Centro Universitário Presidente Antônio Carlos
Teoria de Grafos

Árvores

Felipe Roncalli de Paula Carneiro
felipecarneiro@unipac.br

O que vamos aprender nessa aula

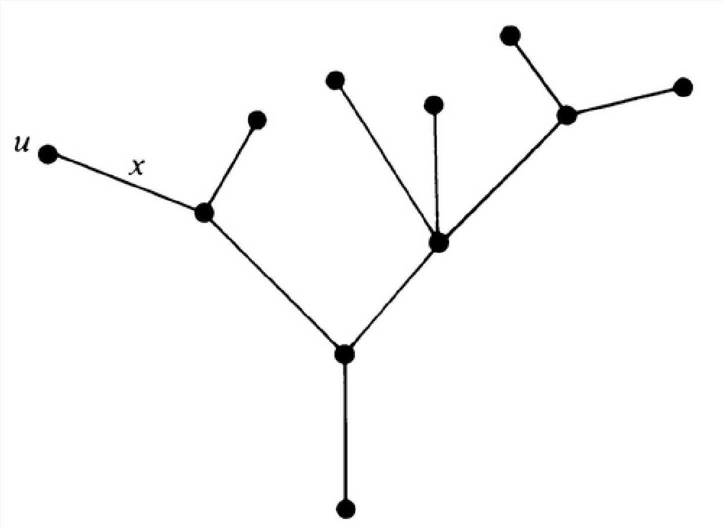
- Árvores

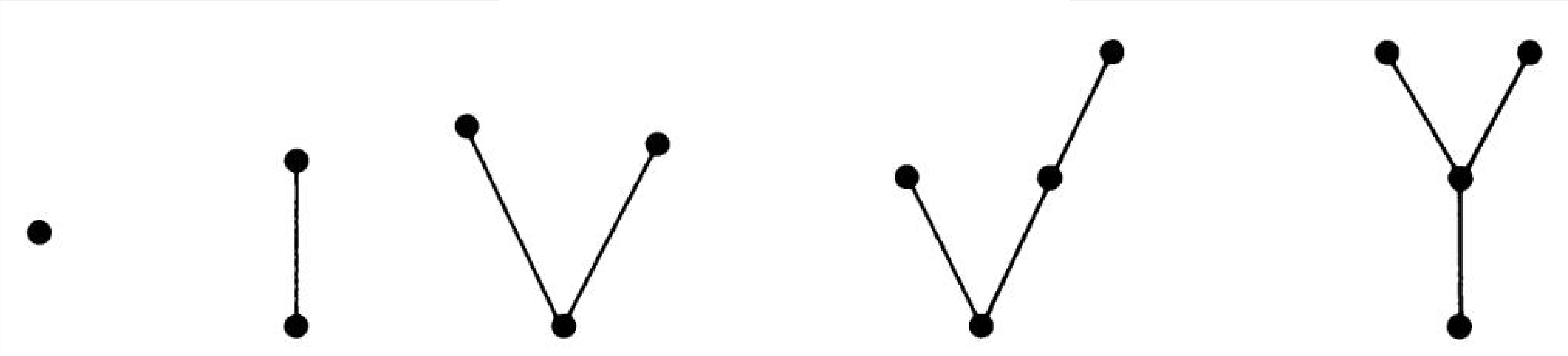
Árvore

Definição

*Uma **árvore** é um grafo conexo que não possui circuitos.*

Circuito é um **caminho** qie inicia e termina no **mesmo** vértice;

