

# Proyecto Final de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

**Ernesto Herrera García**

*Grupo D211*

**Barbaro Yoel Martinez González**

*Grupo D211*

**David Michel García Batista**

*Grupo D211*

**Rafael Oscar Valdivia Jiménez**

*Grupo D211*

**Tutor(es):**

## Resumen

Este proyecto explora las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) a través de tres estudios interconectados centrados en el péndulo simple y sus sistemas dinámicos. En la **Parte A**, derivamos la fórmula del período para un péndulo simple bajo la mecánica newtoniana y la aplicamos para resolver un problema clásico: determinar la altura de una montaña comparando períodos de péndulos en diferentes ubicaciones. Utilizando el método de Newton, calculamos una altura aproximada de 3.185 metros. Un análisis de sensibilidad demuestra que el cálculo está muy mal condicionado respecto a mediciones de la longitud del péndulo, mientras que está bien condicionado respecto al radio terrestre. En la **Parte B**, analizamos un modelo simplificado de péndulo con un parámetro de intensidad gravitatoria  $\mu$ , descrito por  $dz/dt = \mu \sin(z)$ . Identificamos puntos de equilibrio, clasificamos su estabilidad mediante linealización y construimos un diagrama de bifurcación. Este revela una bifurcación transcritical en  $\mu = 0$ , donde se intercambia la estabilidad de las posiciones vertical hacia abajo ( $z = 0$ ) y hacia arriba ( $z = \pi$ ). En la **Parte C**, investigamos los puntos críticos del sistema del péndulo amortiguado, lo linealizamos mediante la matriz jacobiana y calculamos autovalores para clasificar los puntos fijos. El origen ( $\theta = 0, \omega = 0$ ) es un foco espiral estable, mientras que ( $\theta = \pi, \omega = 0$ ) es un punto de silla inestable. Este trabajo integra derivación analítica, aproximación numérica, análisis de estabilidad e investigación del plano de fase para ofrecer un examen exhaustivo de la dinámica del péndulo y sus implicaciones más amplias en sistemas no lineales.

## Abstract

This project explores ordinary differential equations (ODEs) through three interconnected studies focused on the simple pendulum and its dynamical systems. In **Part A**, we derive the period formula for a simple pendulum under Newtonian mechanics and apply it to solve a classic problem of determining a mountain's height by comparing pendulum periods at different locations. Using Newton's method, we calculate an approximate height of 3,185 meters. A sensitivity analysis reveals that the calculation is highly ill-conditioned with respect to pendulum length measurements, while being well-conditioned concerning the Earth's radius. In **Part B**, we analyze a simplified pendulum model with a gravity intensity parameter  $\mu$ , described by  $dz/dt = \mu \sin(z)$ . We identify equilibrium points, classify their stability via linearization, and construct a bifurcation diagram. This reveals a transcritical bifurcation at  $\mu = 0$ , where the stability of the vertical downward ( $z = 0$ ) and upward ( $z = \pi$ ) positions exchanges. In **Part C**, we investigate the critical points of the damped pendulum system, linearize it via the Jacobian matrix, and calculate eigenvalues to classify the fixed points. The origin ( $\theta = 0, \omega = 0$ ) is a stable spiral focus, while ( $\theta = \pi, \omega = 0$ ) is an unstable saddle point. This work integrates analytical derivation, numerical approximation, stability analysis, and phase-plane investigation to provide a comprehensive examination of pendulum dynamics and its broader implications for nonlinear systems.

**Palabras Clave:** Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Péndulo Simple, Método de Newton, Bifurcación, Plano de Fase.

**Tema:** Tema 19.

## 1. Parte A

### 1.1 Ejercicio 1

La ecuación del período de un péndulo simple bajo la mecánica newtoniana es  $p_k = 2\pi\sqrt{\frac{L_k}{G_k}}$ , donde:

■  $L_k$  es la longitud del péndulo

■  $G_k$  es la fuerza de gravedad aplicada sobre el péndulo

Se sabe que  $G_k = \frac{gm}{R_k^2}$  donde:

- $g$  es la constante de aceleración de la gravedad ( $9,8m/s^2$  en la Tierra)
- $m$  es la masa del objeto, en este caso el péndulo.
- $R_k$  es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el péndulo

Nótese que todas las magnitudes declaradas anteriormente son positivas para todo péndulo simple. Luego:

$$p_k = 2\pi \sqrt{\frac{L_k}{\frac{gm}{R_k^2}}}$$

$$p_k = 2\pi \sqrt{\frac{L_k R_k^2}{gm}}$$

$$p_k = 2\pi |R_k| \sqrt{\frac{L_k}{gm}}$$

$$p_k = 2\pi R_k \sqrt{\frac{L_k}{gm}}$$

$$p_k = 2\pi R_k \frac{\sqrt{L_k}}{\sqrt{gm}}$$

Sean  $p_1$  y  $p_2$  los períodos de dos péndulos simples, de igual masa y con sus respectivas longitudes y distancias hasta el centro terrestre.

