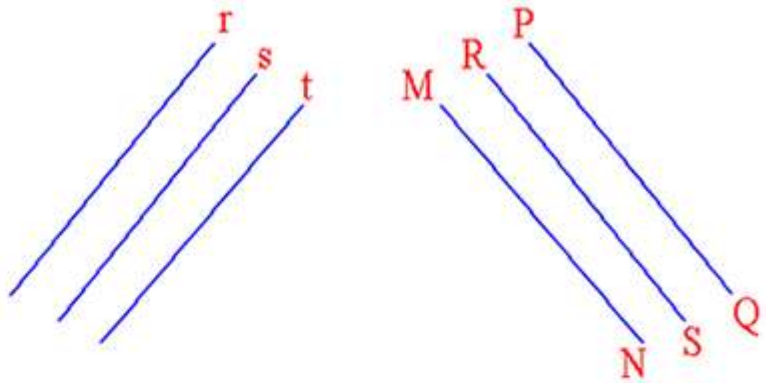
Geometria analítica

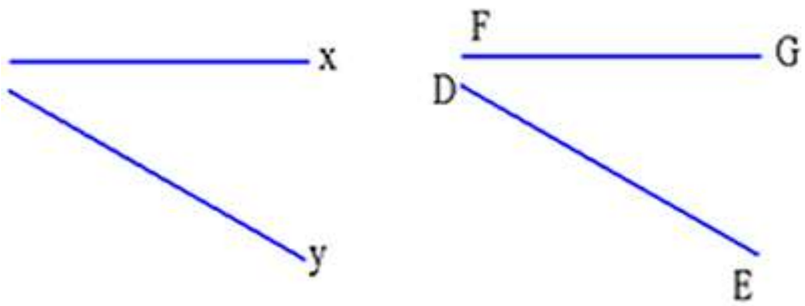
Orientação espacial



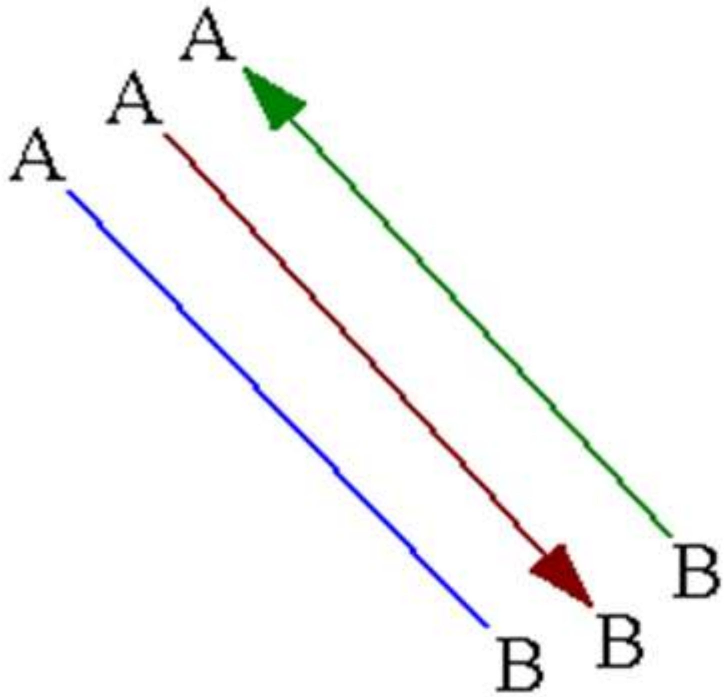
As retas r, s e t têm em comum a direção. Os segmentos de reta PQ, RS e MN possuem a mesma direção

Orientação espacial (direção e sentido)

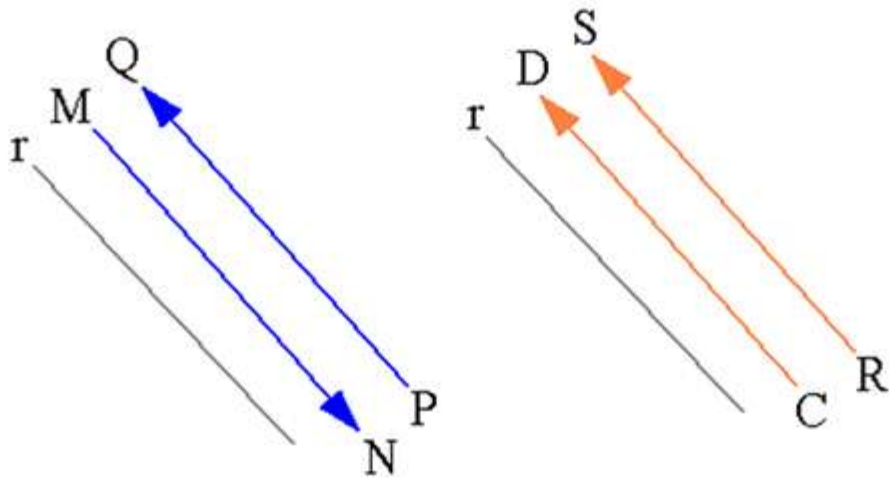
Dizemos que duas retas têm a *mesma direção* quando elas estão *paralelas*. Dois ou mais segmentos de reta têm a mesma **direção** quando estão sobre a mesma reta ou quando estão sobre retas paralelas, ou seja, a direção de um segmento de reta é a mesma da direção da reta suporte desse segmento (figura). Quando não for esse o caso, as retas terão direções diferentes (figura).