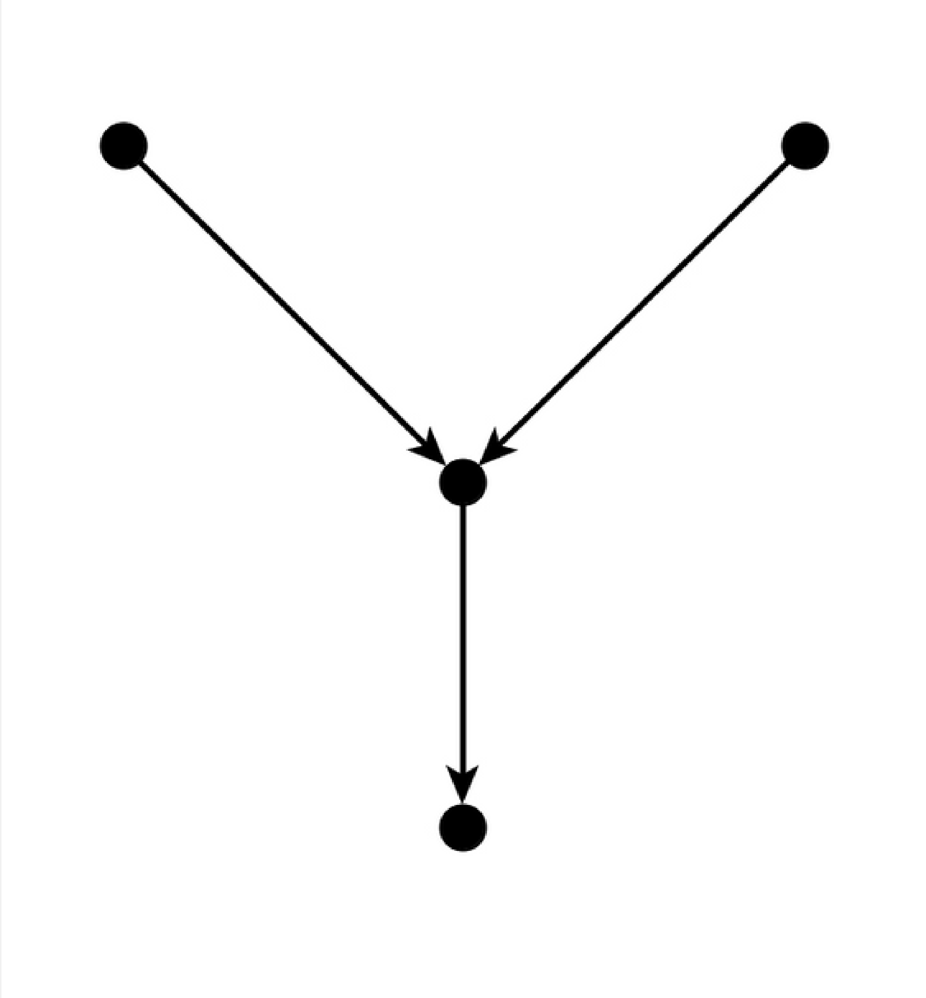




Árvore Orientada

Definição

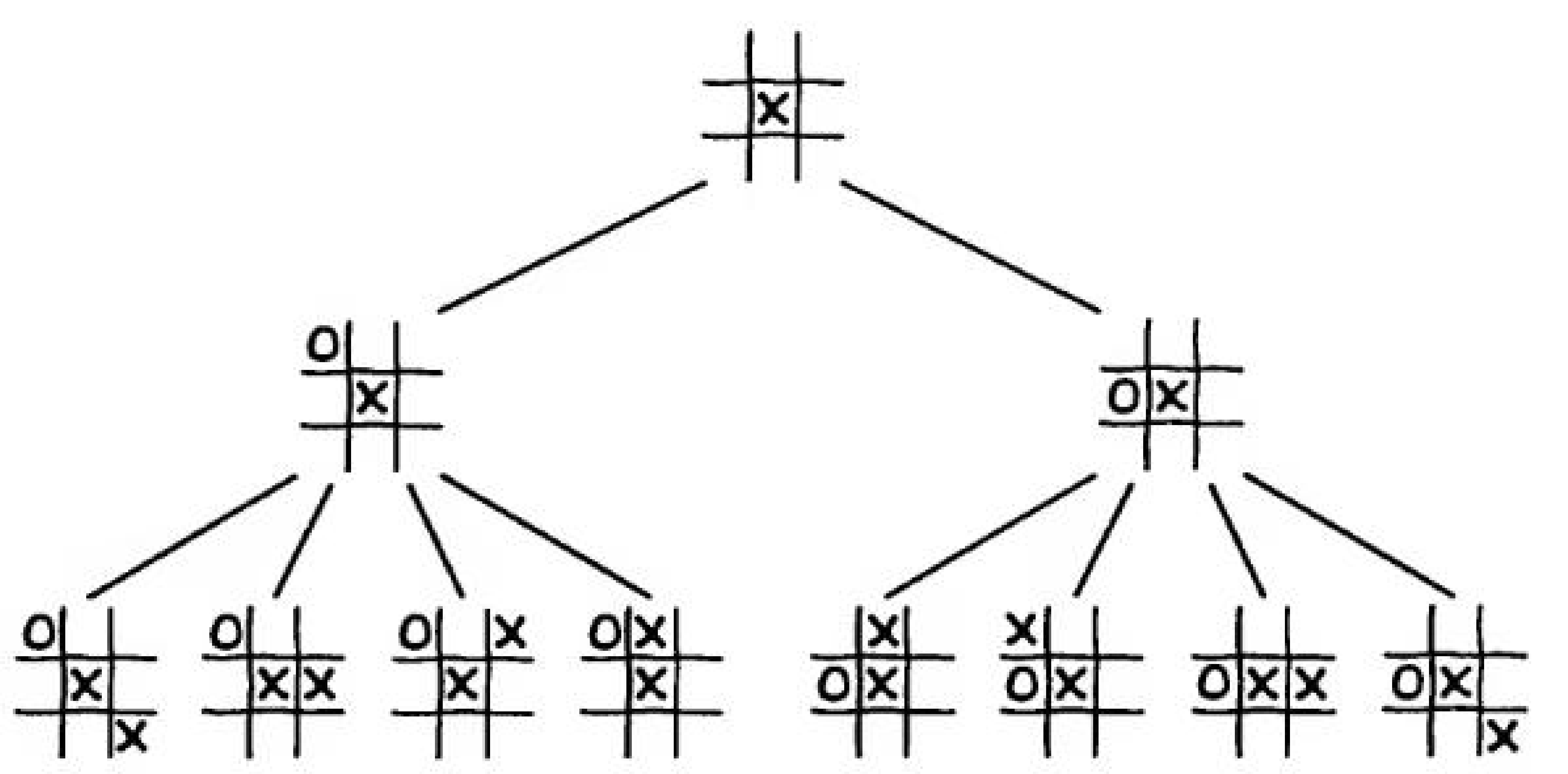
Uma ***árvore orientada*** *é um digrafo conexo que não possui circuitos ou semi-circuitos.*