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2\pi R_1 \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{gm}}}{2\pi R_2 \frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{gm}}}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1 \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{gm}}}{R_2 \frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{gm}}}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1 \sqrt{L_1} \sqrt{gm}}{R_2 \sqrt{L_2} \sqrt{gm}}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1 \sqrt{L_1}}{R_2 \sqrt{L_2}} \quad \square$$

## 1.2 Ejercicio 2

Por el ejercicio anterior sabemos que:

Sea el péndulo 2 el que tiene 100.10in de longitud y se encuentra a 3960mi del centro de la Tierra y el 1 el otro péndulo con 100.00in de longitud en la cima de una montaña, definiremos  $R_1$  como  $(R_2+h)$  donde  $h$  es la altura de la montaña que queremos determinar.

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{(R_2+h)\sqrt{L_1}}{R_2\sqrt{L_2}}$$

$$\frac{p_1}{p_2} R_2 \sqrt{L_2} = (R_2+h)\sqrt{L_1}$$

$$\frac{p_1}{p_2} \frac{R_2 \sqrt{L_2}}{\sqrt{L_1}} = R_2 + h$$

$$h = \frac{p_1}{p_2} \frac{R_2 \sqrt{L_2}}{\sqrt{L_1}} - R_2$$

$$h = R_2 \left( \frac{p_1}{p_2} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} - 1 \right)$$

Sea el péndulo 2 el que tiene 100.10in de longitud y se encuentra a 3960mi del centro de la Tierra y el 1 el otro péndulo con 100.00in de longitud

$$h = 3960mi \left( \frac{p_1}{p_2} \sqrt{\frac{100.10in}{100.00in}} - 1 \right)$$

Sabemos que  $p_1 = p_2$ , entonces:

$$h = 3960mi \left( \frac{p_1}{p_2} \sqrt{\frac{100.10in}{100.00in}} - 1 \right)$$

$$h = 3960mi \left( \sqrt{\frac{100.10in}{100.00in}} - 1 \right)$$

Se puede calcular además que  $100.10 = 100(1 + 10^{-3}) = 100 \times 1.001$  Por tanto:

$$\frac{100.10in}{100.00in} = \frac{100(1 + 10^{-3})in}{100in} = 1 + 10^{-3}$$

$$h = 3960mi \left( \sqrt{\frac{100.10in}{100.00in}} - 1 \right) = 3960mi(\sqrt{1.001}-1)$$

Aproximaremos numéricamente el valor de la raíz cuadrada usando el metodo de Newton

Objetivo: Calcular un número (x) tal que:

$$x^2 = 1.001$$

o equivalente:

$$f(x) = x^2 - 1.001 = 0$$

El método de Newton para resolver ecuaciones es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

donde:

$$f(x) = x^2 - 1.001, \quad f'(x) = 2x$$

Sustituimos en la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 1.001}{2x_n}$$

Podemos simplificar:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{1.001}{x_n} \right)$$

Esta es la forma más práctica para iterar. Elección del valor inicial:

Como (1.001) está muy cerca de (1), tomamos:

$$x_0 = 1$$

Obtenemos entonces que:

$$h \approx 3960mi (1.000499875062461 - 1)$$

$$h \approx 1.9795052473454167mi \approx 3185m$$

Por tanto la altura de la montaña donde se encuentra el péndulo es de aproximadamente 3185 metros.

```

1 import numpy as np
2 def Newton(xo,tol,n):
3     # Recibe xo: valor inicial, tol:
4     # tolerancia, n: numero maximo de
5     # iteraciones
6     err=tol+1 # Inicializacion del error
7     count=0 # Contador de iteraciones
8     xk=xo # Inicializacion del valor actual
9     while count<n and err>tol: # Criterio de
10         paro
11         count+=1
12         err=xk # Guardamos el valor actual
13         para calcular el error despues
14         xk=(1/2)*(xk + 1.001/xk) # Formula de
15         Newton para f(x)=x^2-1.001
16         err = np.abs(err - xk) # Actualizacion
17         del error
18     return xk # Devolvemos la aproximacion
19     encontrada
20 print(Newton(1.0,10**(-10),100))
    
```

Figura 1: Implementación del Método de Newton.

