Geometria analítica

A **Geometria Analítica** estabelece conexões entre geometria e álgebra, de modo que os conceitos da geometria são analisados por meio de processos algébricos. Ela foi criada pelo matemático francês René Descartes e, por isso, também é chamada de ***geometria cartesiana***.

Todos os objetos, figuras e relações já obtidas na geometria euclidiana clássica (geometria plana e espacial) são estudados na **geometria analítica** por meio da álgebra. Isso expande os conceitos da geometria, que agora podem ser analisados de um modo completamente novo, e introduz conceitos que ainda não podiam ser considerados ou que não podiam ser explorados ao máximo na geometria euclidiana. Um exemplo disso é o conceito de distância entre um ponto e uma reta.

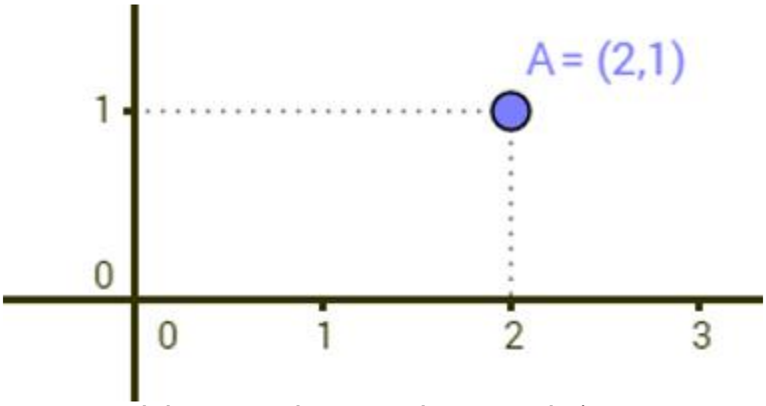
As bases da Geometria Analítica

A base da **geometria analítica** está em representar os pontos de uma reta utilizando os números reais. Cada ponto de uma reta é representado por (ou representa) um único número real. Esse número real é obtido pela distância entre o referido ponto e a origem da reta, que é o ponto relacionado com o número zero.

O conceito de distância, portanto, é um dos mais importantes dentro da **Geometria Analítica**. Por meio dele são definidos outros conceitos importantes, como os de círculo e circunferência. Além disso, a maioria das definições algébricas de figuras geométricas é obtida por intermédio do conceito de distância.

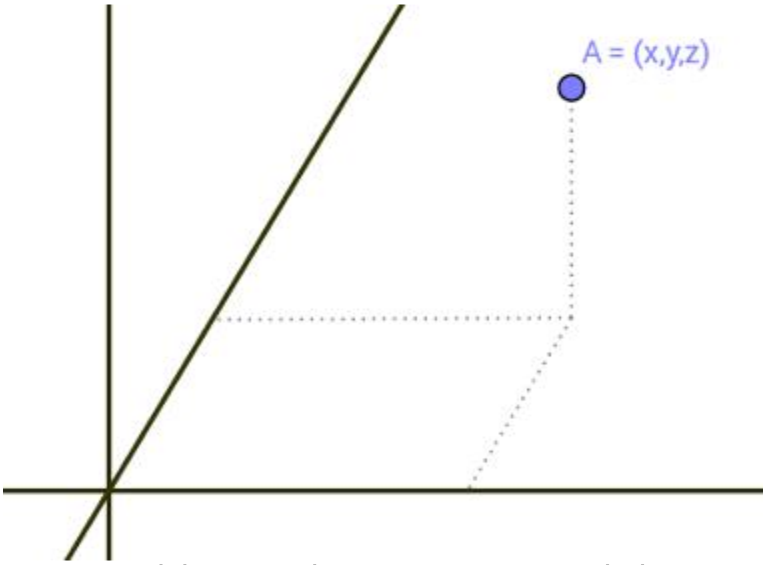
Exemplo de representação do ponto de uma reta por um número real

Posteriormente, essa ideia foi expandida para a representação de pontos no plano, de modo que cada ponto do plano é representado por um único par de números reais conhecido como par ordenado. A imagem abaixo ilustra como o par ordenado (2,1) representa o ponto A.



Exemplo da representação de um ponto no plano por um par de números reais

Já os pontos do espaço são representados por um conjunto de três números reais, conhecidos como *ternos ordenados*. Cada terno ordenado representa apenas um único ponto no espaço.



Exemplo da representação de um ponto no espaço por um terno ordenado

Se um ponto pertence a uma reta e é representado por um número real, dizemos que o espaço onde esse ponto está localizado (a reta) possui apenas uma dimensão e o número real é chamado de *coordenada do ponto*.