Exemplo - Jogo da Velha

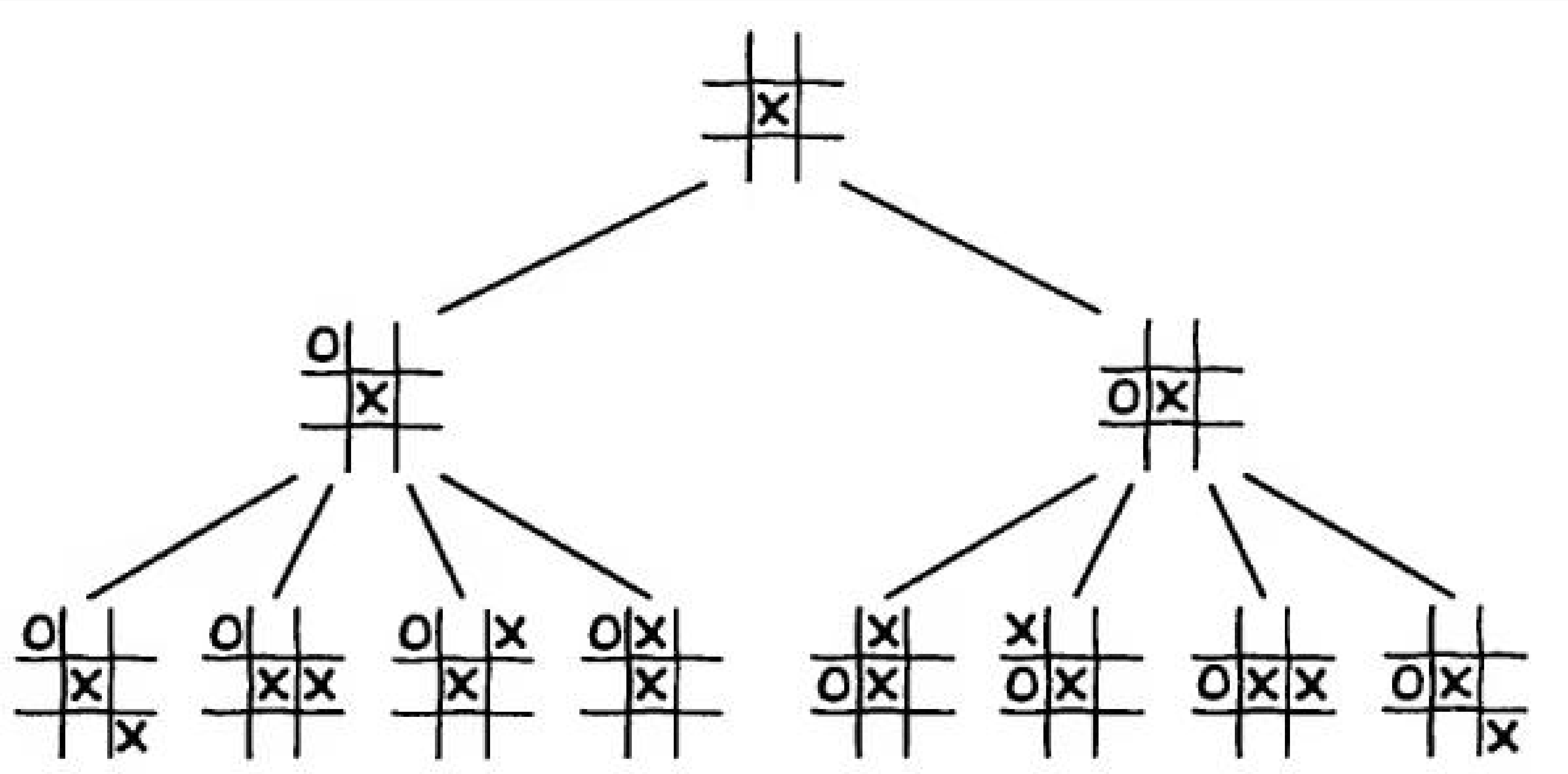
Vértices: os estados do jogo.

