonces $Q(x_0) = 0$.
Por la misma argumentación existirá otro polinomio $K(x)$ con $gr\ K(x) = 1$ tal que $Q(x) = (x - x_0)K(x)$.
Reemplazando $Q(x)$ en la expresión de $A(x)$:

$$A(x) = (x - x_0)(x - x_0)K(x) = (x - x_0)^2 K(x)$$

Como $K(x)$ es de primer grado tendrá una raíz $x_1 \neq x_0$ en virtud del extremo admitido, como se aprecia además en la representación cartesiana.
Finalmente como el coeficiente principal de $A(x) = P(x) - P(x_0)$ es el de $P(x)$, la descomposición factorial es:

$$A(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)$$

Si logramos hallar x_0 habremos obtenido la abscisa de nuestro extremo relativo (supuesto existente).
Nótese que que las conclusiones obtenidas son independientes de la clase de extremo presentado por $P(x)$ en el punto $x = x_0$, sólo se ha impuesto que $A(x)$ tenga signo constante en $E_(x_0)$.
Para continuar nuestro razonamiento, emplearemos las conocidas relaciones entre coeficientes y raíces.

Para un polinomio de tercer grado:

$$A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ de raíces } \alpha,\ \beta \text{ y } \gamma\text{, se cumple:}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

Aplicadas estas relaciones a:

$A(x) = P(x) - P(x_0) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16 - P(x_0) = (x - x_0)^2(x - x_1)$ con una raíz repetida, se tiene:

$$x_0 + x_0 + x_1 = \frac{-(-6)}{1}$$

$$x_0x_0 + x_0x_1 + x_0x_1 = \frac{9}{1}$$

$$x_0x_0x_1 = \frac{(16 - P(x_0))}{1}$$

Prescindiendo de la última y agrupando términos:

$$2x_0 + x_1 = 6$$

$$x_0^2 + 2x_0x_1 = 9$$

Para obtener una ecuación que solo contenga x_0, eliminamos x_1 del sistema:

$$x_1 = 6 - 2x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 + 2x_0(6 - 2x_0) = 9 \quad \Rightarrow \quad 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = 0$$

Antes de continuar, nótese que empleando métodos de Álgebra elemental, bajo la hipótesis de que $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$ admite un extremo relativo en $x = x_0$, este valor resulta ser raíz de otro polinomio de grado 2, $S(x) = 3x^2 - 12x + 9$, lo que implica una condición necesaria.
Independientemente de la resolución de este problema concreto, esta comprobación suscita la idea de una investigación teórica en el ámbito de las funciones polinómicas Reales que es precisamente nuestro objeto de estudio.
En particular, si cada polinomio $P(x)$ tendrá un $S(x)$ asociado y cómo establecer esta correspondencia por medio de una fundamentación teórica.

Las raíces de la ecuación:

$$3x_0^2 - 12x_0 + 9 = 0$$

nos proporcionan los puntos en los que se alcanzan los presuntos extremos relativos. Estas son:

$$\{x_0' = 1,\ x_0'' = 3\}$$

Para $x_0 = 1$, $A_1(x) = P(x) - P(1) = P(x) - 20 = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$
Efectuando las sucesivas divisiones de $A_1(x)$ por $(x - 1)$ obtenemos:

$$A_1(x) = (x - 1)^2(x - 4)$$

Como 1 es raíz doble de $A_1(x)$, no hay cambio de signo para $A_1(x)$ en un entorno de 1, por lo que $P(x)$ presenta extremo relativo en dicho punto.

Al ser:

$$sg\ A_1(x) \quad \begin{array}{cccccccc} - & - & 0 & - & - & 0 & + & + \\ \hline & & 1 & & & 4 & & \end{array}$$

Es $A_1(x) = P(x) - P(1) < 0$ en un entorno de 1, con $x \neq 1$ por lo que $P(x)$ presenta un máximo relativo en $x = 1$ por definición. Para $x_0 = 3$:

$$A_3(x) = P(x) - P(3) = P(x) - 16 = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Efectuando las sucesivas divisiones de $A_3(x)$ por $(x - 3)$ obtenemos:

$$A_3(x) = P(x) - P(3) = (x - 3)^2 x$$

Por la misma argumentación, $P(x)$ presentará también extremo relativo en $x = 3$ y al ser:

$$sg\ A_3(x) \quad \begin{array}{cccccccc} - & - & 0 & + & + & 0 & + & + \\ \hline & & 0 & & & 3 & & \end{array}$$

Es $A_3(x) = P(x) - P(3) > 0$ en un entorno de 3, con $x \neq 3$ por lo que $P(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = 3$.

La vinculación entre los extremos relativos de $P(x)$ en $x = x_0$ y la presencia de raíces de orden par, para $A(x)$ en dicho punto, se formaliza en el siguiente:

.4 Formulación del Teorema 1

"La condición necesaria y suficiente para que una función polinómica $y = P(x)$ admita un extremo relativo en el punto $x = x_0$, es que x_0 sea una raíz múltiple de orden par del polinomio $A(x) = P(x) - P(x_0)$."

