Análise e Projeto de Algoritmos

SAFIRA - 2023/02

Domínio Assintótico de Funções

Domínio Assintótico de Funções

- O domínio assintótico de funções define a taxa de crescimento de uma função.
- Neste caso, estamos preocupados com entradas de números cada vez maiores.
- Quando a função em questão representa um algoritmo, o crescimento da função reflete o comportamento do algoritmo, independente da arquitetura de hardware ou da linguagem de programação utilizada.

Domínio Assintótico de Funções

- A função que representa um algoritmo chamamos de função de complexidade.
- Esta pode ser extraída diretamente do código do programa (veremos posteriormente) e define o custo de execução do programa.
- A função de complexidade de um algoritmo possui um limitante (domínio assintótico) que define qual a tendência de crescimento da função. Este domínio é definido pela função O.

Notação O (big-O)
Limite Superior

Notação O

- Assintoticamente, o custo de execução de um determinado algoritmo nunca é pior que o do seu **pior caso**.
- No máximo, o custo do algoritmo é tão ruim quanto ao limite.
- Lembrando que em muitos casos é melhor que o limite superior.

Notação O

- Uma função g(n) domina assintoticamente outra função f(n) se for possível mostrar que existem constante c>0 e $n_0 > 0$ tais que torne verdadeira a expressão:

$$|f(n)| \leq c.|g(n)| \; \forall \, n \geq n_0$$

Neste caso, dizemos que f(n) é O g(n)

Notação O

- Se f(n) é a função de complexidade do algoritmo, g(n) é a complexidade ou domínio assintótico do algoritmo.
- Dadas duas funções não negativas f(n) e g(n), cujo n tende ao infinito, dizemos que f(n) = O(g(n)), quando, não importando o quanto n cresça, **g(n) sempre será maior ou igual a f(n).**

Notação O

Exemplo:

- Um programador escreveu um programa cuja função de complexidade é f(n) = 3n. Mostre que f(n) = O(n^2)

Notação O

Resolvendo o exemplo:

Se f(n) = O(n^2) => existem c > 0 e $n_0 > 0$

$$|3n| \leq c.|n^2| \; \forall \; n \geq n_0$$

Para $n_0 = 1$ tem-se:

$|3.1| \leq c.|1^2|$

$|3| \leq c|1|$

c ≥ 3

Tomando c=3:

$$3n \leq 3n^2 \forall \; n \geq 1$$

Provando por indução, tem-se:

Notação O

$3n \leq 3n^2 \forall\, n \geq 1$

B.I => n=1
$3(1) \leq 3(1)^2$

$3 \leq 3$ => OK

H.I => $3n \leq 3n^2 \forall\, n \geq 1$

P.I => p(n) => p(n+1)
$3(n+1) \leq 3(n+1)^2$
$3n + 3 \leq 3(n^2 + 2n + 1)$
$3n + 3 \leq 3n^2 + 6n + 3$

Notação O

$$3n + 3 \leq 3n^2 + 6n + 3$$
$$3n \leq 3n^2 + 6n + 3 - 3$$
$$3n \leq 3n^2 + 6n$$

Reforço de desigualdade

Logo, 3n é O(n^2)

Exercício 5

Mostre que f(n) é O(g(n)) para:

a) $f(n) = n^2 \; e \; g(n) = (n+1)^2$

b) $f(n) = n^2 - 4n \; e \; g(n) = \frac{n^2}{2}$

c) $f(n) = n + 3 \; e \; g(n) = 10n^2$

d) $f(n) = 9n + 9 \; e \; g(n) = n^2$

e) $f(n) = 100n \; e \; g(n) = n^2$

f) $f(n) = n + 10 \; e \; g(n) = n^2 + 1$