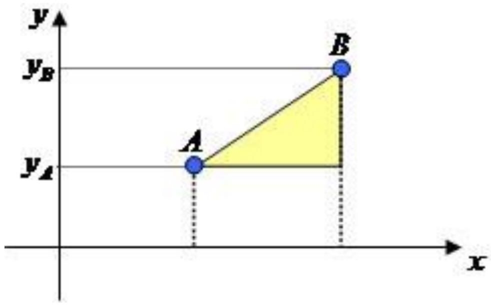
Caso o ponto pertença a um plano, é representado por um par de números reais. O espaço onde está localizado (o plano) possui duas dimensões e esse ponto possui duas *coordenadas*.

Desse modo, o número de coordenadas que um ponto possui é igual ao número de dimensões que possui o espaço onde esse ponto está localizado. O ponto pertencente ao espaço tridimensional, por exemplo, possuirá três dimensões e será representado por três coordenadas. A figura acima retrata o ponto A, que pertence ao espaço tridimensional e é representado pelo terno ordenado (x,y,z).

Distância entre dois pontos

Os estudos em Geometria Analítica possibilitam a relação entre a Álgebra e a Geometria, abrangendo situações em que são envolvidos ponto, reta e figuras espaciais. Um conceito básico de Geometria deve ser aproveitado na GA, a fim de estabelecer a distância entre dois pontos: “por dois pontos passa apenas uma reta”.

Dado o plano cartesiano, vamos estabelecer a distância entre os pontos A e B.



Podemos observar que os pontos possuem coordenadas, sendo o ponto A (xa,ya) e B (xb,yb), note a formação do triângulo retângulo ABC, onde os lados BC: cateto, AC: cateto e AB: hipotenusa.

Verificamos que a distância entre os pontos A e B é a hipotenusa do triângulo retângulo, que pode ser calculada aplicando o Teorema de Pitágoras. Com o auxílio da Álgebra e de conhecimentos geométricos podemos generalizar e construir uma fórmula que determine a distância entre dois pontos no plano, conhecendo suas coordenadas.

Cateto BC: ***yb – ya***
Cateto AC: ***xb – xa***
Hipotenusa AB: distância (D)

Pelo Teorema de Pitágoras temos: “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”

$$D^2 = (x_b - x_A)^2 + (y_b - y_A)^2$$

$$\sqrt{D^2} = \sqrt{(x_b - x_A)^2 + (y_b - y_A)^2}$$

$$D = \sqrt{(x_b - x_A)^2 + (y_b - y_A)^2}$$

Exemplo 1

Dados os pontos A (2,-3) e B (4,5), determine a distância entre eles.

Exemplo 2

Calcule a distância entre os pontos P(-2,3) e Q(-5,-9).

Distância entre dois pontos no espaço

O cálculo da **distância entre dois pontos no espaço** é um assunto discutido na Geometria Analítica e tem suas bases no teorema de Pitágoras. Utilizando esse teorema, é possível chegar à fórmula usada para calcular o comprimento do segmento de reta que liga dois pontos.

Para calcular a distância entre dois pontos no espaço, é necessário calcular antes a **distância entre dois pontos no plano**.

Fórmula da distância entre dois pontos no espaço

Existe uma fórmula para calcular a **distância entre dois pontos no espaço**, dada por meio de suas coordenadas. Assim sendo, sejam os pontos A = (x_A, y_A, z_A) e B = (x_B, y_B, z_B), a distância entre A e B, denotada por dAB, é dada pela seguinte expressão:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

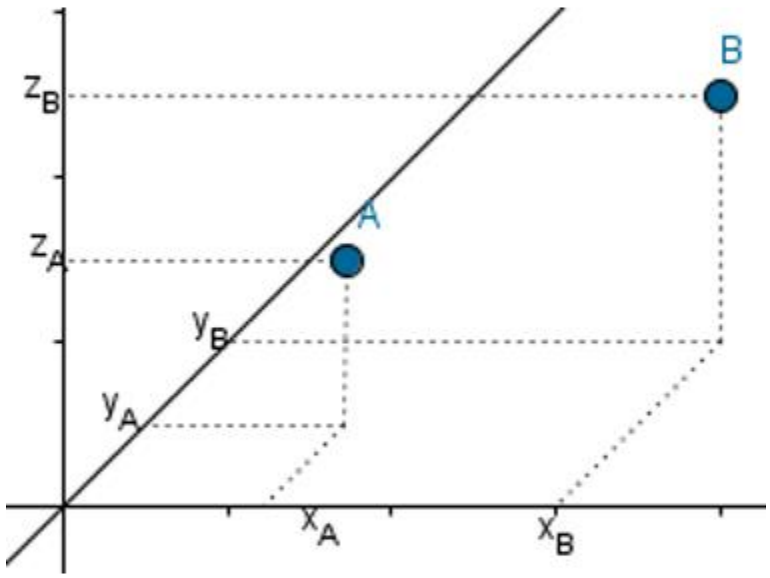
Para calcular a **distância entre dois pontos**, basta substituir os valores numéricos das coordenadas dos pontos em questão na fórmula acima.