Demostración:

Si $P(x)$ admite un extremo relativo en $x = x_0$, entonces $P(x) - P(x_0)$ tiene signo constante en un entorno centrado en x_0, con $x \neq x_0$, por definición.
Definido $A(x) = P(x) - P(x_0)$, se sigue que $A(x_0) = P(x_0) - P(x_0) = 0$
Al cumplirse:

$$A(x_0) = 0$$

$A(x)$ será divisible por $x - x_0$ (Teorema de Descartes) y es expresable:

$$A(x) = (x - x_0)Q_1(x)$$

La consideración $Q_1(x_0) \neq 0$ implicaría que $A(x)$ no cambia de signo en $(x - x_0)$ y entraríamos en contradicción con la supuesta existencia de extremo relativo para $P(x)$ en dicho punto.
Se desprende entonces $Q_1(x_0) = 0$.
Por la misma argumentación es expresable:

$$Q_1(x) = (x - x_0)Q_2(x)$$

Reemplazando Q_1 en la anterior expresión para $A(x)$:

$$A(x) = (x - x_0)^2 Q_2(x)$$

Si $Q_2(x_0) \neq 0$ el teorema está probado.
En caso contrario será $Q_2(x_0) = 0$ y existirá un polinomio $Q_3(x)$ tal que:

$$Q_2(x) = (x - x_0) Q_3(x)$$

Pudiendo expresarse:

$$A(x) = (x - x_0)^3 Q_3(x)$$

La consideración $Q_3(x_0) \neq 0$ nos reenvía a la incompatibilidad con la hipótesis de extremo relativo para $P(x)$ en $x = x_0$.
Al ser $Q_3(x_0) = 0$, existirá un $Q_4(x)$ de modo que $Q_3(x) = (x - x_0) Q_4(x)$ y entonces:

$$A(x) = (x - x_0)^4 Q_4(x)$$

Si $Q_4(x_0) \neq 0$ el teorema está probado, si no, se reitera el razonamiento hasta obtener:

$$A(x) = (x - x_0)^{2h} Q_{2h}(x)$$

con $h \in N$, $h \geqslant 1$ y $Q_{2h}(x_0) \neq 0$.
El número de pasos para obtener esta expresión es finito ya que está acotado por el propio grado de $A(x)$.
En efecto, de la última igualdad se desprende:

$$2h \leqslant gr\ A(x)$$

Recíprocamente, si partimos ahora de la hipótesis de que $A(x) = P(x) - P(x_0)$ admite raíz múltiple de orden par en $x = x_0$, podemos escribir:

$$A(x) = (x - x_0)^{2h} Q(x), \ \text{ con } \ Q(x_0) \neq 0$$

$A(x) = P(x) - P(x_0)$ tendrá signo constante en un entorno de x_0 y por definición, $P(x)$ presentará extremo en dicho punto, lo que completa la demostración.

Aplicaremos ahora sucesivamente el Teorema 1 en los casos concretos de polinomios de grados 2, 3 y 4. Estas aplicaciones además de revelar algunas propiedades relacionadas con el grado, nos permitirán en cada caso obtener una condición necesaria bajo la hipótesis de existencia de extremo.
Atendiendo a las conclusiones obtenidas se observarán patrones de comportamiento, que nos permitirán conjeturar y generalizarlas a polinomios de grado n.
Nótese que como consecuencia del Teorema 1, un polinomio de grado 1 no puede tener extremo relativo en ningún $x_0 \in R$.
En efecto, el correspondiente $A(x) = P(x) - P(x_0)$ tendrá también grado 1 y cambiará de signo en x_0.

.5 Aplicación del Teorema 1

Grado 2:

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$P(x)$ presenta extremo relativo en $x = x_0 \Leftrightarrow$ el polinomio $A(x) = P(x) - P(x_0)$ admite raíz múltiple de orden par en $x = x_0$ (Teorema 1).
Como $gr\ A(x) = gr\ P(x) = 2$, solo puede ser raíz doble.
Esto es:

$$A(x) = a(x - x_0)^2 \qquad \text{(i)}$$

Por otro lado se tiene:

$$A(x) = P(x) - P(x_0)$$

$$= ax^2 + bx + c - (ax_0^2 + bx_0 + c)$$

$$= a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0)$$

$$= a(x + x_0)(x - x_0) + b(x - x_0)$$

$$= (x - x_0)[a(x + x_0) + b]$$

Esta factorización nos muestra que el cociente $Q(x)$ de dividir $A(x)$ por $(x - x_0)$ es: $a(x + x_0) + b = Q(x)$
Pero considerando (i) para $A(x)$, también es $Q(x) = a(x - x_0)$
En virtud de la unicidad del cociente y resto para la división entera de polinomios es:

$$Q(x) = a(x - x_0) = a(x + x_0) + b \ \ \forall \ \ x \in R$$

Al ser $Q(x_0) = 0$, será asimismo $a(x_0 + x_0) + b = 0 \ \Rightarrow \ 2ax_0 + b = 0$
Entonces como consecuencia de que $P(x) = ax^2 + bx + c$ admite un extremo relativo en $x = x_0$ se desprende la condición (necesaria) de que el polinomio $S(x) = 2ax + b$ admita raíz x_0.

