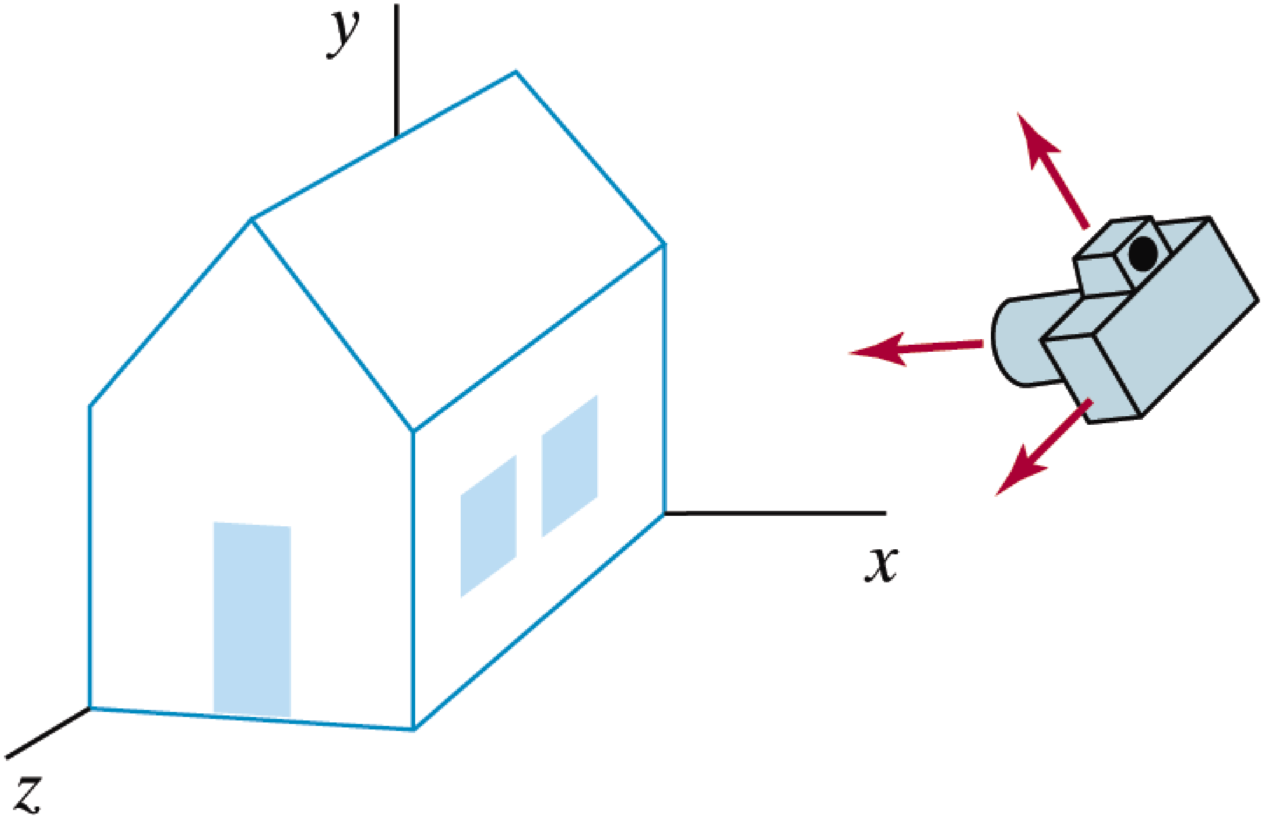
COMPUTAÇÃO GRÁFICA

Conceitos Matemáticos

CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
UNIPAC BARBACENA
PROFESSOR NAIRON NERI SILVA

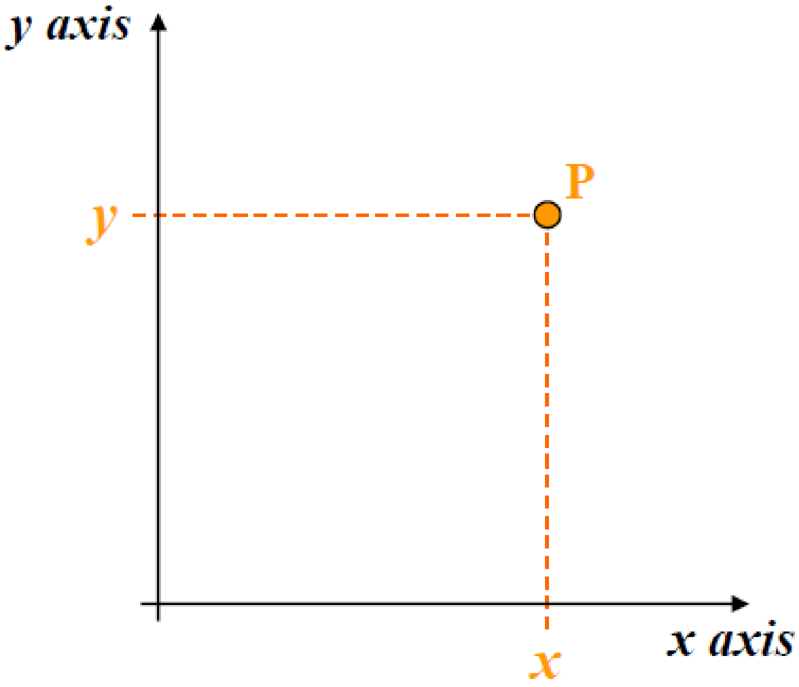
Ideia Geral

Images taken from Hearn & Baker, "Computer Graphics with OpenGL" (2004)

