Taller 1 - Señales y Sistemas

Rafael Torres

2025

Parte 2: Conceptos básicos de señales

Integral con delta:

Tengo que resolver esta integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-\cos(t)} \cos(-2t) \delta(2t - 5\pi) \, dt$$

Lo primero que recordé es que cuando hay una delta, la integral "elige" el valor del resto de la expresión justo donde la delta no vale cero. O sea, se queda solo con el valor en ese punto. Pero ojo, acá la delta está escrita como $\delta(2t - 5\pi)$, y eso se tiene que ajustar con una fórmula que dice:

$$\delta(at - b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t - \frac{b}{a}\right)$$

Entonces la reescribo así:

$$\delta(2t - 5\pi) = \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{5\pi}{2}\right)$$

Y ahora sí, evaluo toda la expresión donde $t = \frac{5\pi}{2}$:

$$f(t) = t^4 e^{-\cos(t)} \cos(-2t)$$

Pero como $\cos(-2t) = \cos(2t)$, entonces solo tengo que calcular:
- $\left(\frac{5\pi}{2}\right)^4$ - $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$ - $e^0 = 1$ - $\cos(5\pi) = -1$
Entonces todo queda así:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5\pi}{2}\right)^4 \cdot 1 \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{2}\right)^4$$

$$\boxed{-\frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{2}\right)^4}$$

Otra expresión con delta y escalones

Me dan esta señal:

$$x(t) = u(t - t_0) - u(t - nt_0) - 3k\delta(t - mt_0)$$

Y me piden encontrar k para que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt = A$$

Bueno, lo que hice fue pensar en qué aporta cada parte:

- Los escalones hacen que la señal valga 1 entre t_0 y nt_0, entonces eso aporta una duración de $(n-1)t_0$ - Y el delta es como un pico que suma un valor puntual de $-3k$

Entonces la integral total es:

$$(n-1)t_0 - 3k$$

Igualo eso a A, como dice el ejercicio:

$$(n-1)t_0 - 3k = A \Rightarrow k = \frac{(n-1)t_0 - A}{3}$$

$$\boxed{k = \frac{(n-1)t_0 - A}{3}}$$

Parte 3: Señales de energía y potencia

Clasificación de señales

1. $x(t) = 3t + 2$ en $[0, 5]$: Está definida en un intervalo cerrado, o sea que su energía se puede calcular y no se va al infinito. Por eso, esta es una señal de **energía**.

2. $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$: Como es una señal periódica y nunca se apaga, su energía total es infinita, pero tiene potencia constante. Entonces esta es una señal de **potencia**.

3. $x(t) = ae^{-|t|^k}(u(t - t_0) - u(t - t_1))$: Está acotada entre t_0 y t_1, y se apaga fuera de ese rango. Así que esta es claramente una señal de **energía**.

4. $x(t) = ate^{-tk}(u(t) - u(t - t_0))$: También está definida en un intervalo finito. Aunque la forma sea más rara, igual es de **energía**.

5. $x[n] = nu[n]$ para $n \in [-N, N]$: Es discreta y finita, o sea que también tiene energía finita. Entonces es de **energía**.

6. $x[n] = |n|$ en $n \in [-N, N]$: Igual que la anterior, finita y definida solo en un rango. **Energía**.

7. $x[n] = A\cos[n\pi]u[n - n_0]$: Aunque oscile, está multiplicada por un escalón, lo que la limita. Entonces también es de **energía**.

Parte 4: Discretización de señales

¿Es adecuada la frecuencia de muestreo?

Me dicen que la señal es:

$$x(t) = 10\cos(\Omega t), \quad \text{con } \Omega = 2\pi F,\ F = 50 \text{ Hz}$$

Y la frecuencia de muestreo es $F_s = 80$ Hz.

Bueno, para que no haya aliasing, la regla de Nyquist dice que tengo que muestrear al menos al doble de la frecuencia más alta. O sea:

$$F_s \geq 2F = 100 \text{ Hz}$$

Pero acá me están dando solo 80 Hz, así que no alcanza. Por eso, **no es adecuada** la frecuencia de muestreo y se puede perder información.

Frecuencia de muestreo mínima

Ahora tengo esta señal:

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(6000\pi t) + 10\cos(14000\pi t)$$

Las frecuencias son 500 Hz, 3000 Hz y 7000 Hz. La más alta es 7000 Hz. Entonces, para muestrearla bien, necesito:

$$F_s \geq 2 \cdot 7000 = \boxed{14000 \text{ Hz}}$$

Si uso una frecuencia menor, por ejemplo 5000 Hz, entonces se mezclan las frecuencias y aparece aliasing. O sea, la señal no se ve como la original.

Parte 5: Serie de Fourier

Ortogonalidad del conjunto $\{e^{jn\omega_0 t}\}$

Este conjunto es ortogonal si la integral de $e^{j(n-m)\omega_0 t}$ en un periodo da cero cuando $n \neq m$.

La condición que lo asegura es:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

O sea, si el periodo está relacionado con ω_0 así, entonces los exponenciales son ortogonales y todo funciona bien para hacer la serie de Fourier.

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$$