

Instituto Superior Técnico

Mestrado em Engenharia Aeroespacial

## Aeronaves Robotizadas

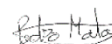
2021/2022 – Primeiro Semestre

### Laboratório 3

#### Grupo 10

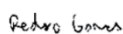
1. N.º:89703 Name: Pedro Matos

Signature:




2. N.º: 89705 Name: Pedro Gomes

Signature:



3. N.º: 90222 Name: Bernardo Albano

Signature:



Professora: Rita Cunha

# Índice

|          |                                                                  |           |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Controlo de Trajetória</b>                                    | <b>2</b>  |
| 2.1      | Simplificação da Dinâmica do Sistema                             | 2         |
| 2.2      | Dinâmica de Erros e Minimização da Função de Custo               | 3         |
| 2.3      | Estabilidade de Lyapunov                                         | 4         |
| 2.4      | Adição de Perturbação Externa                                    | 5         |
| 2.5      | Projeto dum Controlador Adaptativo                               | 5         |
| 2.6      | Estabilidade do Sistema com Controlo Adaptativo                  | 6         |
| 2.7      | Sistema em Malha Fechada                                         | 6         |
| 2.8      | Controlo do Ângulo de Guinada                                    | 7         |
| <b>3</b> | <b>Implementação e Simulação</b>                                 | <b>8</b>  |
| 3.1      | Definição do Controlador                                         | 8         |
| 3.2      | Geração da Trajetória Linear                                     | 8         |
| 3.3      | Seguimento da Trajetória Linear                                  | 9         |
| 3.4      | Geração da Trajetória Circular                                   | 10        |
| 3.5      | Seguimento da Trajetória Circular                                | 10        |
| 3.6      | Seguimento da Trajetória Circular com Ângulo de Guinada Não-Nulo | 12        |
| 3.7      | Alternativa para o Seguimento de uma Trajetória Linear           | 13        |
| <b>4</b> | <b>Conclusão</b>                                                 | <b>15</b> |

## 1 Introdução

Na realização deste laboratório e correspondente relatório foram estudadas, implementadas e analisadas várias soluções para o problema de controlo do movimento/trajetória do quadri-rotor. Com o objetivo de aprofundar os conhecimentos lecionados nas aulas teóricas de Aeronaves Robotizadas, foram realizadas várias simulações e experiências com o MATLAB e *Parrot AR.Drone*.

Inicialmente, na parte mais teórica do controlo de trajetória, foi projetado um controlador de seguimento de trajetória da aeronave. Foi ainda incorporada uma lei de adaptação no controlador com o objetivo de minimizar as possíveis perturbações desconhecidas. A parte mais experimental da implementação e simulação dos controladores obtidos foi realizada com a ajuda do *AR.Drone DevKit*. Implementou-se uma modificação no controlador projetado anteriormente, e implementou-se um planeador de trajetórias para definir trajetórias lineares e circulares.

Por fim, são retiradas conclusões quanto aos resultados obtidos da implementação dos controladores.

## 2 Controlo de Trajetória

### 2.1 Simplificação da Dinâmica do Sistema

Usando a mesma notação de laboratório anteriores, a equação que define o movimento linear do quadri-rotor no referencial inercial  $\{I\}$  é a seguinte:

$$\ddot{\mathbf{p}} = g\mathbf{e}_3 - R \frac{T}{m} \mathbf{e}_3 \quad (1)$$

onde a matriz rotação  $R$  é definida por  $R(\gamma) = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$  e relaciona o referencial do corpo com o referencial inercial. Deve-se ter em conta que  $R^{-1} = R^T$  e  $\dot{R} = RS(w)$ . Substituindo a expressão da matriz rotação na equação (1), e sabendo que  $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ , é possível obter a relação entre o movimento linear e uma nova entrada virtual  $\mathbf{u}^* = [u_x^* \ u_y^* \ u_z^*]^T$ .

$$\ddot{\mathbf{p}} = g\mathbf{e}_3 - [R_z(\phi)R_y(\theta)R_x(\psi)] \frac{T}{m} \mathbf{e}_3 = g\mathbf{e}_3 - R_z(\psi)\mathbf{u}^* \quad (2)$$

Esta nova entrada virtual pode ser descrita em função da propulsão  $T$  e dos ângulos de picada  $\theta_r$  e de rolamento  $\phi_r$ , de referência. Da equação (2) retira-se a expressão de  $\mathbf{u}^*$ .

$$R_z(\psi)\mathbf{u}^* = R_z(\psi)R_y(\theta_r)R_x(\phi_r) \frac{T}{m} \mathbf{e}_3 \Leftrightarrow \mathbf{u}^* = R_y(\theta)R_x(\phi) \frac{T}{m} \mathbf{e}_3 \quad (3)$$

Logo, tomará a seguinte forma vetorial.

$$\begin{bmatrix} u_x^* \\ u_y^* \\ u_z^* \end{bmatrix} = \frac{T}{m} \begin{bmatrix} \sin \theta_r \cos \phi_r \\ -\sin \phi_r \\ \cos \theta_r \cos \phi_r \end{bmatrix} \quad (4)$$

Após alguns conhecimentos trigonométricos e manipulação algébrica, obtêm-se as seguintes expressões de referência para os ângulos de picada e de rolamento.

$$\begin{cases} \tan \theta_r = \frac{\sin \theta_r}{\cos \theta_r} \\ \tan \phi_r = \frac{\sin \phi_r}{\cos \phi_r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_r = \arctan \left( \frac{u_x^*}{u_z^*} \right) \\ \phi_r = \arctan \left( \frac{-u_y^*}{\sqrt{u_x^{*2} + u_z^{*2}}} \right) \end{cases} \quad (5)$$

Para determinar a propulsão  $T$ , apenas se recorreu à definição de norma de um vetor.

$$\|\mathbf{u}^*\| = \left\| R_y(\theta_r) R_x(\phi_r) \frac{T}{m} \mathbf{e}_3 \right\| \quad (6)$$

No entanto sabe-se que:

$$\|R_y(\theta_r) R_x(\phi_r) \mathbf{e}_3\| = \sqrt{\sin^2 \theta_r \cos^2 \phi_r + \cos^2 \theta_r \cos^2 \phi_r + \sin^2 \phi_r} = 1 \quad (7)$$

pelo que facilmente percebe que a expressão da propulsão  $T$  em função da nova entrada virtual  $\mathbf{u}^*$  é dada pela equação (8).

$$\|\mathbf{u}^*\| = \frac{T}{m} \Leftrightarrow T = m\sqrt{u_x^{*2} + u_y^{*2} + u_z^{*2}} \quad (8)$$

## 2.2 Dinâmica de Erros e Minimização da Função de Custo

Para se desenvolver um controlador de seguimento de trajetória, existe a necessidade de quantificar o erro ou diferença entre a trajetória desejada e a trajetória atual. Neste caso, o objetivo é minimizar os erros de seguimento. Como tal, o modelo da dinâmica descreveu-se com as variáveis de controlo úteis e adequadas, tais como a posição e a velocidade.