Vamos considerar um segmento de reta *AB*. Sobre esse segmento podemos imaginar dois sentidos de percurso: um de A para B, outro de B para A. Então podemos considerar dois segmentos com orientações diferentes: o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ e o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$.



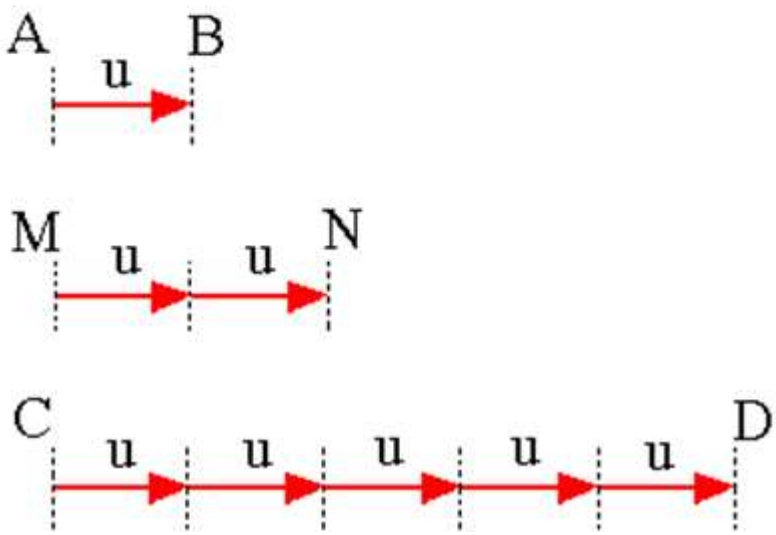
Os segmentos orientados MN e PQ, representados na figura abaixo, têm a mesma direção (ou seja, a direção da reta r) e sentidos opostos; enquanto CD e RS têm a mesma direção e o mesmo sentido.



Repare que adotamos, de forma natural e intuitiva, as seguintes notações e nomenclatura: dado um segmento orientado AB, A é a origem e B é a extremidade. Veja a figura abaixo:

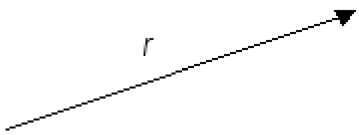
Um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, em que A coincide com B, é chamado de *segmento nulo*. Na realidade, o segmento nulo corresponde a um ponto e, como tal, admite qualquer direção e sentido.

Na figura abaixo o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ possui um comprimento de AB, que é chamado de **módulo** e pode ser colocado em alguma unidade qualquer. O segmento $\overrightarrow{AB}$ tem comprimento unitário ***u***. O segmento orientado $\overrightarrow{MN}$ tem comprimento 2u, então o módulo do segmento orientado $\overrightarrow{MN}$ e $|\overrightarrow{NM}| = 2u$. Da mesma forma, temos: $CD = |\overrightarrow{CD}| = 5u$



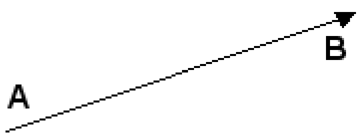
Reta Orientada - Eixo

Uma reta *r* é orientada quando fixa nela um sentido de percurso, considerado *positivo* e indicado por uma seta.



Segmento orientado

Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado *origem* do segmento, o segundo chamado *extremidade*.



Segmento Nulo

Um segmento nulo é aquele cuja extremidade coincide com a origem. A=B

Segmentos Opostos

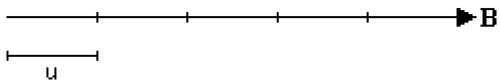
Se **AB** é um segmento orientado, o segmento orientado **BA** é oposto de **AB**.

Medida de um Segmento

Fixada uma unidade de comprimento, cada segmento orientado pode-se associar um número real, não negativo, que é a medida do segmento em relação aquela unidade. A medida do segmento orientado é o seu *comprimento* ou seu *módulo*. O comprimento do segmento **AB** é indicado por $\overline{AB}$.

Assim, o comprimento do segmento **AB** representado na figura abaixo é de 5 unidades de comprimento:

$\overline{AB}$ = 5 u.c.

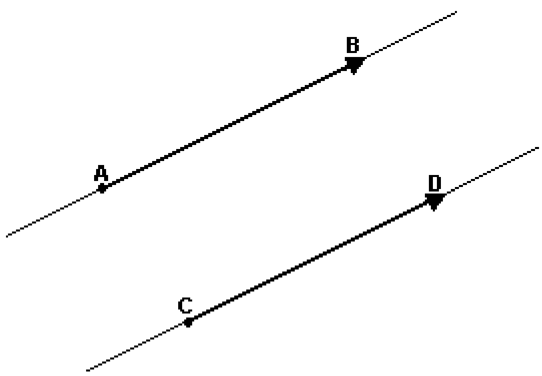


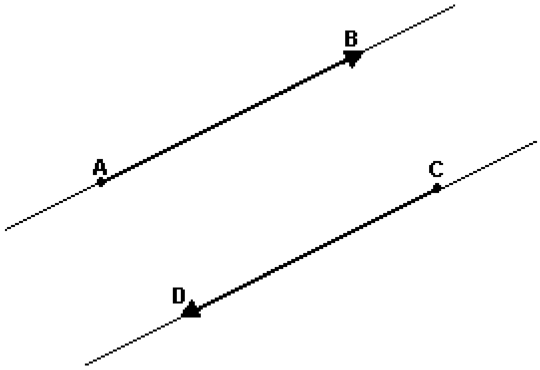
Observações

a. Os segmentos nulos têm comprimento igual a zero
b. $\overline{AB} = \overline{BA}$.