Exemplo

Calcule a distância entre os pontos A = (4, -8, -9) e B = (2, -3, -5).

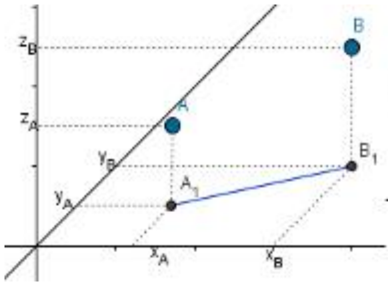
Obtendo a distância entre dois pontos no espaço

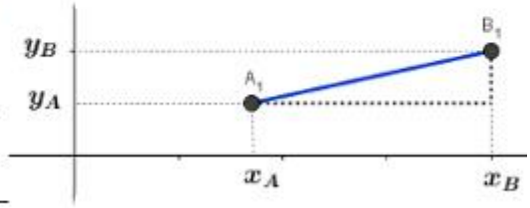
Na imagem a seguir há três eixos coordenados que representam o que seria o equivalente ao plano cartesiano no espaço. Note que fixamos dois pontos nele:



Para calcular a distância entre esses dois pontos, é necessário calcular a **distância entre os pontos** no plano xy, formados pelas coordenadas (x_A, y_A) e (x_B, y_B), que serão denotados por A_1 e B_1, respectivamente.

Dessa forma, observe que os pontos A_1 e B_1 estão localizados como ilustrado na imagem a seguir e a distância entre eles é representada pelo segmento A_1B_1. Além disso, a imagem da direita contém um esquema de como essa estrutura é vista por cima, o que é chamado de projeção ortogonal sobre o plano xy.

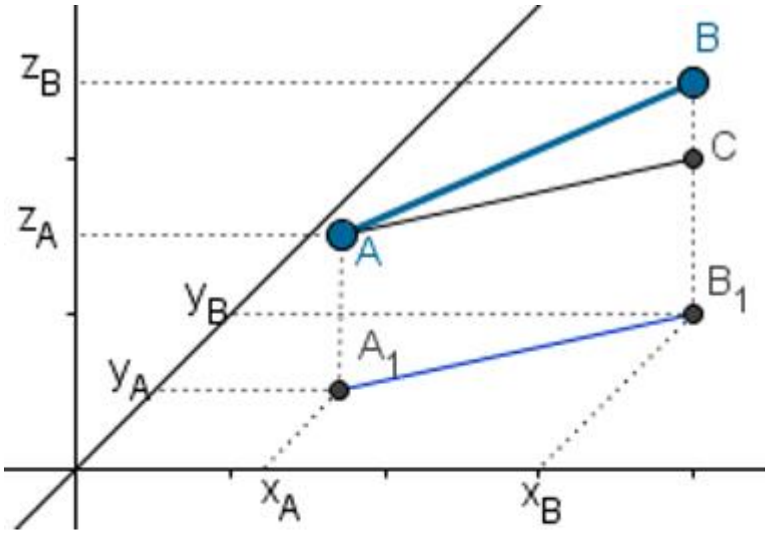




Os catetos do triângulo à direita são a diferença entre as coordenadas de seus pontos, isto é, a base tem comprimento igual a $x_B - x_A$ e a altura tem comprimento $y_B - y_A$. Desse modo, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(A_1B_1)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Para obter a **distância entre dois pontos no plano**, basta extrair a raiz quadrada de ambos os lados da equação acima. Contudo, nosso objetivo é obter a fórmula para a **distância no espaço**. Para tanto, observe que o segmento A_1B_1 possui o mesmo tamanho da base do triângulo ABC, ilustrado na figura abaixo.



Note também que a distância de B até C é justamente a diferença zB – zA, pois AC é paralelo a A_1B_1. Desse modo, pelo **teorema de Pitágoras**, teremos a **distância** entre A e B, denotada por d_{AB}:

$$(d_{AB})^2 = (AB)^2$$
$$(d_{AB})^2 = (d_{CD})^2 + (d_{BD})^2$$
$$(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$