Represente-se a trajetória desejada por  $\mathbf{p}_d(t) \in \mathbb{R}^3$ . De forma a desenhar um controlador capaz de seguir uma referência, definiram-se as variáveis de erros  $\tilde{p}$  e  $\tilde{v}$  para a posição e a velocidade, respetivamente. Obtém-se então o vetor de estado de erro  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}_d \\ \mathbf{v} - \mathbf{v}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}_d \\ \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix} \quad (9)$$

A partir deste estado, a dinâmica do erro em espaço de estados será representada por  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (10)$$

Derivando a equação de  $\tilde{v}$  do sistema (9) e sabendo que  $\mathbf{u} = \dot{\tilde{v}} = \ddot{\mathbf{p}}$ , facilmente se chega à seguinte relação entre a entrada  $\mathbf{u}$  e a entrada virtual  $\mathbf{u}^*$ .

$$\tilde{v} = \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d \Rightarrow \dot{\tilde{v}} = \ddot{\mathbf{p}} - \ddot{\mathbf{p}}_d \Leftrightarrow \mathbf{u} = g\mathbf{e}_3 - \frac{1}{m}R_z(\psi)\mathbf{u}^* - \ddot{\mathbf{p}}_d \quad (11)$$

Após a definição da dinâmica de erro da trajetória, pretende-se projetar e otimizar o controlo do próprio erro e que garante a estabilidade do sistema. Desta forma é necessário encontrar a lei de controlo  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$  que minimiza a seguinte função de custo  $J$ , com um controlador LQR.

$$J := \int_0^{+\infty} (\tilde{\mathbf{x}}^T(t)Q\tilde{\mathbf{x}}(t) + \rho\|\mathbf{u}(t)\|^2) dt \quad (12)$$

$\mathbf{Q}$  é uma matriz definida positiva e  $\mathbf{R} = \rho > 0$  é uma nova matriz unidimensional, diferente da matriz  $R$  de rotação. Estas duas matrizes são os parâmetros ajustáveis de forma a obter o controlo ótimo.  $\mathbf{K}$  é o ganho do controlador LQR, resultado da minimização da função de custo  $J$ .

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \frac{1}{\rho}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = [k_p I \quad k_d I] \quad (13)$$

A matriz simétrica  $\mathbf{P}$  é a solução da equação algébrica de Riccati. A matriz  $\mathbf{Q}$  é dada pela seguinte expressão.

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Q} = \frac{1}{\rho}\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \gamma_1 I & 0 \\ 0 & \gamma_2 I \end{bmatrix} \quad (14)$$

$\gamma_1$  é o peso a atribuir ao erro de posição e  $\gamma_2$  é o peso para o erro de velocidade. Aplica-se agora a lei de controlo de realimentação definida  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$  à dinâmica em espaço de estados da equação (10).

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\tilde{\mathbf{x}} \quad (15)$$

Substituindo a mesma lei de controlo e a expressão de  $\mathbf{K}$  na equação (11), é possível achar outra expressão de entrada virtual  $\mathbf{u}^*$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= g\mathbf{e}_3 - \frac{1}{m}R_z(\psi)\mathbf{u}^* - \ddot{\mathbf{p}}_d \Rightarrow \mathbf{u}^* = mR_z^{-1}(\psi)(g\mathbf{e}_3 - \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{p}}_d) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \mathbf{u}^* = mR_z^T(\psi)(g\mathbf{e}_3 + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{p}}_d) \Leftrightarrow \mathbf{u}^* = mR_z^T(\psi)\left(g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{\rho}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{p}}_d\right)
\end{aligned} \tag{16}$$

### 2.3 Estabilidade de Lyapunov

A partir da equação de malha fechada do sistema (15), pretende-se demonstrar que existe uma matriz positiva definida  $P$  através da qual se pode definir a seguinte função de Lyapunov  $V_1$ .

$$V_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T P \tilde{\mathbf{x}} \tag{17}$$

Desta forma, a função  $V_1$  deverá ser também uma função positiva definida, que apresenta as seguintes características.

$$\begin{cases} V_1(\tilde{\mathbf{x}}) > 0, & \text{se } \tilde{\mathbf{x}} \neq 0 \\ V_1(\tilde{\mathbf{x}}) = 0, & \text{se } \tilde{\mathbf{x}} = 0 \end{cases} \tag{18}$$

No entanto, assume-se uma função de Lyapunov positiva definida. Através do teorema de estabilidade de Lyapunov, para a origem  $\tilde{\mathbf{x}} = 0$  ser estável ou assintoticamente estável, é necessário determinar a derivada da função  $V_1$ .

$$\begin{cases} \dot{V}_1(\tilde{\mathbf{x}}) \leq 0, & \text{estável} \\ \dot{V}_1(\tilde{\mathbf{x}}) < 0, & \text{assintoticamente estável} \end{cases} \tag{19}$$

Tendo em conta as equações (13), (14) e (15), e após alguma manipulação algébrica, é possível encontrar a primeira derivada desta função de Lyapunov, denotada por  $\dot{V}_1$ . Isto com o objetivo de analisar a sua estabilidade, em torno do ponto de equilíbrio  $\tilde{\mathbf{x}} = 0$ .

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T P \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T P \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{x}}^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] \tilde{\mathbf{x}} = \\
&= \tilde{\mathbf{x}}^T [A^T P - K^T B^T P + PA - PBK] \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}^T [A^T P + PA - K^T B^T P - PBK] \tilde{\mathbf{x}} \\
&= \tilde{\mathbf{x}}^T \left[ \left( A^T P + PA - \frac{1}{\rho} P B B^T P \right) - \frac{1}{\rho} P^T B B^T P \right] \tilde{\mathbf{x}} = -\tilde{\mathbf{x}}^T \left[ Q + \frac{1}{\rho} P B B^T P \right] \tilde{\mathbf{x}} \\
&= -\tilde{\mathbf{x}}^T Q^* \tilde{\mathbf{x}}
\end{aligned} \tag{20}$$

Não esquecer a simetria apresentada pela matriz  $P$ . A variável auxiliar  $Q^*$  é dada pela seguinte expressão.

$$Q^* = Q + \frac{1}{\rho} P B B^T P \tag{21}$$

Quanto à estabilidade no ponto de equilíbrio  $\tilde{\mathbf{x}} = 0$ , sabe-se que a matriz  $P$  é uma matriz positiva definida. A matriz  $\rho^{-1} P B B^T P = \rho^{-1} (PB)(PB)^T$  com  $\rho$  positivo será uma matriz positiva semi-definida, visto que o produto de uma matriz pela sua transposta resultará sempre numa matriz deste tipo. Logo, sabendo também que  $Q$  é uma matriz positiva definida, facilmente se percebe que  $Q^*$  também é uma matriz positiva definida, pois a soma de uma matriz positiva definida com uma matriz positiva semi-definida, resulta numa matriz positiva definida. Como tal, a função  $\dot{V}_1$  será negativa definida, e apenas será nula caso o estado  $\tilde{\mathbf{x}}$  seja nulo.

$$\begin{cases} \dot{V}_1(\tilde{\mathbf{x}}) < 0, & \text{se } \tilde{\mathbf{x}} \neq 0 \\ \dot{V}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = 0, & \text{se } \tilde{\mathbf{x}} = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Note-se ainda que  $\|\tilde{\mathbf{x}}\| \rightarrow \infty \implies V_1 \rightarrow \infty$ . Desta forma, com base no teorema de Lyapunov, conclui-se que o ponto de equilíbrio da origem  $\tilde{\mathbf{x}} = 0$  é globalmente assintoticamente estável.