### 1.3 Evaluar la condición del problema

La altura viene dada por:

$$h(R, L_1, L_2) = R \left( \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} - 1 \right)$$

Para evaluar la sensibilidad del problema a cambios en los datos iniciales en cada parámetro usaremos las derivadas parciales con respecto a cada uno de ellos. Para cambios pequeños en  $L_1$  la derivada:

$$\frac{\partial h}{\partial L_1} = \frac{R}{2L_2} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

con los valores dados en el ejercicio vale aproximadamente:

$$\frac{\partial h}{\partial L_1} \approx 19.79 \frac{\text{mi}}{\text{in}}$$

Un cambio de 0.01 pulg. en  $L_1$  provoca un cambio en  $h$  de  $\approx 0.1979\text{mi}$  ( $\approx 319\text{ m}$ ). Esto muestra una enorme amplificación, lo que implica que el cálculo es altamente sensible a errores en las longitudes; medir  $L$  con precisión de fracciones de pulgada es crucial.

Para cambios pequeños en  $L_2$  la derivada:

$$\frac{\partial h}{\partial L_2} = -\frac{R}{2L_2} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

Evaluando obtenemos que:

$$\frac{\partial h}{\partial L_2} \approx -19.80 \frac{\text{mi}}{\text{in}}$$

Esto significa que un aumento de 0.01 in en  $L_2$  produce aproximadamente un cambio en  $h$  de  $\approx -0.1980\text{mi}$  ( $\approx -319\text{m}$ ) lo que implica que el problema está mal condicionado con respecto a la longitud del péndulo  $L_2$ .

Para cambios pequeños en  $R$  la derivada:

$$\frac{\partial h}{\partial R} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} - 1$$

Evaluando obtenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial R} \approx 0.000499875\text{mi}$$

Esto significa que un aumento de 1 milla en  $R$  cambia  $h$  en:

$$\Delta h = 0.000499875 \text{ mi} \sim 0.7986 \text{ m}$$

Por lo que  $h$  es poco sensible a errores de  $R$ . Cambios muy grandes en  $R$  apenas afectan  $h$ .

## 2. Resumen general de condicionamiento

### ■ Interpretación global:

- El cálculo de la altura depende críticamente de la precisión de  $L_1$  y  $L_2$ .
- Errores pequeños en las longitudes se amplifican unas  $\sim 1000$  veces en términos relativos.
- La variación en  $R$  tiene un efecto casi despreciable.

- **Conclusión:** el problema es altamente mal condicionado respecto a las longitudes, y bien condicionado respecto al radio de la Tierra.

## 3. Parte B: Bifurcación

Considerando el modelo simplificado con un parámetro  $\mu$  que representa la intensidad de la gravedad relativa:

$$\frac{dz}{dt} = \mu \sin z$$

### 3.1 1. Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio se encuentran donde el sistema se detiene, es decir, donde la velocidad de cambio es cero ( $\frac{dz}{dt} = 0$ ). Partimos de la ecuación diferencial del modelo simplificado:

$$\frac{dz}{dt} = \mu \sin(z)$$

Igualemos a cero para encontrar  $z_e$ :

$$\mu \sin(z_e) = 0$$

Analizamos esta condición en dos casos esenciales dependientes del parámetro  $\mu$ :

#### 3.1.1 CASO GENERAL ( $\mu \neq 0$ ):

Cuando la intensidad de la gravedad  $\mu$  es diferente de cero, podemos dividir la ecuación por  $\mu$ , y la condición de equilibrio se reduce a encontrar las raíces de la función seno:

$$\sin(z_e) = 0$$

Esto ocurre en todos los **múltiplos enteros de  $\pi$** :

$$z_e = n\pi, \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z} \quad (\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots)$$

- **Interpretación Física:** Estos puntos representan las posiciones fundamentales del péndulo:

- $z_e = 0, \pm 2\pi, \dots$  (Posición vertical **hacia abajo**).
- $z_e = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$  (Posición vertical **hacia arriba**).

### 3.1.2 CASO ESPECÍFICO ( $\mu = 0$ ):

Si  $\mu = 0$ , la ecuación diferencial se convierte en:

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

Esta igualdad se cumple para **todo valor de  $z$** .

- **Interpretación Física:** En este caso (sin gravedad), el péndulo se queda estático en **cualquier posición** inicial. El sistema tiene un **continuo de puntos de equilibrio**. Este es el valor crítico donde la naturaleza de las soluciones cambia, pasando de equilibrios aislados a un continuo.

