

Instituto Superior Técnico

MEAer

Aeronaves Robotizadas

2022/2023 – Primeiro Semestre

Laboratório 3

Grupo 2

1. N.º:95783 Nome: Duarte Lopes
2. N.º:95811 Nome: José Medeiro
3. N.º:95840 Nome: Rafaela Chaffilla

Assinatura: *Duarte Lopes*

Assinatura: *José Medeiro*

Assinatura: *Rafaela Chaffilla*

Professora: Rita Cunha

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Controlo de Trajetória	1
2.1	Entrada Virtual	1
2.2	Dinâmica do Erro e Minimização da Função de Custo	2
2.3	Função de Lyapunov e Estabilidade do Sistema	3
2.4	Adição de uma Perturbação Desconhecida	4
2.5	Projeto de um Sistema de Controlo Adaptativo	4
2.6	Estabilidade do Sistema com Controlo Adaptativo	5
2.7	Sistema em Malha Fechada	5
2.8	Controlador do Ângulo de Guinada	6
3	Implementação e Simulação	7
3.1	Definição do Controlador	7
3.1.1	Altitude	7
3.1.2	Ângulo de Guinada	8
3.1.3	Ganhos do Controlador	8
3.2	Trajetória Horizontal	9
3.3	Trajetória Circular - Ângulo de Guinada Constante	10
3.4	Trajetória Circular - Ângulo de Guinada Variável	11
3.5	Esquema <i>Line of Sight</i>	12
4	Conclusão	14
	<i>Referências</i>	15

1 Introdução

Neste trabalho laboratorial irá concluir-se o estudo do controlo do quadrrirrotor *Parrot AR.Drone*, no âmbito da cadeira de Aeronaves Robotizadas. Para tal, será implementado um controlo para o seguimento de diferentes trajetórias.

Inicialmente, será realizada uma análise teórica detalhada na secção 2, onde será desenhado o controlador para o seguimento de trajetórias no plano horizontal, assim como um controlador para o ângulo de guinada, que é independente dos restantes estados. O primeiro controlador terá recurso a um estimador de perturbações, nomeadamente o vento.

De seguida, na secção 3, será, então, completado o controlador, escolhendo os ganhos a usar com recurso às ferramentas de simulação fornecidas, para depois ser analisado o controlo experimentalmente.

Por fim, as comparações entre os resultados teóricos e experimentais serão condensadas e retiram-se conclusões da mesma na secção 4.

2 Controlo de Trajetória

2.1 Entrada Virtual

De forma a simplificar as leis de controlo e permitir uma abstração da dinâmica do sistema, é costume utilizar entradas virtuais.

Recorrendo à mesma notação que a utilizada nos dois relatórios anteriores, a dinâmica linear do quadrrirrotor expressa no referencial de inércia pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\ddot{\mathbf{p}} = g\mathbf{e}_3 - R\frac{T}{m}\mathbf{e}_3, \quad (1)$$

onde $p \in \mathbb{R}^3$ representa a posição do referencial do corpo, B , no referencial inercial, I , g é a constante de aceleração gravítica, $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$, $R \in SO(3)$ é a matriz de rotação de B para I , $T \in \mathbb{R}$ é a força de propulsão e m é a massa do quadrrirrotor.

Sabendo que $R = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$, é possível efetuar uma mudança de coordenadas tal que:

$$\ddot{\mathbf{p}} = g\mathbf{e}_3 - R_z(\psi)\mathbf{u}^*, \quad (2)$$

em que \mathbf{u}^* é a nova entrada virtual, cujo objetivo é descrever as entradas da dinâmica de translação num só vetor, simplificando a escrita das respetivas equações. Assim, e recorrendo à equação 1, é possível definir \mathbf{u}^* através do seguinte raciocínio:

$$\begin{aligned} R_z(\psi)\mathbf{u}^* &= R_z(\psi)R_y(\theta_r)R_x(\phi_r)\frac{T}{m}\mathbf{e}_3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{u}^* &= R_y(\theta_r)R_x(\phi_r)\frac{T}{m}\mathbf{e}_3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{u}^* &= \begin{bmatrix} u_x^* \\ u_y^* \\ u_z^* \end{bmatrix} = \frac{T}{m} \begin{bmatrix} \sin(\theta_r)\cos(\phi_r) \\ -\sin(\phi_r) \\ \cos(\theta_r)\cos(\phi_r) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Nas equações anteriores, $\psi \in \mathbb{R}$ representa o ângulo de guinada, $\theta_r \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ o ângulo de picada de referência e $\phi_r \in \mathbb{R}$ o ângulo de rolamento de referência. Deve ter-se, também, em conta que $R^{-1} = R^T$ e que $\dot{R} = RS(w)$.

Com a formulação para \mathbf{u}^* patente na equação 3, é possível determinar T , θ_r e ϕ_r em função de \mathbf{u}^* . Estas variáveis podem ser limitadas de tal forma que $T > 0$, $\theta_r \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ e $\phi_r \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Partindo da equação 3 e assumindo que θ e ϕ tendem para as respetivas referências por ação de um anel de controlo interno, obtêm-se as seguintes relações:

$$\begin{cases} \tan(\theta_r) = \frac{\sin(\theta_r)}{\cos(\theta_r)} \\ \tan(\theta_r) = \frac{\sin(\theta_r)}{\cos(\theta_r)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_r = \arctan\left(\frac{u_x^*}{u_z^*}\right) \\ \phi_r = \arctan\left(\frac{-u_y^*}{\sqrt{u_x^* + u_z^*}}\right) \end{cases} \quad (4)$$

A força de propulsão pode ser determinada através da definição de norma de um vetor:

$$\|\mathbf{u}^*\| = \|R_y(\theta_r)R_x(\phi_r)\frac{T}{m}\mathbf{e}_3\|. \quad (5)$$

Como se tem que:

$$||R_y(\theta_r)R_x(\phi_r)\mathbf{e}_3|| = \sqrt{\sin^2(\theta_r)\cos^2(\phi_r) + \cos^2(\theta_r)\cos^2(\phi_r) + \sin^2(\phi_r)} = 1, \quad (6)$$

retira-se que a expressão da força de propulsão em função da entrada virtual $|\mathbf{u}^*$ é:

$$||\mathbf{u}^*|| = \frac{T}{m} \Leftrightarrow T = m||\mathbf{u}^*|| = m\sqrt{u_x^{*2} + u_y^{*2} + u_z^{*2}} \quad (7)$$

É de notar que se assumiu que as equações anteriores são válidas numa escala de tempo suficientemente reduzida em relação às do anel externo.

2.2 Dinâmica do Erro e Minimização da Função de Custo

Tendo em vista projetar um controlador de seguimento de trajetória, torna-se necessário quantificar o erro da trajetória real do quadricóptero face à trajetória desejada. No caso em análise, pretende-se minimizar os erros de seguimento. Por isso, foi definido um modelo da dinâmica baseado na posição e na velocidade.