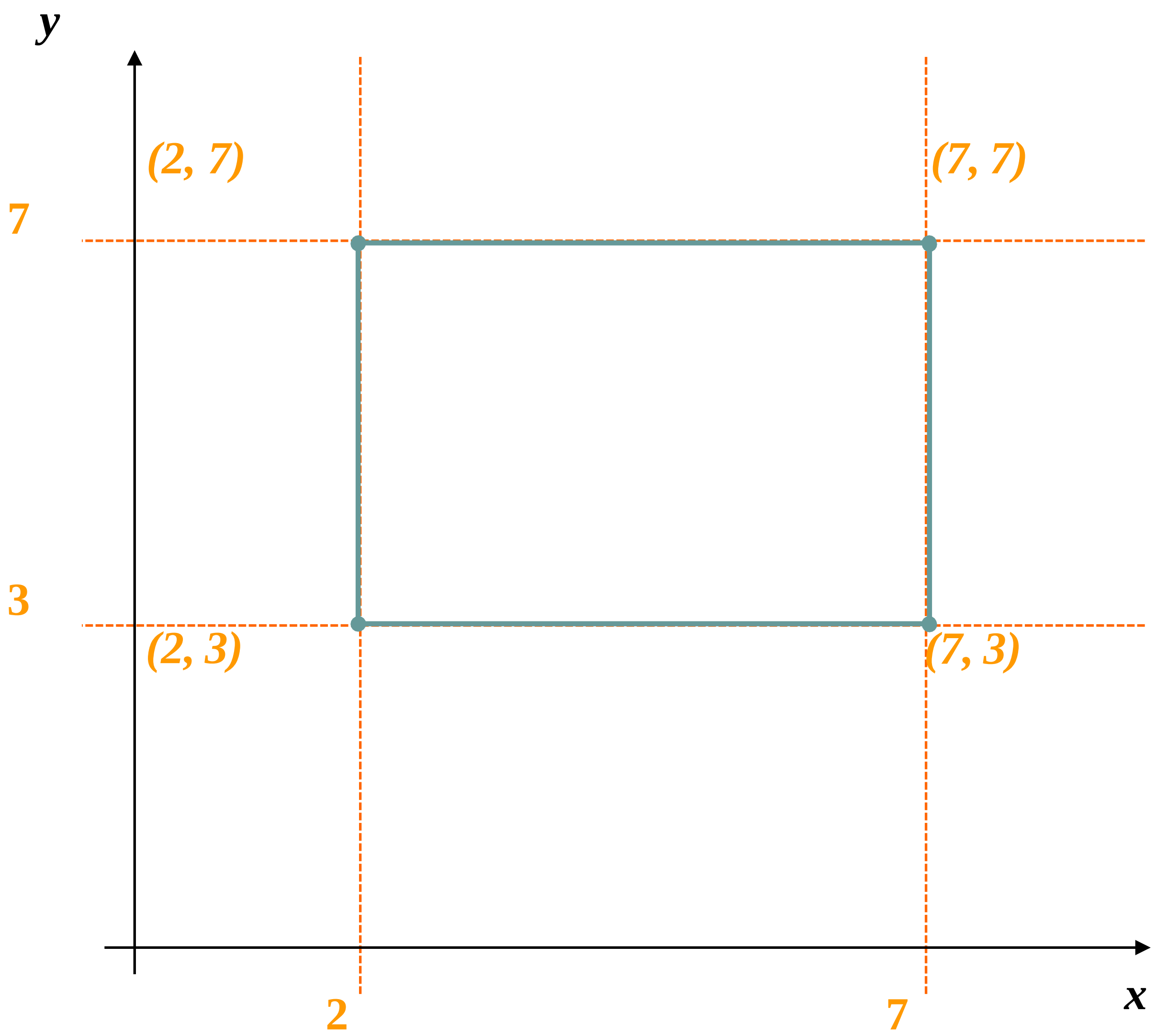


Sistemas de Coordenadas 2D

- Quando criamos uma imagem no computador, a cena é definida usando geometria simples
- Para cenas 2D nós usaremos o sistema de coordenadas cartesianas 2D
- Todos os objetos serão definidos usando pares de coordenadas