## 2.4 Adição de Perturbação Externa

Supondo que é introduzida uma perturbação externa desconhecida no sistema (por exemplo, uma rajada de vento), a dinâmica linear do quadri-rotor poderá ser descrita pela seguinte equação:

$$\ddot{\mathbf{p}} = g\mathbf{e}_3 - R_z(\psi)\mathbf{u}^* + \mathbf{w} \quad (23)$$

onde  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  é a tal perturbação. A sua estimativa  $\hat{\mathbf{w}}$  é usada na lei de controlo de  $\mathbf{u}^*$ , que apresenta a seguinte forma.

$$\mathbf{u}^* = R_z(-\psi) (\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + g\mathbf{e}_3 + \hat{\mathbf{w}} - \ddot{\mathbf{p}}_d) \quad (24)$$

Definindo o erro de estimação da perturbação como  $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}$ , e relembrando que  $\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{p}} - \ddot{\mathbf{p}}_d$ , apenas se substitui a equação acima (24) na equação anterior (23) para se obter a nova lei de controlo.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}} &= g\mathbf{e}_3 - R_z(\psi)R_z(-\psi) (\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + g\mathbf{e}_3 + \hat{\mathbf{w}} - \ddot{\mathbf{p}}_d) + \mathbf{w} \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} = g\mathbf{e}_3 - \mathbf{I}(\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + g\mathbf{e}_3 + \hat{\mathbf{w}} - \ddot{\mathbf{p}}_d) + \mathbf{w} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} - \ddot{\mathbf{p}}_d = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}} \Leftrightarrow \mathbf{u} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (25)$$

Finalmente, inserindo a nova entrada  $\mathbf{u}$  na matriz de espaço de estados, determina-se a nova dinâmica do erro em anel fechado.

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} = A\tilde{\mathbf{x}} + B(-\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}}) = (A - BK)\tilde{\mathbf{x}} + B\tilde{\mathbf{w}} \quad (26)$$

## 2.5 Projeto dum Controlador Adaptativo

Nesta secção pretende-se projetar um controlador adaptativo que estime a perturbação desconhecida e constante  $\mathbf{w}$ , e que garanta a convergência do sistema para a trajetória desejada, simultaneamente. Como tal, considere-se a seguinte função Lyapunov  $V_2$ , onde  $k_w > 0$  representa o *tuning gain*.

$$V_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{w}}) = V_1(\tilde{\mathbf{x}}) + \frac{1}{k_w} \|\tilde{\mathbf{w}}\|^2 \quad (27)$$

Com o objetivo de determinar a lei de adaptação para  $\dot{\hat{\mathbf{w}}}$  que garanta que  $V_2$  é semi-definida negativa, definiu-se o erro da derivada da perturbação como  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = \dot{\mathbf{w}} - \dot{\hat{\mathbf{w}}} = -\dot{\hat{\mathbf{w}}}$ . Sabe-se ainda que  $\mathbf{w}$  é constante, e portanto  $\dot{\mathbf{w}} = 0$ .

Substituindo as equações (21) e (26) no cálculo da primeira derivada da função de Lyapunov da equação (27), e após alguma manipulação algébrica, é possível encontrar a eventual expressão de  $\dot{V}_2$ . Tenha-se ainda em conta que  $\|\tilde{\mathbf{w}}\|^2 = \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}}$ .

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{w}}) &= \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T P \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T P \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \frac{1}{k_w} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}^T \tilde{\mathbf{w}} + \frac{1}{k_w} \tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}} = \\ &= \tilde{\mathbf{x}}^T \left[ \left( A^T P + P A - \frac{1}{\rho} P B B^T P \right) - \frac{1}{\rho} P^T B B^T P \right] \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}}^T B^T P \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T P B \tilde{\mathbf{w}} + \frac{1}{k_w} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}^T \tilde{\mathbf{w}} + \frac{1}{k_w} \tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}} = \\ &= -\tilde{\mathbf{x}}^T Q^* \tilde{\mathbf{x}} + 2\tilde{\mathbf{w}}^T B^T P \tilde{\mathbf{x}} + \frac{2}{k_w} \tilde{\mathbf{w}}^T = -\tilde{\mathbf{x}}^T Q^* \tilde{\mathbf{x}} + 2\tilde{\mathbf{w}}^T \left[ B^T P \tilde{\mathbf{x}} + \frac{1}{k_w} \dot{\tilde{\mathbf{w}}} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Para  $\dot{V}_2$  ser semi-definida negativa, deve assumir a forma  $\dot{V}_2 = -\tilde{\mathbf{x}}^T Q^* \tilde{\mathbf{x}}$ . De forma a anular o segundo termo da última igualdade acima, escolhe-se o seguinte valor de  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}$ .

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = -k_w B^T P \tilde{\mathbf{x}} = -k_w \rho \mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}} = -\rho k_w (k_p \tilde{\mathbf{p}} + k_d \tilde{\mathbf{v}}) \quad (29)$$

Isto resulta numa derivada de estimativa da perturbação com seguinte expressão.

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}} = -\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = k_w B^T P \tilde{\mathbf{x}} = \rho k_w (k_p \tilde{\mathbf{p}} + k_d \tilde{\mathbf{v}}) \quad (30)$$

Por fim, conclui-se que a primeira derivada da função de Lyapunov ( $V_2$ ) será igual à primeira derivada da função de Lyapunov anteriormente apresentada ( $V_1$ ).

$$\dot{V}_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{w}}) = \dot{V}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = -\tilde{\mathbf{x}}^T Q^* \tilde{\mathbf{x}} \quad (31)$$

Como visto anteriormente,  $Q^*$  é uma matriz positiva definida, e portanto  $V_2$  também o será. Como  $V_2$  é uma matriz positiva definida e  $\dot{V}_1$  é função negativa definida, sabe-se que  $\dot{V}_2$  é semi-definida negativa, e este sistema é estável.  $\dot{V}_2$  não é negativa definida uma vez que não depende de  $\tilde{\mathbf{w}}$ .

## 2.6 Estabilidade do Sistema com Controle Adaptativo

Existe agora um novo vetor de estado aumentado  $\xi$  para o sistema, que inclui o erro de estimação da perturbação.

$$\xi = [\tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{\mathbf{w}}^T]^T = [\tilde{\mathbf{p}}^T \quad \tilde{\mathbf{v}}^T \quad \tilde{\mathbf{w}}^T]^T \quad (32)$$

Tendo em conta as equações da dinâmica do sistema (26) e (29), facilmente se obtém a nova dinâmica em espaço de estados do erro do sistema  $\dot{\xi}$ .

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -k_p I & -k_d I & I \\ -\rho k_w k_p I & -\rho k_w k_d I & 0 \end{bmatrix} \xi \quad (33)$$

Sabendo esta dinâmica e as funções de Lyapunov e suas derivadas, é possível fazer uma análise de estabilidade ao sistema a partir do próprio teorema de Lyapunov. Pretende-se verificar que a origem deste sistema é assintoticamente estável. Ou seja, quando  $t \rightarrow \infty$ , o sistema tende para a solução  $\xi = 0$ .

Visto que  $\dot{V}_1$  é uma função negativa definida e  $\dot{V}_2$  é uma função negativa semi-definida, é garantido que a origem é um ponto estável, mas não garante que seja globalmente assintoticamente estável. Como tal, será necessário recorrer ao princípio de invariância de LaSalle. Define-se o conjunto  $\Omega$  como:

$$\Omega := \left\{ \xi : \dot{V}_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{w}}) = 0 \right\} \quad (34)$$

Este princípio diz que, se a única trajetória totalmente incluída no conjunto  $\Omega$  for a que corresponde a  $\xi = 0$ , então o ponto de equilíbrio será assintoticamente estável.

