Análise e Projeto de Algoritmos

SAFIRA- 2023/02

Revisão Matemática

Indução Matemática

Indução Matemática

- Técnica aparece pela primeira vez no trabalho do italiano Francesco Maurolico em 1575.
- No século XVII, Pierre de Fermat e Blaise Pascal usam essa técnica em seus trabalhos. Fermat dá o nome de *“método do descendente infinito”*.
- Em 1883, Augustus De Morgan descreve o processo cuidadosamente e dá o nome de ***indução matemática***.
- Técnica extremamente importante para a Ciência da Computação.

Indução Matemática

Para visualizar a ideia da indução matemática, imagine uma coleção de dominós colocados numa sequência (formação) de tal forma que a queda do primeiro dominó força a queda do segundo, que força a queda do terceiro, e assim sucessivamente, até todos os dominós caírem.

Indução Matemática

Aplica-se ao conjunto dos números naturais.

Dada uma proposição matemática p(n), deve-se mostrar que p(k) $\forall$ k $\in$ ao domínio de p é verdadeira.

Em seguida, considerando-se p(n) verdadeira, deve-se demonstrar que p(n+1) também é verdadeiro.

Se tal demonstração for possível, então a proposição p(n) é verdadeira dentro do domínio proposto.

Indução Matemática

Composta por 3 etapas:

- Passo Base ou Base Indutiva (B.I)
- Hipótese Indutiva (H.I)
- Passo Indutivo (P.I)

Indução Matemática

Exemplo 1:

Mostrar por indução que:

$$1 + 2 + 3 + \ \ldots + n = \frac{n^2 + n}{2} \,\forall\, n \geq 1$$

No passo indutivo, necessariamente, deve-se fazer uso da hipótese de indução.

B.I. => n=1

$$1 = \frac{(1^2+1)}{2} = 1 \Rightarrow OK$$

Indução Matemática

Exemplo 1:

H.I.: $1 + 2 + 3 + \ \ldots + n = \frac{n^2+n}{2} \ \forall\, n \geq 1$

P.I.: p(n) => p(n+1)

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \ \ldots + n}_{} + (n + 1) = \frac{(n + 1)^2 + (n + 1)}{2}$$

Hipótese de Indução.
Logo, pode-se substituir pela igualdade da hipótese de indução

Todo n passa a ser n+1

Indução Matemática

Exemplo 1:

$$\frac{n^2+n}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)^2+(n+1)}{2}$$

$$\frac{n^2+n+2n+2}{2}=\frac{(n^2+2n+1)+(n+1)}{2}$$

$$\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

Logo $1+2+3+\ \ldots+n=\frac{n^2+n}{2}\ \forall\ n\geq 1$ é verdadeira

Indução Matemática

Exemplo 2:

Mostrar por indução que:

$$2n^2 + 3 \leq 5n^2 \ \forall \ n \geq 1$$

Indução Matemática

Exemplo 2:

B.I: n = 1

$$2(1)^2+3 \leq 5(1)^2$$

$$2 + 3 \leq 5$$

$$5 \leq 5 \Rightarrow OK$$

Indução Matemática

Exemplo 2:

H.I: $2n^2 + 3 \leq 5n^2 \; \forall \; n \geq 1$

P.I: p(n) => p(n+1)

$$2(n+1)^2 + 3 \leq 5(n+1)^2$$
$$2(n^2 + 2n + 1) + 3 \leq 5(n^2 + 2n + 1)$$
$$2n^2 + 4n + 2 + 3 \leq 5n^2 + 10n + 5$$
$$2n^2 + 3 \leq 5n^2 + 10n + 5 - 4n - 2$$
$$2n^2 + 3 \leq 5n^2 + 6n + 3$$

Indução Matemática

Exemplo 2:

Como 6n+3 será sempre maior ou igual a 9 (considerando que o n ≥ 1), logo, há um reforço de desigualdade.

Sendo assim, $2n^2 + 3 \leq 5n^2$ é verdadeira $\forall\, n \geq 1$

Indução Matemática

Exercícios:

Mostrar por indução que:

a) $n^2 \leq (n+1)^2 \; \forall \; n \geq 1$

b) $n^2 = 1+3+5+\cdots+(2n-1) \; \forall \; n \geq 1$

c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \; \ldots 2^n = 2^{n+1} - 1 \; \forall \; n \geq 0$

d) $0 \; + 1 + 2 + \; \ldots + \mathrm{n} = \frac{n(n+2)}{2} \; \forall \; n \geq 0$