Seja $\mathbf{p}_d \in \mathbb{R}^3$ a trajetória desejada e as variáveis \tilde{p} e \tilde{v} os erros de posição e de velocidade, respetivamente. Define-se, então, o vetor de estado de erro $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}_d \\ \mathbf{v} - \mathbf{v}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}_d \\ \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix} \quad (8)$$

Sabendo que a entrada \mathbf{u} verifica $\mathbf{u} = \dot{\tilde{v}} = \ddot{\tilde{p}}$, pode-se representar a dinâmica do erro em espaço de estados através da equação 9:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (9)$$

ou seja,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Derivando a equação 8 e utilizando a equação 2, obtém-se a seguinte relação entre \mathbf{u} e \mathbf{u}^* :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d \Rightarrow \mathbf{u} = \dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \ddot{\mathbf{p}} - \ddot{\mathbf{p}}_d = g\mathbf{e}_3 - R_z(\psi)\mathbf{u}^* - \ddot{\mathbf{p}}_d \quad (11)$$

Pretende-se, agora, projetar e otimizar o controlo do erro, que irá garantir a estabilidade do sistema. Como tal, é necessário encontrar uma lei de controlo para a realimentação do estado, $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$, que minimize a função de custo J :

$$J = \int_0^{+\infty} (\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{v}} + \rho ||\mathbf{u}(t)||^2) dt, \quad (12)$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz definida positiva e $\mathbf{R} = \rho$ é um parâmetro unidimensional, pelo que não deve ser confundido com a matriz de rotação, R . \mathbf{Q} e \mathbf{R} são os parâmetros ajustáveis que determinam o controlo ótimo. Por sua vez, \mathbf{K} representa o ganho do controlador LQR que minimiza a função J , sendo dado por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \frac{1}{\rho}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = [k_p I \quad k_d I], \quad (13)$$

em que a matriz simétrica \mathbf{P} é a solução da equação algébrica de Riccati:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0. \quad (14)$$

Daqui se extrai a expressão para a matriz \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\rho}\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \gamma_1 I & 0 \\ 0 & \gamma_2 I \end{bmatrix}, \quad (15)$$

onde γ_1 e γ_2 são os pesos associados aos erros de posição e de velocidade, respetivamente.

Aplicando, agora, a lei de controlo de realimentação, $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$, à dinâmica em espaço de estados traduzida pela equação 9, obtém-se a seguinte relação:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\tilde{\mathbf{x}} \quad (16)$$

Utilizando a mesma lei de controlo e a fórmula para \mathbf{K} na equação 11, obtém-se, por fim, uma nova expressão para o cálculo da entrada virtual \mathbf{u}^* :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= g\mathbf{e}_3 - R_z(\psi)\mathbf{u}^* - \ddot{\mathbf{p}}_d \Rightarrow \mathbf{u}^* = R_z^{-1}(\psi)(g\mathbf{e}_3 - \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{p}}_d) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{u}^* = R_z^T(\psi)(g\mathbf{e}_3 + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{p}}_d)\mathbf{u}^* = \\ &= R_z^T(\psi)\left(g\mathbf{e}_3 + \frac{1}{\rho}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{p}}_d\right)\end{aligned}\quad (17)$$

2.3 Função de Lyapunov e Estabilidade do Sistema

Recorrendo à equação 16, que descreve o sistema em malha fechada, pretende-se demonstrar a existência de uma matriz \mathbf{P} definida positiva que possa ser usada para definir uma função de Lyapunov V_1 tal que:

$$V_1(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}. \quad (18)$$

Assim, a função V_1 deverá ser, também, definida positiva e, portanto, caracterizada por:

$$\begin{cases} V_1(\tilde{\mathbf{x}}) > 0, & \text{se } \tilde{\mathbf{x}} \neq 0 \\ V_1(\tilde{\mathbf{x}}) = 0, & \text{se } \tilde{\mathbf{x}} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

No entanto, assumir-se-á, à partida, que V_1 é uma função de Lyapunov definida positiva. De acordo com o Teorema da Estabilidade de Lyapunov, a origem $\tilde{\mathbf{x}} = 0$ é estável ou assintoticamente estável conforme os valores que a derivada de V_1 , \dot{V}_1 , pode tomar:

$$\begin{cases} \dot{V}_1(\tilde{\mathbf{x}}) \leq 0, & \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = 0 \text{ estável} \\ \dot{V}_1(\tilde{\mathbf{x}}) < 0, & \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = 0 \text{ assintoticamente estável} \end{cases} \quad (20)$$

De forma a averiguar a estabilidade em torno de $\tilde{\mathbf{x}} = 0$, determina-se a expressão para a derivada \dot{V}_1 através das equações 13, 14 e 16:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{x}}^T [(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})] \tilde{\mathbf{x}} = \\ &= \tilde{\mathbf{x}}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K}] \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K}] \tilde{\mathbf{x}} = \\ &= \tilde{\mathbf{x}}^T \left[\left(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \frac{1}{\rho} \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} \right) - \frac{1}{\rho} \mathbf{P}^T \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} \right] \tilde{\mathbf{x}} = -\tilde{\mathbf{x}}^T \left[\mathbf{Q} + \frac{1}{\rho} \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} \right] \tilde{\mathbf{x}} = \\ &= -\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}^* \tilde{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (21)$$

Recorde-se que \mathbf{P} é uma matriz simétrica. Por seu lado, a variável auxiliar \mathbf{Q}^* define-se como:

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \frac{1}{\rho} \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (22)$$

Como já se referiu, assumiu-se que \mathbf{P} é uma matriz definida positiva. Como o produto de uma matriz pela sua transposta é sempre uma matriz semi-definida positiva, a matriz $\frac{1}{\rho} \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{P}\mathbf{B}) (\mathbf{P}\mathbf{B})^T$, com $\rho > 0$, será, também, semi-definida positiva. Sendo \mathbf{Q} uma matriz definida positiva, \mathbf{Q}^* também o será, pois é a soma de uma matriz definida positiva com outra semi-definida positiva. Logo, pela equação 21, a derivada \dot{V}_1 será definida negativa, anulando-se apenas quando $\tilde{\mathbf{x}} = 0$:

$$\begin{cases} \dot{V}_1(\tilde{\mathbf{x}}) < 0, & \text{se } \tilde{\mathbf{x}} \neq 0 \\ \dot{V}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = 0, & \text{se } \tilde{\mathbf{x}} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Por outro lado, tem-se que $\|\tilde{\mathbf{x}}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V_1 \rightarrow \infty$. Conclui-se, então, pelo Teorema da Estabilidade de Lyapunov, que o ponto de equilíbrio na origem, $\tilde{\mathbf{x}} = 0$, é globalmente assintoticamente estável.

2.4 Adição de uma Perturbação Desconhecida

Supõe-se, agora, que se introduz uma perturbação externa desconhecida no sistema, como, por exemplo, uma rajada de vento. Neste caso, a dinâmica linear do quadrrrotor passará a ser descrita pela equação 24:

$$\ddot{\mathbf{p}} = g\mathbf{e}_3 - R_z(\psi)\mathbf{u}^* + \mathbf{w}, \quad (24)$$

onde \mathbf{w} representa a perturbação inserida. A respetiva estimativa, $\hat{\mathbf{w}}$, entrará na redefinição de \mathbf{u}^* , que apresenta, agora, a seguinte forma:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + g\mathbf{e}_3 + \hat{\mathbf{w}} - \ddot{\mathbf{p}}_d. \quad (25)$$

Sendo o erro associado à estimação da perturbação dado por $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}$ e relembrando que a entrada \mathbf{u} é dada por $\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{p}} - \ddot{\mathbf{p}}_d$, a nova lei de controlo obtém-se substituindo, na equação 24, \mathbf{u}^* pela expressão da equação 25:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}} &= g\mathbf{e}_3 - R_z(\psi)R_z(-\psi)(\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + g\mathbf{e}_3 + \hat{\mathbf{w}} - \ddot{\mathbf{p}}_d) + \mathbf{w} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} = g\mathbf{e}_3 - \mathbf{I}(\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + g\mathbf{e}_3 + \hat{\mathbf{w}} - \ddot{\mathbf{p}}_d) + \mathbf{w} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} - \ddot{\mathbf{p}}_d = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{u} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Por fim, substituindo \mathbf{u} pela expressão obtida na equação 26 na equação da dinâmica em espaço de estados, determina-se a nova equação da dinâmica do quadrrrotor em malha fechada:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}}) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{w}}. \quad (27)$$

2.5 Projeto de um Sistema de Controlo Adaptativo

Nesta secção, procura-se projetar um sistema de controlo adaptativo que estime a perturbação desconhecida, \mathbf{w} , assumindo que esta é constante, e que garanta que o quadrrrotor convirja para a trajetória desejada. Para tal, considera-se a seguinte função de Lyapunov:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{k_w} \|\tilde{\mathbf{w}}\|^2, \quad (28)$$

onde $k_w \in \mathbb{R}^+$ é um ganho de afinação.