En el caso particular de ser $gr\ P(x) = 2$, la condición anterior además de ser necesaria, es suficiente.

En efecto partiendo de la condición $S(x_0) = 0$, se tiene:

$$2ax_0 + b = 0 \Rightarrow ax_0 + ax_0 + b = 0 \Rightarrow a(x_0 + x_0) + b = 0$$

por lo que x_0 resulta ser raíz del polinomio:

$$Q(x) = a(x_0 + x) + b$$

Como $Q(x_0) = 0$, será divisible por $(x - x_0)$ y es expresable:

$$Q(x) = a(x - x_0) \Rightarrow A(x) = P(x) - P(x_0) = (x - x_0)[a(x + x_0) + b]$$

$$= (x - x_0)a(x - x_0) = a(x - x_0)^2$$

y por el mismo Teorema 1, $P(x)$ admitirá extremo en $x = x_0$.
Las observaciones anteriores nos permiten obtener las coordenadas del extremo relativo de toda función polinómica de segundo grado.
Efectivamente, $P(x)$ admite extremo relativo en $x = x_0 \Leftrightarrow S(x_0) = 0$
$\Leftrightarrow 2ax_0 + b = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-b}{2a}$
Además $P(x_0) = P(-\frac{b}{2a}) = \frac{4ac-b^2}{4a}$, por lo que las coordenadas del extremo son:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \;\; y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Para clasificar dicho extremo analizaremos el signo de $A(x) = P(x) - P(x_0) = a(x - x_0)^2$, y al ser $(x - x_0)^2 > 0 \;\; \forall \;\; x \neq x_0$, será $sg\ A(x) = sg\ a$ en un entorno de x_0, por lo que:

1. Si $a > 0 \Rightarrow P(x) - P(x_0) > 0 \;\; \forall \;\; x \neq x_0$ y habrá mínimo relativo en $x = x_0$
2. Si $a < 0 \Rightarrow P(x) - P(x_0) < 0 \;\; \forall \;\; x \neq x_0$ y habrá máximo relativo en $x = x_0$

Grado 3:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \;\; a \neq 0$$

$P(x)$ presenta extremo relativo en $x = x_0 \;\; \Leftrightarrow \;\; A(x) = P(x) - P(x_0)$ admite raíz múltiple de orden par en dicho punto (Teorema 1).
Como $gr\ P(x) = 3$, sólo puede ser raíz doble. Esto es:

$$A(x) = (x - x_0)^2 Q(x) \;\; \text{con} \;\; Q(x_0) \neq 0 \;\; \text{y} \;\; gr\ Q(x) = 1$$

Por otro lado:

$$A(x) = P(x) - P(x_0) = ax^3 + bx^2 + cx + d - (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d)$$

$$= a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0)$$

$$= a(x - x_0)(x^2 + x_0 x + x_0^2) + b(x - x_0)(x + x_0) + c(x - x_0)$$

$$= (x - x_0)[a(x^2 + x_0 x + x_0^2) + b(x + x_0) + c]$$

Tenemos así dos factorizaciones que corresponden a $A(x)$ y deben coincidir.

$$A(x) = (x - x_0)^2 Q(x) = a(x - x_0)[a(x^2 + x_0 x + x_0^2) + b(x + x_0) + c], \ \ \forall x \in R$$

por lo que el cociente (único) de dividir $A(x)$ por $x - x_0$ admitirá también dos formas asimismo coincidentes.

$$(x - x_0)Q(x) = a(x^2 + x_0 x + x_0^2) + b(x + x_0) + c, \ \ \forall x \in R$$

Como el miembro izquierdo admite manifiestamente la raíz $x = x_0$, también la admitirá el miembro derecho, cumpliéndose que:

$$a(x_0^2 + x_0 x_0 + x_0^2) + b(x_0 + x_0) + c = 0$$

o bien:

$$3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0$$

x_0 resulta ser raíz del polinomio:

$$S(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Una condición necesaria de suponer que $P(x)$ presenta extremo relativo en $x = x_0$.

Grado 4:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \ \ a \neq 0$$

$P(x)$ presenta extremo relativo en $x = x_0 \ \Leftrightarrow \ A(x) = P(x) - P(x_0)$ admite raíz múltiple x_0 de orden par en dicho punto (Teorema 1).
Las opciones son:

1. $A(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$, con $Q(x_0) \neq 0$ y $gr\ Q(x) = 2$

2. $A(x) = a(x - x_0)^4$

Considerando el caso n°1, tendremos:

$$A(x) = P(x) - P(x_0) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e - (ax_0^4 + bx_0^3 + cx_0^2 + dx_0 + e)$$

$$= a(x^4 - x_0^4) + b(x^3 - x_0^3) + c(x - x_0^2) + d(x - x_0)$$

$$= a(x - x_0)(x^3 + x_0x^2 + x_0^2x + x_0^3) + b(x - x_0)(x^2 + x_0x + x_0^2)$$
$$+c(x - x_0)(x + x_0) + d(x - x_0)$$

$$= (x - x_0)[a(x^3 + x_0x^2 + x_0^2x + x_0^3) + b(x^2 + x_0x + x_0^2) + c(x + x_0) + d]$$