### 3.1.3 PUNTOS PARA EL ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Para simplificar el análisis de estabilidad y la posterior visualización del diagrama de bifurcación, nos centramos en los dos puntos de equilibrio fundamentales en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ :

1.  $z_e = 0$  (Vertical abajo).
2.  $z_e = \pi$  (Vertical arriba).

## 3.2 2. Clasificación de Estabilidad

Utilizamos el criterio de linealización:  $z' = \mu \cos z$ .

Ahora, evaluamos  $z'(z)$  en los dos puntos de equilibrio principales:

**Estabilidad en  $z_e = 0$  (Posición Vertical Abajo)**

Evaluamos la derivada en  $z = 0$ :

$$\lambda_0 = z'(0) = \mu \cos(0) = \mu \cdot 1 = \mu$$

La estabilidad en  $z_e = 0$  depende directamente del signo de  $\mu$ :

- Si  $\mu < 0$ :  $\lambda_0 < 0$ . El punto  $z_e = 0$  es **Estable**.
- Si  $\mu > 0$ :  $\lambda_0 > 0$ . El punto  $z_e = 0$  es **Inestable**.
- Si  $\mu = 0$ :  $\lambda_0 = 0$ . La estabilidad es **Inconclusa**.

**Estabilidad en  $z_e = \pi$  (Posición Vertical Arriba)**

Evaluamos la derivada en  $z = \pi$ :

$$\lambda_\pi = z'(\pi) = \mu \cos(\pi) = \mu \cdot (-1) = -\mu$$

La estabilidad en  $z_e = \pi$  depende del signo opuesto de  $\mu$ :

- Si  $\mu < 0$ :  $\lambda_\pi = -(\text{negativo}) = \text{positivo} > 0$ . El punto  $z_e = \pi$  es **Inestable**.
- Si  $\mu > 0$ :  $\lambda_\pi = -(\text{positivo}) = \text{negativo} < 0$ . El punto  $z_e = \pi$  es **Estable**.
- Si  $\mu = 0$ :  $\lambda_\pi = 0$ . La estabilidad es **Inconclusa**.

## 3.3 3. Diagrama de Bifurcación (Plano $(\mu, z)$ )

El diagrama de bifurcación muestra cómo la estabilidad de los equilibrios ( $z_e$ ) cambia al variar el parámetro  $\mu$ . La bifurcación ocurre en  $\mu = 0$ .

Diagrama de Bifurcación (Bifurcación Transcrítica)

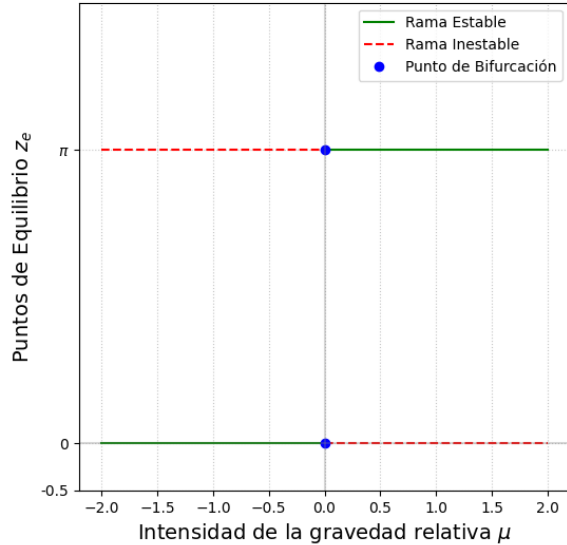


Figura 2: Diagrama de bifurcación.

## Resumen del Comportamiento

- $\mu < 0$ :  $z_e = 0$  es **Estable**,  $z_e = \pi$  es **Inestable**.
- $\mu > 0$ :  $z_e = 0$  es **Inestable**,  $z_e = \pi$  es **Estable**.

Esto es un ejemplo clásico de **Bifurcación Transcrítica**. Aunque los puntos de equilibrio no desaparecen, sus estabilidades se “intercambian” al cruzar  $\mu = 0$ . En  $\mu = 0$ , todos los puntos son equilibrios (sistema estático).

**Interpretación Física** El péndulo simple es **estable** hacia abajo ( $z = 0$ ) e **inestable** hacia arriba ( $z = \pi$ ).