Como já referido e mostrado anteriormente, a função  $\dot{V}_2$  apenas será nula quando  $\tilde{\mathbf{x}}$  é nulo, enquanto que  $\tilde{\mathbf{w}}$  pode tomar qualquer valor. Neste caso, em que  $\tilde{\mathbf{x}} = 0$  e  $\tilde{\mathbf{w}} \neq 0$ , a dinâmica do sistema será dado por  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = B\tilde{\mathbf{w}}$ , sendo  $B$  uma matriz não nula. No entanto, isto implica que  $\tilde{\mathbf{x}}$  terá um valor não nulo, e desta forma, conclui-se que a função  $V_2$  só se anula quando ambos os estados são nulos  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{w}}) = (0, 0)$ .

Logo, a origem do sistema é globalmente assintoticamente estável.

## 2.7 Sistema em Malha Fechada

Com base no diagrama de blocos da alínea 2.7. do enunciado laboratorial, pretende-se demonstrar que a lei de controlo proposta pode ser representada pela seguinte função transferência.

$$\begin{aligned} s^2 P(s) &= \bar{K}(s) (P_d(s) - P(s)) + s^2 P_d(s) + W(s) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow s^2 P(s) - s^2 P_d(s) &= \bar{K}(s) (P_d(s) - P(s)) + W(s) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow U(s) &= \bar{K}(s) (P(s) - P_d(s)) \end{aligned} \quad (35)$$

Recorrendo à lei de controlo (25), e após várias substituições de definições mostradas anteriormente, é possível determinar a expressão de  $\mathbf{u}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \int_0^t \dot{\tilde{\mathbf{w}}} \cdot dt = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \int_0^t (-\rho k_w \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}) \cdot dt = -k_p \tilde{\mathbf{p}} - k_d \dot{\tilde{\mathbf{p}}} - \rho k_w \int_0^t (k_p \tilde{\mathbf{p}} + k_d \dot{\tilde{\mathbf{p}}}) \cdot dt = \\ &= -k_p (p - p_d) - k_d (\dot{p} - \dot{p}_d) - \rho k_w k_p \int_0^t (p - p_d) \cdot dt - \rho k_w k_d (p - p_d) \end{aligned} \quad (36)$$

Aplicando a transformada de Laplace à expressão anterior, encontra-se a expressão de  $U(s)$ .

$$U(s) = (-k_p - \rho k_w k_d - k_d s - \frac{\rho k_w k_p}{s})(P - P_d) = \bar{K}(P - P_d) \quad (37)$$

Por fim, podemos concluir que a expressão de  $\bar{K}(s)$  é a seguinte.

$$\bar{K}(s) = -(k_p + \rho k_w k_d) - k_d s - \frac{\rho k_w k_p}{s} = -\frac{(k_d s + k_p)(s + \rho k_w)}{s} \quad (38)$$

O controlador proposto apresenta claramente a morfologia de um controlador PID. Aplica-se uma correção baseada no valor atual do erro (proporcional), no seu valor cumulativo ao longo do tempo (integrativo), e numa previsão baseada na sua taxa de variação (derivativo).

## 2.8 Controlo do Ângulo de Guinada

O controlador de seguimento de trajetória projetado anteriormente não depende da dinâmica do ângulo de guinada, pois neste tipo de veículos aéreos o ângulo em causa não é afetado/restringido pela dinâmica linear do sistema. Esta parte do relatório será dedicada ao desenvolvimento dum controlador que permita o controlo de guinada, mais especificamente um controlador de realimentação que permita/garanta o seguimento de uma referência constante com um erro estacionário nulo.

O movimento de guinada pode ser descrito, simplesmente, por um sistema de primeira ordem, e não necessariamente por um integrador puro.

$$G(s) = \frac{\psi(s)}{\dot{\psi}(s)} = \frac{k}{s + a} \quad (39)$$

O controlador projetado apresenta uma realimentação simples em servo-mecanismo, pelo que segue uma referência fixa imposta. Isto sugere o uso de um controlador proporcional. Terá ainda a condição extra de anular o erro estacionário, o que sugere a necessidade de adição duma componente integral extra. Isto resulta na implementação dum controlador PI, com a seguinte função transferência:

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} \quad (40)$$

onde  $K_p$  e  $K_i$  são os ganhos proporcional e integral, respetivamente.

Em anel fechado, para realimentação negativa, tem-se a seguinte função transferência que relaciona o ângulo de guinada com o ângulo de guinada de referência.

$$\frac{\psi(s)}{\psi_r(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{K_p k s + K_i k}{s^2 + (K_p k + a)s + K_i k} \quad (41)$$

Como comprovado na equação (42), o ganho do sistema em regime estacionário é unitário.

$$ganho = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi(s)}{\psi_r(s)} = \frac{K_i k}{K_i k} = 1 \quad (42)$$

Com ganho unitário conclui-se que o erro de seguimento para regime estacionário será nulo, o que garante que implementação do controlador PI será eficaz. Definindo o erro do ângulo de guinada como  $E(s) = \psi_r(s) - \psi(s)$ , é possível retirar a equação que rege a razão de guinada para uma referência.

$$\dot{\psi}(s) = s\psi(s) = \left(-K_p - \frac{K_i}{s}\right)(\psi(s) - \psi_r(s)) = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right)E(s) = K_p E(s) + \frac{K_i}{s}E(s) \quad (43)$$

No domínio do tempo, a razão de guinada em função do erro será:

$$\dot{\psi} = K_p(\psi_d - \psi) + K_i \int (\psi_d - \psi) dt \quad (44)$$



### 3 Implementação e Simulação

#### 3.1 Definição do Controlador

A malha interior do drone tem como entrada uma referência da velocidade vertical,  $w_r$ , ao invés do thrust,  $T$ , apresentado na secção teórica deste relatório. Como tal, é necessário alterar o controlador implementado. Aproximando todas as trajetórias a um plano horizontal, isto é, com ângulos de picada e rolamento muito pequenos, podemos utilizar a expressão

$$w_r = -k_w (z - z_d) \quad (45)$$

para controlar a velocidade vertical. Escolheu-se o valor de  $k_w = 1$  uma vez que este foi o permitiu a obtenção de resultados mais satisfatórios na primeira atividade laboratorial - bom compromisso entre rapidez de atuação e pouca sobrelevação, na ausência de movimentos oscilatórios.

Com o objetivo de encontrar os ganhos a utilizar no novo controlador, recorreu-se ao *Linear Quadratic Regulator* (LQR), aplicado às matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad (46)$$

Foram extraídos os ganhos:

$$k_p = 4, \quad k_d = 3, \quad k_i = 1 \quad (47)$$

Apesar de estes ganhos garantirem bons resultados na simulação, são de facto um pouco altos. Depois de discutir este assunto com o professor Pedro Trindade, antes da execução da parte experimental com o drone, foi decido baixar o valor de  $k_p$  para 2.4, evitando assim respostas bruscas e modos oscilatórios no drone.

Para o controlo dos ângulos de guinada e de rolamento, recorreu-se novamente ao LQR, desta feita aplicado às matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 10 \quad (48)$$

Os ganhos obtidos foram então:

$$k_p = 1.2777, \quad k_i = 0.3162 \quad (49)$$

#### 3.2 Geração da Trajetória Linear

Para a geração da trajetória linear desejada, alterou-se o código da função *desired\_trajectory*. As expressões da posição, velocidade e aceleração desejadas, assim como a do ângulo de guinada pretendido, foram substituídas pelo sistema seguinte:

$$\begin{cases} p_d = p_0 + [0.3t; 0; 0] \\ \dot{p}_d = [0.3; 0; 0] \\ \ddot{p}_d = [0; 0; 0] \\ \psi_d = 0 \end{cases} \quad (50)$$

Esta trajetória tem a forma de uma linha reta, segundo o eixo  $xx$ , percorrida à velocidade de  $0.3m/s$ . Optou-se por uma velocidade linear de  $0.3m/s$ , ao invés dos  $0.1m/s$  sugeridos no enunciado, para que a experiência não demorasse tanto. Consideramos também que este valor se aproxima mais de uma possível aplicação real do drone, uma vez que  $0.1m/s$  é notoriamente lento. Para obter a velocidade e a aceleração desejadas, apenas é necessário derivar as diferentes componentes do vetor posição em ordem ao tempo, uma ou duas vezes, respetivamente.