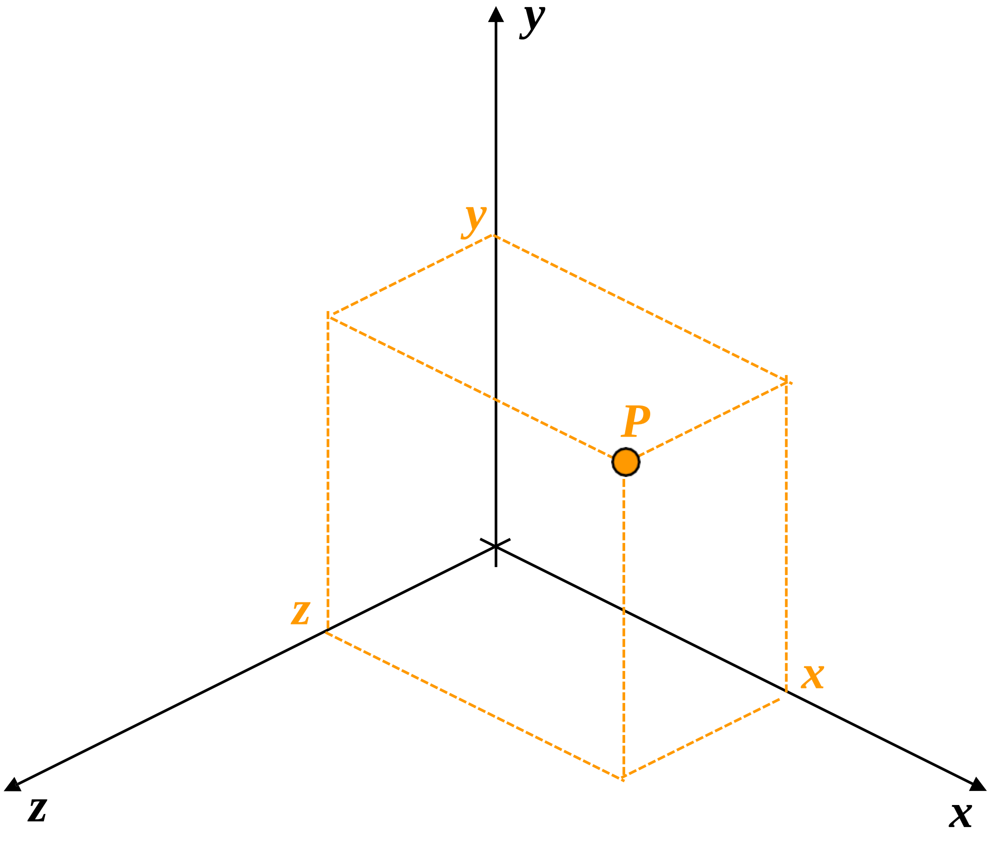


Sistemas de Coordenadas 2D



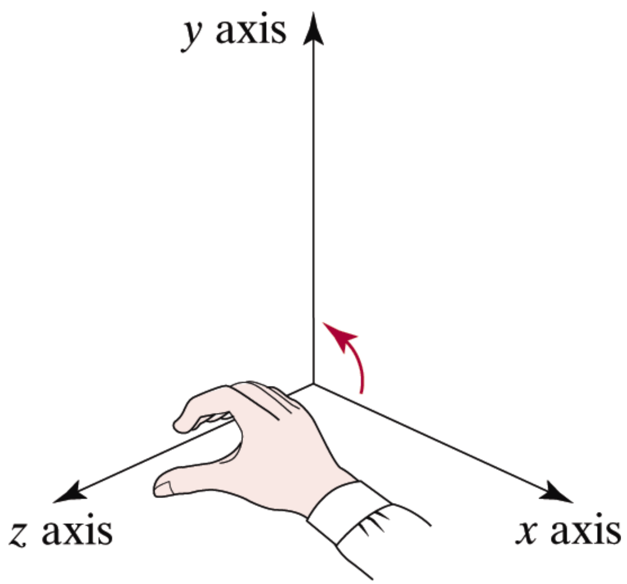
Sistemas de Coordenadas 3D

- Para cenas tridimensionais, basta adicionar uma coordenada extra

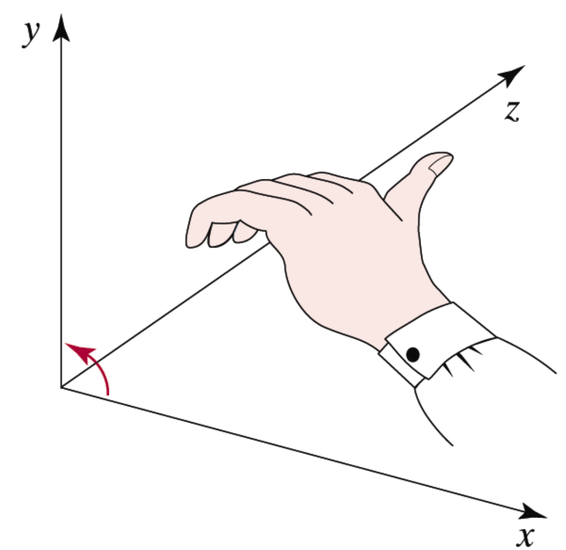


Mão esquerda ou mão direita?

- Há duas formas de pensarmos em sistemas de coordenadas 3D – *baseado na mão esquerda* e *baseado na mão direita*



Sistema baseado na mão direta

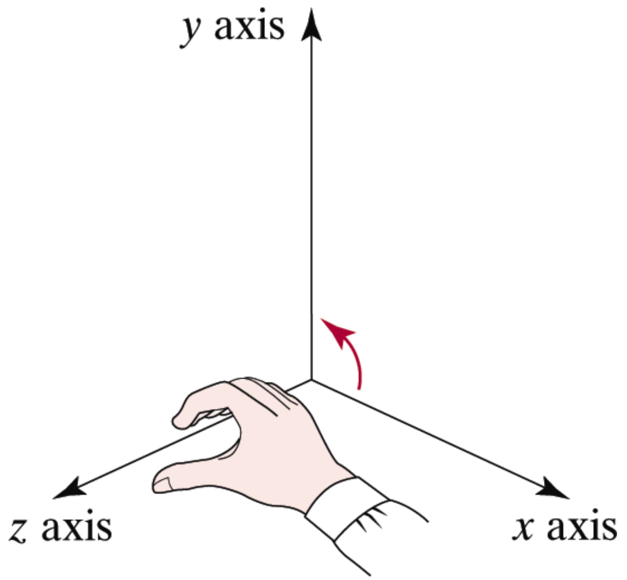


Sistema baseado na mão esquerda

Images taken from Hearn & Baker, "Computer Graphics with OpenGL" (2004)

Mão esquerda ou mão direita?

- Há duas formas de pensarmos em sistemas de coordenadas 3D – *baseado na mão esquerda* e *baseado na mão direita*