Pretende-se propor uma lei de adaptação para a derivada $\dot{\hat{\mathbf{w}}}$ tal que \dot{V}_2 seja semi-definida negativa. Assim, define-se, em primeiro lugar, o erro associado à derivada da perturbação como $\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = \dot{\mathbf{w}} - \dot{\hat{\mathbf{w}}}$. Como se assume que \mathbf{w} é constante, $\dot{\mathbf{w}} = 0$ e, portanto, $\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = -\dot{\hat{\mathbf{w}}}$.

Utilizando as equações 22, 27 e 28, é possível calcular \dot{V}_2 , tendo em conta que $\|\tilde{\mathbf{w}}\|^2 = \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}}$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{w}}) &= \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \frac{1}{k_w} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}^T \tilde{\mathbf{w}} + \frac{1}{k_w} \tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}} = \\ &= \tilde{\mathbf{x}}^T \left[\left(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \frac{1}{\rho} \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} \right) - \frac{1}{\rho} \mathbf{P}^T \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} \right] \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{w}} + \frac{1}{k_w} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}^T \tilde{\mathbf{w}} + \frac{1}{k_w} \tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}} = \\ &= -\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}^* \tilde{\mathbf{x}} + 2\tilde{\mathbf{w}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}} + \frac{2}{k_w} \tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}} = \\ &= -\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}^* \tilde{\mathbf{x}} + 2\tilde{\mathbf{w}}^T \left[\mathbf{B}^T \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}} + \frac{1}{k_w} \dot{\tilde{\mathbf{w}}} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Para que \dot{V}_2 seja semi-definida negativa, deverá poder escrever-se na forma $\dot{V}_2 = -\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q}^* \tilde{\mathbf{x}}$, pelo que se pretende anular a segunda parcela da equação acima. Como tal, tem-se:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}} + \frac{1}{k_w} \dot{\tilde{\mathbf{w}}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{w}}} = -k_w \mathbf{B}^T \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}} = -k_w \rho \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = -\rho k_w (k_p \tilde{\mathbf{p}} + k_d \tilde{\mathbf{v}}) \quad (30)$$

A derivada da estimativa da perturbação será dada, portanto, pela seguinte equação:

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}} = -\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = k_w \mathbf{B}^T \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}} = \rho k_w (k_p \tilde{\mathbf{p}} + k_d \tilde{\mathbf{v}}) \quad (31)$$

Conclui-se, por fim, que a derivada \dot{V}_2 será descrita pela mesma equação que rege \dot{V}_1 :

$$\dot{V}_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{w}}) = \dot{V}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = -\tilde{\mathbf{x}}^T Q^* \tilde{\mathbf{x}}. \quad (32)$$

Sendo \dot{V}_1 semi-definida negativa, como se concluiu na subsecção 2.3, \dot{V}_2 também o será.

2.6 Estabilidade do Sistema com Controlo Adaptativo

Com a inclusão do erro associado à estimação da perturbação, tem-se, agora, um novo vetor de estado aumentado, ξ :

$$\xi = [\tilde{\mathbf{x}}^T \quad \tilde{\mathbf{w}}^T] = [\tilde{\mathbf{p}}^T \quad \tilde{\mathbf{v}}^T \quad \tilde{\mathbf{w}}^T] \in \mathbb{R}^9. \quad (33)$$

A nova dinâmica do erro em espaço de estados obtém-se através das equações 27 e 31:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \\ -k_p \mathbf{I}_{3 \times 3} & -k_d \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ -\rho k_w k_p \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\rho k_w k_d \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \xi. \quad (34)$$

Como V_2 é uma função definida positiva e \dot{V}_2 é uma função semi-definida negativa, o ponto de equilíbrio do sistema é estável, por aplicação do Teorema da Estabilidade de Lyapunov. No entanto, este Teorema não garante que o ponto de equilíbrio seja globalmente assintoticamente estável, para o que será necessário recorrer ao Princípio da Invariância de Krazovskii-LaSalle. Define-se, então, um conjunto Ω tal que:

$$\Omega = \left\{ \xi : \dot{V}_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{w}}) = 0 \right\}. \quad (35)$$

O Princípio da Invariância estipula que, se a única trajetória totalmente incluída no conjunto Ω for a trajetória nula, então o ponto de equilíbrio do sistema será assintoticamente estável. Neste caso, \dot{V}_2 apenas se anula quando $\tilde{\mathbf{x}} = 0$, sendo que $\tilde{\mathbf{w}}$ pode tomar qualquer valor. Para $\tilde{\mathbf{x}} = 0$ e $\tilde{\mathbf{w}} \neq 0$, a dinâmica do sistema será, pois, traduzida por $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{w}}$, sendo \mathbf{B} uma matriz não nula. Daqui se retira que $\tilde{\mathbf{x}}$ assumiria um valor diferente de zero, pelo que se conclui que \dot{V}_2 só se anula quando ambos os estados são nulos: $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{w}}) = (0; 0)$. Como se tem, ainda, que $\|\tilde{\mathbf{x}}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V_2 \rightarrow \infty$, o ponto de equilíbrio na origem do sistema é globalmente assintoticamente estável.

2.7 Sistema em Malha Fechada

Determinar-se-á, agora, a função de transferência correspondente ao bloco $\bar{K}(s)$ da figura 1, que representa o sistema em estudo.

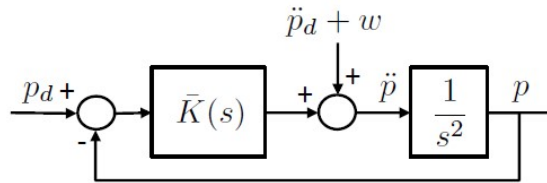


Figura 1: Diagrama de blocos do sistema de seguimento de trajetória [1].

Partindo da equação 26, obtém-se a seguinte expressão para a entrada \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \int_0^t \dot{\tilde{\mathbf{w}}} \cdot dt = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \int_0^t (-\rho k_w \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}) \cdot dt = \\ &= -k_p \tilde{\mathbf{p}} - k_d \dot{\tilde{\mathbf{p}}} - \rho k_w \int_0^t (k_p \tilde{\mathbf{p}} + k_d \dot{\tilde{\mathbf{p}}}) \cdot dt = \\ &= -k_p (\mathbf{p} - \mathbf{p}_d) - k_d (\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d) - \rho k_w k_p \int_0^t (\mathbf{p} - \mathbf{p}_d) \cdot dt - \rho k_w k_d (\mathbf{p} - \mathbf{p}_d) \end{aligned} \quad (36)$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação 36, encontra-se a expressão para $U(s)$:

$$U(s) = \left(-k_p - \rho k_w k_d - k_d s - \frac{\rho k_w k_p}{s} \right) (P - P_d) = \bar{K}(s) (P - P_d). \quad (37)$$

Finalmente, calcula-se a expressão para a função de transferência correspondente ao bloco $\bar{K}(s)$ da figura 1:

$$\bar{K}(s) = -(k_p + \rho k_w k_d) - k_d s - \frac{\rho k_w k_p}{s} = -\frac{(k_d s + k_p)(s + \rho k_w)}{s}. \quad (38)$$

Esta função de transferência é semelhante à de um controlador PID, bastando, para tal, inserir um termo de *feed-forward* da aceleração desejada, P_d . A função $\bar{K}(s)$ pode ser dividida em duas partes: uma correspondente a um controlador PD, $\bar{K}_d(s) = -\rho k_w k_d - k_d s + s^2 P_d(s)$, que controla a posição sem ter em conta a perturbação w , e outra a um controlador PI, $\bar{K}_i(s) = -\rho k_w k_d - \frac{\rho k_w k_p}{s}$, que rejeita a perturbação constante w .