### 3.3 Seguimento da Trajetória Linear

Aplicando o controlador acima explicado ao seguimento da trajetória linear, com uma velocidade de  $0.3m/s$ , obteve-se os seguintes resultados da trajetória do drone, na simulação e na experimentação real:

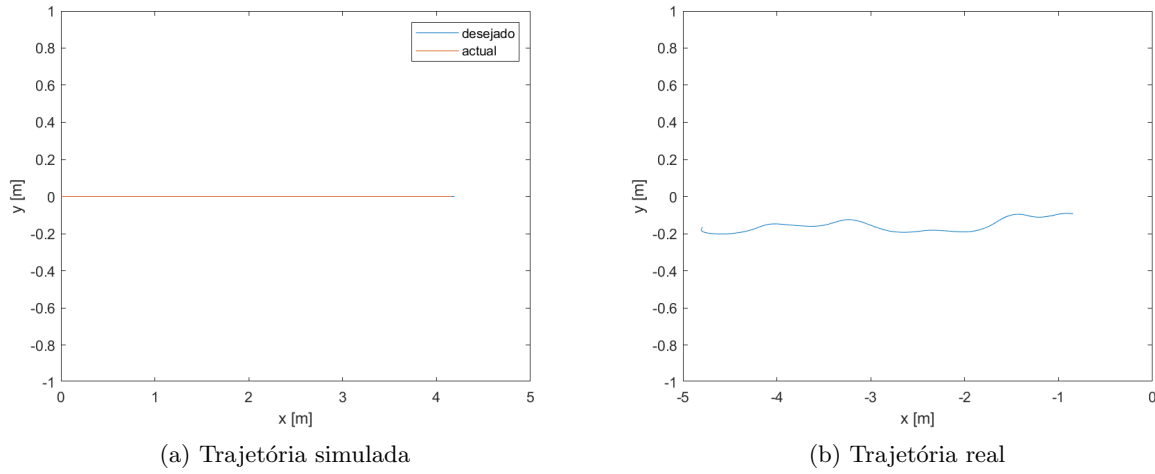


Figura 1: Comparação entre a trajetória linear simulada e a trajetória real

É possível ainda comparar a evolução temporal das coordenadas  $x$  e  $y$ , tanto na simulação como na experiência:

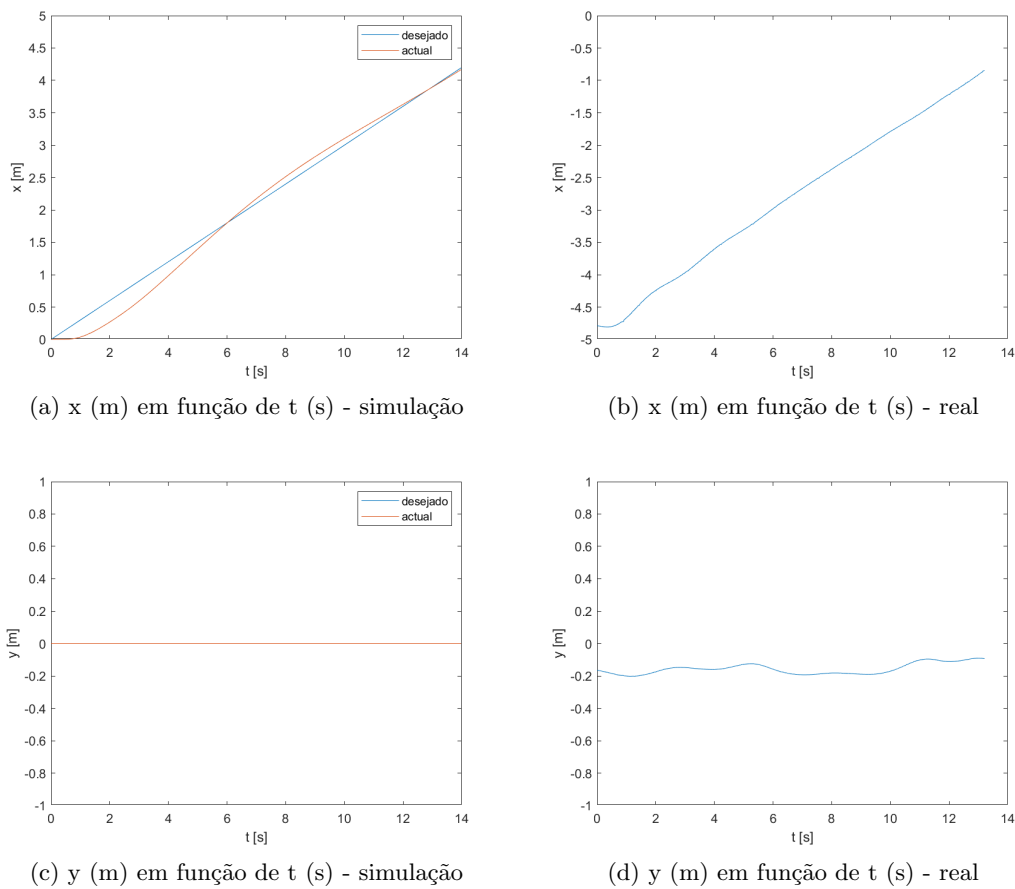


Figura 2: Comparação da evolução temporal das coordenadas  $x$  e  $y$  na simulação e na experiência real da trajetória linear

Ao contrário da simulação, na experiência real o drone não parte da origem do referencial. Analisando os gráficos, é perceptível que a sua posição inicial se encontra, aproximadamente, em  $(-4.75; -0.18)$ . No entanto, é visível que a trajetória desejada é seguida com um elevado grau de precisão. Existe alguma oscilação na coordenada  $y$ , fruto de perturbações existentes. Esta oscilação tem uma amplitude bastante reduzida, pelo que é possível afirmar que o seguimento da reta em  $x$ , com uma velocidade linear de  $0.3m/s$ , foi concluída com sucesso.

### 3.4 Geração da Trajetória Circular

De modo a criar uma trajetória circular, voltou a alterar-se o código da função *desired\_trajectory*. As expressões da posição, velocidade e aceleração foram substituídas por:

$$\begin{cases} p_d = p_0 + [\cos(0.3t) - 1; \sin(0.3t); 0] \\ \dot{p}_d = [-0.3 \sin(0.3t); 0.3 \cos(0.3t); 0] \\ \ddot{p}_d = [-0.09 \cos(0.3t); -0.09 \sin(0.3t); 0] \end{cases} \quad (51)$$

O valor do ângulo de guinada de referência foi deixado em zero, por não ser relevante para este problema. Optou-se por utilizar novamente a velocidade linear igual a  $0.3m/s$ , pelos mesmos motivos enunciados na secção 3.2. Note-se que na posição  $x$  foi subtraído o valor do raio do círculo, de modo a que o drone inicie a sua trajetória já sobre o círculo, em vez de começar no centro.