Sistema baseado na mão direta

Usaremos o sistema basedo na mão direita

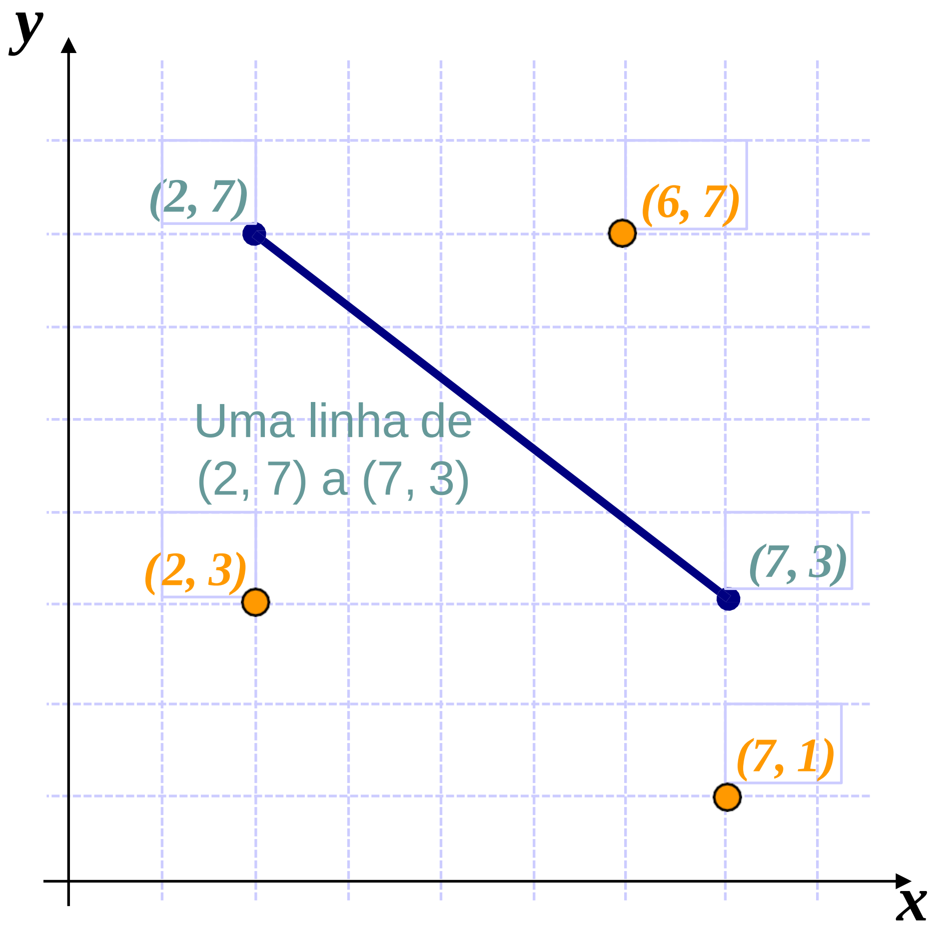
Sistema baseado na mão esquerda

Images taken from Hearn & Baker, “Computer Graphics with OpenGL” (2004)

Pontos e Linhas

- Pontos:
  - Um ponto no espaço bidimensional é simbolizado por um par ordenado (x, y)
  - Em três dimensões um ponto é simbolizado pela tripla (x, y, z)
- Linhas:
  - Uma linha é definida atráves de um ponto inicial e um ponto final
    - Em 2d: (x_{start}, y_{start}) a (x_{end}, y_{end})
    - Em 3d: $(x_{start}, y_{start}, z_{start})$ a $(x_{end}, y_{end}, z_{end})$

Pontos e Linhas (cont…)



A equação de uma linha

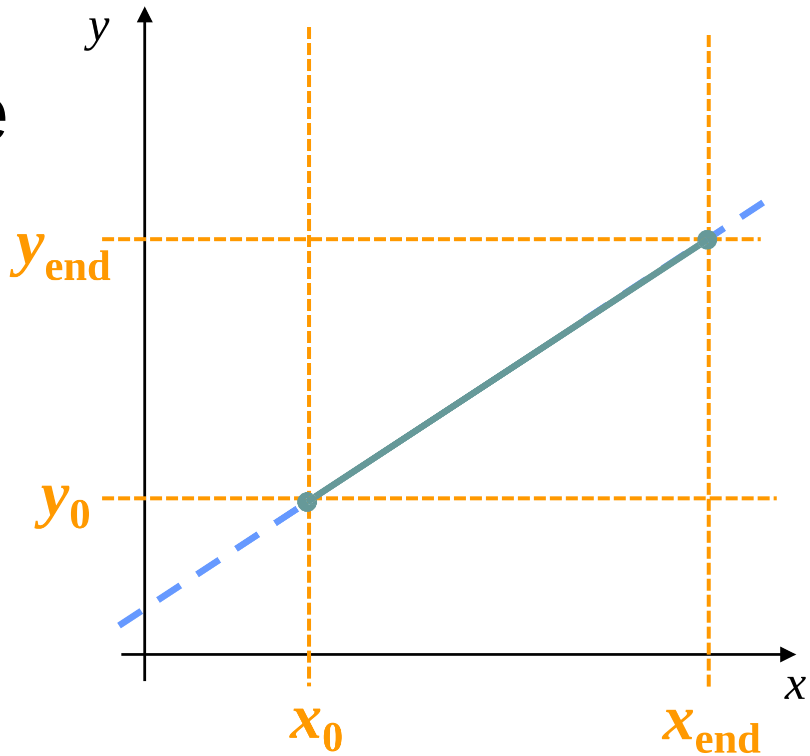
- A equação da linha é dada pela equação:

$$y = m \cdot x + b$$

- onde:

$$m = \frac{y_{end} - y_0}{x_{end} - x_0}$$

$$b = y_0 - m \cdot x_0$$



- A equação da linha nos dá o valor correspondente de *y* para cada valor de *x*

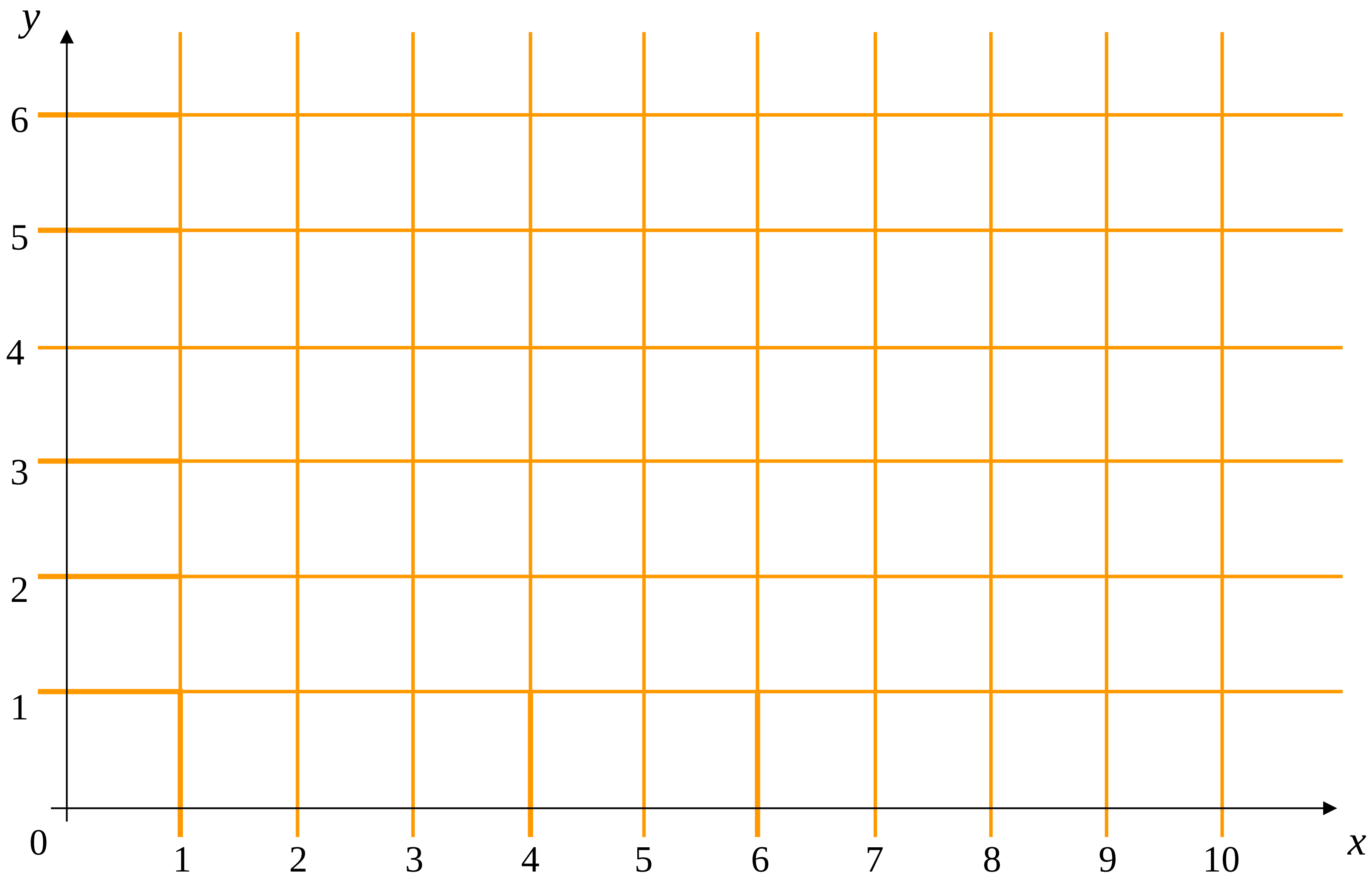
Um exemplo simples

- Vamos desenhar uma pequena porção da linha dada pela equação:

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$$

- Basta encontrar o valor da coordenada y para cada valor da coordenada x

Um exemplo simples (cont)



Um exemplo simples (cont)

Por exemplo, vamos variar x de 2 a 7

$$y(2) = \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{4}{5} = 2$$

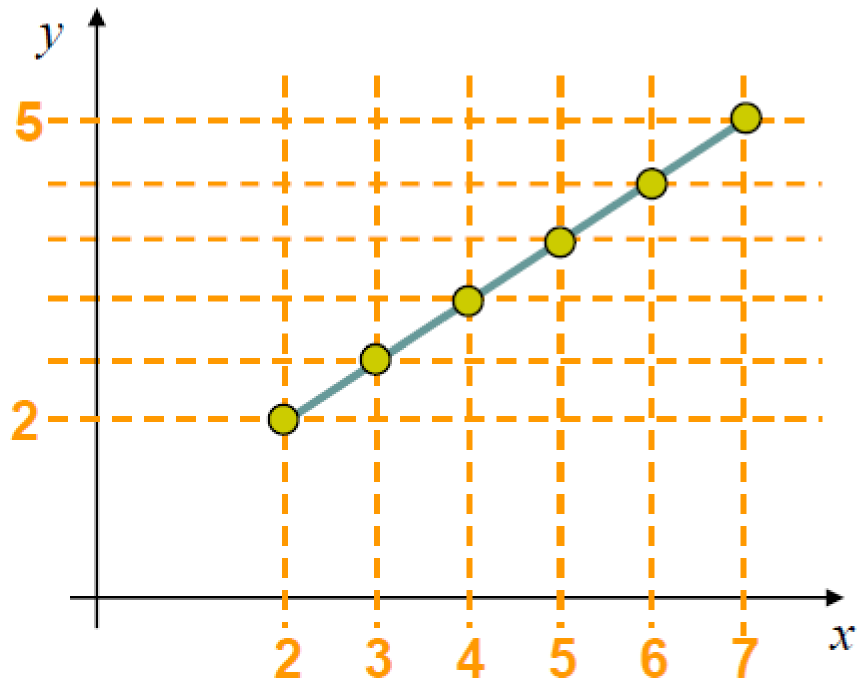
$$y(3) = \frac{3}{5} \cdot 3 + \frac{4}{5} = 2\frac{3}{5}$$