Arestas: existe uma aresta entre um estado do jogo e um estado que poder ser obtido através deste



Exercício

Monte uma árvore partindo do estado do Jogo vazio até o final final do jogo, sendo três passos para cada vértice;



Propriedade de Árvores

Teorema

Um grafo G é uma árvore se, e somente se, existir um e apenas um caminho entre cada par de vértices.

Demonstração. [$\Rightarrow$]

Se G é uma árvore, então, por definição, G é conexo e sem circuitos. Como G é conexo, então existe um caminho entre cada par de vértices.

Precisamos mostrar que este caminho é único. Vamos supor que existam dois caminhos distintos entre um par de vértices. Ora, se existem dois caminhos distintos entre um par de vértices então a união destes caminhos contém um circuito. Mas por hipótese, o grafo não possui circuitos, portanto existe apenas um caminho entre cada par de vértices.

Propriedade de Árvores

Teorema

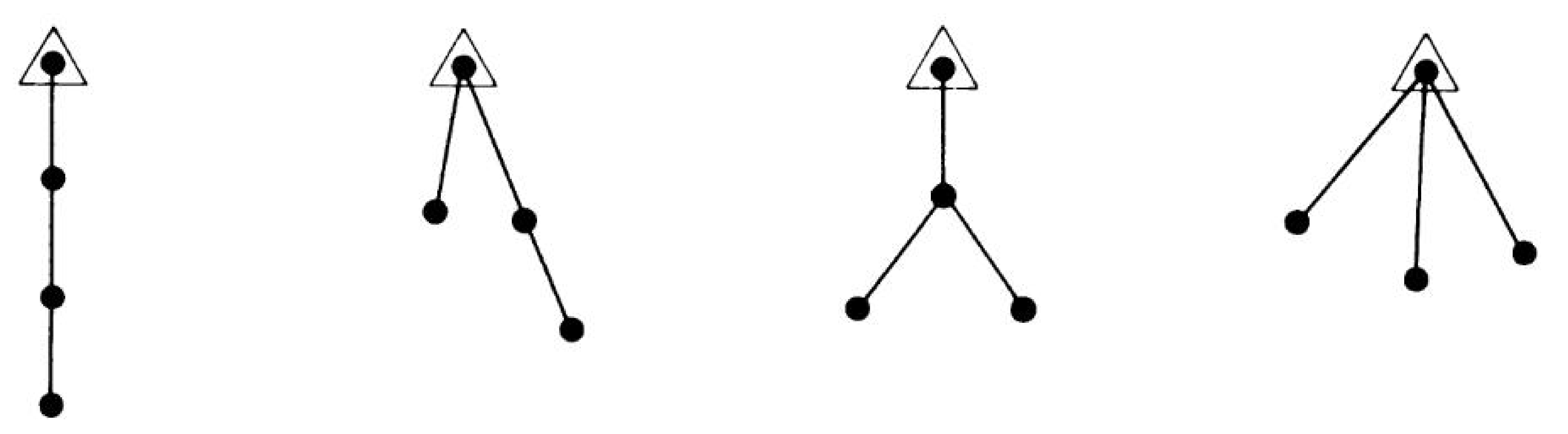
Seja $G(V, A)$ um grafo com n vértices. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) *G é uma árvore.*
b) *G é conexo e possui $n - 1$ arestas.*
c) *G possui $n - 1$ arestas e não possui circuitos.*
d) *Existe exatamente um caminho entre cada par de vértices.*
e) *G não contém circuitos, e para todo $v, w \in V$, a adição da aresta (v, w) produz no grafo exatamente um circuito.*