### 3.5 Seguimento da Trajetória Circular

Aplicando o mesmo controlador à trajetória circular definida na alínea anterior, a percorrer com uma velocidade linear de  $0.3m/s$ , obteve-se os seguintes desenhos da trajetória, na simulação e na experiência real:

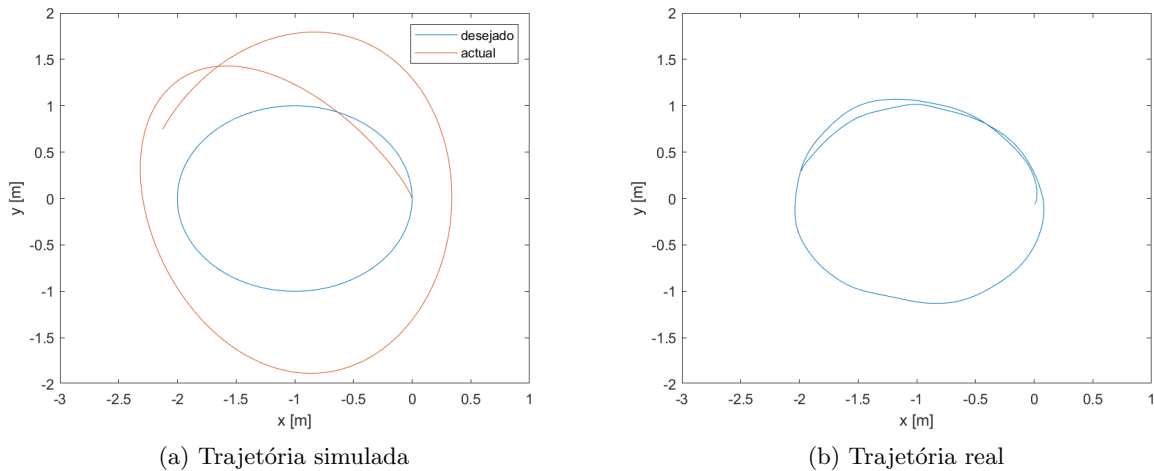


Figura 3: Comparação entre a trajetória circular simulada e a trajetória real

Curiosamente, os resultados reais obtidos são bastante mais satisfatórios do que os resultados obtidos na simulação. Estes apresentam um grande erro de seguimento, enquanto que a trajetória real segue com grande precisão o círculo de raio  $1m$  e centrado em  $(-1; 0)$ . É novamente possível analisar a evolução temporal das coordenadas  $x$  e  $y$  na simulação e na realidade:

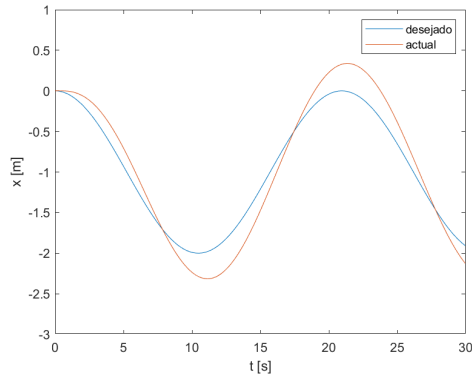
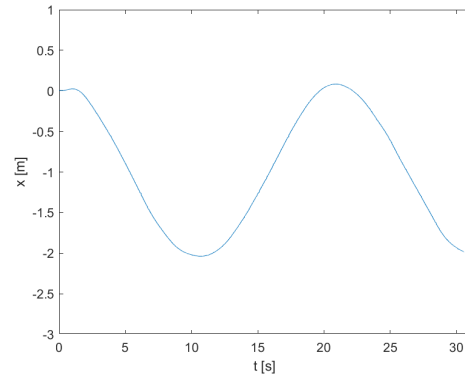
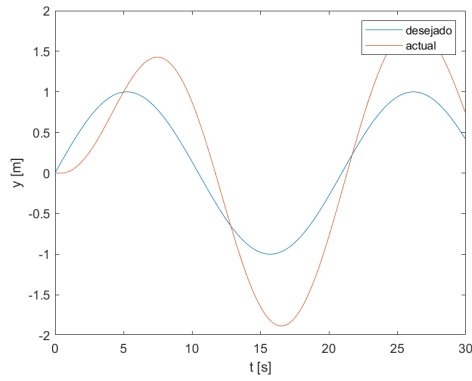
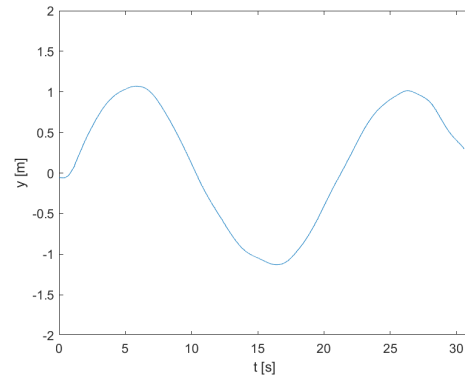
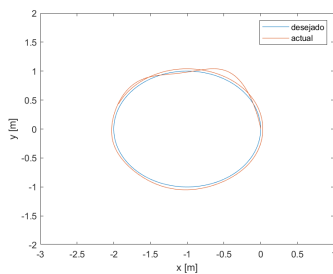
(a)  $x$  (m) em função de  $t$  (s) - simulação(b)  $x$  (m) em função de  $t$  (s) - real(c)  $y$  (m) em função de  $t$  (s) - simulação(d)  $y$  (m) em função de  $t$  (s) - real

Figura 4: Comparação da evolução temporal das coordenadas  $x$  e  $y$  na simulação e na experiência real da trajetória circular

Novamente, é observável a tendência da experiência real de seguir melhor os valores desejados de  $x$  e de  $y$ .

Por ser relevante, são apresentados de seguida os valores obtidos da simulação, quando o círculo é percorrido por uma velocidade linear de  $0.1\text{m/s}$ :



(a) Trajetória simulada

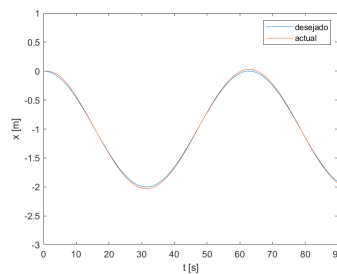
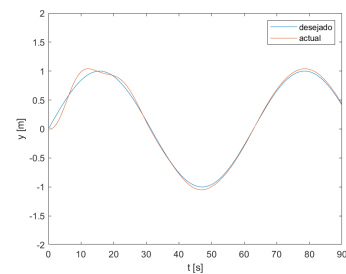
(b)  $x$  (m) em função de  $t$  (s)(c)  $y$  (m) em função de  $t$  (s)

Figura 5: Trajetória e evolução temporal das coordenadas  $x$  e  $y$  para a trajetória circular, percorrida com velocidade de  $0.1\text{m/s}$

O erro de seguimento é notoriamente menor. Neste caso, tal como na experiência real, pode-se afirmar, com grande confiança, que a trajetória circular é seguida com sucesso, ainda que exista algum erro estático de posição.

### 3.6 Seguimento da Trajetória Circular com Ângulo de Guinada Não-Nulo

Nesta alínea, manteve-se a definição da trajetória circular utilizada anteriormente. Alterou-se, porém, a definição do ângulo de guinada, que deixa de ser nulo. O ângulo de guinada passa a ser definido por

$$\psi = 0.3t \quad (52)$$

de modo a que o drone fique sempre voltado para o centro do círculo.

