SEÑALES Y SISTEMAS.

NM Rafael Ricardo Torres Chopavena — Parcial #1

CC 1007246606.

Solución parcial.

1.

Señal dada $x(t) = 20\sin(7t - \pi/2) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$

Para esta señal tenemos las siguientes frecuencias angulares

$\omega_1 = 7$; $\omega_2 = 5$; $\omega_3 = 10$

$T_1 = = \frac{2\pi}{7}$ $T_2 = \frac{2\pi}{5}$ $T_3 = \frac{2\pi}{10}$

- Ahora bien los rangos antes del acondicionamiento son:

$20\sin(\phi) = [-20, -20]$

$-3\cos = [-3, 3]$

$2\cos = [-2, 2]$

Entonces la señal estara entre $[-25, 25]$

- Para el acondicionamiento: $(-3{,}3 - 5)V$

$$\underset{x(t)}{[-25, 25]} \longrightarrow \boxed{\text{Acondiciona}} \longrightarrow \underset{x_{acd}(t)}{[3{,}3, 5]}$$

$$x_{acondicionada}(t) = a\,x(t) + b$$

$$a = \frac{5 + 3{,}3}{25 - (-25)} = \frac{83}{500}$$

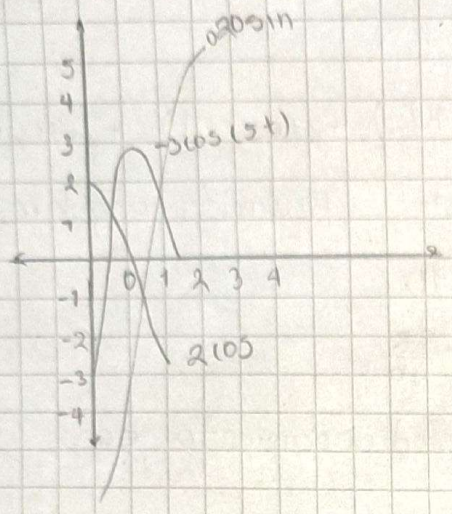
$b = 3{,}3 \leftarrow$ aca empieza la señal

$$x_{acd}(t) = \frac{83}{500} \cdot x(t) - 3{,}3$$

- Cuantización

$2^5 = 32$ niveles ; Resolución: $\frac{5 + 3{,}3}{2^5 - 1} = \frac{83}{310} = 0{,}2677\,v$

Señal original



2.

Nuestra señal cuenta con 3 partes 500 Hz, 1000 Hz, 5500 Hz

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

Señal	Parte
$3\cos(1000\pi t)$	500 Hz
$5\cos(2000\pi t)$	1000
$10\cos(11000\pi t)$	5500

↓

f

La frecuencia de muestreo que nos entrega el enunciado del ejercicio es de 5 KHz, como nos podemos dar cuenta nuestra señal x(t) tiene componentes de 5500 Hz, esto rompe por así decirlo la regla de Nyquist estudiada en clase.

$$f_s >= 2 f_{máx}$$ → Esta es la regla

En nuestro caso la maxima frecuencia obtenida fue de 5500, es decir 5500 Hz por encima de nuestro requerimiento sin aplicar $2 \times f_{máx}$ que es aun más grande lo cuál nos dejaría como $11000 - 5000 = 6000$ Hz de diferencia, no reconstruiremos bien la señal y tendremos ALIASING

Por lo tanto al tener 5 KHz de muestreo la parte que va a 5500 Hz no se representara bien entonces debemos aumentar la f_s

Buscamos un $f_s \geq 11000$

$\downarrow$

5500×2

$5000 < 11000 \rightarrow$ Esta no cumplio

3.

Para esto tenemos la formula como $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$

La potencia media queda

$$d(x_1, x_2) = P_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

Como las 2 señales son periodicas, con 1 periodo T tenemos suficiente.

Las señales que tenemos son

$$x_1(t) = A\cos(W_0 t), \quad W_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T, A \in \mathbb{R}^+$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T/4 \\ -1 & \text{si } \frac{T}{4} \leq t < 3T/4 \\ 1 & \text{si } 3T/4 \leq t < T \end{cases}$$

Integrales (limites) Donde x_2 no cambia

$$\int_0^T = \int_0^{T/4} + \int_{T/4}^{3T/4} + \int_{3T/4}^{T}$$

Podemos ver que $x_1 - x_2$ tiene una forma fija

Ahora si en hacemos un cambio de variable para simplificar los calculos

$$\theta = W_0 t = \frac{2\pi}{T} t \longrightarrow dt = \frac{T}{2\pi} d\theta$$

Por lo tanto estos limites de integrales han cambiado

1. 0 a $T/4$ = 0 a $\pi/2$
2. $T/4$ a $3T/4$ = $\pi/2$ a $3\pi/2$
3. $3T/4$ a T = $3\pi/2$ a 2π

Powered by CamScanner

Al cambiar de coordenadas podemos pasar a las diferencias de cuadrados

$X_2 = 1$

$$(X_1 - X_2)^2 = (A\cos\theta - 1)^2$$

$X_2 = -1$

$$(X_1 - X_2)^2 = (A\cos\theta + 1)^2$$

Entonces

$$(A\cos\theta \pm 1)^2 = A^2\cos^2\theta \pm 2A\cos\theta + 1$$

hasta el momento nos quedamos con 3 integrales elementales con lo que nos evitamos meternos con integrales mas complicadas

1. $\int \cos\theta \, d\theta = \sin\theta$

2. $\int \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}$

$\downarrow$

$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

$\downarrow$

Por trigonometria.