2.8 Controlador do Ângulo de Guinada

O controlador de seguimento de trajetória projetado nas secções anteriores não atua sobre o ângulo de guinada, uma vez que, num quadrirrotor, o ângulo de guinada não é afetado ou restringido pela dinâmica linear do sistema. Por isso, esta subsecção terá como objetivo projetar um controlador do ângulo de guinada, em particular, um controlador de realimentação que garanta o seguimento de uma referência constante com um erro estático nulo.

O movimento de guinada do quadrirrotor pode ser descrito por um sistema de primeira ordem, não consistindo, necessariamente, num integrador puro:

$$G(s) = \frac{\Psi(s)}{\dot{\Psi}_r(s)} = \frac{b}{s+a} \quad (39)$$

Na equação 39, $\Psi(s)$ é a transformada de Laplace do ângulo de guinada, $\dot{\Psi}_r(s)$ a transformada de Laplace da referência da velocidade de guinada e a e b são parâmetros do sistema.

Este controlador apresenta uma realimentação em servomecanismo, seguindo uma referência fixa imposta à entrada, situação para a qual é adequado o uso de um controlador proporcional. Além disso, de forma a anular o erro estático, será, ainda, necessário adicionar um bloco integrador. O resultado é um controlador PI com a seguinte função de transferência:

$$K(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s}, \quad (40)$$

onde k_p e k_i são os ganhos proporcional e integrativo, respetivamente.

Numa implementação em malha fechada com realimentação negativa, o ângulo de guinada relaciona-se com a respetiva referência pela seguinte função de transferência:

$$\frac{\Psi(s)}{\Psi_r(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{k_p b s + k_i b}{s^2 + (k_p b + a)s + k_i b}. \quad (41)$$

Verifica-se que o ganho estático do sistema é unitário, como pretendido:

$$\frac{\Psi(0)}{\Psi_r(0)} = \frac{k_i b}{k_i b} = 1. \quad (42)$$

Sendo o ganho estático unitário, o erro de seguimento será nulo em regime estacionário, pelo que se espera que o controlador PI atue de forma eficaz. Note-se que, para obter um erro estático nulo, se poderia ter recorrido à inversão do ganho estático. No entanto, esta solução não é recomendada pois não seria robusta a erros nos parâmetros a e b nem a eventuais perturbações, ao contrário do controlador PI.

Por fim, definindo o erro associado ao ângulo de guinada como $E(s) = \Psi_r(s) - \Psi(s)$, obtém-se a equação que fornece a razão de guinada para uma referência à entrada:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(s) &= s\Psi(s) = \left(-k_p - \frac{k_i}{s}\right)(\Psi(s) - \Psi_r(s)) = \\ &= \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right)E(s) = k_p E(s) + \frac{k_i}{s}E(s). \end{aligned} \quad (43)$$

No domínio do tempo, a razão de guinada obtém-se, em função do erro, através da equação 44:

$$\dot{\psi} = k_p(\psi_d - \psi) + k_i \int (\psi_d - \psi) dt \quad (44)$$

3 Implementação e Simulação

Nesta secção, procede-se à implementação dos resultados teóricos no controlo do quadrrorotor de forma a testar o seguimento de trajetória. Em todas as experiências aqui apresentadas, foram utilizados os sensores do quadrrorotor para determinar a sua posição, pelo que se espera que os resultados não sejam tão favoráveis como seriam caso tivessem sido utilizadas câmaras para a determinação dos estados do sistema. Também é de notar que, com a exceção da secção 3.5, é sempre realizado um seguimento do tipo *path tracking*, isto é, o controlo foca-se em estar na posição desejada no instante em que se encontra, em vez de se focar em seguir a posição desejada de forma independente do tempo, como seria o caso do *path following*. Por isso, no *path tracking*, haverá, à partida, um pior seguimento da trajetória.

3.1 Definição do Controlador

3.1.1 Altitude

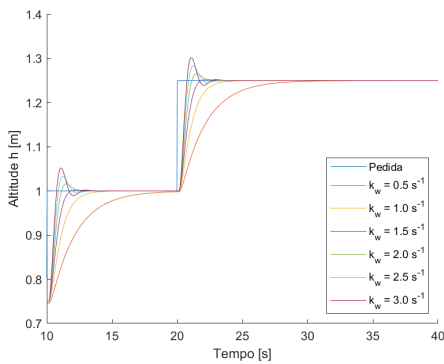
Como todos os movimentos considerados se encontram no plano horizontal, o controlo de altitude foi usado apenas recorrendo a um controlo proporcional e independente do resto do sistema, onde a velocidade de subida pedida foi dada pela equação 45.

$$w_r = -k_w(z - z_d) \quad (45)$$

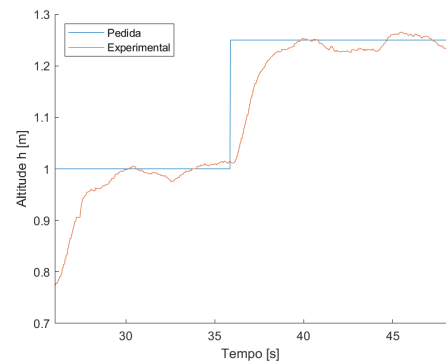
De modo a encontrar a melhor opção de k_w , foram simuladas as respostas para diferentes ganhos, encontrando-se os resultados obtidos na figura 2a. Devido à existência de *overshoot* para valores superiores a $k_w = 1 \text{ s}^{-1}$ e sabendo que, experimentalmente, esse *overshoot* terá tendência a aumentar, decidiu-se que $k_w = 1 \text{ s}^{-1}$ seria a melhor escolha, devido a levar a uma maior rapidez de resposta. Escolheu-se, então, este ganho para o controlador de altitude em todas as experiências realizadas.

É de notar que a função de transferência que permite obter a altitude em função da velocidade pedida é dada pela equação 46, de acordo com os dados retirados do programa em *Simulink* fornecido no *ARDroneSimulink DevKit*. Realizando o *root-locus* desta função de transferência, verificou-se que, para ganhos até $k_w = 1.8 \text{ s}^{-1}$, os pólos do sistema se encontravam no eixo real, pelo que, teoricamente, não deveria existir *overshoot*. Contudo, o *overshoot* e a resposta oscilatória para k_w superiores a 1 s^{-1} devem-se a um atraso entre o pedido de altitude e a atuação, atraso esse que não é considerado na função *rlocus* do *MatLab*.

$$\frac{H(s)}{W_r(s)} = \frac{0.1526s + 5.1529}{s^2 + 5.82s} \quad (46)$$



(a) Simulação para diferentes ganhos k_w .



(b) Resposta experimental para $k_w = 1$.

Figura 2: Resultados para o controlo de altitude.

Validou-se o controlo de altitude em laboratório através dos resultados apresentados na figura 2b. A resposta obtida é relativamente próxima da simulada, sujeita a erros devido a perturbações externas ou uma modelação que não consegue simular totalmente a situação real. Nota-se que, em ambos os gráficos, apenas é apresentada a linha temporal em que os comandos estão ligados. Daí nos resultados experimentais a altitude começar inicialmente em 0.75 m, altitude até à qual o quadrrorotor sobe devido ao comando de *take-off* com *commands disabled*. Na simulação, colocou-se inicialmente o quadrrorotor também a uma altitude de 0.75 m para ser possível comparar melhor os resultados.