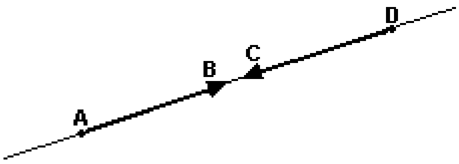
Direção e Sentido

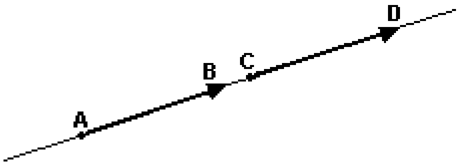
Dois segmentos orientados não nulos **AB** e **CD** têm a mesma direcção se as retas suportes desses segmentos são paralelas:





ou coincidentes





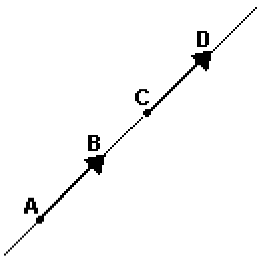
Observações

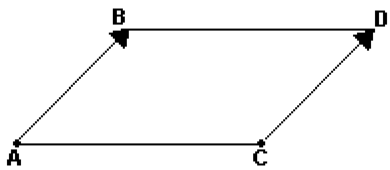
a. Só se pode comprar os sentidos de dois segmentos orientados se eles têm mesma direcção.
b. Dois Segmentos orientados opostos têm sentidos contrários.

Segmentos Equipolentes

Dois segmentos orientados **AB** e **CD** são *equipolentes* quando têm a mesma direcção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Se os segmentos orientados **AB** e **CD** não pertencem à mesma reta. Na segunda figura abaixo, para que **AB** seja equipolente a **CD** é necessário que **AB**//**CD** e **AC**/**BD**, isto é, **ABCD** deve ser um paralelogramo.





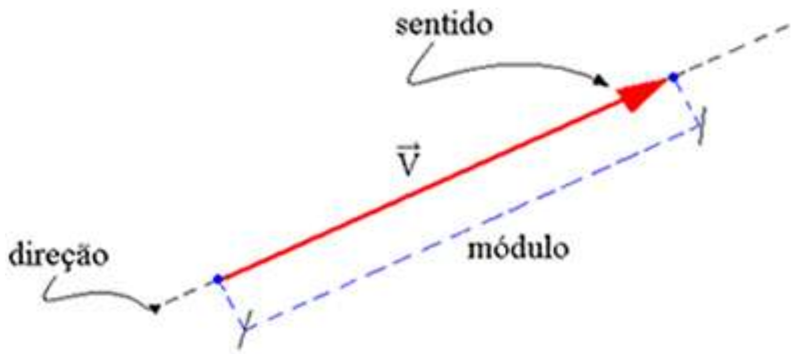
Observações

a. Dois segmentos nulos são sempre equipolentes.
b. A equipolência dos segmentos **AB** e **CD** é representada por **AB ~ CD**.

Propriedades da Equipolência

I. **AB ~ AB** (reflexiva).
II. Se **AB ~ CD**, **CD ~ AB** (simétrica).
III. Se **AB ~ CD** e **CD ~ EF**, **AB ~ EF** (transitiva).
IV. Dado o segmento orientado **AB** e um ponto **C**, existe um único ponto **D** tal que **AB ~ CD**.

Conceito de vetor



Representação geométrica de um vetor, com origem em A e extremidade em B

Quando trabalhamos com grandezas vetoriais, utilizamos a *álgebra vetorial*, que opera com um ente matemático denominado *vetor*. Para o que nos interessa, podemos conceituar **vetor** como o ente matemático que representa o conjunto dos segmentos orientados de reta que têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.

Representação de vetores

Representa-se o vetor $\vec{AB}$ por um segmento de reta orientado de reta com origem em A e extremidade em B. O comprimento desse segmento representa o módulo do vetor em uma escala de representação gráfica. Se o vetor $\vec{AB}$ estiver representando uma grandeza vetorial, podemos usar a notação $\vec{V}$ (em que se usa a letra que representa a grandeza com uma seta em cima, sendo a seta sempre horizontal e para a direita). Veja a figura acima.

