

# Centro Universitário Presidente Antônio Carlos Teoria de Grafos

Operações com Grafos  
Felipe Roncalli de Paula Carneiro  
[felipecarneiro@unipac.br](mailto:felipecarneiro@unipac.br)

# O que vamos aprender nessa aula

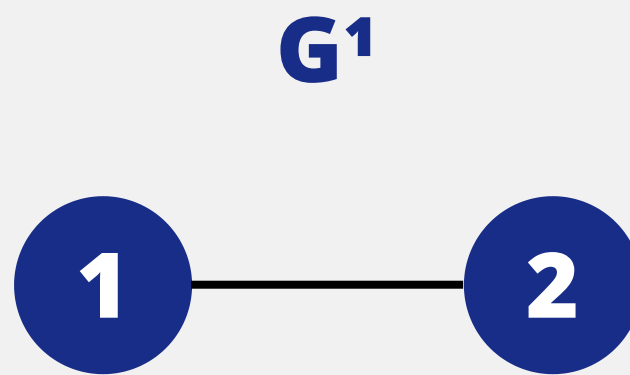
- União;
- Intersecção;
- Soma;
- Soma Direta;
- Fusão de Vértices;
- Contração de Vértices;

# União

## Definição

A *união* de dois grafos  $G_1(V_1, A_1)$  e  $G_2(V_2, A_2)$  é um grafo  $G_3(V_3, A_3)$  onde:

$$G_3 = G_1 \cup G_2, \quad V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cup A_2.$$

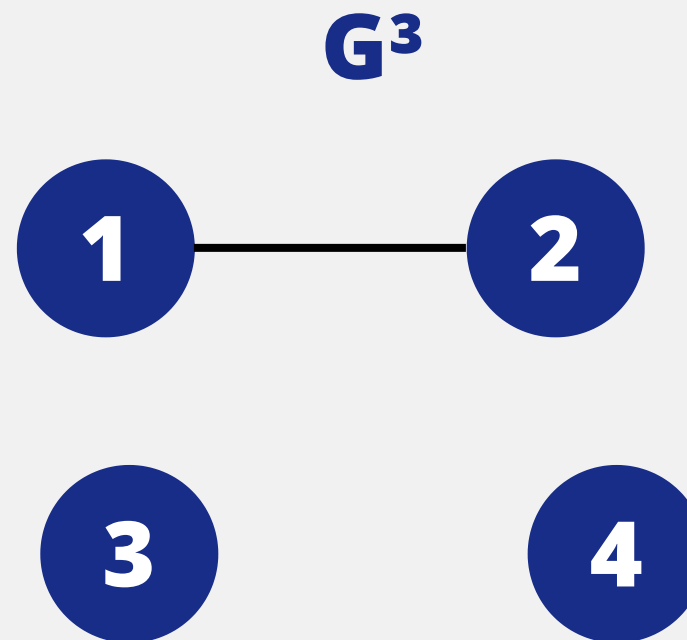


# União

## Definição

A *união* de dois grafos  $G_1(V_1, A_1)$  e  $G_2(V_2, A_2)$  é um grafo  $G_3(V_3, A_3)$  onde:

$$G_3 = G_1 \cup G_2, \quad V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cup A_2.$$

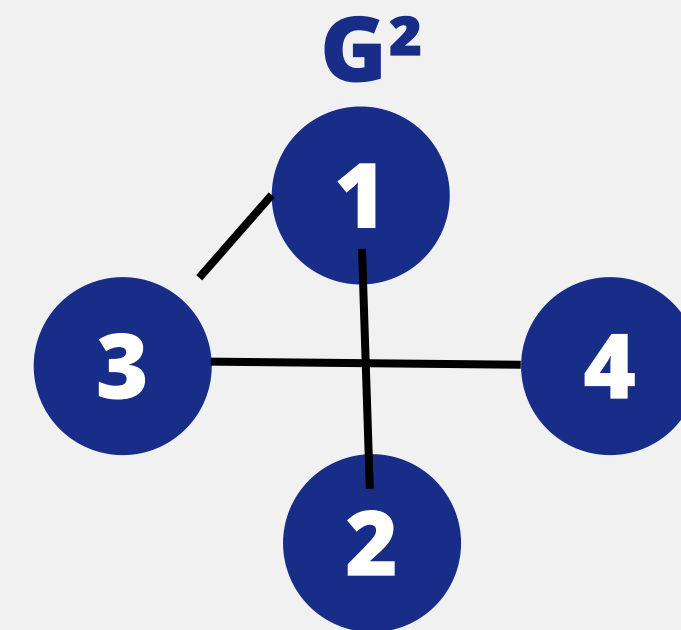
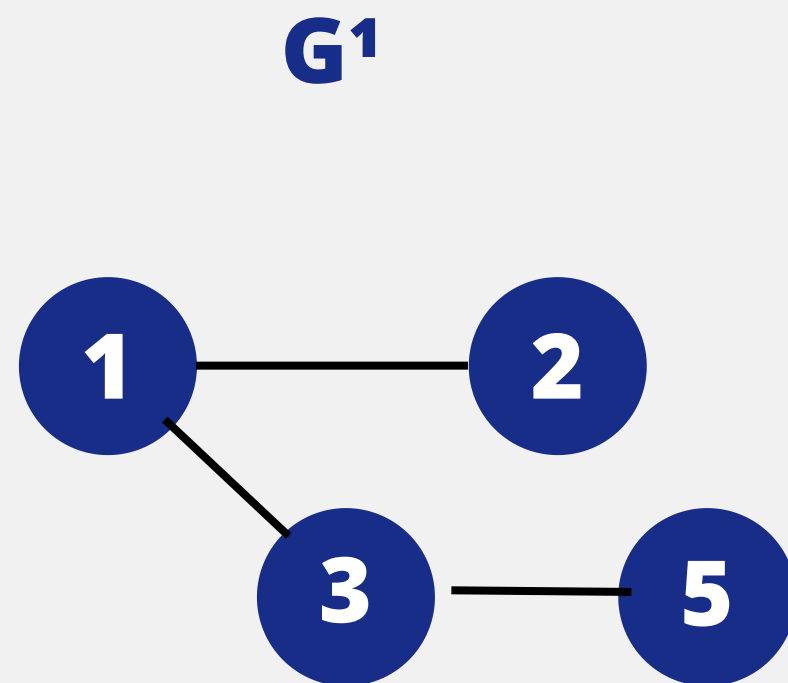


# Intersecção

## Definição

A *intersecção* de dois grafos  $G_1(V_1, A_1)$  e  $G_2(V_2, A_2)$  é um grafo  $G_3(V_3, A_3)$  onde:

$$G_3 = G_1 \cap G_2, \quad V_3 = V_1 \cap V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cap A_2.$$



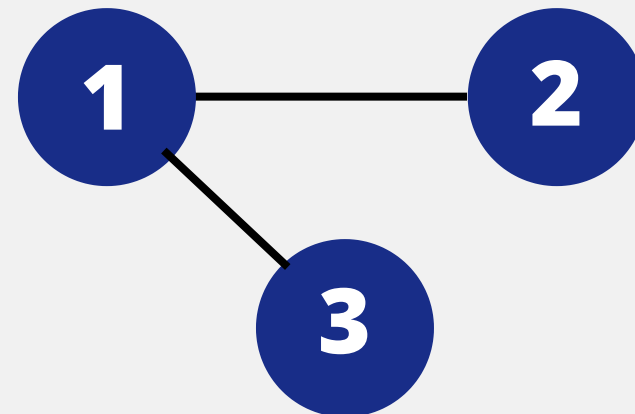
# Intersecção

## Definição

A *intersecção* de dois grafos  $G_1(V_1, A_1)$  e  $G_2(V_2, A_2)$  é um grafo  $G_3(V_3, A_3)$  onde:

$$G_3 = G_1 \cap G_2, \quad V_3 = V_1 \cap V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cap A_2.$$

$G^3$



# União e Intersecção

## Observação

*Pelas definições dadas é fácil verificar que as operações de união e intersecção de grafos são comutativas, isto é:*