Entonces nuestra integral se veria asi

$$\frac{T}{2\pi}\int_0^{\pi/2} [A^2\cos^2\theta - 2A\cos\theta + 1]\, d\theta$$

integramos $A^2\cos^2\theta \longrightarrow$ De 0 a $\pi/2$ $\quad X_2 = 1$

$$\int_0^{\pi/2} A^2\cos^2\theta \, d\theta = A^2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = A^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$-2A\cos\theta$

$$\int_0^{\pi/2} -2A\cos\theta \, d\theta = -2A[\sin\theta]_0^{\pi/2} = -2A$$

1

$$\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi/2$$

$$T_1 = \frac{T}{2\pi}\left(\frac{\pi}{4}A^2 - 2A + \pi/2\right)$$

Powered by CamScanner

De $\pi/2$ a $3\pi/2$ $\quad X_2 = -1$

$$T_2 = \frac{T}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} [A^2 \underbrace{\cos^2\theta}_{x} + 2A\underbrace{\cos\theta}_{y} + \underbrace{1}_{z}]\, d\theta$$

$\longrightarrow$ por simplicidad

Para x

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} x\, d\theta = A^2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = A^2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}A^2$$

Para y

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} y\, d\theta = 2A\left[\sin\theta\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = -4A$$

Para z

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} z\, d\theta = \left[\theta\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \pi$$

$$T_2 = \frac{T}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}A^2 - 4A + \pi\right)$$

De $3\pi/2$ a 2π $\quad (X_2 = 1)$

$\longrightarrow$ Esto es facil porque tiene lo mismo que la primera, entonces

$$T_1 = T_3$$

T : Tramo integral

Periodo no tramo

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \longrightarrow \frac{T}{2\pi}(\pi A^2 - 8A + 2\pi)$$

Ahora bien para encontrar lo que necesitamos que es la distancia media debemos div por el periodo

$$\left[\; d(A) = \frac{T}{T_p} = \frac{\pi A^2 - 8A + 2\pi}{2\pi} = \left(\frac{1}{2}A^2 - \frac{4A}{\pi} + 1\right)\right]$$

Entonces $d(A)$ fue nuestra distancia.

Powered by CamScanner

4.

a. Comenzamos por la def

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Esta integral la abordare por partes, entonces tendria

$u = x(t)$, $dv = e^{-jn\omega_0 t}\, dt$; $du = x'(t)\, dt$ $\quad v = \dfrac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0 t}$

quedando

$$\int u\, dv = uv\Big|_{t_i}^{t_f} - \int v\, du$$

$uv\Big|_{t_i}^{t_f} \rightarrow x(t)\dfrac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0 t}\Bigg|_{t_i}^{t_f}$ Sabemos que entre t_i y t_f es periodica por lo que vale 0

$$C_n = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{jn\omega_0}\int_{t_i}^{t_f} x'(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt\right] = \frac{1}{Tjn\omega_0}\int_{t_i}^{t_f} x'(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$\longrightarrow$ por partes

$$= x'(t)\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0 t} - \int \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0 t}\, x''(t)\, dt$$

$x'(t)$ es periodica por lo que se va a 0

$$\int_{t_i}^{t_f} x'(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{jn\omega_0 t}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Ahora bien sustituyendo en C_n

$$C_n = \frac{1}{Tjn\omega_0 t}\left[\frac{1}{jn\omega_0}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt\right] =$$

$$\frac{1}{T(jn\omega_0)^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Sabiendo que $(jn\omega_0)^2 = -n^2\omega_0^2$

Powered by CamScanner

$$C_n = \frac{1}{T n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Sabemos que $T = (t_f - t_i)$ por lo que $\frac{1}{T} = \frac{1}{(t_f - t_i)}$ entonces

$$\left(C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \right)$$

$\downarrow$

final demostración

b. Me preguntan: ¿cómo obtengo a_n y b_n a partir de $X''(t)$?

Sabemos que la form trigonometrica, cuando escribimos en forma cos y sen da

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

Donde a_n y b_n son numeros reales que ajustan a Cos y Sin

Como nuestra demostración anterior determino que

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

y la Serie exp es

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

Sabemos de la relación

$$a_n = C_n + C_{n-1}, \quad b_n = j(C_n - C_{n-1})$$

Entonces

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)} \cdot \frac{1}{n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$C_{n-1} = \frac{1}{(t_i - t_f)\, n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{jn\omega_0 t}\, dt$$

Powered by CamScanner

$$C_n + C_{n-1} = \frac{1}{T}\frac{1}{(-n^2\omega_0^2)}\left[\int x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt + \int x''(t)e^{jn\omega_0 t}dt\right.$$

Entonces $a_n = \frac{2}{T}\frac{1}{(-n^2\omega_0^2)}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$

y para b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\frac{1}{n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

c)

Duración pulso $-2a + 2$ $\quad T = 4$

$\omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$

Diracs $= -2, -1, +1, +2$

Sabemos que para cualquier $n \neq 0$ usamos

$$C_n = \frac{1}{T(-n^2\omega_0^2)}\int_{-2}^{2} x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Despues de simplificar

$$C_n = -\frac{A}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2)\right]$$

Para $n = \pm 1 \ \pm 2, \ldots \pm 5$

Cuando $n = 0$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-2}^{2} x(t)\,dt = \frac{1}{4}(A\,1 + A\,1) = \frac{A}{2}$$

Entonces $A = 1$ $\quad C_0 = 0{,}5$

Por lo tanto para el error relativo

$$\varepsilon = \frac{\int_{-2}^{2} |x(t) - \bar{x}(t)|^2 dt}{\int_{-2}^{2} |x(t)|^2 dt}$$

Powered by CamScanner