As características gerais que definem um vetor são:

- - ***intensidade***
- - ***direção***
- - ***sentido***

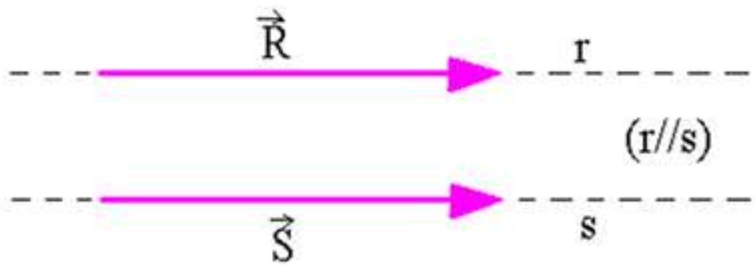
A definição da **intensidade** ou **módulo** de um vetor é a medida que obtemos quando comparamos um vetor com outro de mesma espécie, considerado como unidade. Por exemplo: o módulo da velocidade de um carro em certo instante é de 50 km/h, se o vetor velocidade adotado como unitário estiver contido 50 vezes no vetor considerado.

Define-se direção de um vetor como sendo a reta suporte do segmento orientado que o representa. Para saber a direção de um vetor, basta saber a direção de sua reta suporte.

O **sentido** de um vetor é para onde aponta sua extremidade.

Alguns vetores particulares

Dizemos que dois vetores ou mais são iguais ou equipolentes se seus módulos também forem iguais, se suas direções forem iguais e se possuírem o mesmo sentido. Veja abaixo a representação de vetores iguais:



Porém, quando pelo menos uma das características citadas anteriormente é diferente, dizemos que os vetores são diferentes. Chamamos de **vetor oposto** de um vetor B o vetor –B, que possui o mesmo módulo, mesma direção, porém seu sentido é oposto ao de B.

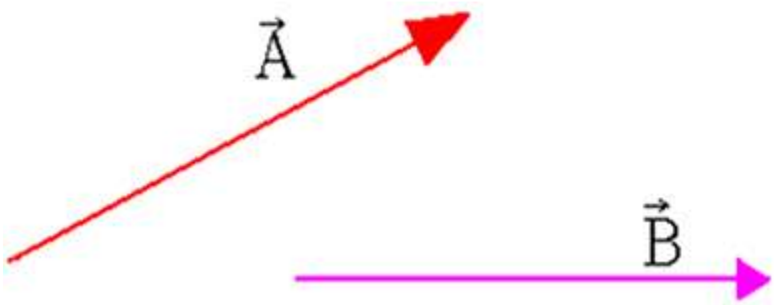
Operações com vetores

Vetor com direção horizontal e sentido da esquerda para a direita

Devemos prestar muita atenção quando operamos com vetores, pois o mecanismo da operação é diferente da operação com números, uma vez que não envolve apenas valores numéricos, mas também orientações espaciais. Portanto, as regras para a álgebra de vetores são diferentes das utilizadas para a álgebra dos números.

Adição de vetores

Podemos efetuar operações matemáticas como adição e subtração de vetores. Consideremos dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, representados pelos segmentos mostrados na figura abaixo.



O **vetor soma** ou **vetor resultante** ($\vec{S}$) dos dois vetores citados, tal que

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$$

pode ser obtido, em geral, com a ajuda da regra do polígono, que é um método gráfico. Vamos representar o vetor $\vec{S}$ da operação acima seguindo passo a passo a regra do polígono.

Regra do polígono

Para obter $\vec{S}$, usamos o seguinte processo:

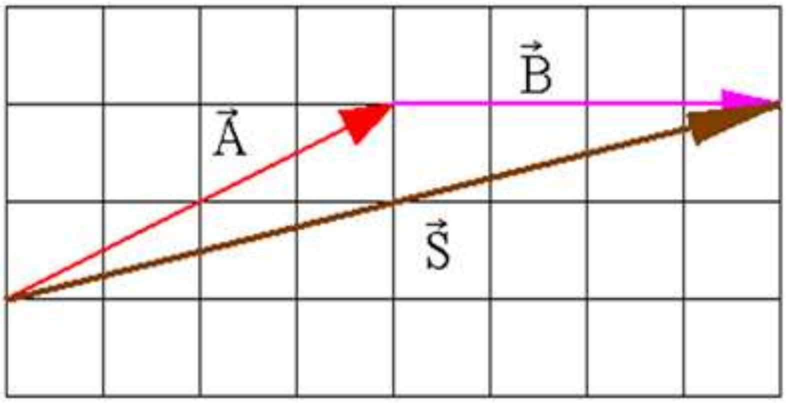
- primeiro desenhamos o segmento representativo do vetor $\vec{A}$ usando como origem um ponto qualquer do plano;

- posteriormente desenhamos o segmento representativo do vetor $\vec{B}$, de maneira que sua origem coincida com a extremidade do vetor $\vec{A}$;

- e, por fim, o vetor soma $\vec{S}$ será representado pelo segmento orientado cuja origem coincide com a do vetor $\vec{A}$ e cuja extremidade coincida com a do vetor $\vec{B}$.