3.1.2 Ângulo de Guinada

Para o controlo do ângulo de guinada, a função de transferência em malha fechada foi definida previamente, na equação 41, e os valores de a e b , provenientes da equação 39, podem ser retirados do modelo do programa em *Simulink* fornecido, visto que se retira que a função de transferência em malha aberta é modelada pela equação 47.

$$\frac{\psi(s)}{\dot{\psi}_r(s)} = \frac{1.2653}{s + 0.0059} \quad (47)$$

De acordo com o controlador definido na equação 41, é necessário escolher os ganhos k_p e k_i . Como já foi mencionado na secção 3.1.1, a função *rlocus* não permite simular atrasos na resposta, pelo que se considerou que a melhor opção seria definir o controlador simulando a resposta de ψ para diferentes ganhos, de forma semelhante à realizada anteriormente. No entanto, para existir uma noção melhor sobre as ordens de grandeza e sinais dos ganhos, foi realizada uma análise baseada no *root-locus*. Sabe-se que os pólos da função de transferência $\frac{\psi(s)}{\dot{\psi}_r(s)}$ em malha aberta com o controlador PI se encontram em 0 (pólo do PI) e em -0.0059 (pólo da equação 47). Também se sabe que o único zero será o proveniente do controlador PI, e será igual a $-k_i$. De forma a que não haja instabilidade na resposta, o zero deverá ser negativo, ou seja, $k_i > 0$, garantindo assim que os pólos do sistema estarão sempre no semiplano esquerdo. Porém, se o zero estiver colocado entre os polos, estará bastante perto da origem, tornando a resposta do sistema lenta. Tendo isto em conta, deve tomar-se um $k_i > 0.0059$. Ainda assim, um valor muito elevado poderá também significar uma maior oscilação devido ao atraso de resposta dos atuadores. Escolheram-se para teste valores $k_i \in [0.05, 0.1, 0.5]$.

Quanto aos ganhos de k_p , deve ter-se em conta que ganhos muito elevados poderão levar a pedidos que o quadrrirrotor não pode realizar fisicamente, atrasando a resposta em relação ao que seria esperado. No entanto, segundo os *root-locus* realizados para os diferentes ganhos de k_i , verificou-se que um k_p reduzido leva a *overshoots* elevados. Testou-se, então, a resposta para $k_p \in [0.5, 1, 1.5]$. A figura 3 apresenta as respostas simuladas para um pedido de $\psi = \frac{\pi}{2}$ rad, assim como os respetivos pedidos de $\dot{\psi}_r$.

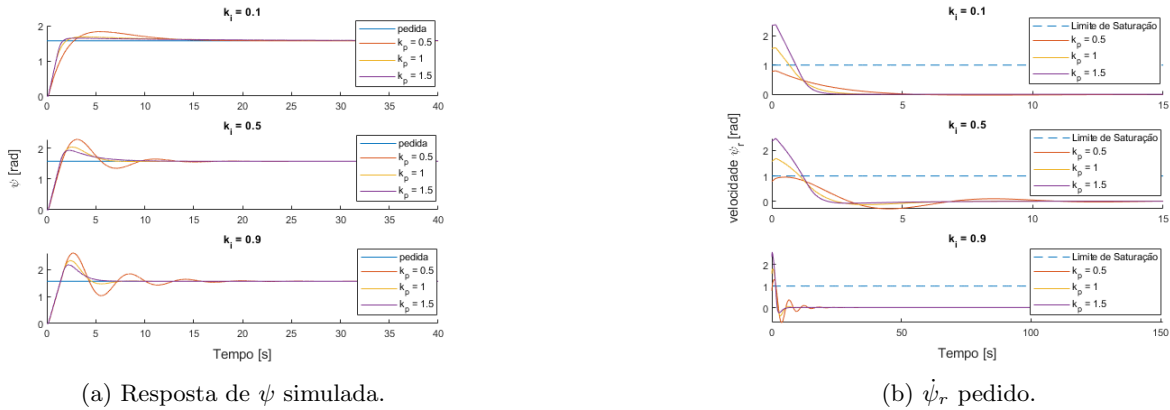


Figura 3: Resultados para um pedido de $\psi = \frac{\pi}{2}$ rad.

Verifica-se que, quanto maior forem os ganhos k_i e k_p , mais rápida será a resposta, mas também mais oscilatória será, assim como maiores serão os valores de $\dot{\psi}_r$ pedidos, superando o limite superior de saturação do atuador. Deste modo, de forma a encontrar um equilíbrio entre pedido de atuação e resposta de ψ , escolheu-se o conjunto de $k_i = 0.1$ e $k_p = 1$ para a realização do controlo do ângulo de guinada.

3.1.3 Ganhos do Controlador

Finalmente, para o ganho \mathbf{K} necessário na equação 25, escolheu-se realizar um LQR para as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} definidas na equação 10, e verificou-se por simulação que os melhores resultados em trajetórias circulares eram obtidos para as matrizes \mathbf{Q}_1 e \mathbf{R} apresentadas na equação 48, que resulta na matriz de ganhos \mathbf{K}_1 representada na equação 49. No entanto, durante a realização da parte experimental, foi verificada a necessidade de utilizar \mathbf{Q}_2 de forma a obter a matriz de ganhos \mathbf{K}_2 da equação 49, uma vez que os ganhos elevados de \mathbf{K}_1 estavam a levar a respostas bruscas e oscilatórias.

Também nas simulações das trajetórias circulares o melhor ganho do integrador verificado, necessário na equação 31, foi de $k_w = 1$. Porém, em laboratório, verificou-se, mais uma vez, a necessidade de diminuir este ganho para $k_w = 0.1$ pelos mesmos motivos prévios. Este ganho, nas simulações de trajetórias circulares, apresenta erros relativamente elevados na posição, como será demonstrado nas secções 3.3 e 3.4. Para trajetórias horizontais, os ganhos \mathbf{K}_1 e $k_w = 0.1$ verificaram-se satisfatórios nas simulações, como será visto na secção 3.2.

$$Q_1 = [\text{diag}([4; 4; 4]) \quad \text{diag}([40; 40; 40])] \quad Q_2 = [\text{diag}([1; 1; 1]) \quad \text{diag}([2.5; 2.5; 2.5])] \quad R = [\text{diag}([1; 1; 1])] \quad (48)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6.63 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6.63 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6.63 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2.12 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2.12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2.12 \end{bmatrix} \quad (49)$$

3.2 Trajetória Horizontal

A primeira trajetória testada foi uma linha horizontal com $\alpha = 45^\circ$ em relação ao eixo de x . Ao contrário do especificado no enunciado, foi permitido na sessão laboratorial realizar a deslocação a uma velocidade de $V = 0.2$ m/s. Para tal, as variáveis de posição, velocidade e aceleração desejada foram definidas conforme a equação 50, onde x_0 e y_0 representam as posições iniciais do quadrrorotor em x e y , respetivamente. O ângulo de guinada desejado, ψ_d , definiu-se como sendo igual a zero.

$$p_d = \begin{bmatrix} x_0 + V \cos(\alpha)t \\ y_0 + V \sin(\alpha)t \\ 0.75 \end{bmatrix}; \quad \dot{p}_d = \begin{bmatrix} V \cos(\alpha) \\ V \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \ddot{p}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Como já foi mencionado anteriormente, com os ganhos $k_w = 0.1$ e K_2 que foram necessários em laboratório, a resposta simulada é satisfatória, como se pode ver na figura 4a, uma vez que se chega à trajetória pedida, sem oscilações, ao fim de algum tempo necessário para o quadrrorotor se adaptar à mudança de direção. Os resultados obtidos experimentalmente apresentam-se na figura 4b.

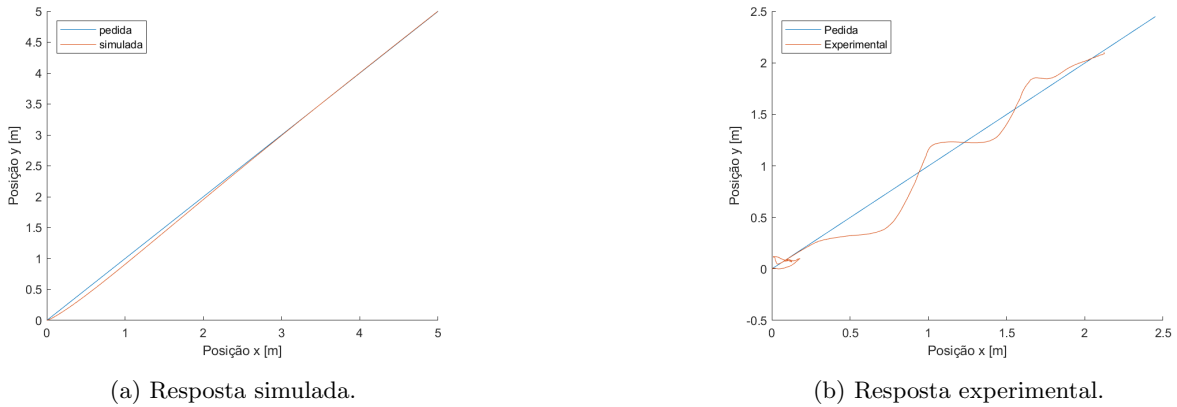


Figura 4: Resultados para um pedido de trajetória horizontal.