- **Caso  $\mu < 0$ :** La rama de  $z = 0$  es estable, lo que se correlaciona con la posición de **péndulo abajo estable**. La rama de  $z = \pi$  es inestable. Este es el caso que se asemeja al péndulo físico tradicional.
- **Caso  $\mu > 0$ :** La rama de  $z = \pi$  es estable y la rama de  $z = 0$  es inestable. Para que la posición superior sea estable, el coeficiente de restauración debe ser negativo (es decir,  $-\mu < 0$ ), lo que requiere  $\mu > 0$ . Esto físicamente implica una inversión de la dinámica: si  $\mu$  representa la **intensidad de la gravedad relativa**, este caso corresponde a una gravedad efectiva invertida.

El diagrama muestra que en  $\mu = 0$ , la estabilidad de la posición superior e inferior se intercambia.

## 4. Parte C: Puntos críticos

### 4.1 Análisis de puntos críticos

Sea  $\frac{dF(x,y)}{dx}$  y  $\frac{dG(x,y)}{dy}$  un sistema de ecuaciones diferenciales y sea  $(x_*, y_*)$  un punto. Este será punto crítico si:

$$F(x_*, y_*) = G(x_*, y_*) = 0$$

Dado nuestro sistema:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\omega}{2} - \sin(\theta)\end{aligned}$$

Buscamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned}\omega &= 0 \\ -\frac{\omega}{2} - \sin(\theta) &= 0\end{aligned}$$

Se puede llegar a que tendremos un punto crítico siempre que  $(\theta, \omega) = (0, 0)$

Resalta que nuestro sistema no es un sistema lineal, por tanto debemos linealizarlo para poder seguir trabajando.

### 4.2 Linealización

Obtenemos la matriz Jacobiana correspondiente al sistema en los puntos críticos:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(\theta) & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

### 4.3 Cálculo de autovalores

Los autovalores se obtienen resolviendo la ecuación característica:

$$\lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + |J| = 0$$

Donde:

- $\text{tr}(J) = -\frac{1}{2}$
- $|J| = \cos(\theta)$

Las soluciones son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(J) \pm \sqrt{(\text{tr}(J))^2 - 4|J|}}{2}$$

### 4.4 Casos particulares

#### 4.4.1 CASO 1: $\theta = 0$

- $|J| = 1$
- $(\text{tr}(J))^2 = \frac{1}{4}$
- $4|J| = 4$
- $\frac{1}{4} < 4$

Los autovalores son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{15}{4}}}{2} = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Notemos que  $\frac{1}{4} < 4$  y para ambos resultados tenemos parte real negativa, por lo que podemos afirmar que para  $\theta = 0$  nuestro punto crítico es un **foco espiral estable**.

#### 4.4.2 CASO 2: $\theta = \pi$

- $|J| = -1$
- $(\text{tr}(J))^2 = \frac{1}{4}$
- $4|J| = -4$
- $\frac{1}{4} > -4$

Los autovalores son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 4}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4} < 0$$

Dado que  $\frac{1}{4} > -4$  y  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen signos diferentes, podemos asegurar que tendremos un punto de silla inestable en  $\theta = \pi$ .

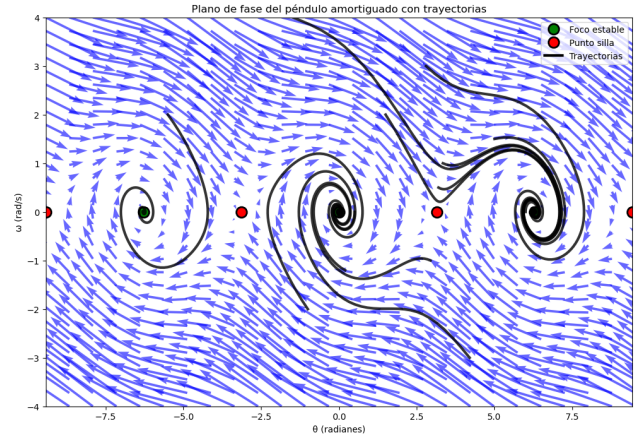


Figura 3: Plano de fase del péndulo amortiguado con trayectorias.

## 5. Interpretación de las Trayectorias

Las trayectorias (líneas negras en el plano de fase) muestran cómo evoluciona el péndulo en el tiempo. Cada curva representa un movimiento completo con condiciones iniciales específicas

5.0.1 TRAYECTORIAS QUE TERMINAN EN PUNTOS  
VERDES (FOCOS ESTABLES):

Son oscilaciones amortiguadas que terminan en reposo en donde el péndulo oscila con amplitud decreciente hasta quedar colgando verticalmente

5.0.2 TRAYECTORIAS QUE PASAN CERCA DE  
PUNTOS ROJOS (PUNTOS SILLA):

Representan caídas o movimientos inestables. El péndulo cae desde la posición invertida, oscila varias veces y finalmente se estabiliza colgando.