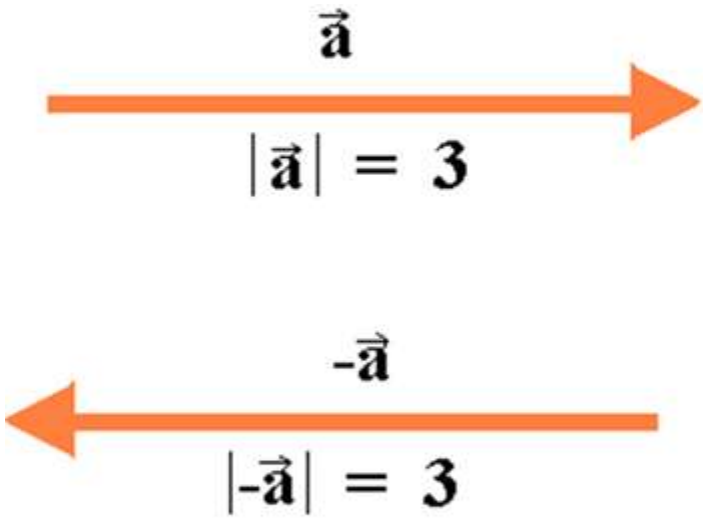
Como mostra a figura abaixo, para determinar o vetor soma ou o vetor resultante S de dois outros vetores (por exemplo, vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$) é preciso traçar o vetor $\vec{B}$ de modo que sua origem coincida com a extremidade do outro vetor, no caso, o vetor $\vec{A}$.

Portanto, encontramos o vetor resultante $\vec{S}$ quando unimos a origem do vetor $\vec{A}$ à extremidade do vetor $\vec{B}$.



Subtração de vetores

Definimos a subtração de dois vetores de um modo completamente semelhante, a partir do conceito de **oposto**. Vamos considerar um vetor diferente de zero (não nulo) $\vec{a}$. O oposto de $\vec{a}$ é um vetor que possui mesmo módulo e mesma direção, porém apresenta sentido contrário ao sentido do vetor $\vec{a}$.



Indicamos o oposto de $\vec{a}$ por $-\vec{a}$. Na figura acima temos o exemplo de um caso em que $|\vec{a}| = 3$. Sendo assim, $|-\vec{a}| = 3$ e $-\vec{a}$ tem sentido oposto ao de $\vec{a}$. O oposto do vetor nulo é ele próprio: $-\vec{0} = \vec{0}$.

Dados então dois vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, a diferença $\vec{d}$ entre esses dois vetores é representada da seguinte forma:

$$\vec{d} = \vec{x} - \vec{y}$$

E pode ser definida por:

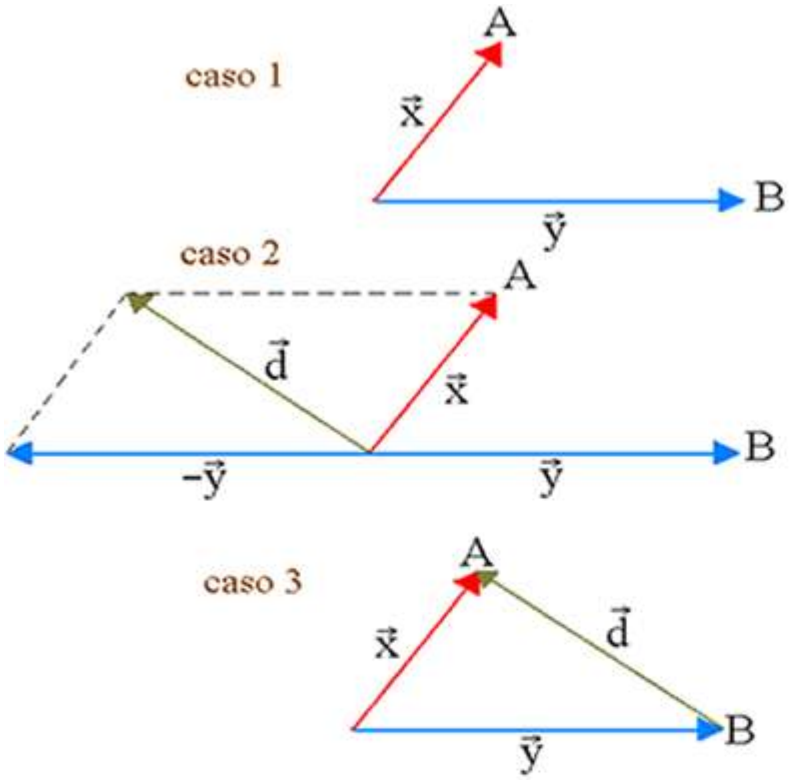
$$\vec{d} = \vec{x} + (-\vec{y})$$

Vejamos, por exemplo, o caso da figura abaixo e determinemos o vetor $\vec{d}$ tal que

$$\vec{d} = \vec{x} - \vec{y}$$

Sendo assim, temos:

$$\vec{d} = \vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$$



Na figura acima, podemos ver que foi obtida a diferença $\vec{d}$, fazendo-se a adição de $\vec{x}$ com $-\vec{y}$. No entanto, é fácil observar que o vetor $\vec{d}$ poderia ser obtido ligando as extremidades de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como no caso 3 da figura acima, com sentido de B para A.