Observa-se que, inicialmente, a resposta é oscilatória, o que não seria de esperar pela simulação. Tal indica que o modelo simulado é uma simplificação do modelo real. Durante a execução de simulações para ganhos diferentes, verificou-se que, com ganhos maiores de k_w e \mathbf{K} , a resposta do quadrrorotor também se tornava mais oscilatória, pelo que se assume que, se tivessem sido usados ganhos menores ao realizar a experiência, a resposta teria sido menos oscilatória. No entanto, esta também poderia ter-se tornado mais lenta. Mesmo assim, com os resultados obtidos, observa-se que a amplitude das oscilações diminuiu e a posição estava a aproximar-se da pedida.

Também se encontram na figura 5 os pedidos de atitude e as suas respostas durante a execução da experiência. Apenas se encontra representado o intervalo em que estava selecionada a opção de *commands enable*.

Verifica-se que os pedidos são sempre de ângulos relativamente pequenos, porém, os ângulos reais medidos pelo quadrrorotor não conseguem acompanhar na totalidade os pedidos executados e tal pode dever-se, principalmente, à existência de um atraso entre o pedido e a atuação. Também se deve notar que existe a presença de ruído nos dados obtidos pelos sensores, mesmo que estes sejam estimados. Por fim, observa-se que o ângulo ψ , apesar de receber um pedido de ângulo nulo, oscila em torno de um valor ligeiramente menor do que 0. No entanto, o valor medido nunca ultrapassa -2° , pelo que o erro se pode considerar desprezável.

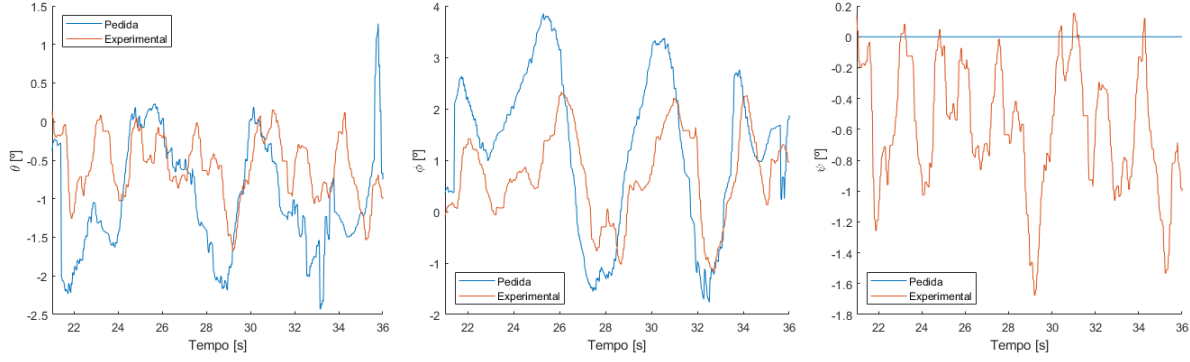


Figura 5: Resposta de atitude para um pedido de trajetória horizontal.

3.3 Trajetória Circular - Ângulo de Guinada Constante

Propôs-se, também, o seguimento de uma trajetória circular e, similarmente ao caso anterior, foi aprovada a realização da experiência com dados diferentes do enunciado, passando o raio do círculo para $R = 0.75$ m e a velocidade angular para $\omega = 0.2$ rad/s. Nesta experiência, mantém-se, ainda, o ângulo de guinada constante, logo, definiu-se, mais uma vez, $\psi_r = 0$. Todas as outras equações inseridas no código do controlador encontram-se na equação 51.

$$p_d = \begin{bmatrix} R(\cos(\omega t) - 1) \\ R \sin(\omega t) \\ 0.75 \end{bmatrix}; \quad \dot{p}_d = R\omega \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \ddot{p}_d = -R\omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Na figura 6a, encontram-se os resultados da simulação para diferentes valores dos ganhos. É possível observar que os ganhos K_1 e $k_w = 1$ apresentavam uma resposta mais próxima da trajetória desejada do que o conjunto K_2 e $k_w = 0.1$, sendo que estes últimos tiveram de ser usados na sessão laboratorial, como já foi explicado na secção 3.1, encontrando-se os respetivos resultados na figura 6b. É de notar que, mesmo no caso simulado com os ganhos "ideais", existe sempre um erro estático, mas negligenciável.

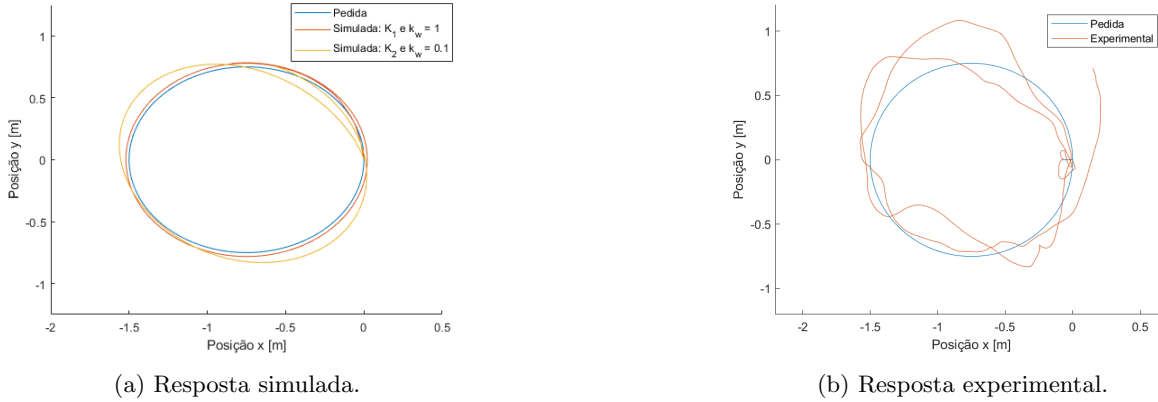


Figura 6: Resultados para um pedido de trajetória circular com ψ constante.

Os resultados experimentais permitem observar que o quadrrorotor apresenta um erro relativamente elevado no seguimento da trajetória circular, chegando a valores de cerca de 30 cm de erro em relação à posição desejada, o que se pode dever, para além do recurso aos sensores do quadrrorotor e de um seguimento do tipo *path tracking* sem atitude constante, a perturbações externas. Também se relembra que, como mencionado anteriormente, a simulação tem um modelo simplificado da situação real, o que pode levar a uma discrepância entre as trajetórias experimental e simulada.

Mais uma vez, são também apresentados na figura 7 os pedidos e valores experimentais dos ângulos de Euler.