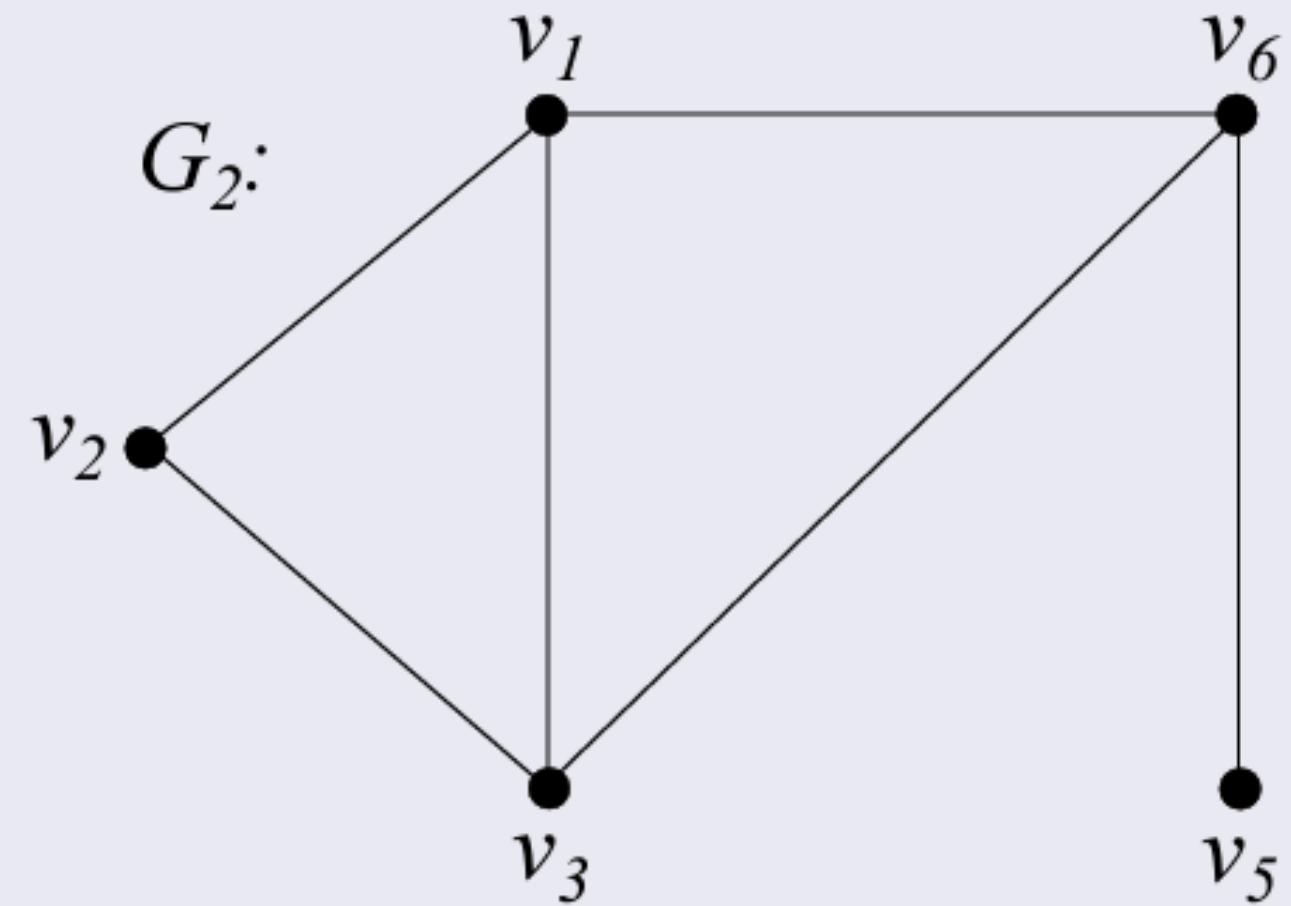
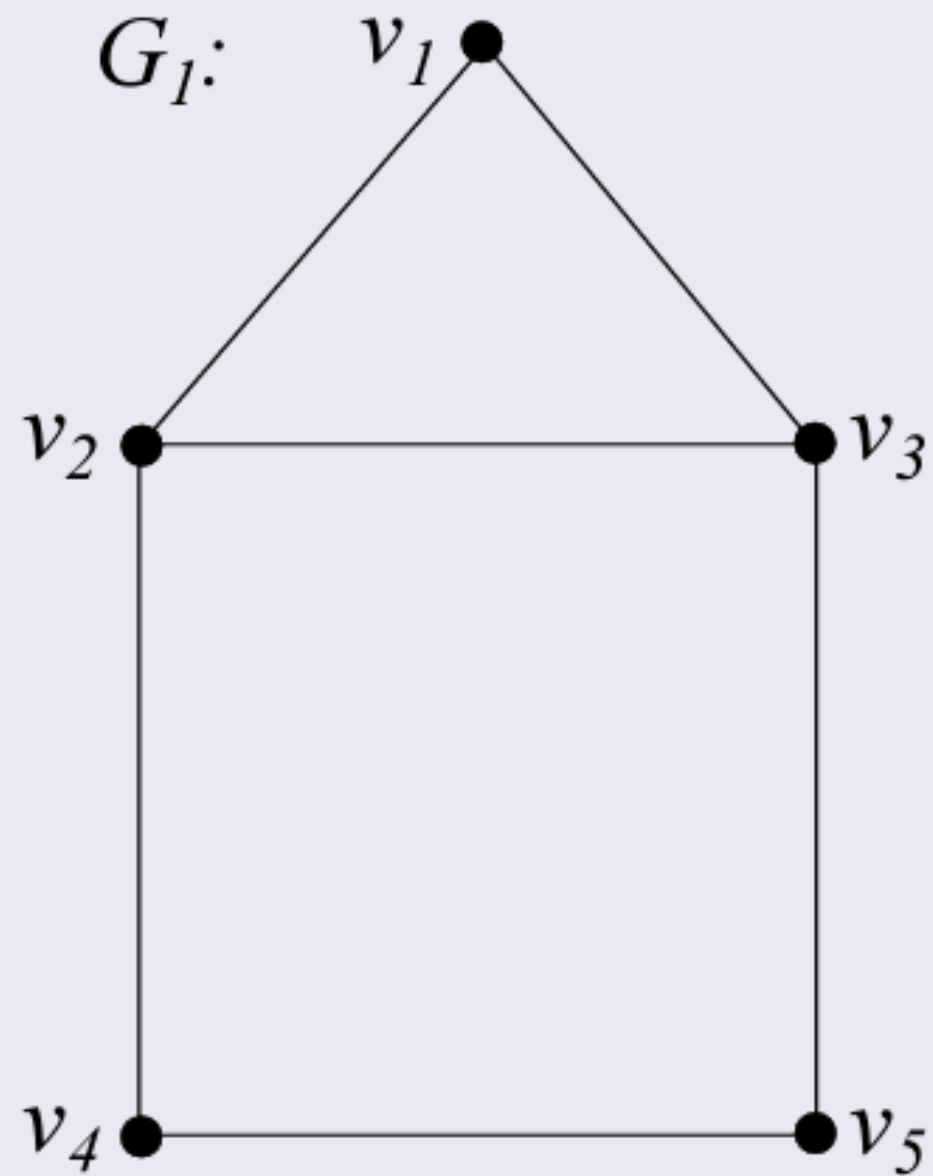
$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1,$$

$$G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1.$$

# Exercício Parte 1

## Exercício

Determine a união e a intersecção dos grafos dados abaixo:





## Definição

*Um grafo  $G$  é dito **decomposto** em dois sub-grafos  $G_1$  e  $G_2$  se:*

$$G_1 \cup G_2 = G \text{ e } G_1 \cap G_2 = \text{grafo nulo.}$$

*Ou seja, cada aresta de  $G$  pertence a  $G_1$  ou a  $G_2$ . Alguns vértices no entanto podem pertencer aos dois.*