A adição e a subtração de vetores foram definidas de maneira que podemos trabalhar com equações vetoriais de modo semelhante ao que fizemos com as equações entre números reais, passando um termo de um lado para outro, trocando seu sinal. Assim, por exemplo:

$$\vec{x}+\vec{y}=\vec{z} \quad \textit{é equivalente a} \quad \vec{x}=\vec{z}-\vec{y}$$

Multiplicando um vetor por um número

Representação de um vetor AB

Nos nossos estudos sobre grandezas vetoriais, fazemos uso de uma seta cuja direção sempre aponta para a direita. Essa seta recebe o nome de vetor e por definição é um ente matemático que representa o conjunto dos segmentos orientados de reta que possui um módulo, uma direção e um sentido. Em diversas situações podemos utilizar vetores, tanto em soma, subtração ou multiplicação. Na multiplicação de dois vetores devemos fazer o produto do vetor pelo seu valor numérico. Abaixo temos a definição da multiplicação vetorial.

Vamos imaginar um número real cujo valor seja k, sendo k ≠ 0 e um vetor $\vec{a} \neq 0$. O produto de k por $\vec{a}$ é um vetor $\vec{w}$, representado por:

$$\vec{w}=k.\vec{a}$$

Cujas características são:

Característica 1

$$|\vec{w}|=|k|.|\vec{a}|$$

Característica 2

A direção de $\vec{w}$ é a mesma de $\vec{a}$.

Característica 3

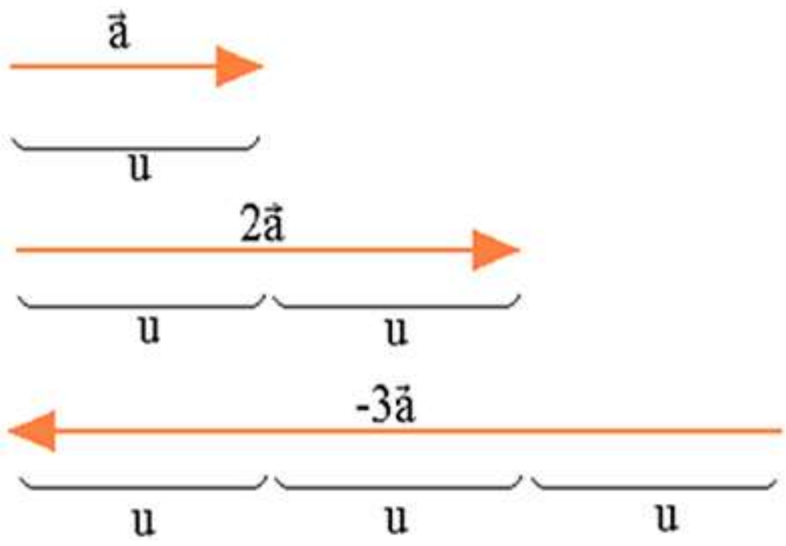
Se k > 0, $\vec{w}$ e $\vec{a}$ possuem o mesmo sentido;

Se k < 0, $\vec{w}$ e $\vec{a}$ possuem sentidos opostos;

Se k = 0 ou $\vec{a} = 0$, o produto é o vetor nulo.

Sendo k ≠ 0, o produto $\frac{1}{k} . \vec{a}$ pode ser indicado por $\frac{\vec{a}}{k}$.

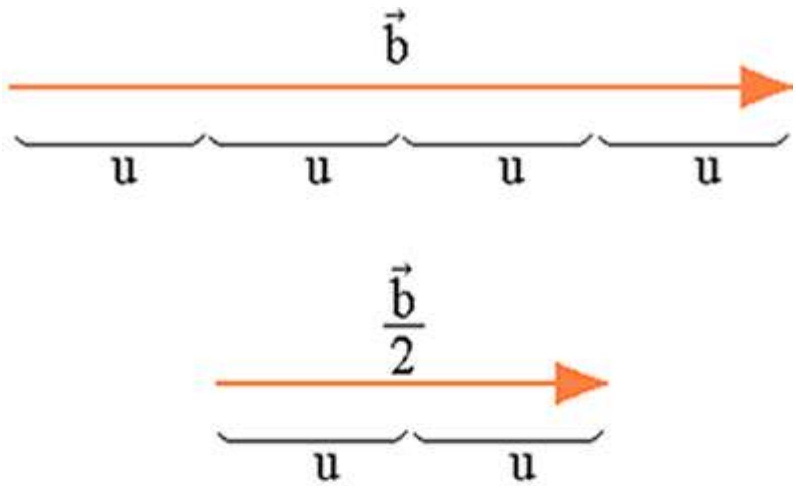
Por exemplo, na figura abaixo temos um vetor $\vec{a}$ com $|\vec{a}| = U$. O vetor $2\vec{a}$ tem módulo 2 e o mesmo sentido de $\vec{a}$. O vetor $-3\vec{a}$ possui módulo 3 e sentido oposto ao de $\vec{a}$.



Na figura acima temos:

$$|2\vec{a}| = |2| . |\vec{a}| = 2u$$
$$|-3\vec{a}| = |-3| . |\vec{a}| = 3u$$

Na figura abaixo, o vetor $\vec{b}$ possui módulo 4. O vetor $\frac{\vec{b}}{2}$ possui módulo 2.