Raízes e Árvores Binárias

Definição

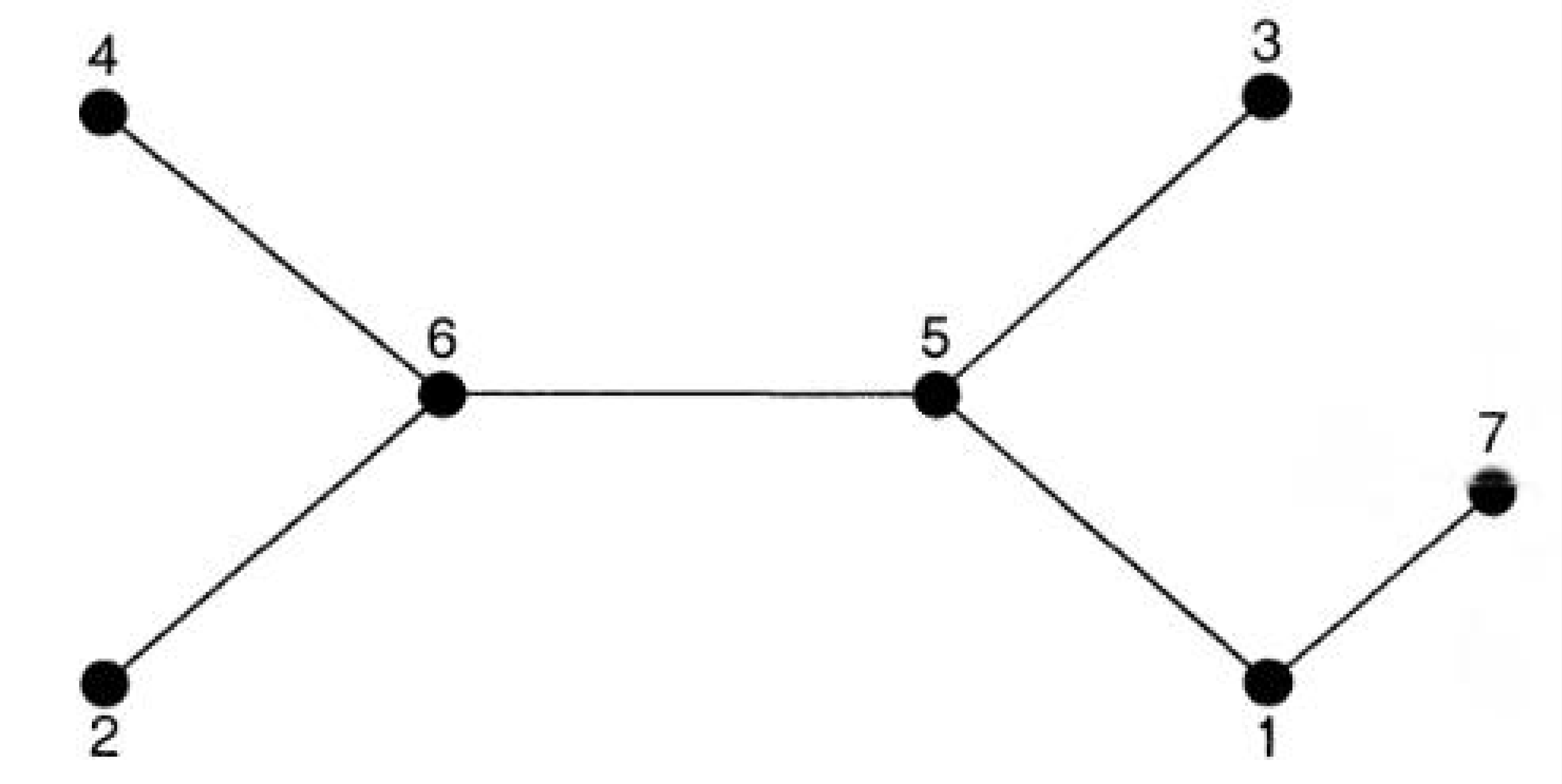
Uma árvore na qual podemos distinguir um determinado vértice, denominado ***vértice raiz****, é chamada de* ***árvore enraizada****.*



Em geral, o vértice raiz aparece naturalmente com a aplicação que o grafo representa.