As trajetórias obtidas foram:

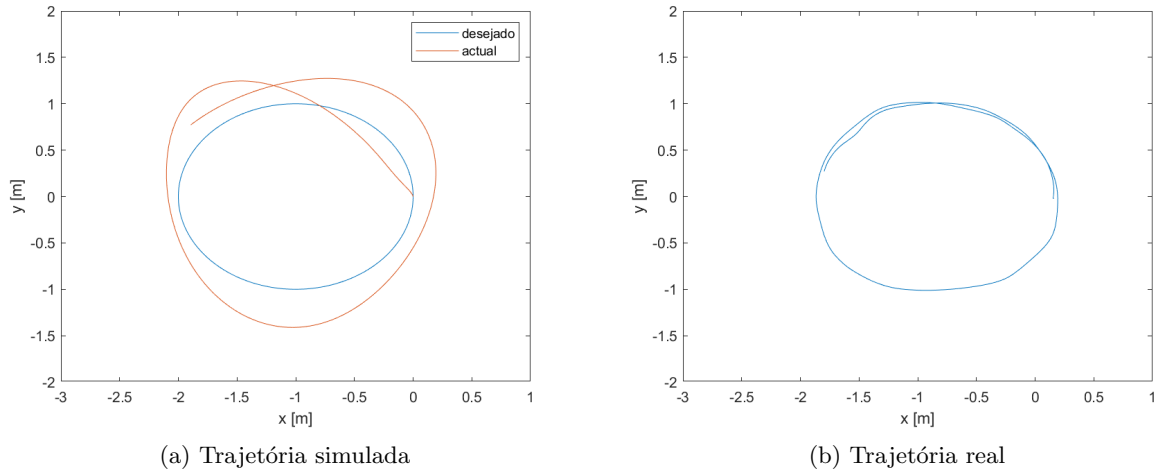


Figura 6: Comparação entre a trajetória circular simulada e a trajetória real para ângulo de guinada não-nulo

As coordenadas  $x$  e  $y$  evoluem, em função do tempo, consoante é possível observar nas figuras abaixo. Apesar dos resultados obtidos serem semelhantes à alínea anterior, observou-se uma redução de o erro estático de posição. Observou-se também que os valores do ângulo de picada e de rolamento tendem para valores constantes, com a picada a tender para próximo de zero, conforme seria de esperar. Novamente, pode observar-se de seguida os resultados obtidos para a simulação com velocidade igual a  $0.1m/s$ . Estes resultados são, mais uma vez, visivelmente mais satisfatórios do que os obtidos anteriormente, tendo um erro de seguimento da posição bastante inferior.

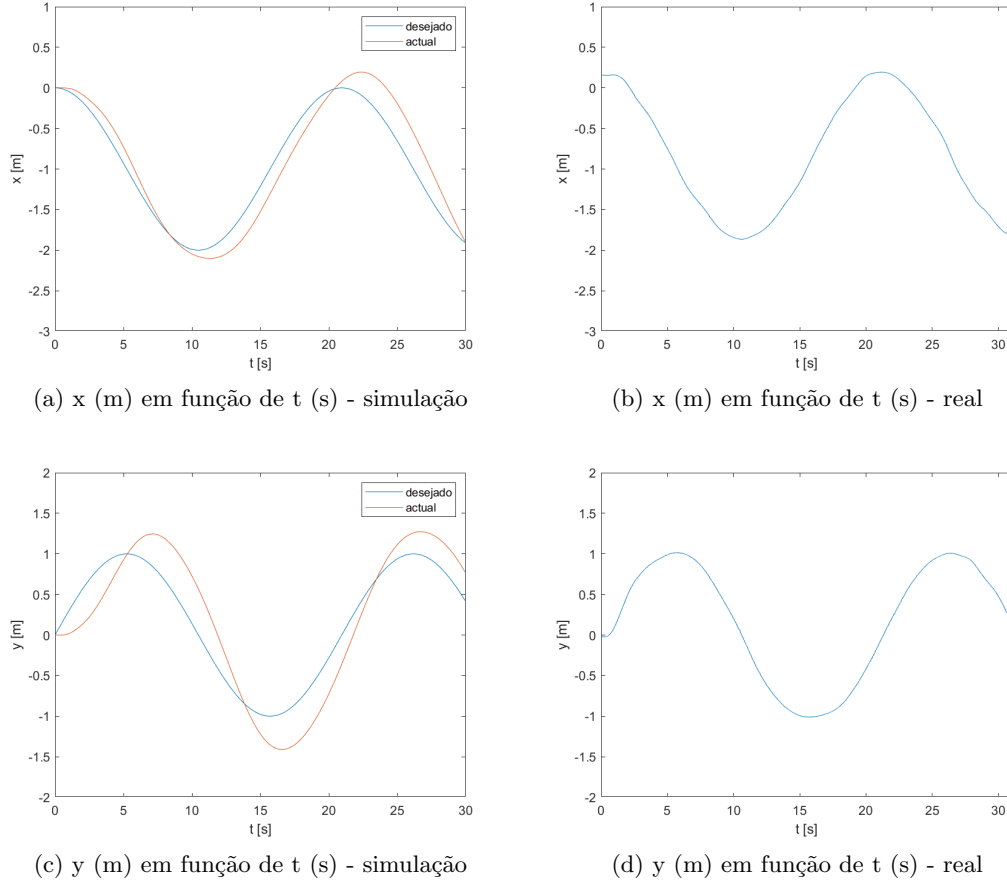


Figura 7: Comparação da evolução temporal das coordenadas  $x$  e  $y$  na simulação e na experiência real da trajetória circular para ângulo de guinada não-nulo

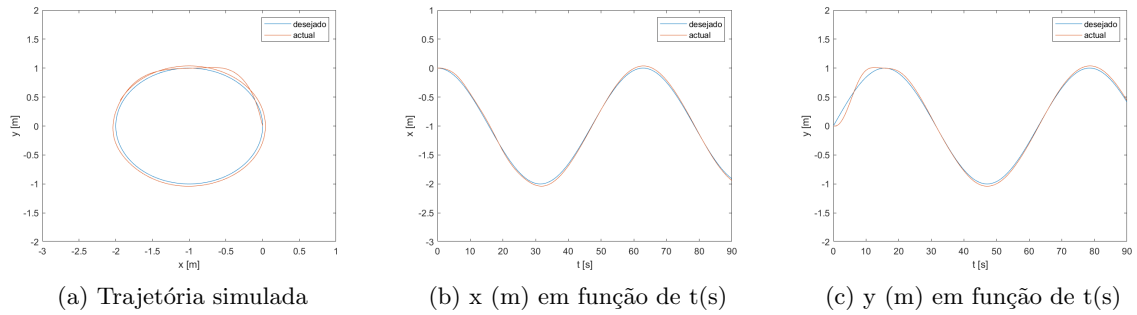


Figura 8: Trajetória e evolução temporal das coordenadas  $x$  e  $y$  para a trajetória circular, percorrida com velocidade de 0.1m/s, para ângulo de guinada não-nulo

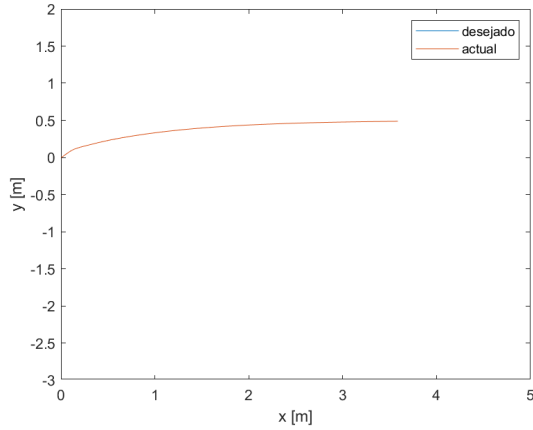
### 3.7 Alternativa para o Seguimento de uma Trajetória Linear