Como en los casos anteriores al considerar la división de $A(x)$ por $x - x_0$ se tiene por el caso n°1, que el cociente es $(x - x_0)Q(x)$ y también la expresión polinómica entre paréntesis rectos.
Por la referida unicidad del cociente y considerando que $(x - x_0)Q(x)$ admite manifiestamente raíz x_0, asimismo ocurrirá con la expresión entre paréntesis rectos, cumpliéndose:

$$a(x_0^3 + x_0^3 + x_0^3 + x_0^3) + b(x_0^2 + x_0^2 + x_0^2) + c(x_0 + x_0) + d = 0$$

o bien:

$$4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 + d = 0$$

x_0 resulta ser raíz del polinomio:

$$S(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Una condición necesaria de suponer que $P(x)$ admite extremo relativo en $x = x_0$.

Considerando el caso n°2, tendremos:

$$A(x) = a(x - x_0)^4 = (x - x_0)^2 a(x - x_0)^2$$

Designando con $K(x)$, se sigue que:

$$A(x) = (x - x_0^2)K(x)$$

Pudiendo adoptar $A(x)$ una estructura análoga al caso n°1 nos conducirá al mismo resultado:

$$S(x_0) = 0$$

La única diferencia radica en que $K(x_0) = 0$ mientras que $Q(x_0) \neq 0$.
Sin embargo el razonamiento efectuado en el caso n°1 será válido toda vez que $A(x)$ admita al menos dos raíces iguales a x_0.

.6 Recopilación de las condiciones necesarias en los casos estudiados, identificación de patrones y definición de sub-polinomio

Haremos ahora una pausa momentánea para ordenar los resultados obtenidos hasta el momento, en forma de tabla, donde figurará cada polinomio $S(x)$, asociado a su respectivo $P(x)$.

P(x)	**S(x)**
$ax^2 + bx + c$	$2ax + b$
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	$3ax^2 + 2bx + c$
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

La contemplación de la tabla sugiere claros patrones en la determinación de $S(x)$ a partir de su correspondiente $P(x)$.
Para transformar cada término de en su respectivo de $S(x)$, basta multiplicarlo por su grado y disminuir este último en una unidad; prescindiendo de su término independiente.

En forma genérica la correspondencia observada puede representarse:

$$ax^n \to nax^{n-1} \qquad n \geqslant 1$$

Atendiendo a estas observaciones daremos la siguiente:

Definición:

Dada una función polinómica $P : R \to R$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \;\; n \geqslant 1, \;\; a_n \neq 0$$

llamaremos sub-polinomio $S(x)$ asociado a $P(x)$ al siguiente:

$$S(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

Cuando se quiera enfatizar esta asociación se indicará con la notación $S_P(x)$.

De acuerdo a esta definición cada polinomio de grado $n \geqslant 1$ tendrá asociado un único polinomio $S(x)$ de grado $n-1$ siendo $S(x)$ independiente de a_0.
(Si P(x) tuviese grado cero, sería $P(x) = a_0$. En este caso definimos $S_P(x) \equiv 0$).
Esta independencia se formaliza en el siguiente:

.7 Teorema 2

La condición necesaria y suficiente para que dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$ tengan el mismo sub-polinomio $S(x)$ es que dichos polinomios difieran en una constante.

Demostración:

Sean en efecto dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$ que supondremos de grado no nulo.
Si tienen el mismo sub-polinomio $S(x)$ entonces por definición será:

$$gr\ S(x) = gr\ A(x) - 1$$

$$gr\ S(x) = gr\ B(x) - 1$$

por lo que resulta:

$$gr\ A(x) = gr\ B(x)$$

Pongamos:

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$B(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$S(x) = s_{n-1}x^{n-1} + \cdots + s_1 x + s_0$$

Se tiene por definición:

$$\begin{cases} s_{n-1} = na_n \\ \\ s_{n-1} = nb_n \end{cases} \Rightarrow a_n = b_n \qquad \begin{cases} s_{n-2} = (n-1)a_{n-1} \\ \\ s_{n-2} = (n-1)b_{n-1} \end{cases} \Rightarrow a_{n-1} = b_{n-1}$$

y en general se tendrá $a_i = b_i$ con $i = 1, 2, \cdots, n$ por lo que al considerar la diferencia:

$$A(x) - B(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0$$

serán nulos todos los coeficientes de x^i, con $i = 1, \cdots, n$ y entonces $A(x) - B(x) = a_0 - b_0$ que es constante para todo x.

Si partimos recíprocamente de $A(x) - B(x) = k$ para todo x real, con k constante, se tiene:

$$A(x) = B(x) + k$$

En virtud del Teorema de Identidad de Polinomios se deduce que $a_i = b_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.
Los respectivos sub-polinomios asociados a $A(x)$ y $B(x)$ son:

$$S_A(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

$$S_B(x) = nb_n x^{n-1} + (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2b_2 x + b_1$$

Al cumplirse $a_i = b_i$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ será asimismo $ia_i = ib_i$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ y en consecuencia será:

$$S_A(x) = S_B(x)$$

como se quería probar.