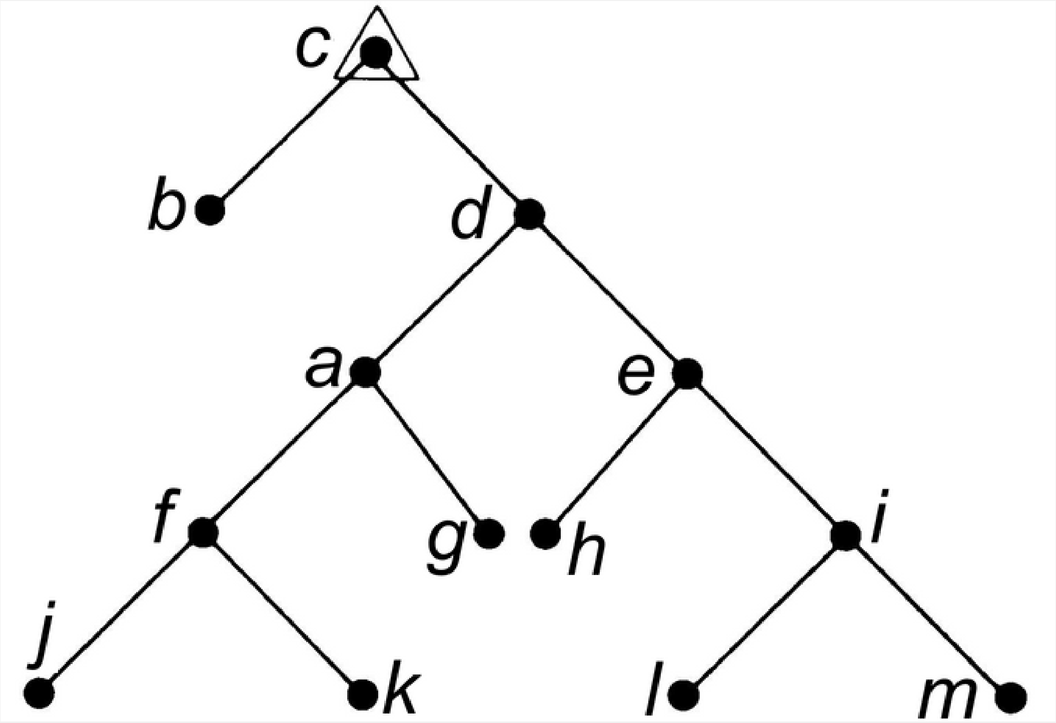
Árvore Livre

Uma árvore não enraizada é chamada de árvore livre.



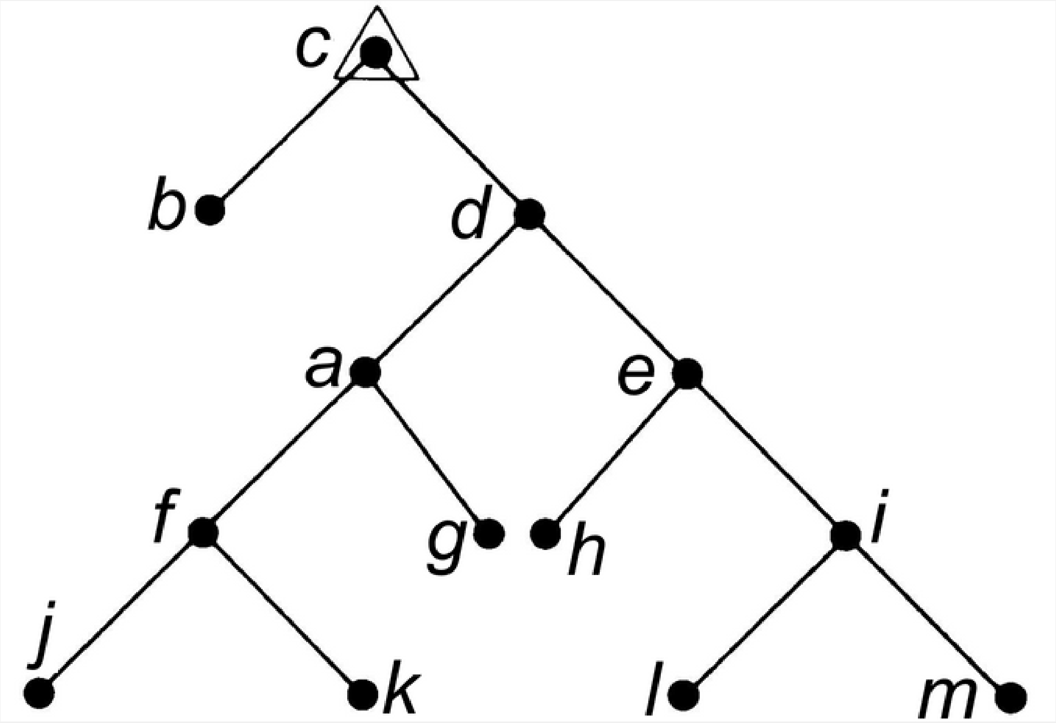
Raízes e Árvores Binárias

Se representarmos uma árvore enraizada com o vértice raiz posicionado na parte superior da figura, podemos definir níveis na árvore. Considere, por exemplo, a seguinte árvore enraizada:



Raízes e Árvores Binárias

Se representarmos uma árvore enraizada com o vértice raiz posicionado na parte superior da figura, podemos definir níveis na árvore. Considere, por exemplo, a seguinte árvore enraizada:



Dizemos que o vértice raiz, c, está no nível zero; os vértices b e d no nível 1, os vértices a, e e e no nível 2, os vértices f , g, h e i no nível 3 e j ; k; l e m no nível 4.