**Grafo nulo ou vazio é o grafo cujo conjunto de arestas é vazio.**

**Grafo trivial é o grafo que possui apenas um vértice e nenhuma aresta**

## Definição

*Um grafo  $G$  é dito **decomposto** em dois sub-grafos  $G_1$  e  $G_2$  se:*

$$G_1 \cup G_2 = G \text{ e } G_1 \cap G_2 = \text{grafo nulo.}$$

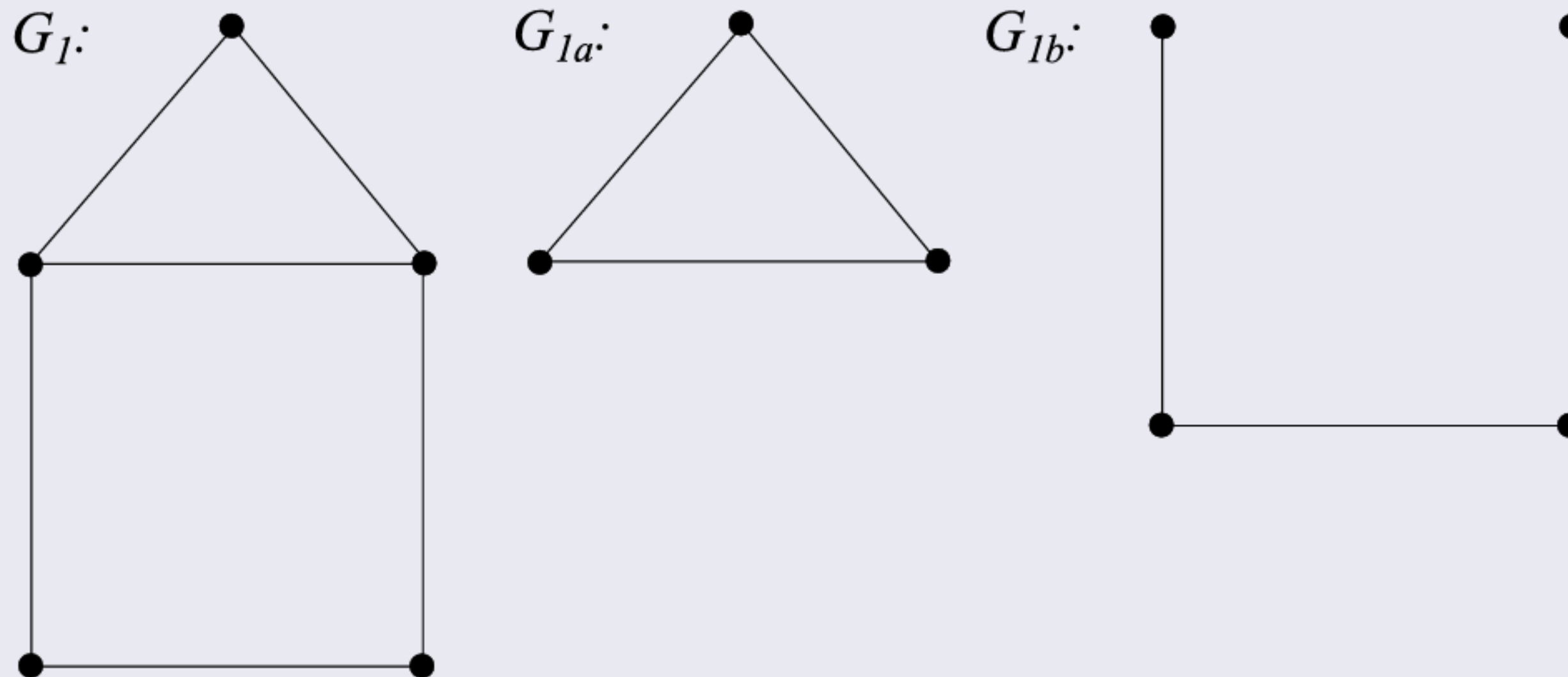
*Ou seja, cada aresta de  $G$  pertence a  $G_1$  ou a  $G_2$ . Alguns vértices no entanto podem pertencer aos dois.*

**Grafo nulo ou vazio é o grafo cujo conjunto de arestas é vazio.**

**Grafo trivial é o grafo que possui apenas um vértice e nenhuma aresta**

## Exemplo

O grafo  $G_1$  do exemplo anterior é decomposto nos subgrafos  $G_{1a}$  e  $G_{1b}$  abaixo:



**Vamos Decompor o Grafo  $G^1$  em três subgrafos.**

## Definição

*Se  $a$  é uma aresta de um dado grafo  $G$ , então  $G - a$  é um sub-grafo de  $G$  obtido pela remoção da aresta  $a$  do grafo  $G$ .*

*Se  $v$  é um vértice de  $G$ , então  $G - v$  é um sub-grafo de  $G$  obtido pela remoção do vértice  $v$  do grafo  $G$ .*

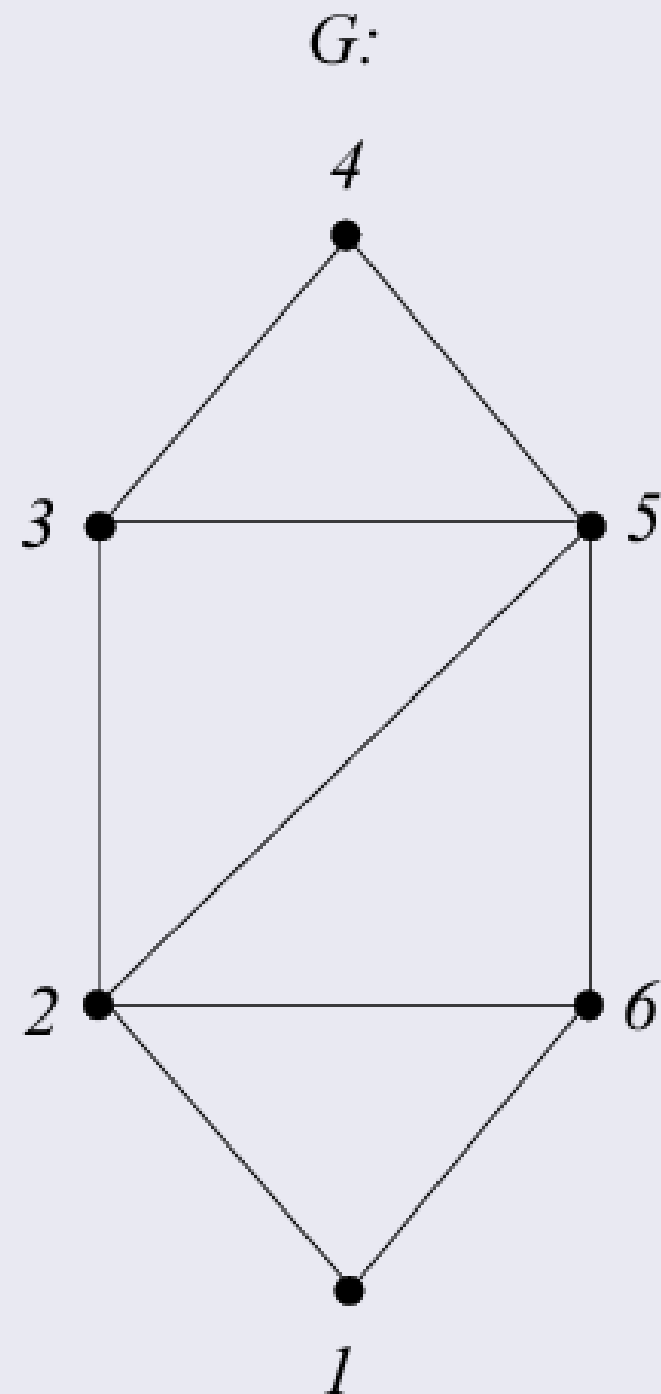
- *A remoção de um vértice implica na remoção das arestas a ele incidentes.*

**De maneira similar é possível incluir vértices e arestas em um grafo**

# Exemplo

A seguir estão exemplificadas algumas operações:

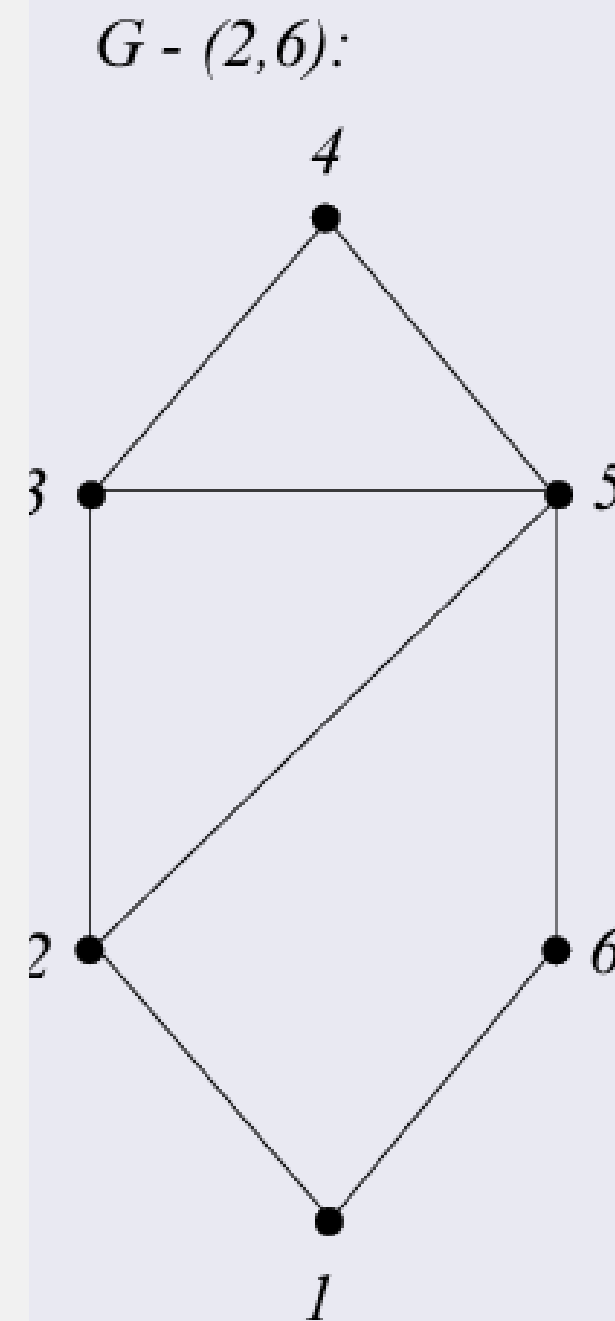
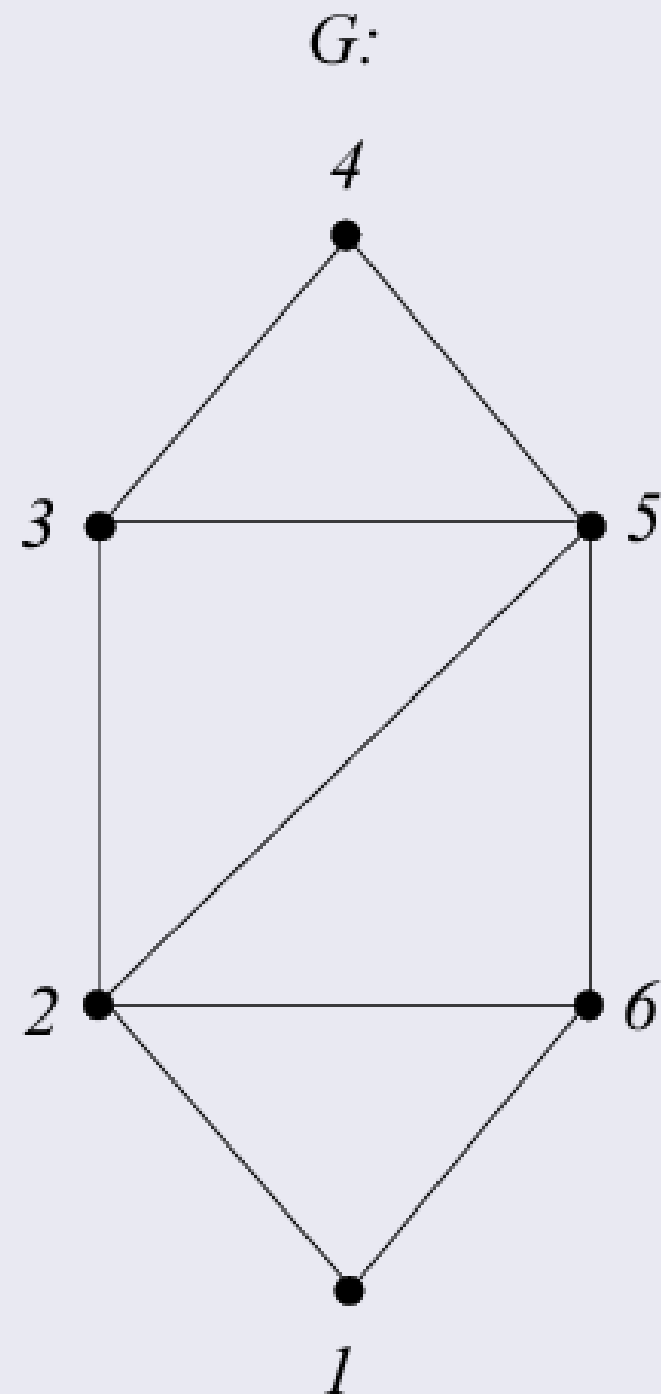
$G-(2,6);$   
 $G-1;$   
 $G+(1,4);$



# Exemplo

A seguir estão exemplificadas algumas operações:

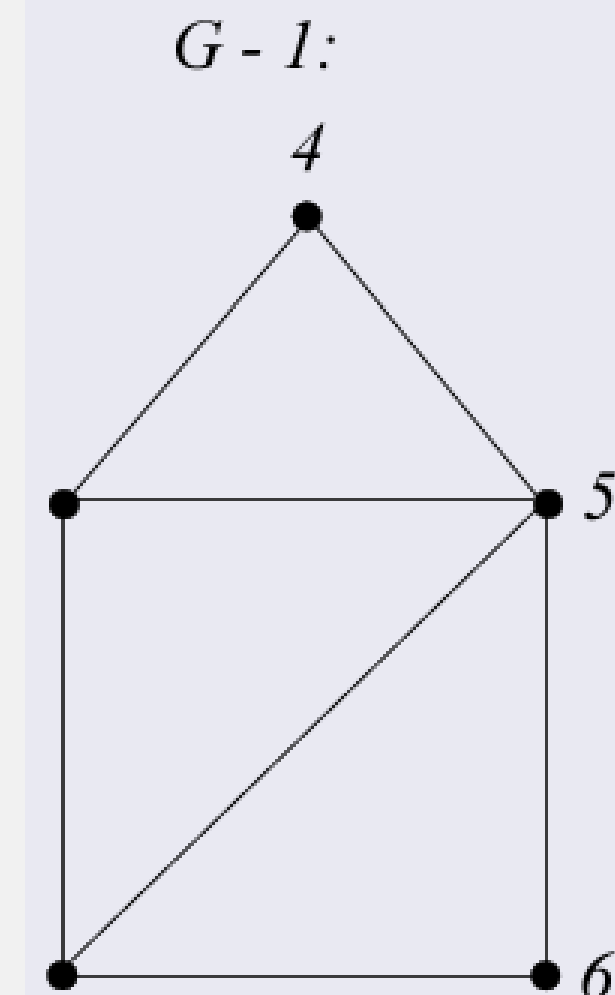
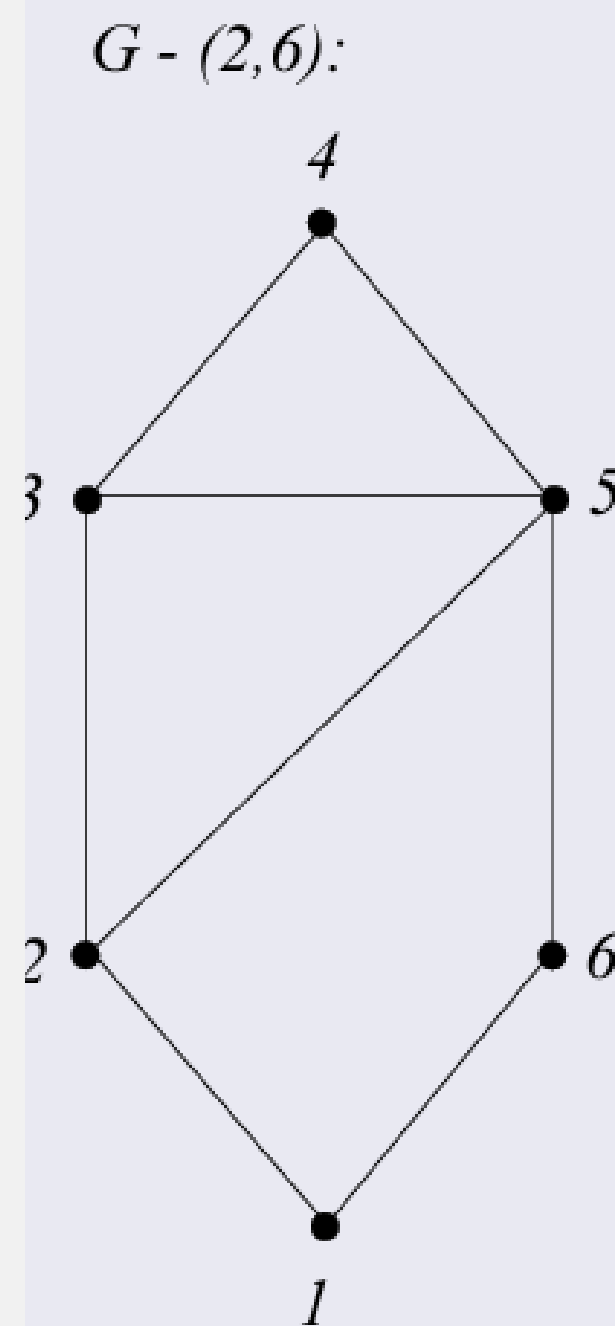
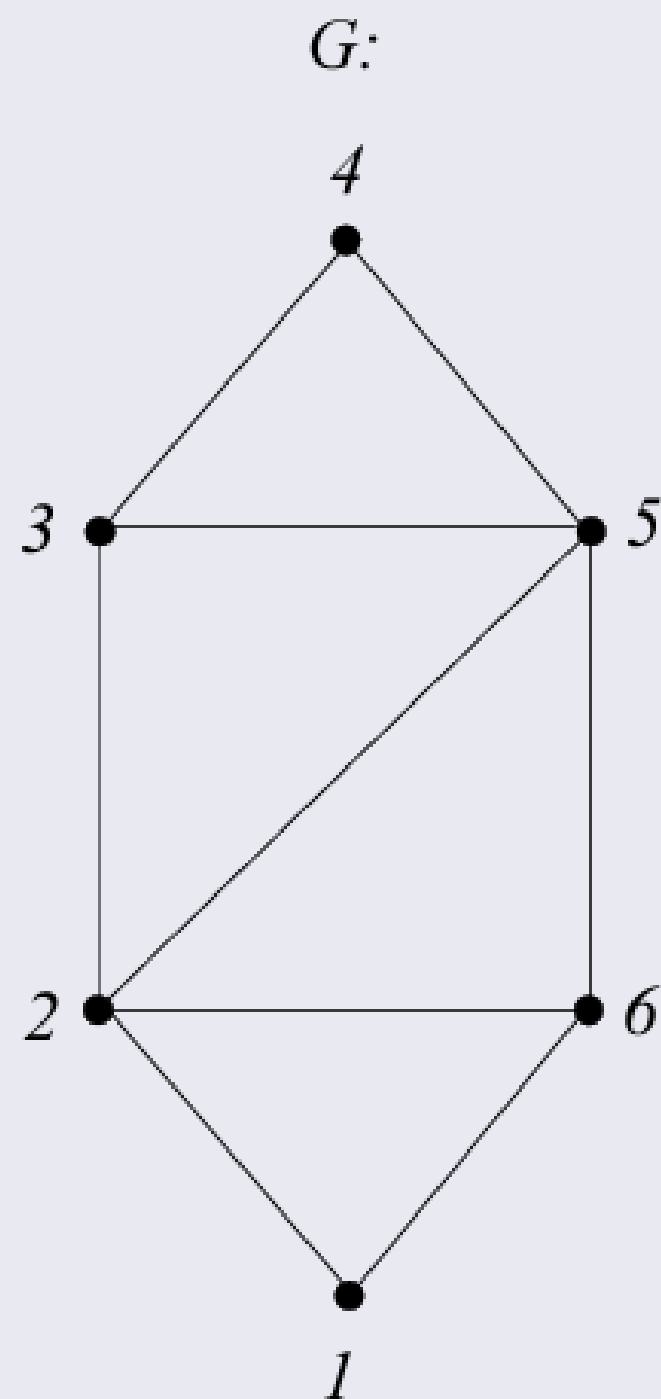
$G-(2,6);$   
 $G-1;$   
 $G+(1,4);$