.8 Teorema 3

1. El sub-polinomio asociado al polinomio suma $(A+B)(x)$, es igual a la suma de los sub-polinomios asociados a cada uno de los sumandos $A(x)$ y $B(x)$. Esto es:
$$S_{A+B}(x) = S_A(x) + S_B(x)$$

2. Si un polinomio se multiplica por una constante su sub-polinomio queda multiplicado por dicha constante:
$$S_{K(p)}(x) = KS_P(x)$$

Haremos la demostración de la primera siendo la segunda más sencilla y evidente.

Demostración:

Sean $A(x)$ y $B(x)$ dos polinomios de grados m y n respectivamente con $m \geqslant n \geqslant 1$.

$$A(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^m - 1 + \cdots + a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$B(x) = \qquad b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

$$(A+B)(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^m - 1 + \cdots + a_{n+1}x^{n+1} + (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$$

Por definición es:

$$S_{A+B}(x) = ma_m x^{m-1} + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + n(a_n + b_n)x^{n-1} + \cdots + a_1 + b_1$$

Haciendo distributiva y reordenando términos:

$$S_{A+B}(x) = ma_m x^{m-1} + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + na_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1 +$$

$$nb_n x^{n-1} + \cdots + 2b_2 x + b_1 =$$

$$S_A(x) + S_B(x)$$

.9 Teorema 4

Sea $P(x)$ una función polinómica $P : R \to R$ con $gr\ P(x) \geqslant 2,\ \ x_0 \in R$.

$$A(x) = P(x) - P(x_0)$$

$S_P(x)$ es el sub-polinomio asociado a $P(x)$.
Entonces:

i) Existe un polinomio $H(x)$, con $gr\ H(x) \geqslant 1$ tal que $A(x) = (x - x_0)H(x)$

ii) $H(x_0) = S_P(x_0)$

Demostración:

Como $A(x_0) = P(x_0) - P(x_0) = 0$, $A(x)$ es divisible por $x - x_0$ por lo que existe $H(x)$ tal que:

$$A(x) = (x - x_0)H(x)_{(*)}$$

con $gr\ H(x) = gr\ A(x) - 1 = gr\ P(x) - 1$, y al ser $gr\ P(x) \geqslant 2$, es $gr\ P(x) - 1 \geqslant 1 \Rightarrow gr\ H(x) \geqslant 1$

Por otro lado es:

$$P(x) - P(x_0) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - (a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0) =$$

$$a_n(x^n - x_0^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_0^{n-1}) + \cdots + a_2(x^2 - x_0^2) + a_1(x - x_0) =$$

$$a_n(x - x_0)(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-1}) + \cdots + a_2(x - x_0)(x + x_0) + a_1(x - x_0) =$$

$$(x - x_0)[a_n(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \cdots + x_0^{n-1}) + \cdots + a_2(x + x_0) + a_1] = A(x)_{(**)}$$

Observando las expresiones (*) y (**) para $A(x)$ tenemos que tanto $H(x)$ como la expresión entre paréntesis rectos, son el cociente de dividir $A(x)$ por $(x - x_0)$ que en virtud de la unicidad del mismo deben coincidir, por lo que:

$$H(x_0) = a_n(x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \cdots + x_0^{n-1}) + \cdots + a_2(x_0 + x_0) + a_1 =$$

$$n a_n x_0^{n-1} + \cdots + 2a_2 x_0 + a_1 = S_P(x_0)$$

Este teorema nos dice que la imagen de x_0 a través de $H(x)$, cociente de dividir $A(x) = P(x) - P(x_0)$ por $(x - x_0)$, coincide con la imagen de x_0 a través del sub-polinomio $S_P(x)$, asociado a $P(x)$.

.10 Teorema 5

"Si un polinomio $P(x)$ admite una factorización de la forma: $P(x) = (x - x_0)^2 N(x)$ entonces, x_0 es raíz de su sub-polinomio $S_P(x)$. Esto es:

$$S_P(x_0) = 0\text{''}$$

Demostración:

Consideremos $A(x) = P(x) - P(x_0)$. Al ser $P(x) = (x - x_0)^2 N(x)$, es $gr\ P(x) \geqslant 2$ y estamos en las hipótesis del Teorema 4.

Existe un polinomio $H(x)$ tal que:

$$A(x) = P(x) - P(x_0) = (x - x_0)H(x)$$

con la condición: $H(x_0) = S_P(x_0)$

Por otro lado $P(x_0) = (x_0 - x_0)^2 N(x_0) = 0$ y entonces:

$$A(x) \equiv P(x) = (x - x_0)^2 N(x) = (x - x_0)(x - x_0)N(x)$$

Al cumplirse $A(x) = (x - x_0)H(x)$, resulta $(x - x_0)N(x) = H(x)$, por lo que $H(x_0) = 0$, pero siendo $H(x_0) = S_P(x_0)$, se obtiene:

$$S_P(x_0) = 0$$

.11 Teorema 6

"Si una función polinómica $P : R \to R$, con $gr\ P(x) \geqslant 2$, presenta un extremo relativo en $x = x_0$, entonces x_0 es raíz de su sub-polinomio $S_P(x)$"