Definições

Definição

*A **distância** entre dois vértices v e w em um grafo G, denotada por $d(v, w)$, é igual ao comprimento do menor caminho entre v e w.*

Definição

*O **nível** de um vértice x em uma árvore enraizada é igual à distância entre o vértice raiz e o vértice x.*

*A **altura** de uma árvore enraizada é o comprimento do maior caminho existente na árvore a partir do vértice raiz.*

Definições

Definição

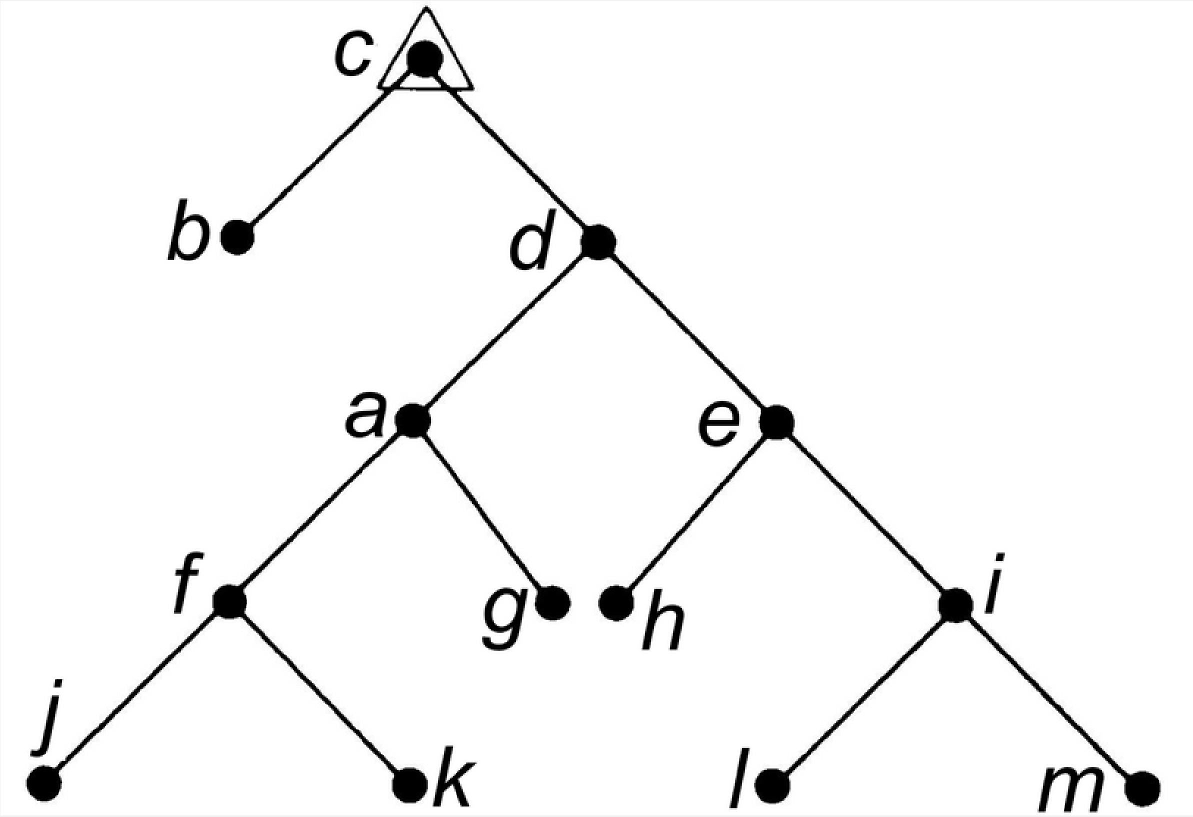
Uma árvore ***binária completa*** *é uma árvore enraizada tal que existe exatamente um vértice de grau dois e cada um dos vértices restantes tem grau 1 ou 3.*
Naturalmente o vértice de grau 2 é o vértice raiz da árvore.