# Exemplo

A seguir estão exemplificadas algumas operações:

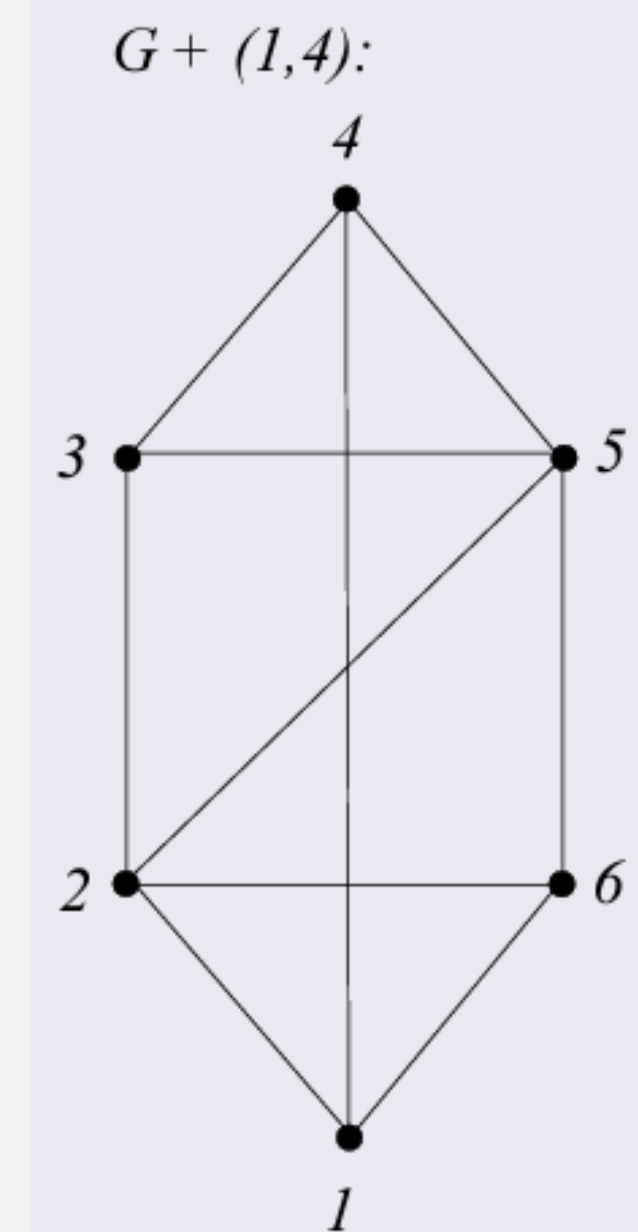
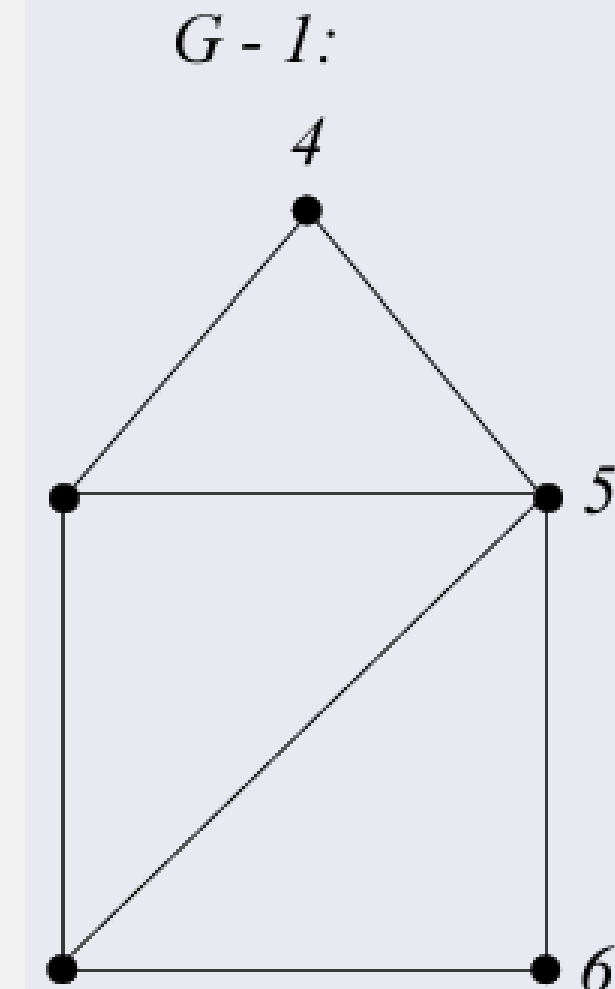
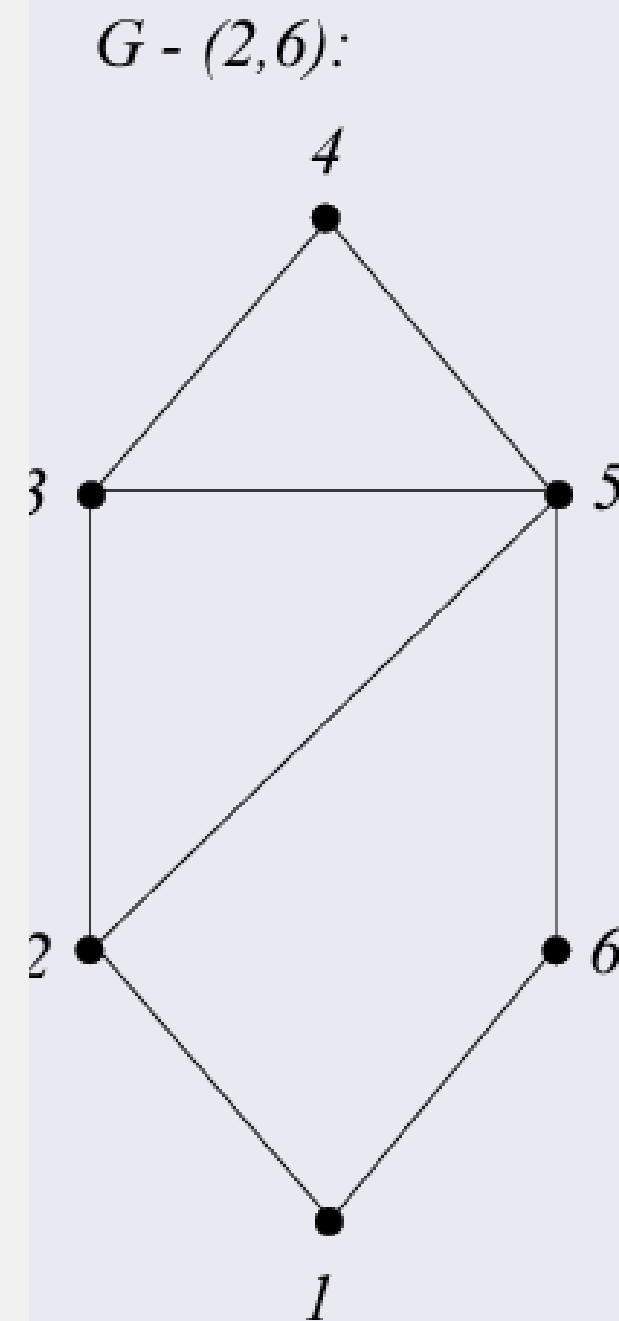
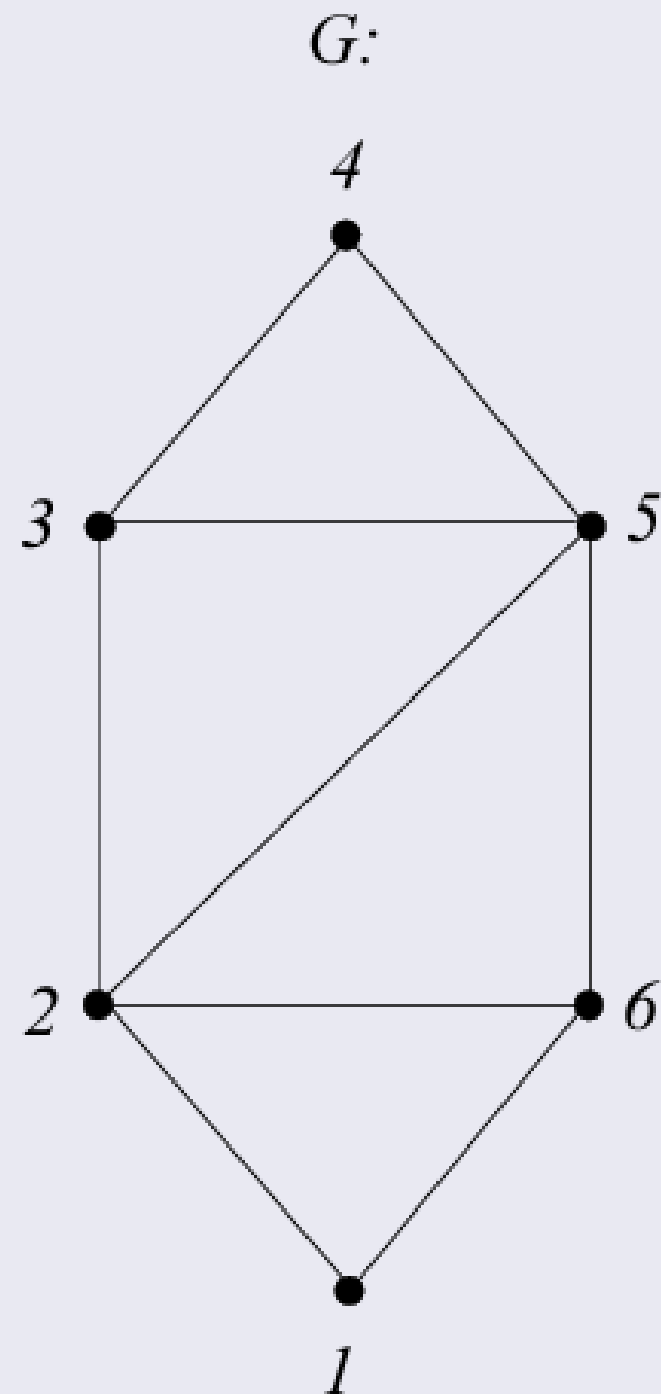
$G - (2,6);$   
 $G - 1;$   
 $G + (1,4);$



# Exemplo

A seguir estão exemplificadas algumas operações:

$G - (2,6);$   
 $G - 1;$   
 $G + (1,4);$





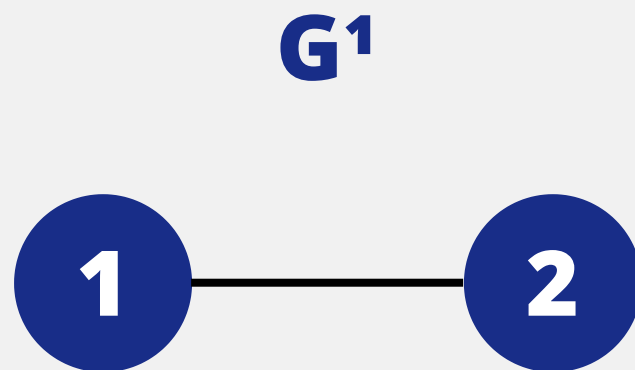
# Soma

## Definição

A **soma** de dois grafos  $G_1(V_1, A_1)$  e  $G_2(V_2, A_2)$  é um grafo  $G_3(V_3, A_3)$  onde:

$$G_3 = G_1 + G_2,$$

$$V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cup A_2 \cup \{(v_i, v_j) : v_i \in V_1, v_j \in V_2\}.$$



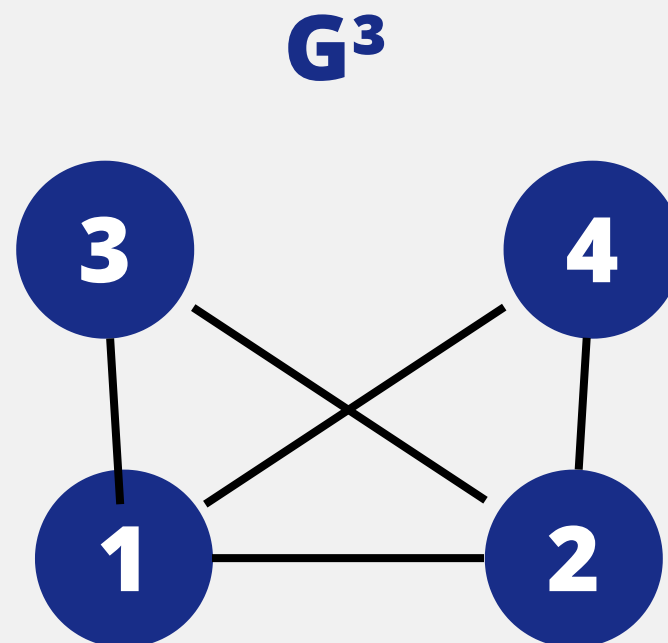
# Soma

## Definição

A **soma** de dois grafos  $G_1(V_1, A_1)$  e  $G_2(V_2, A_2)$  é um grafo  $G_3(V_3, A_3)$  onde:

$$G_3 = G_1 + G_2,$$

$$V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = A_1 \cup A_2 \cup \{(v_i, v_j) : v_i \in V_1, v_j \in V_2\}.$$