Na última alínea deste relatório, foi testado um método diferente para o seguimento de uma trajetória linear, com base num método de *line of sight scheme for straight-line path following*. Para tal, o bloco *desired\_trajectory* foi novamente alterado:

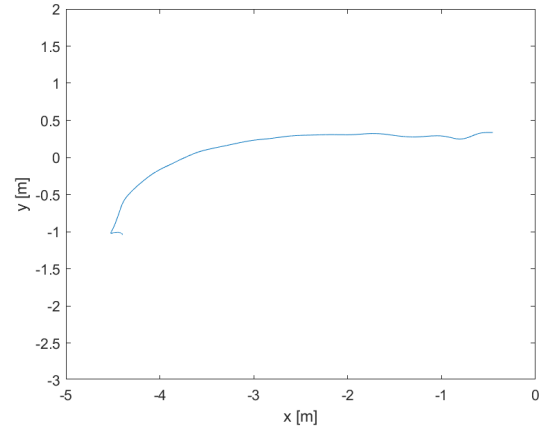
$$\begin{cases} p_d = [x; y; -1] \\ \dot{p}_d = [V \cos(\psi_d); V \sin(\psi_d); 0] \\ \ddot{p}_d = [0; 0; 0] \\ \psi_d = \arctan\left(\frac{-(y-0.5)}{\Delta}\right) \end{cases} \quad (53)$$

O parâmetro  $V$  simboliza uma componente da velocidade linear, pelo que quanto maior for o seu valor, mais rapidamente o drone vai convergir para e percorrer o percurso pretendido. Por sua vez, o parâmetro  $\Delta$  influencia a "urgência" com que o drone deve convergir para o caminho. Quanto menor for o seu valor, mais rapidamente o drone irá convergir para a trajetória desejada.

Os valores de  $p_d$  e de  $\ddot{p}_d$  foram escolhidos de forma a anular os efeitos do ganho proporcional e integral, bem como o termo de *feedforward*. Escolheu-se os valores de  $V = 0.3m/s$  e de  $\Delta = 1m$ , por serem valores com os quais foi possível obter bons resultados na simulação, ao mesmo tempo que não eram demasiado elevados, ao ponto de deixarem de ser exequíveis na experimentação real. Os resultados obtidos para a trajetória podem ser consultados de seguida.



(a) Trajetória simulada



(b) Trajetória real

Figura 9: Comparação entre a trajetória simulada e a trajetória real

É de reparar a influência de os pontos de partida serem diferentes na simulação e na realidade. A evolução temporal das coordenadas  $x$  e  $y$  é dada por:

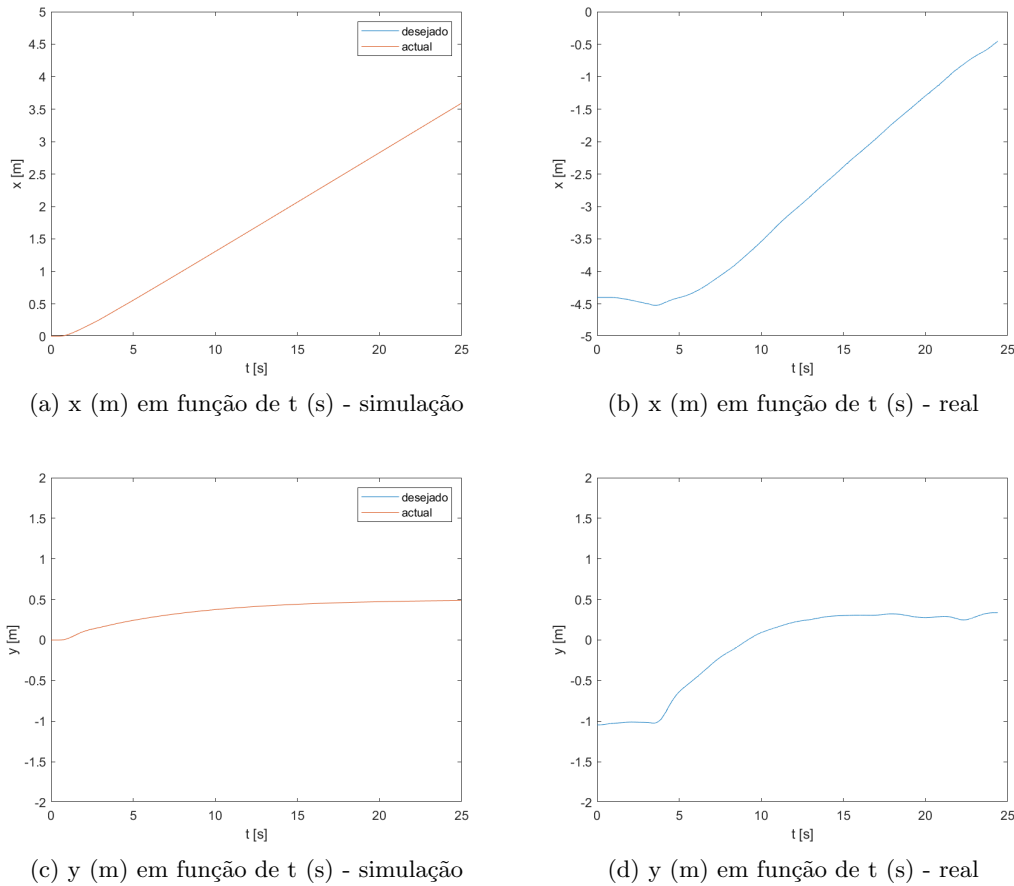


Figura 10: Comparação da evolução temporal das coordenadas  $x$  e  $y$  na simulação e na experiência real

Mais uma vez, a trajetória desejada foi seguida com sucesso, ainda que o drone partisse de posições diferentes. É de salientar a influência dos parâmetros  $V$  e  $\Delta$  na convergência ao caminho pretendido.

## 4 Conclusão

Com esta atividade laboratorial, foi possível concluir o processo iniciado no primeiro laboratório do semestre, de modelar, estimar, simular e controlar um drone do tipo *Parrot ARDrone*.

Em primeiro lugar, na secção teórica, começou-se por analisar um controlador de posição, com recurso a *inputs* virtuais. Foi deduzido um controlador do tipo LQR, a partir do qual foi possível retirar os valores dos ganho utilizados na secção prática deste relatório. A estabilidade dos controladores apresentados foi posteriormente analisada, recorrendo à Teoria da Estabilidade de Lyapunov e ao Princípio da Invariância de LaSalle.

Na secção experimental, o controlador deduzido na secção teórica foi adaptado, de modo a dar resposta aos *inputs* disponibilizados pelo drone. De seguida este controlador foi posto em prática, tendo sido testado o controlo da posição no seguimento de diferentes trajetórias. Após a simulação e execução prática, verificou-se que o drone foi capaz de seguir com bastante precisão as trajetórias linear, circular e circular com ângulo de guinada não-nulo testadas. O efeito do ângulo de guinada no seguimento do círculo foi também demonstrado. Por fim, testou-se uma nova abordagem ao seguimento de uma trajetória, baseada numa perspetiva de *line of sight*. Os resultados obtidos foram também bastante satisfatórios. Os efeitos dos parâmetros  $V$  e  $\Delta$  na convergência à trajetória foram também estudados.

Em suma, foi possível nesta atividade laboratorial aplicar e testar, com sucesso, diversos aspetos lecionados nas aulas teóricas da unidade curricular. Os resultados obtidos são animadores e demonstram a boa ligação que foi feita entre os conteúdos abordados nas aulas teóricas e nos laboratórios.