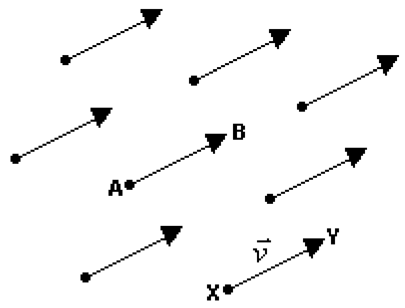


Na figura acima temos como resultado:

$$\left|\frac{\vec{b}}{2}\right| = \frac{|\vec{b}|}{|2|} = \frac{4u}{|2|} = \frac{4u}{2} = 2u$$

Vetor

O vetor determinado por um segmento orientado **AB** é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a **AB**.



Se indicarmos com $\vec{v}$ este conjunto, simbolicamente poderemos escrever:

$$\vec{v} = \{XY/XY \sim AB\}$$

onde **XY** é um segmento qualquer do conjunto.

O vetor determinado por **AB** é indicado por $\overrightarrow{AB}$ ou **B - A** ou $\vec{v}$.

um mesmo vetor $\overrightarrow{AB}$ é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, chamados *representantes* desse vetor, e todos equipolentes entre si. Assim, um segmento determina um conjunto que é o vetor, e qualquer um destes representantes determina o mesmo vetor. Usando um pouco mais a nossa capacidade de abstração, se os considerarmos todos como infinitos e orientados de origem comum, estamos a caracterizar, através de representantes, a totalidade dos vetores do espaço. Ora, cada um destes segmentos é um representante de um só vetor. Consequentemente, todos os vetores estão representados naquele conjunto que imaginamos.

As características de um vetor $\vec{v}$ são as mesmas de qualquer um de seus representantes, isto é: o *módulo*, a *direção* e o *sentido* do vetor são o módulo, direção e o sentido de qualquer um de seus representantes.

O módulo de $\vec{v}$ se indica por $|\vec{v}|$.

Vetores iguais

Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, e somente se, **AB ~ CD**.

Vetor Nulo

Os segmentos nulos, por serem equipolentes entre si, determinam um único vetor, chamado vetor nulo ou vetor zero, e que é indicado por $\vec{0}$.

Vetores Opostos

Dado um vetor $\vec{v} = \overline{AB}$, o vetor $\overline{BA}$ é o oposto de $\overline{AB}$ e se indica por $-\overline{BA}$ ou por $-\vec{v}$.

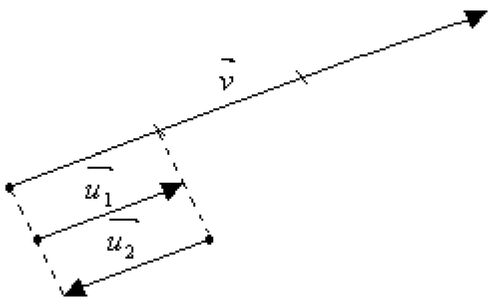
Vetor Unitário

Um vetor $\vec{v}$ é unitário se $|\vec{v}| = 1$.

Versor

Versor de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direcção e mesmo sentido de $\vec{v}$.

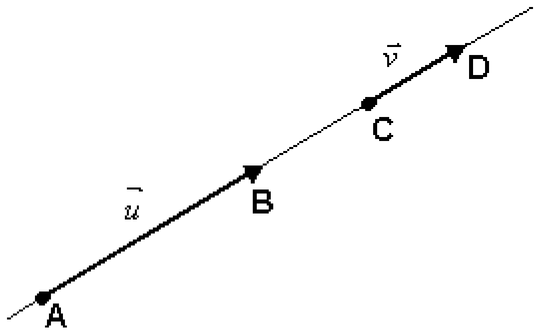
Por exemplo, tomemos um vetor $\vec{v}$ de módulo 3.

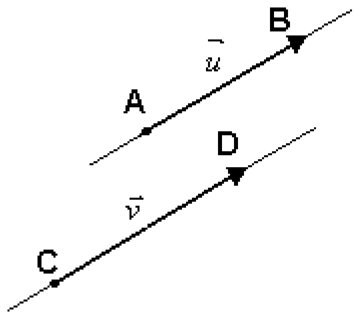


Os vetores $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$ da figura são vetores unitários, pois ambos têm módulo 1. No entanto, apenas $\overline{u}_1$ tem a mesma direcção e o mesmo sentido de $\vec{v}$. Portanto, este é o versor de $\vec{v}$.

Vetores Colineares

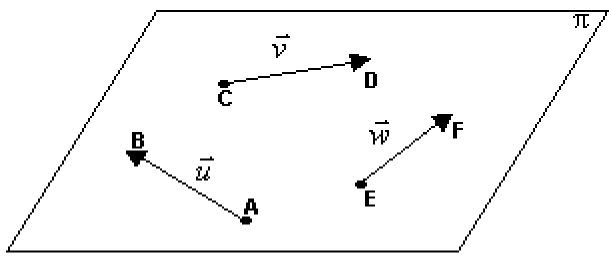
Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *colineares* se tiverem a mesma direcção. Em outras palavras: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem representantes **AB** e **CD** pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas.





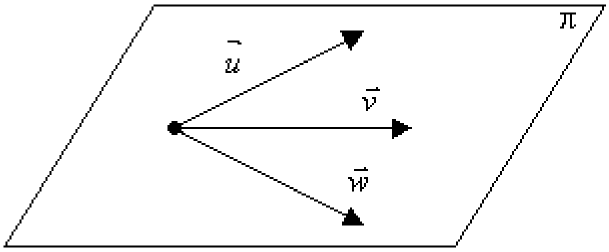
Vetores Coplanares

Se os vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (não importa o número de vetores) possuem representantes **AB**, **CD** e **EF** pertencentes a um mesmo plano π, diz-se que eles são coplanares.