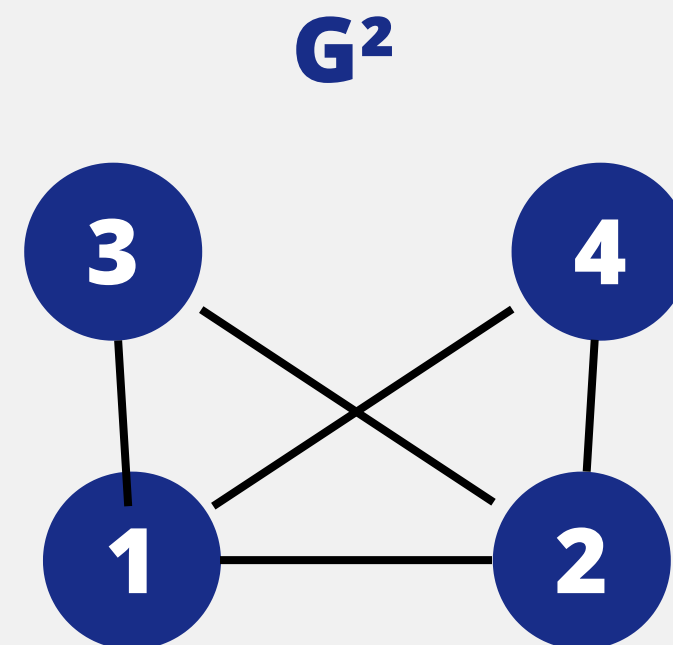
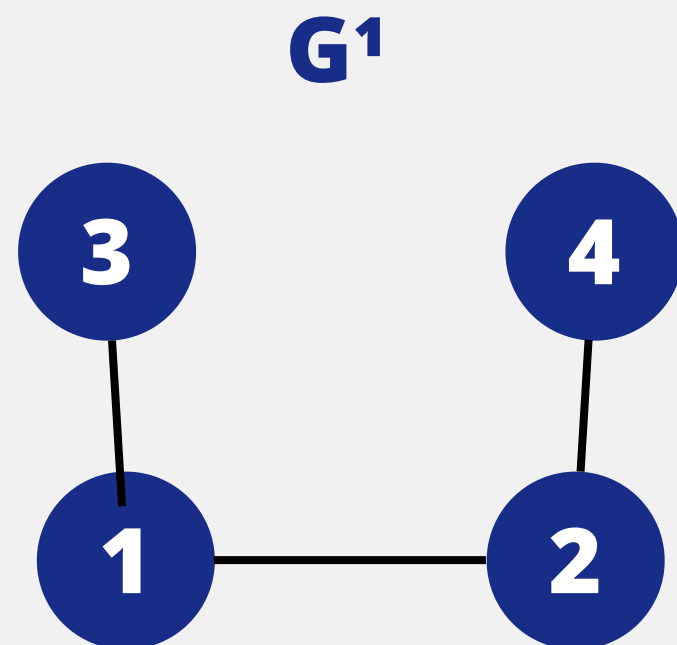


# Soma Direta

## Definição

A **soma direta** de dois grafos  $G_1(V_1, A_1)$  e  $G_2(V_2, A_2)$  é um grafo  $G_3(V_3, A_3)$  onde:

$$G_3 = G_1 \oplus G_2, \quad V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = [A_1 \cup A_2] \setminus [A_1 \cap A_2].$$

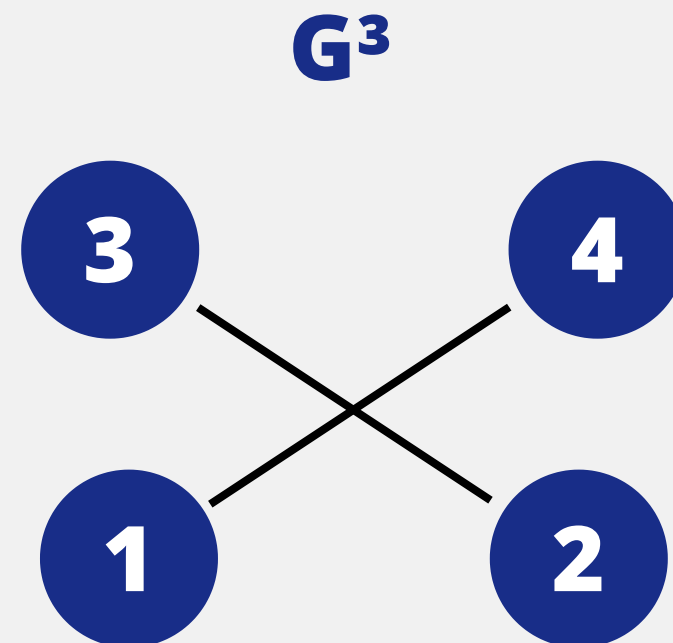


# Soma Direta

## Definição

A **soma direta** de dois grafos  $G_1(V_1, A_1)$  e  $G_2(V_2, A_2)$  é um grafo  $G_3(V_3, A_3)$  onde:

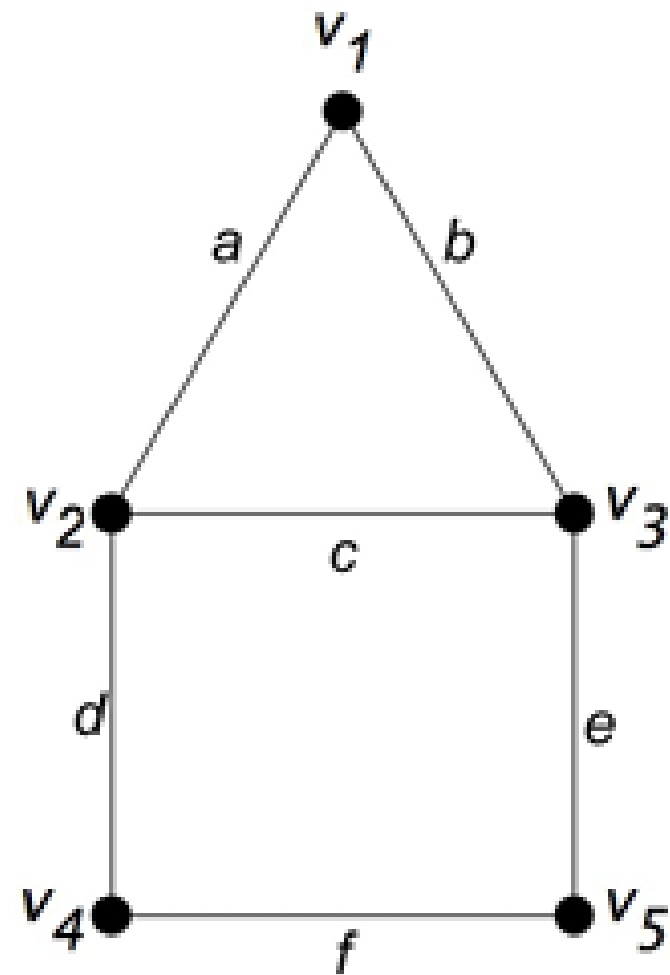
$$G_3 = G_1 \oplus G_2, \quad V_3 = V_1 \cup V_2 \text{ e } A_3 = [A_1 \cup A_2] \setminus [A_1 \cap A_2].$$



