Ângulos diretores e Co-senos diretores de um vetor e ângulo entre vetores

Seja o **vetor** $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Ângulos diretores de $\vec{v}$ **são** os **ângulos** α, β e γ **que** $\vec{v}$ **forma com** os **vetores** $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, **respectivamente (Fig. 3.5)**:

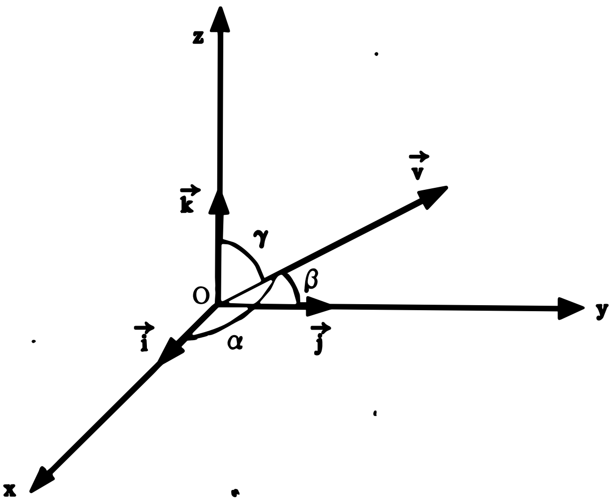

Figura 3.5

Co-senos diretores de $\vec{v}$ **são** os **co-senos de seus ângulos diretores, isto é,** $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$.

Para o **cálculo dos co-senos diretores utilizaremos a Fórmula 3.4-II:**

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}|\,|\vec{i}|} = \frac{(x, y, z)\cdot(1, 0, 0)}{|\vec{v}|\ 1} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}|\,|\vec{j}|} = \frac{(x, y, z)\cdot(0, 1, 0)}{|\vec{v}|\ 1} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}|\,|\vec{k}|} = \frac{(x, y, z)\cdot(0, 0, 1)}{|\vec{v}|\ 1} = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

Propriedades

I) Seja o vetor $\vec{v} = (x, y, z)$. Designando o versor de $\vec{v}$ por $\vec{u}$, vem:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x, y, z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right)$$

ou:

$$\vec{u} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$$

Portanto, as componentes do versor de um vetor são os co-senos diretores deste vetor.

II) Como o versor de $\vec{v}$ é um vetor unitário, tem-se

$$|(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)| = 1$$

mas:.

$$|(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$

ogo:

$$\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$$

:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ângulo entre dois vetores

Considerando dois vetores v = (a,b) e u = (a',b'), o *produto interno* entre eles é denotado por <v,u> e é dado pela seguinte expressão:

$$\langle v,u \rangle = (a \cdot a' + b \cdot b')$$

O produto interno entre dois vetores também é definido por meio do ângulo entre eles.

Essa definição torna possível o cálculo do ângulo entre dois vetores.

Dessa maneira, tomando os mesmos vetores v e u, o cosseno do ângulo θ entre eles é dado pela seguinte expressão:

$$\cos\theta = \frac{\langle v,u \rangle}{|v| \cdot |u|}$$

Exercícios

1) Calcular os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor $\vec{v}$ = (6, -2, 3)

2) Dados os pontos A(2, 2, -3) e B(3, 1, -3), calcular os ângulos diretores do vetor $\overrightarrow{AB}$

3) Os ângulos diretores de um vetor são ∝, 45º , 60º . Determinar o valor de ∝.

4) Um vetor $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ os ângulos de 60º e 120º , determine o vetor $\vec{v}$, sabendo que o $|\vec{v}|$ = 2

5) Determinar os ângulos diretores do vetor $\vec{u}$=(2, 1, -3)

6) Verificar se $\vec{u}$= (-2, 3, -2) é ortogonal com o $\vec{v}$=(-1, 2, 4)

7) Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u}(1, 1.4)$ e $\vec{v}$=(-1, 2,2)

8) Sabendo que o vetor $\vec{u}$= (2, 1 -1) forma um ângulo de 60º , com o vetor $\overrightarrow{AB}$, sendo A(3, 1, -2) e B(4, 0, m). Determinar o valor de m.

9)Determinar os ângulos internos do triângulo ABC, sendo A(3, -3 ,3), B(2, -1, 2) e C(1, 0, 2)