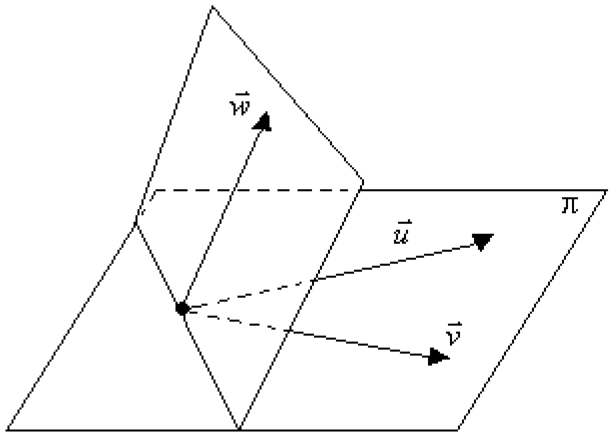


Dois vetores $\bar{u}$ e $\vec{v}$ *quaisquer são sempre coplanares*, pois podemos sempre tomar um ponto no espaço e, com origem nele, imaginar os dois representantes de $\bar{u}$ e $\vec{v}$ pertencendo a um plano p que passa por este ponto.

Três vetores poderão ou não ser coplanares.



$\bar{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares



$\bar{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares

Soma de vetores

Se v=(a,b) e w=(c,d), definimos a soma de v e w, por:

v + w = (a+c,b+d)

Propriedades da soma de vetores

I) Comutativa: Para todos os vetores u e v de R^2:

v + w = w + v

II) Associativa: Para todos os vetores u, v e w de R^2:

u + (v + w) = (u + v) + w

III) Elemento neutro: Existe um vetor O=(0,0) em R^2 tal que para todo vetor u de R^2, se tem:

O + u = u

IV) Elemento oposto: Para cada vetor v de R^2, existe um vetor -v em R^2 tal que:

v + (-v) = O

Diferença de vetores

Se v=(a,b) e w=(c,d), definimos a diferença entre v e w, por:

v - w = (a-c,b-d)

Produto de um escalar por um vetor

Se v=(a,b) é um vetor e **c** é um número real, definimos a multiplicação de c por v, como:

c.v = (ca,cb)

Propriedades do produto de escalar por vetor

Quaisquer que sejam **k** e **c** escalares, **v** e **w** vetores:

- 1 v = v
- (k c) v = k (c v) = c (k v)
- k v = c v   implica   k = c, se v for não nulo
- k (v+w) = k v + k w
- (k + c)v = k v + c v

Módulo de um vetor

O módulo ou comprimento do vetor v=(a,b) é um número real não negativo, definido por:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vetor unitário

Vetor unitário é o que tem o módulo igual a 1.

Existem dois vetores unitários que formam a **base canónica** para o espaço R^2, que são dados por:

i = (1,0)   j = (0,1)

Para construir um vetor unitário **u** que tenha a mesma direcção e sentido que um outro vetor v, basta dividir o vetor v pelo seu módulo, isto é:

$$u = \frac{v}{|v|}$$

Observação:

Para construir um vetor **u** paralelo a um vetor v, basta tomar u=cv onde c é um escalar não nulo. Nesse caso, u e v serão paralelos.

Se c = 0 então u será o vetor nulo.
Se 0 < c < 1 então u terá comprimento menor do que v.
Se c > 1 então u terá comprimento maior do que v.
Se c < 0 então u terá sentido oposto ao de v.

Produto escalar

Dados os vetores u=(a,b) e v=(c,d), definimos o produto escalar entre os vetores u e v, como o número real obtido por:

u.v = a.c + b.d

Exemplos:

O produto escalar entre u=(3,4) e v=(-2,5) é:

u.v = 3.(-2) + 4.(5) = -6+20 = 14

O produto escalar entre u=(1,7) e v=(2,-3) é:

u.v = 1.(2) + 7.(-3) = 2-21 = -19

Propriedades do produto escalar

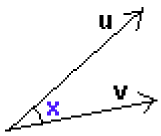
Quaisquer que sejam os vetores, **u v** e **w** e k escalar:

v.w = w.v
v.v = |v| |v| = $|v|^2$
u.(v+w) = u.v + u.w
(kv).w = v.(kw) = k(v.w)
|kv| = |k| |v|
|u.v| <= |u| |v| (desigualdade de Schwarz)
|u+v| <= |u| + |v| (desigualdade triangular)

Obs: **<=** significa menor ou igual

Ângulo entre dois vetores

O produto escalar entre os vetores u e v pode ser escrito na forma:
u.v = |u| |v| cos(x)
onde x é o ângulo formado entre u e v.



Através desta última definição de produto escalar, podemos obter o ângulo x entre dois vetores genéricos u e v, como:

$$\cos(x) = \frac{u.v}{|u||v|}, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

desde que nenhum deles seja nulo.

Vetores ortogonais

Dois vetores u e v são ortogonais se:

u.v = 0