Quanto à atitude do quadrrorotor, verifica-se que os ângulos pedidos são ligeiramente superiores aos obtidos na trajetória horizontal, o que seria expectável, visto que a execução de uma trajetória circular com um ângulo de guinada constante será mais exigente, devido à constante necessidade de mudança de direção. Observa-se também que o quadrrorotor consegue seguir bem os pedidos de θ , havendo apenas maior dificuldade quando há um pedido brusco de alteração do ângulo

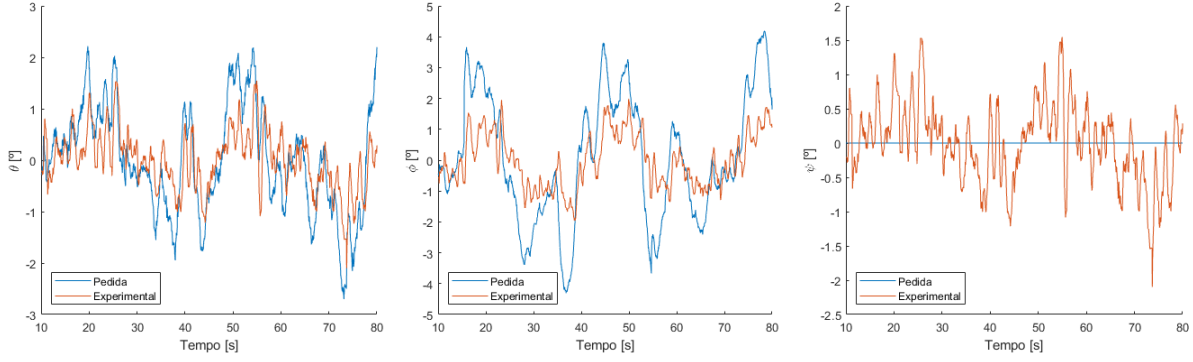


Figura 7: Resposta de atitude para um pedido de trajetória circular com ψ constante.

de picada, devido às limitações físicas dos atuadores e ao atraso do sistema. Já o pedido de ϕ torna-se mais difícil de acompanhar por os pedidos de mudança bruscos serem mais frequentes. Por fim, neste caso, o ângulo de guinada ψ oscila em torno de 0, que é o ângulo de referência. As oscilações em torno desse valor têm amplitude reduzida, nunca maior do que 2° e podem representar ruído de medição ou pequenas perturbações.

3.4 Trajetória Circular - Ângulo de Guinada Variável

Com vista a melhorar o seguimento da trajetória circular apresentada na subsecção 3.3, foi adicionado um pedido de guinada para que o quadricóptero se encontrasse sempre a apontar para fora do círculo, em que a função de posição é caracterizada nas equações 52, em que R e ω se mantêm da experiência anterior:

$$\psi = \omega t; \quad p_d = \begin{bmatrix} R(\cos(\omega t) - 1) \\ R \sin(\omega t) \\ 0.75 \end{bmatrix}; \quad \dot{p}_d = R\omega \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \ddot{p}_d = -R\omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

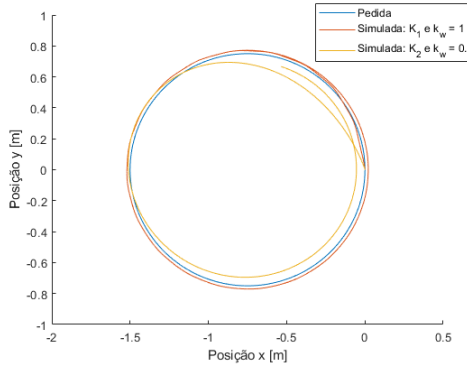
diferindo ligeiramente na formulação face ao requerido no guia, que pede a aeronave virada para dentro. Não obstante, tal não se deverá considerar problemático, uma vez que o objetivo na tomada de um ângulo constante face ao centro da circunferência é que a restante atitude, ou seja, os ângulos de picada e de rolamento, seja constante, o que facilitaria, à partida, um melhor srespontados mesmos. Efetivamente, utilizando o controlador para a guinada descrito na alínea 3.1.2, é possível constatar que este não consegue seguir uma rampa sem erro estático, como se pode obter partindo da equação 41:

$$\begin{aligned} E(s) &= \Psi_r - \Psi = \Psi_r \frac{1}{1 + K(s)G(s)} = \\ &= \Psi_r \frac{s^2 + as}{s^2 + (k_p b + a)s + k_i b} = \\ &= \frac{\dot{\Psi}_r}{s} \frac{s^2 + as}{s^2 + (k_p b + a)s + k_i b} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{\dot{\Psi}_r}{s} \frac{s^2 + as}{s^2 + (k_p b + a)s + k_i b} = \\ &= \dot{\Psi}_r \frac{0 + a}{0^2 + (k_p b + a)0 + k_i b} = \dot{\Psi}_r \frac{a}{k_i b}, \end{aligned}$$

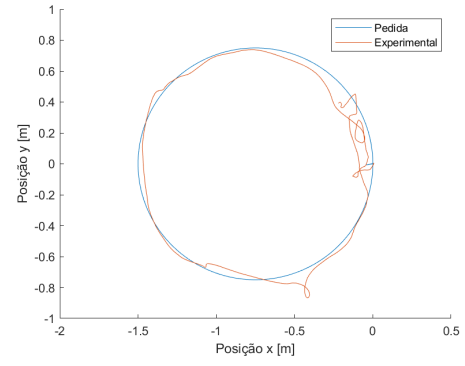
pelo que, mesmo sendo pedido ao quadricóptero que apontasse para dentro da circunferência, este não o faria, estando, no entanto, a manter um ângulo constante após o período transitório, o que é efetivamente desejado.

O conjunto de figuras 8 apresentam os resultados da simulação e da experiência efetuada. É de notar que, no ambiente de simulação, o controlador ideal seria mais uma vez, face a K_1 , $k_w = 1$, como observável na figura 8a. Apesar disto, após alguns testes cujos dados não foram gravados, voltou-se a utilizar K_2 e $k_i = 0.1$.

Os resultados experimentais para a trajetória, presentes na figura 8b, mostraram-se positivamente melhores do que os encontrados na figura 6b, demonstrando que o pedido de guinada implementado torna a resposta mais efetiva. Inclusive, os erros de seguimento para a posição ao longo do tempo, presentes no conjunto de figuras 9, revela que os pedidos são seguidos com um erro bastante reduzido, aparentando não ter nenhum atraso no seguimento destas referências.

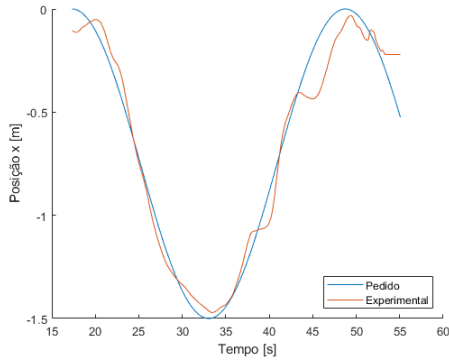


(a) Resposta simulada..

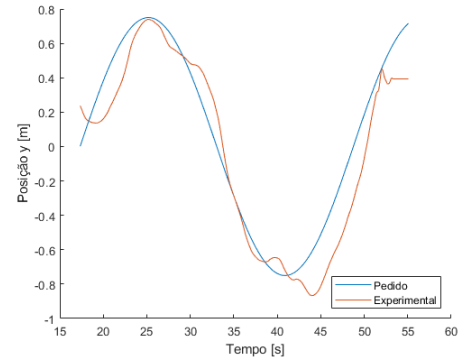


(b) Resposta experimental.

Figura 8: Resultados para um pedido de trajetória circular com ψ variável.



(a) Pedido e resultados para x .



(b) Pedido e resultados para y

Figura 9: Resultados para um pedido de trajetória circular com ψ variável em função do tempo.

Para além disso, são apresentados os erros do pedido de ψ para o caso experimental e os comandos e resultados para θ e ϕ na figura 10. Consegue-se observar que o erro de seguimento de ψ é pequeno, tendo sido seguido com sucesso. Também se pode concluir que os pedidos de picada e rolamento são menos oscilatórios do que na alínea 3.3, sugerindo que os mesmos seriam constantes se o quadricóptero seguisse perfeitamente a circunferência. A aeronave demonstrou problemas a seguir a referência quase em degrau de θ entre os instantes $t = 45$ s e $t = 50$ s, à semelhança do que ocorreu na primeira sessão laboratorial da disciplina.