$$y(4) = \frac{3}{5} \cdot 4 + \frac{4}{5} = 3\frac{1}{5}$$

$$y(5) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{4}{5} = 3\frac{4}{5}$$

$$y(6) = \frac{3}{5} \cdot 6 + \frac{4}{5} = 4\frac{2}{5}$$

$$y(7) = \frac{3}{5} \cdot 7 + \frac{4}{5} = 5$$

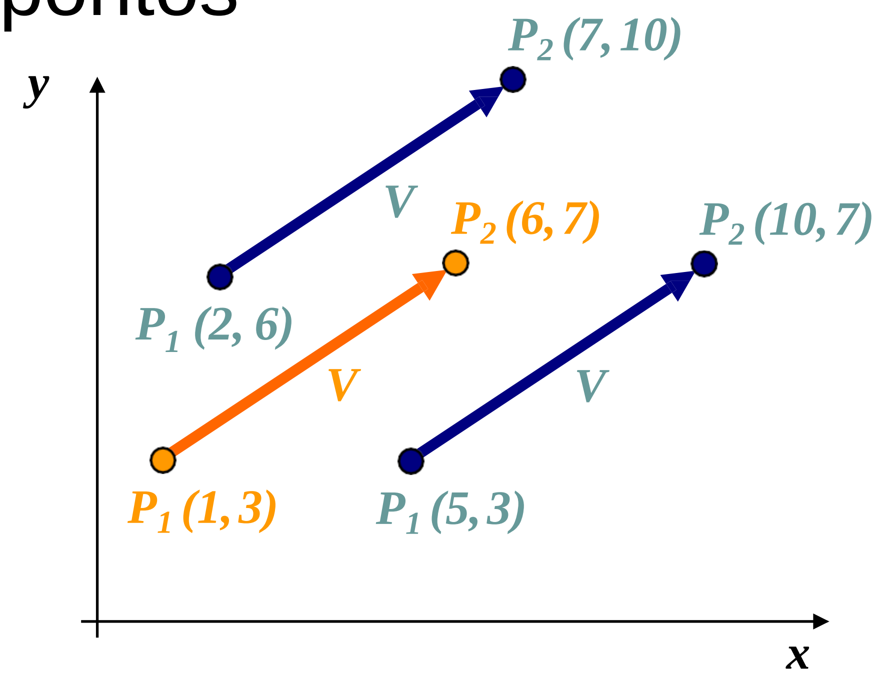


Vetores

- Vetores:
  - Um vetor é definido pela diferença entre dois pontos
  - Importante lembrar que um vetor possui uma direção e um tamanho
- Para que servem vetores em CG?
  - Um vetor nos mostra como mover algo de um ponto a outro
  - São especialmente importantes em transformações geométricas

Vetores (2D)

- Para determinar o vetor entre dois pontos, simplesmente subtraia as coordenadas dos pontos



$$V = P_2 - P_1$$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

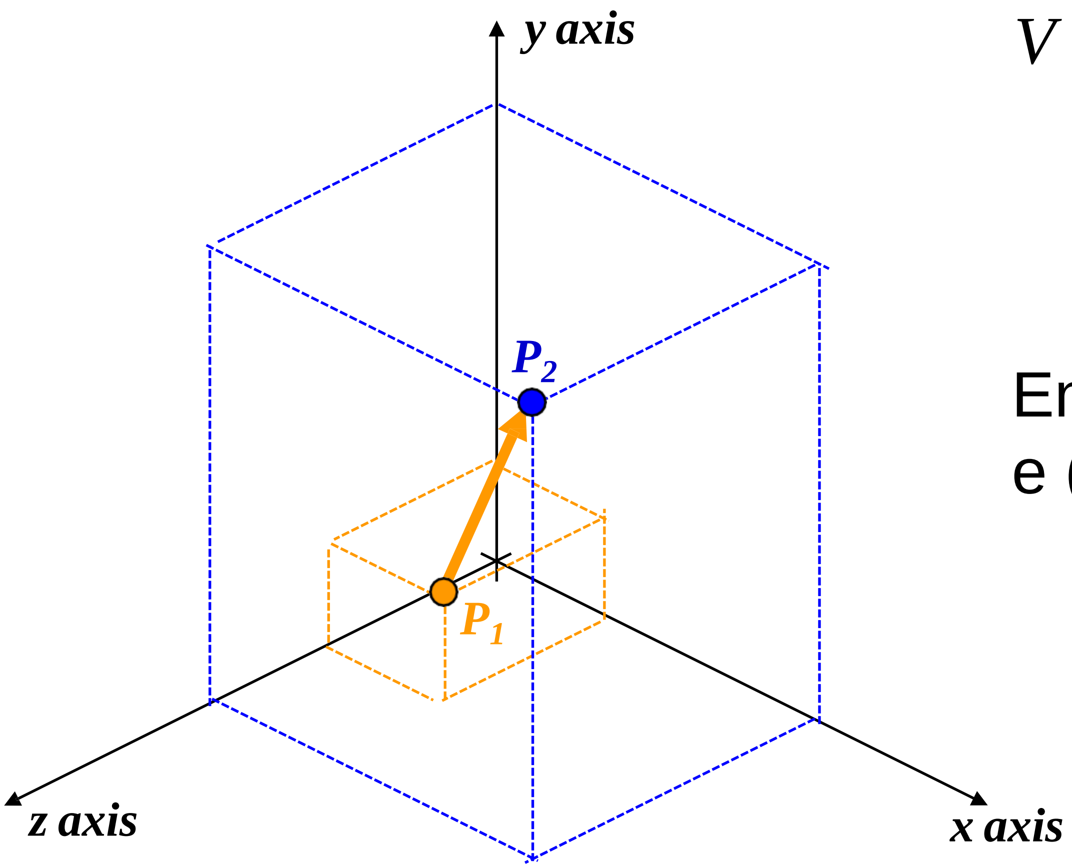
$$= (6 - 1, 7 - 3)$$

$$= (5, 4)$$

Cuidado: Vários pares de pontos possuem o mesmo vetor entre eles

Vetores (3D)