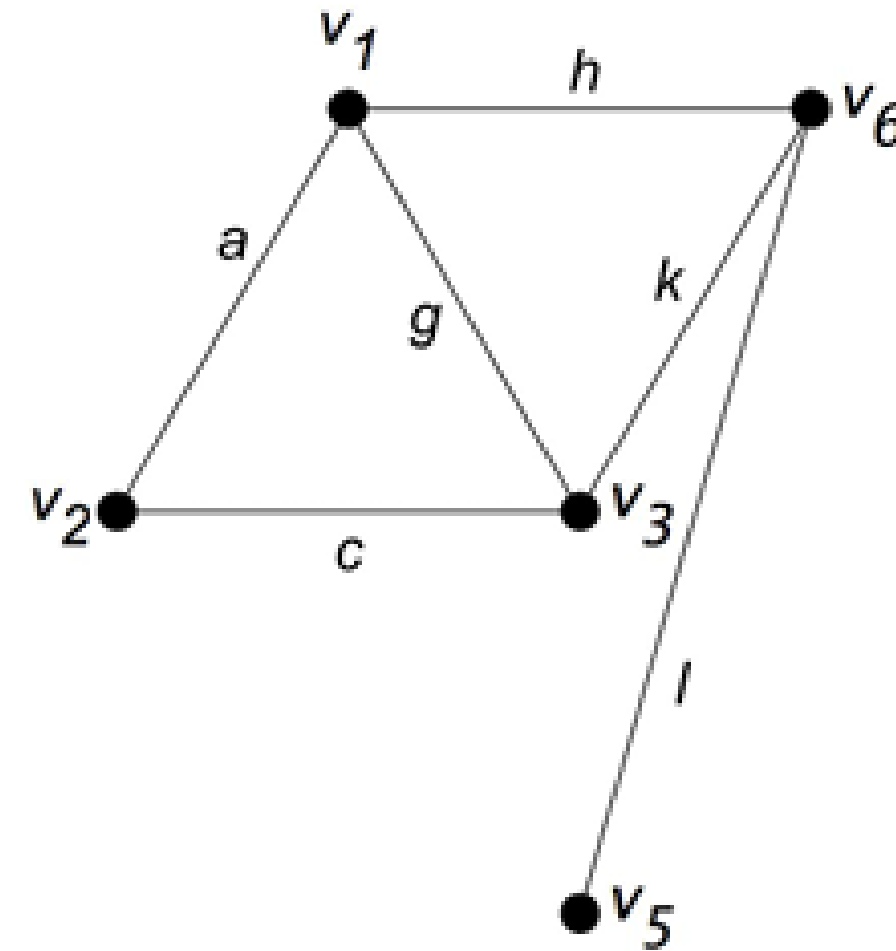
# Exercícios Parte 2

Com base nos grafos  $G^1$  e  $G^2$ .

Encontre o Grafo resultante da união, intersecção, soma e soma direta.



(a) Grafo  $G_1$



(b) Grafo  $G_2$

# Fusão de Vértices

## Definição

A  **fusão**  de um par de vértices  $a$  e  $b$  em um Grafo  $G$  é feita substituindo os dois vértices por um único vértice  $\overline{ab}$ , de tal forma que toda aresta que era incidente no vértice  $a$  e/ou no vértice  $b$  ou em ambos passa a ser incidente no novo vértice  $\overline{ab}$ .

## Observação

A fusão de vértices em um grafo não altera seu número de arestas, apenas diminui o número de vértices.

# Contração de Vértices

## Definição

*A contração de dois vértices  $a$  e  $b$  é feita através da fusão dos vértices  $a$  e  $b$  e a remoção dos loops e arestas paralelas que são formadas no processo.*

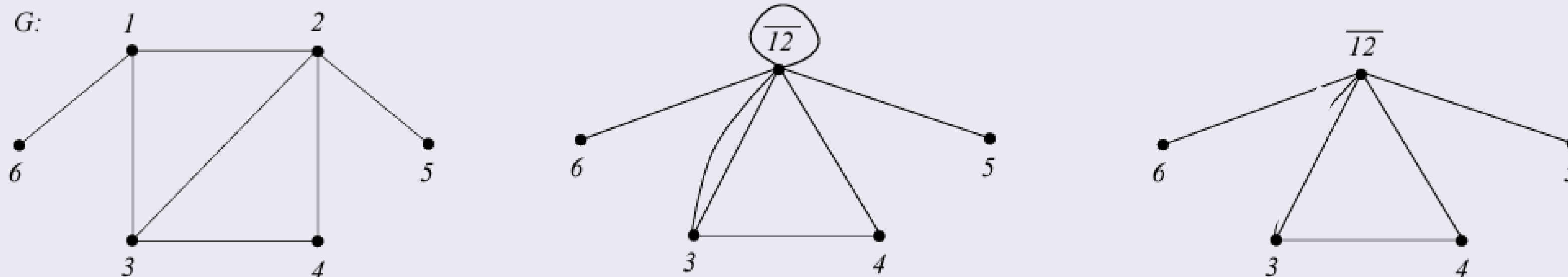
## Definição

*A contração de uma aresta  $(a, b)$  é feita removendo-se a aresta  $(a, b)$  e fazendo a fusão dos vértices  $a$  e  $b$ . É denotado por  $G \setminus (a, b)$ .*

# Fusão e Contração

## Exemplo

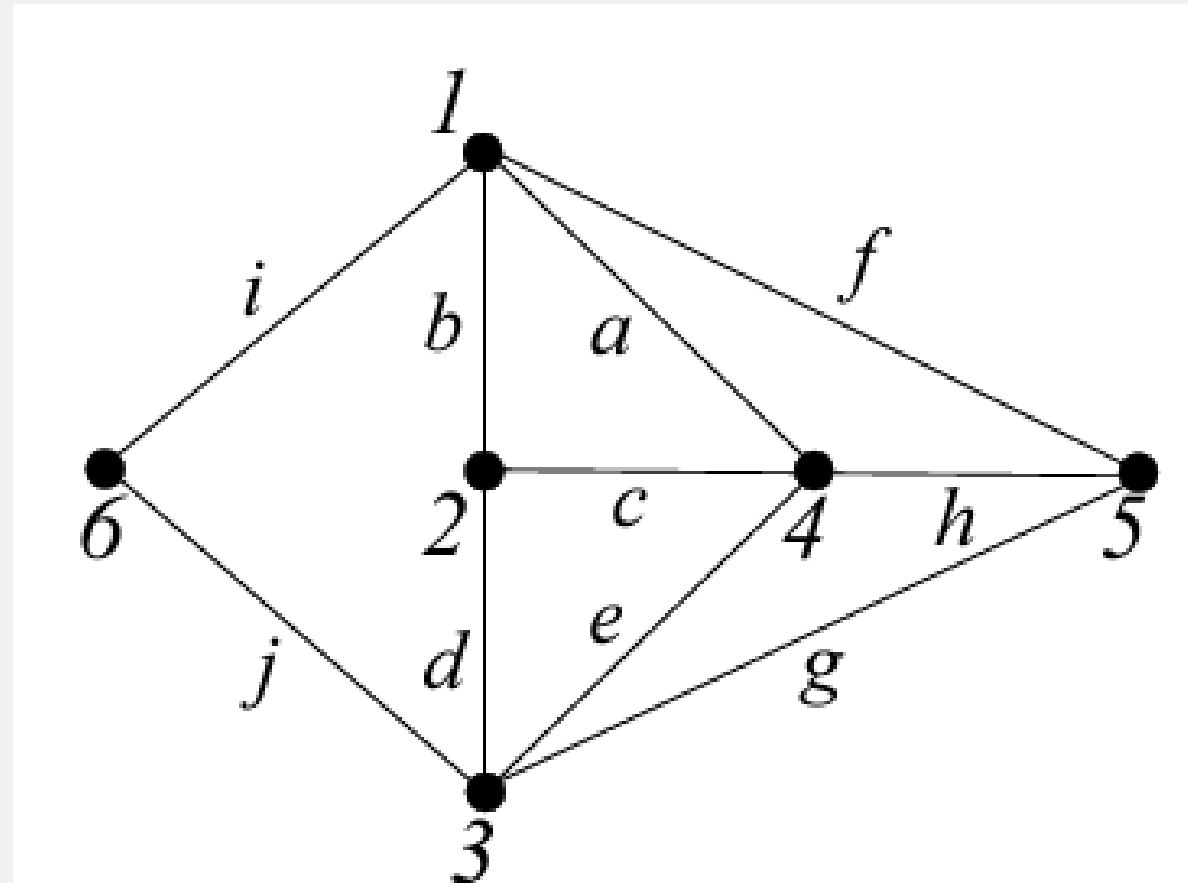
*Na figura abaixo temos, à esquerda, um grafo  $G$ ; no centro, o grafo obtido após a fusão dos vértices 1 e 2; e à direita o grafo obtido após a contração da aresta  $(1, 2)$ .*





## Exercício Parte 3

Considere o Grafo:



- 1) Remova o vértice 5 deste grafo. Acrescente a aresta (2,7). Contraia a aresta (2,3).
- 2) Decomponha este grafo em três sub-grafos.
- 3) Faça a Fusão dos vértices 1,2 e 3;
- 4) Faça a Contração dos vértices 3,4 e 5;

**Dúvidas???**