Demostración:

$P(x)$ presenta extremo relativo en $x = x_0$ por hipótesis. Por Teorema 1, $A(x) = P(x) - P(x_0)$ admite raíz múltiple de x_0, de orden par.
Esto es: $A(x) = (x - x_0)^{2k} Q(x)$, con $k \in N, \ \ k \geqslant 1$.
Poniendo $A(x) = (x - x_0)^2 (x - x_0)^{2k-2} Q(x)$ y designando $N(x) = (x - x_0)^{2k-2} Q(x)$, es:

$$A(x) = (x - x_0)^2 N(x)$$

Aplicando el Teorema 5, x_0 será raíz de $S_A(x)$, es decir $S_A(x_0) = 0$.
De $A(x) = P(x) - P(x_0)$ se obtiene $P(x) - A(x) = P(x_0)$, que muestra que $P(x)$ y $A(x)$ difieren en una constante, y entonces por Teorema 2 tendrán el mismo sub-polinomio. Esto es:

$$S_P(x) = S_A(x) \ \ \forall \ \ x \in R$$

Haciendo $x = x_0, \ \ S_P(x_0) = S_A(x_0) = 0$, es decir:

$$S_P(x_0) = 0$$

como se quería probar.

Hasta el momento hemos hablado de condiciones necesarias de existencia de extremo, por un lado, valiéndonos de los sub-polinomios.
Las raíces de estos nos proporcionan los "candidatos" a extremo relativo, es decir, los puntos factibles donde estos extremos podrían alcanzarse.
Como criterio de clasificación disponemos de la condición necesaria y suficiente aportada por el Teorema 1.
El polinomio $A(x) = P(x) - P(x_0)$ debe admitir raíz múltiple de orden par en $x = x_0$ para asegurar la existencia de extremo. Para clasificar dicho extremo hará falta conocer el signo de $A(x)$ en un entorno de x_0 y frecuentemente conocer sus raíces, tarea que resultará más ardua y costosa a medida que aumenta el grado de $A(x)$ $(gr\ A(x) = gr\ P(x))$.
Daremos a continuación un criterio que nos permitirá decidir si en $x = x_0$ (raíz de $S_P(x)$) la función polinómica presenta un máximo o un mínimo relativo, o no tiene extremo, sin necesidad de hallar otras raíces de $A(x)$, aparte de x_0.
Previamente necesitaremos probar un teorema, similar al Teorema de conservación del signo para funciones Reales pero dirigido exclusivamente a polinomios, cuya fundamentación "elemental" será viable en el caso de que estos tengan raíces.
De todas formas existen numerosas situaciones en las que es posible probar que un polinomio tiene signo constante aunque no tenga raíces.
Dado que estamos desarrollando una Teoría elemental no pretendemos abordar con ella todos los resultados obtenidos por el Cálculo para funciones Reales en general. La idea es dar un indicio, un primer acercamiento teórico en circunstancias favorables, que permita enunciar reglas de acción fundamentadas.

.12 Teorema 7

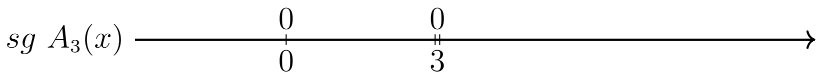
Sea una función polinómica $P : R \to R$, de grado $n \geqslant 2$, con n raíces distintas:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$$

$$x_0 \in R \ \text{ y } \ P(x_0) \neq 0$$

Entonces es posible encontrar un entorno centrado en x_0 de modo que $sg\ P(x) = sg\ P(x_0)$ para todos los x de dicho entorno.
Esto es, existe un $r > 0$ tal que $\forall\ x \in E_{x_0,r}$ es $P(x) > 0$ ó $P(x) < 0$.

Demostración:



Consideremos el $sg\ P(x)$ según la ilustración precedente. Como consecuencia del Teorema de descomposición factorial, $P(x)$ no puede cambiar de signo entre dos raíces consecutivas, a la derecha de la mayor α_n, ni a la izquierda de la menor α_1.
En los tres casos basta tomar como radio del entorno, la distancia de x_0 a "la más cercana" de las raíces.
Esto es:

$$r = min\{|x_0 - \alpha_i|,\ i = 1, 2, \cdots, n,\ P(\alpha_i) = 0\}$$

y entonces $sg\ P(x) = sg\ P(x_0)\ \forall\ x \in E_{x_0,r}$

Observación:
A pesar de que en la hipótesis hemos admitido raíces distintas, es fácil contemplar otros casos de raíces múltiples donde figurarán factores del tipo $(x - \alpha)^h$ en la descomposición factorial o incluso factores polinómicos de signo constante.