- Em 3D um vetor é calculado da mesma forma que vetores em 2D



$$V = P_2 - P_1$$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$= (V_x, V_y, V_z)$$

Então para o ponto (2, 1, 3) e (7, 10, 5) obteríamos

$$= (7-2,\ 10-1,\ 5-3)$$

$$= (5, 9, 2)$$

Operações Vetoriais

- Há várias operações importantes que precisamos saber realizar com vetores:
  - Calcular o tamanho do vetor
  - Adição de Vetores
  - Multiplicação do vetor por um escalar
  - Produtor Escalar
  - Produto Vetorial

Operações Vetoriais:
Tamanho do Vetor

- Calcular o tamanho de um vetor é fácil tanto em 2D:

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

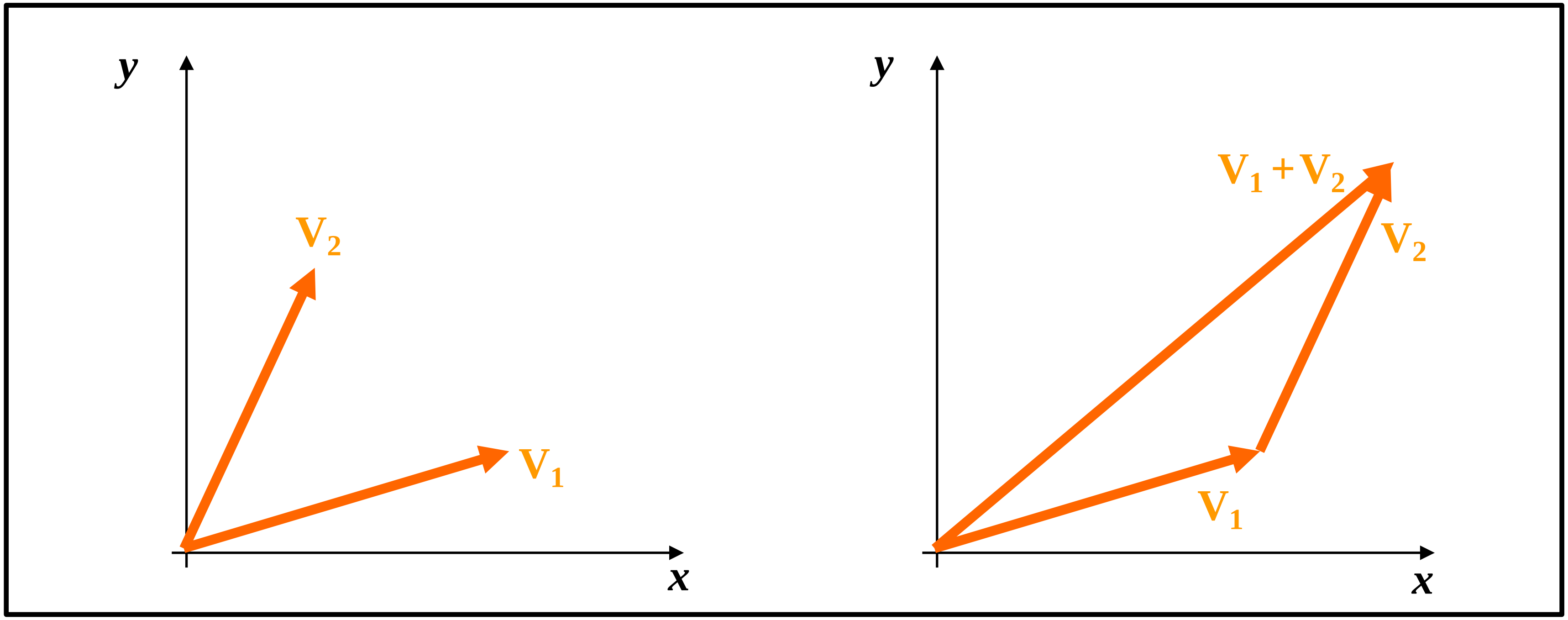
- Quanto em 3D:

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Operações Vetoriais: Soma de vetores

- A soma de dois vetores é calculada através da soma de suas componentes correspondentes