Definição

Um vértice não pendente em uma árvore é chamado de ***vértice interno****.*

Definições

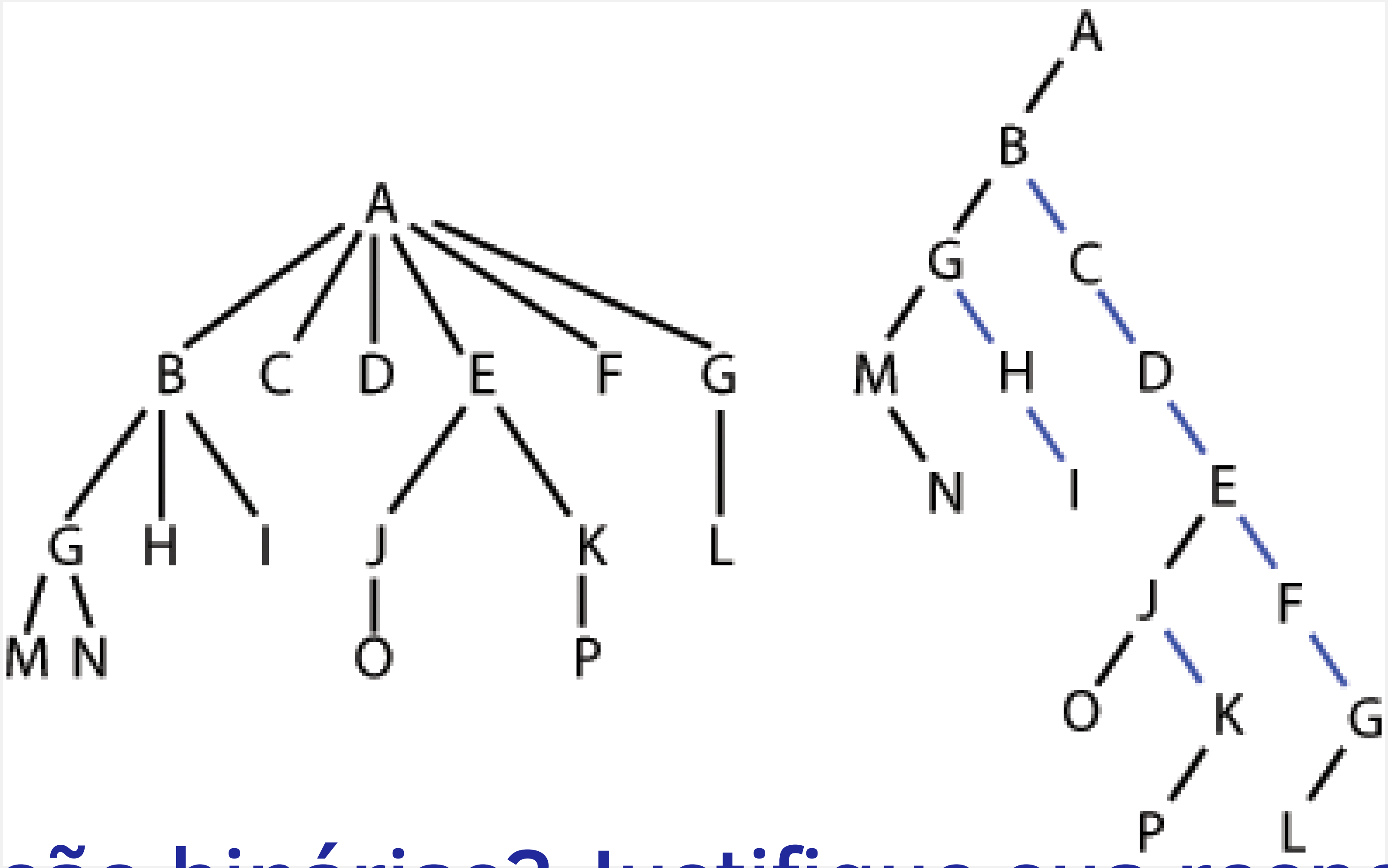
Abaixo temos um exemplo de árvore binária completa.



Os vértices d; a; e; f ; i são vértices internos.

Exercícios de Distância, Nível, Altura

1)Cálcule os níveis de todos os vértices e a altura, informando o caminho nas árvores abaixo:



2)Estas árvores são binárias? Justifique sua resposta.

3) A Árvore Binária é completa?

Definições

Proposição

O número de vértices em uma árvore binária completa (com três ou mais vértices) é sempre ímpar.

Demonstração.

Existe exatamente um vértice de grau par. Os $n-1$ vértices restantes tem grau ímpar. Mas sabemos que o número de vértice com grau ímpar é par. Portanto, se $n-1$ é par, n é ímpar. $\square$

Definições

Proposição

Quantos vértices pendentes existem em uma árvore binária completa com n vértices?

Demonstração.

Seja p o número de vértices pendentes. Então, existem $n-p-1$ vértices de grau 3. Além disso,

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m = 2(n-1),$$

onde usamos uma propriedade de árvores na última igualdade. Somando os graus dos vértices pendentes, internos e raiz tem-se $p + 3(n-p-1) + 2 = 2(n-1)$. Logo $p = (n+1)/2$. $\square$

Exercícios

Quantos jogos são necessários em um torneio de tênis com 56 inscritos?

Quantos jogos são necessários em um torneio de tênis com 128 inscritos?

Exercícios

Se representarmos a competição através de uma árvore binária, teremos que os vértices pendentes são os inscritos e os vértices internos mais a raiz os jogos.

Assim, queremos calcular o número de vértices internos mais a raiz em uma árvore binária com 56 ou 128 vértices pendentes.

Exercícios

Quantos jogos são necessários em um torneio de tênis com 128 inscritos?

Se representarmos a competição através de uma árvore binária, teremos que os vértices pendentes são os inscritos e os vértices internos mais a raiz os jogos.

Assim, queremos calcular o número de vértices internos mais a raiz em uma árvore binária com 128 vértices pendentes.

Dúvidas??