.13 Teorema 8

$P(x)$ es una función polinómica $P : R \to R$, con $gr\ P \geqslant 2$.
S_P es su sub-polinomio asociado, $x_0 \in R$ con $S_P(x_0) = 0$. $A(x) = P(x) - P(x_0)$
Entonces:

i) Existen $\lambda \in N$, $\lambda \geqslant 2$ y $Q : R \to R$, función polinómica, de modo que $A(x) = (x - x_0)^\lambda Q(x)$ y $Q(x_0) \neq 0$.

ii) Si λ es impar, $P(x)$ no presenta extremo en $x = x_0$.

iii) Si λ es par, $P(x)$ presenta extremo relativo en $x = x_0$ y es:

- máximo relativo si $Q(x_0) < 0$

ó

- mínimo relativo si $Q(x_0) > 0$

Demostración:

i) Como $A(x_0) = P(x_0) - P(x_0) = 0$, $A(x)$ es divisible por $(x - x_0)$, por lo que existe un polinomio $H(x)$ que cumple:

$$A(x) = (x - x_0)H(x)$$

Empleando el Teorema 4 se tiene:
$H(x_0) = 0$ y por hipótesis es $S_P(x_0) = 0$ por lo que $H(x_0) = 0$. De aquí, $H(x)$ es divisible por $(x - x_0)$ y existirá un $Q(x)$, tal que:

$$H(x) = (x - x_0)Q(x)$$

Reemplazando $H(x)$ en la expresión factorizada de $A(x)$:

$$A(x) = (x - x_0)(x - x_0)Q(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$$

Si $Q(x_0) \neq 0$, está probada la parte i).
En caso contrario x_0 será raíz de orden h de $Q(x)$ y podrá expresarse:

$$Q(x) = (x - x_0)^h Q_1(x), \text{ con } Q_1(x_0) \neq 0 \text{ y } h \geqslant 1$$

Reemplazando en la última expresión para , se obtiene:

$$x$$

tomando , como también queda probada la parte i).

ii) Considerando con siendo , si es impar, por el Teorema 1, no puede tener extremo relativo en .

iii) Si es par, por el mismo Teorema 1, presenta extremo relativo en .
y .
Si , por Teorema 7 existe un entorno centrado en de modo que:

$$x$$

Por lo que será .
tendrá un máximo relativo en , por definición.
Si , por Teorema 7, existe un tal que:

$$x$$

por lo que será .
tendrá un mínimo relativo en , por definición.

.14 Recopilación de procedimientos prácticos para identificar y clasificar extremos, ejemplos diversos resueltos

Pausa práctica:

Para darle un sentido práctico al estudio realizado hasta el momento, resumimos un conjunto de pasos a seguir para la determinación de presuntos extremos y su posterior clasificación empleando la teoría expuesta.

1. Calculamos el sub-polinomio asociado a , cuyos extremos relativos se buscan y resolvemos la ecuación (condición necesaria).

2. Para cada raíz de la ecuación anterior consideramos el polinomio y efectuamos las sucesivas divisiones por , hasta obtener:

$$x$$

3. Si es impar, no hay extremo relativo en .

4. Si es par (condición necesaria y suficiente), existe extremo en , cumpliéndose:

   - Máximo relativo si

   ó

   - Máximo relativo si .

Ejemplos diversos

1. Determinar si existen los extremos relativos de .

   ### Resolución:

   $$x$$

   $$x \text{ (condición necesaria)}$$

   La ecuación tiene raíz doble: , único candidato a extremo en este caso.
   Como .
   Al efectuar las sucesivas divisiones por , se obtiene:

   $$g$$

   al ser impar, no presenta extremo en .

2. Determinar si existen los extremos relativos de .

Resolución:

$$x$$

$$x \text{ (condición necesaria)}$$

La ecuación tiene raíz evidente . Al efectuar la correspondiente división, se obtiene:

$$c$$

por lo que resulta ser la única raíz Real.
Como .
Efectuando las correspondientes divisiones sucesivas de por , se obtiene:

$$f$$

En este caso , par, por lo que presenta extremo en , además .
Al ser , se trata de un mínimo relativo en .

Observación:

En el caso precedente no tiene raíces Reales y no estamos en las hipótesis del Teorema 7.
Sin embargo es manifiestamente positivo al ser , y se cumple que existe un entorno de 1, de modo que .
No asumiremos el compromiso de demostrar el Teorema 7 en el caso de no haber raíces Reales para , para no apartarnos del enfoque elemental que caracteriza la presente Teoría.
Con argumentos similares al aquí empleado, se pueden clasificar los presuntos extremos de una función polinómica, "extendiendo" el Teorema 7 (de conservación del signo) probando que tiene signo constante aunque no tenga raíces Reales.

3. Determinar si existen los extremos relativos de .

Resolución:

$$x$$

$$x \text{ (condición necesaria)}$$

Las raíces de la ecuación son: {1,3,4}

Para :

$$x$$

Efectuando las sucesivas divisiones de por , hasta encontrar un resto no nulo, obtenemos:

$$x$$

, y , como es par hay extremo en y al no tener raíces Reales la ecuación , tendrá signo constantemente positivo. Siguiendo los pasos prácticos recopilados, igual se cumple que y se concluye que presenta un mínimo en .