$$V_1 + V_2 = (V_{1x} + V_{2x}, V_{1y} + V_{2y})$$

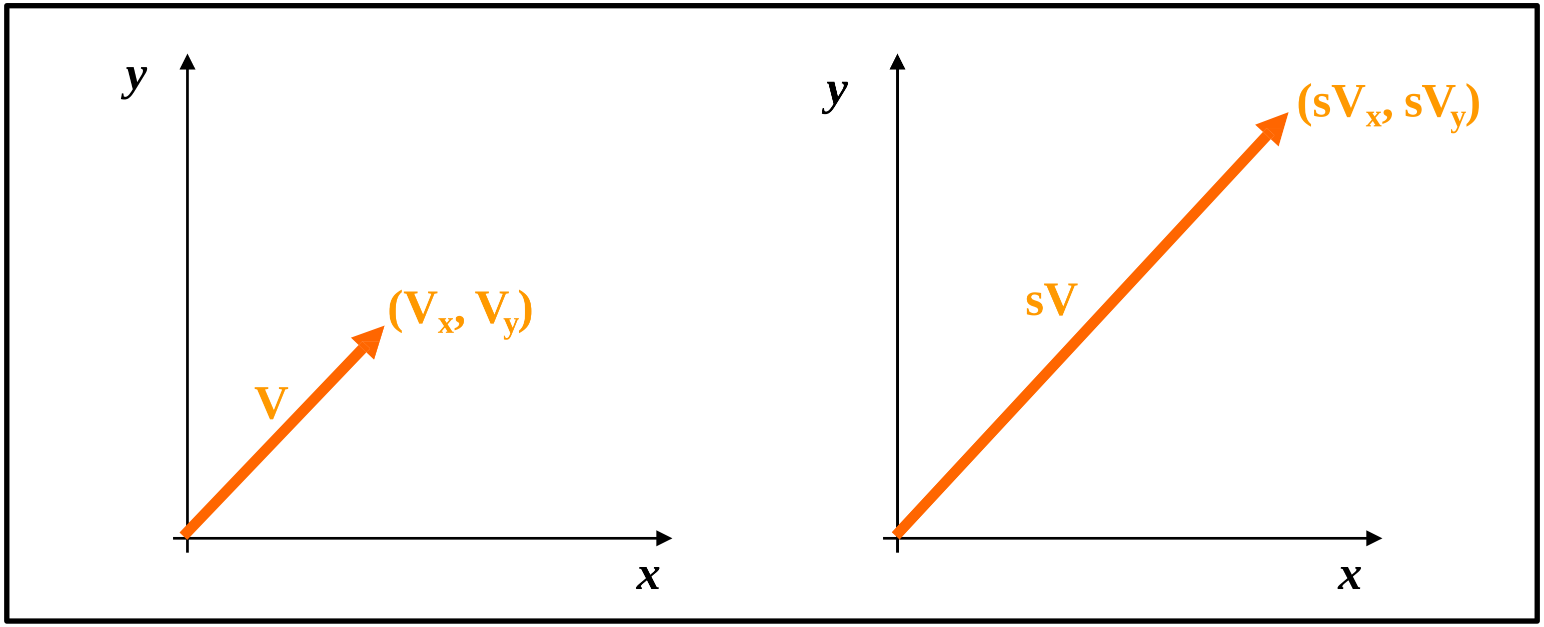


- O mesmo pode ser feito em 3D

Operações Vetoriais: Multiplicação por escalar

- A multiplicação de um vetor por um escalar ocorre através da multiplicação de cada componente do vetor pelo escalar

$$sV = (sV_x, sV_y)$$



Outras Operações Vetoriais

- Há outras operações importantes que serão vistas no decorrer da disciplina.

- As principais são:
  - Produto Escalar (*dot product*)
  - Produto Vetorial (*cross product*)

Matrizes

- Uma matriz é simplesmente uma grade de números

$$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 13 \\ 10 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4.3 \\ 6.7 \\ 1.2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 16 & 23 & 42 \end{bmatrix}$$

- Entretanto, ao utilizarmos operações matriciais nós seremos capazes de realizar inúmeras operações matemáticas em CG de forma extremamente rápidas

Operações Matriciais

- As operações matriciais importantes para esta disciplina são:
  - Multiplicação por escalar
  - Adição
  - Multiplicação
  - Transposta
  - Determinante
  - Matriz inversa

Operações Matriciais: Multiplicação por Escalar

- Para multiplicar os elementos de uma matriz por um escalar basta multiplicar cada componente pelo escalar.

$$s*\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s*a & s*b & s*c \\ s*d & s*e & s*f \\ s*g & s*h & s*i \end{bmatrix}$$

- Exemplo:

$$3*\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 24 & 30 & 36 \\ 42 & 48 & 54 \end{bmatrix}$$

Operações Matriciais: Adição

- Para somar duas matrizes simplesmente some todos os elementos correspondentes

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+r & b+s & c+t \\ d+u & e+v & f+w \\ g+x & h+y & i+z \end{bmatrix}$$

- Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 \\ 15 & 17 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 13 \\ 17 & 21 & 25 \\ 29 & 33 & 37 \end{bmatrix}$$

As matrizes devem ter o mesmo tamanho

Operações Matriciais: Multiplicação

- Podemos multiplicar duas matrizes **A** e **B** desde que o número de colunas de **A** seja igual ao número de linhas de **B**
- Então, se tivermos uma matriz **A** m por n e uma matriz **B** p por q teremos a multiplicação:

C = **AB**

- onde **C** será uma matriz m por q cujos elementos serão calculados da seguinte forma:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

Operações Matriciais: Multiplicação (cont…)

- Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 7 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

Operações Matriciais: Multiplicação (cont…)

- Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 7 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0*1+(-1)*3 & 0*2+(-1)*4 \\ 5*1+7*3 & 5*2+7*4 \\ -2*1+8*3 & -2*2+8*4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 26 & 38 \\ 22 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

Operações Matriciais: Multiplicação (cont...)

- Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 7 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0*1+(-1)*3 & 0*2+(-1)*4 \\ 5*1+7*3 & 5*2+7*4 \\ -2*1+8*3 & -2*2+8*4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 26 & 38 \\ 22 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*4+2*5+3*6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = ?$$

Operações Matriciais: Multiplicação (cont…)

- Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 7 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0*1+(-1)*3 & 0*2+(-1)*4 \\ 5*1+7*3 & 5*2+7*4 \\ -2*1+8*3 & -2*2+8*4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 26 & 38 \\ 22 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*4+2*5+3*6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4*1 & 4*2 & 4*3 \\ 5*1 & 5*2 & 5*3 \\ 6*1 & 6*2 & 6*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

Operações Matriciais: Multiplicação (cont…)

- **Atenção!**
  A multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa, então:

$$AB \neq BA$$

Operações Matriciais: Transposta

- A transposta de uma matriz M, escrita como M^{T} será obtida através da inversão das linhas pelas colunas de M

- Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Outras Operações Matriciais

- Há outras operações matriciais importantes que serão necessárias no decorrer desta disciplina.

- Algumas destas operações:
  - Determinante de uma matriz
  - Matriz Inversa

Fonte dos Slides

Slide do material do Prof. Rodrigo Luis de Souza da Silva - UFJF