Para :

$$x$$

Efectuando las sucesivas divisiones de por obtenemos:

$$x$$

$$\text{con } \; x \; \text{ y } x$$

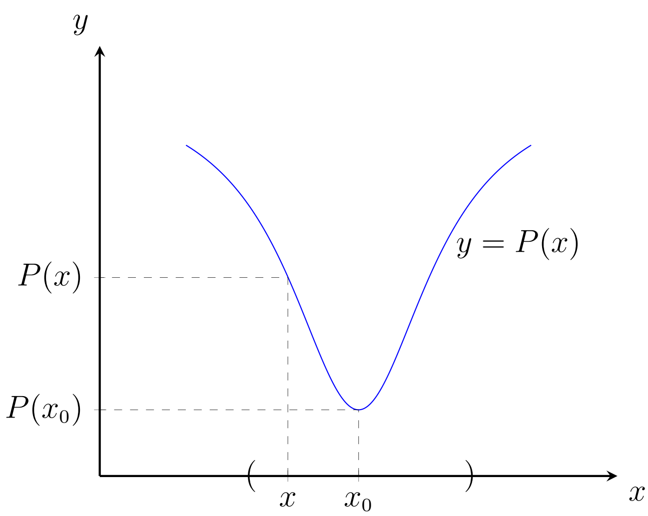
Al ser par, hay extremo en . En este caso la ecuación tiene raíces Reales, es aplicable el Teorema 7, al ser , presenta un máximo relativo en .

Para :

$$x$$

Aquí, es par y , por lo que tendrá un mínimo relativo en .

.15 Figura de análisis y definición elemental de recta tangente al gráfico de $y = P(x)$ en un punto (x_0, y_0) de la curva



Consideremos la curva representativa de la función polinómica (según figura), con y uno de sus puntos.
Toda recta no vertical admitirá una ecuación de la forma:

$$x \qquad \text{(i)}$$

Si le imponemos a esta recta que pase por tendremos:

$$x \qquad \text{(ii)}$$

Restando ordenadamente ambos miembros de las igualdades (i) y (ii) obtenemos:

$$x$$

La ecuación de la familia de rectas que pasando por el punto fijo , tiene su pendiente variable.

Una de las infinitas rectas de esta familia es la recta que pasa además por otro punto de la curva representativa de , y que tendrá por constitución al menos dos puntos en común con dicha curva.
Designando con la función lineal que pasa por y se tiene:

$$x$$

$$x$$

En consecuencia son raíces del polinomio que tendrá el grado de .
Podemos entonces factorizar el polinomio anterior en la forma:

$$x$$

Si ahora "desplazamos" el punto por la curva acercándolo hacia que mantenemos fijo, la secante cambiará su posición.
Variará y en consecuencia también el valor de:

$$x$$

En cuanto coincida con obtendremos la recta de la familia (no vertical), que tendrá un sólo punto en común con la curva y que denominaremos "tangente". La coincidencia de con implica .
Aunque la expresión anterior no nos proporciona el valor de , por anularse el denominador, la factorización de toma la forma:

$$x$$

Esta condición nos será de utilidad para definir recta tangente a la curva representativa de en uno de sus puntos con .
Atendiendo las consideraciones anteriores damos la siguiente:

Definición:

Diremos que la recta de ecuación es tangente a la curva representativa de la función polinómica en el punto , con y , si y sólo si, el polinomio admite una factorización de la forma:

$$x$$

siendo .

Empleando la definición precedente probaremos el siguiente:

.16 Teorema 9

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.17 Corolario del Teorema 9, ejemplo práctico resuelto

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Capítulo 2

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.1 Introducción al capítulo 2

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.2 Teorema de Pitágoras

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.3 Teoremas del cateto y de la altura

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.4 Teorema de los tres triángulos rectángulos

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.5 Teorema: Ángulos iguales implican lados proporcionales en triángulos rectángulos

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.6 Teorema: Lados proporcionales implican ángulos iguales en triángulos rectángulos

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.7 Propiedades de las proporciones

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.8 Teorema: Dos triángulos cualesquiera tienen sus lados proporcionales, si y solo si, tienen ángulos iguales

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.9 Teorema de Thales

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.10 Lema previo y Lugar Geométrico de Thales

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Capítulo 3

.1 Introducción al capítulo 3

.2 Compendio de fórmulas y propiedades geométricas previas, y deducidas en el curso de la investigación

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.3 Construcción de una familia de polígonos inscriptos de perímetros crecientes

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.4 Decrecimiento de los perímetros de los polígonos circunscriptos, de lados paralelos a los inscriptos

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.5 Construcción de p_n y $\mathcal{P}_n$ para los perímetros de ambas clases de polígonos

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.6 $(p_n, \mathcal{P}_n)$ forman un par de sucesiones monótonas convergentes (P.S.M.C.)

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.7 $\lim_{n\to\infty} p_n = \mathbb{P}$ y $\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n = \mathbb{P}^+$ con $\mathbb{P}$, perímetro de la circunferencia

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.8 Cálculo efectivo del número π partiendo de un hexágono inscripto, empleando el P.S.M.C. $\left(\frac{p_n}{2r}, \frac{\mathcal{P}_n}{2r}\right)$

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.9 Cálculo del número π con error menor a un valor prefijado

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.10 Aumento de la velocidad de convergencia empleando la fórmula n°15 de trigésima sección

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

.11 Apéndice de Fundamentos Teóricos

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.