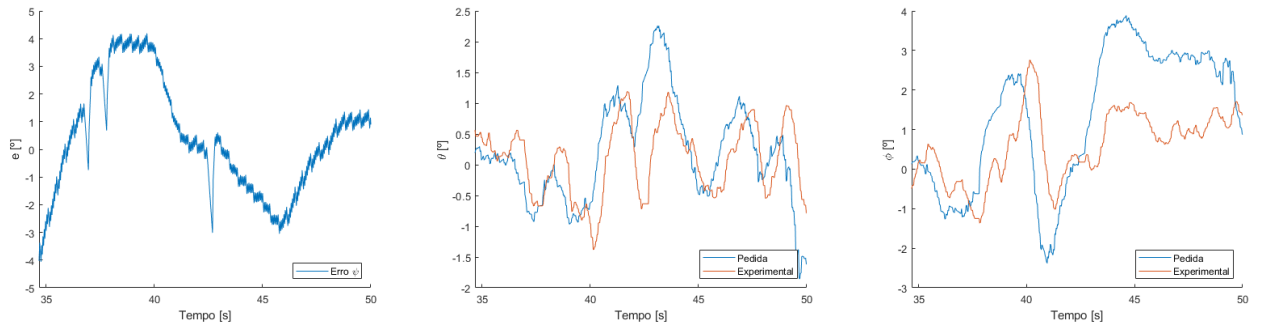


Figura 10: Erros e resposta da atitude para a simulação e experiência.

3.5 Esquema *Line of Sight*

Como é relatado no guia, o seguimento de trajetória até aqui implementado, *path tracking*, pode levar a grandes excursões do percurso desejado, especialmente se a posição inicial da aeronave se encontrar longe do caminho a percorrer.

Tal é problemático, dado existir a possibilidade do espaço, neste caso, aéreo, se encontrar restrito por diversos motivos, quer por estar fisicamente ocupado com obstáculos, quer por estarem a decorrer atividades (treinos militares, por exemplo).

Uma solução para este problema é a adoção do método LOS, *Line of Sight*, no qual a direção e componentes da velocidade pretendida para o seguimento de uma reta paralela ao eixo x e distante y_d m do mesmo são dadas na equação 53 [1],

$$\psi = \arctan\left(-\frac{y_d - y}{\Delta}\right) \quad \dot{\psi} = \frac{\Delta \dot{y}}{\Delta^2 + (y_d - y)^2} \quad \dot{p}_d = V \begin{bmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ddot{p}_d = V \begin{bmatrix} -\sin(\psi) \\ \cos(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

em que a posição p não é contabilizada para o controlo do quadrrorotor. Na prática, isto é conseguido colocando as primeiras três colunas de K_2 a zeros.

A solução do LOS para a questão levantada no início desta alínea é revelada no cálculo da direção: quanto maior for a distância do quadrrorotor ao caminho, maior vai ser o ângulo, fazendo com que o mesmo, na prática, se "preocupe" mais em se dirigir para a área indicada do que em avançar na direção apontada por esta; à medida que a aeronave se encontra mais perto do eixo pretendido, esta segue progressivamente mais a direção pretendida pelo caminho, culminando por pedir exatamente o ângulo desejado, 0° , quando diretamente sobre a trajetória desejada.

As variáveis que mais influenciam este comportamento dentro da formulação do LOS são a distância de observação Δ e a velocidade de seguimento V , em que a primeira indica quão à frente da posição mais próxima do caminho se deve dirigir e a segunda a velocidade de deslocamento do quadrrorotor. Estas variáveis definirão a resposta da aeronave, nomeadamente a velocidade de convergência ao caminho, o *overshoot* e oscilação face ao mesmo e, mais genericamente, a velocidade do quadrrorotor.

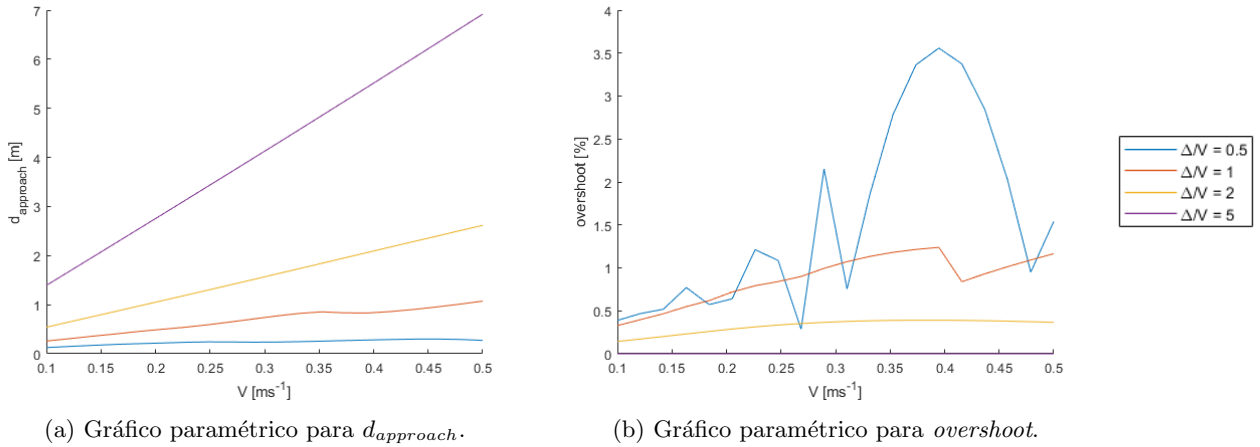
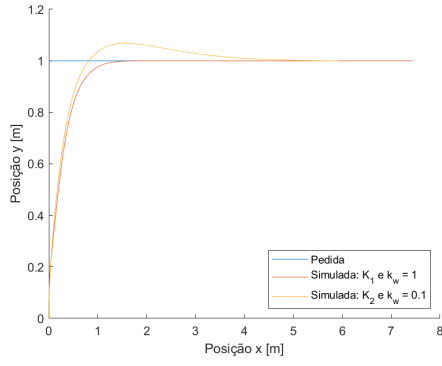


Figura 11: Estudo paramétrico em função de V e Δ .

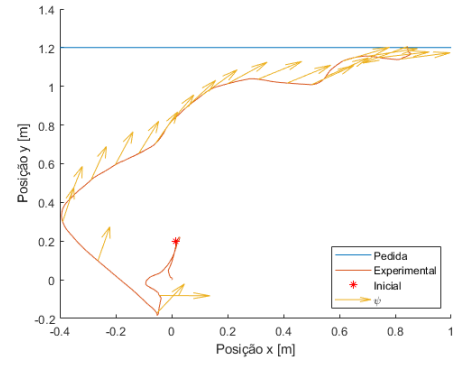
Com o conjunto de figuras 11, é possível observar que a relação entre o *overshoot* e a distância de aproximação com Δ e V não são lineares. No entanto, é possível observar tendências: quanto maior for o rácio Δ/V , para a mesma velocidade, maior será a distância longitudinal deslocada até a aeronave se encontrar no caminho desejado, e, para o mesmo rácio, será esperado que a distância também aumente com a velocidade, apesar de nem sempre tal se verificar, como se pode ver mais nitidamente para o caso em que $\Delta/V = 1$. A relação entre o *overshoot* e Δ/V é, genericamente, semelhante à da distância de aproximação e Δ/V ; já para o mesmo rácio é difícil caracterizar a evolução do *overshoot* com o aumento da velocidade; apenas se poderá dizer que, tendencialmente, o mesmo aumenta, apesar de apresentar fortes oscilações para $\Delta/V < 2$. Note-se também que existem outros comportamentos indesejados que são exacerbados para maiores valores de Δ/V , como oscilações em torno do eixo, escondidos desta análise.

Para a experiência foram escolhidos os valores $y_d = 1$ m, $\Delta = 0.3$ m e $V = 0.1$ ms^{-1} , encontrando-se os resultados para as trajetórias simulada e real na figura 12, com a primeira (figura 12a) a indicar, em ambiente simulado, uma boa aproximação do objetivo pretendido, existindo, porém, *overshoot* para o k_w empregue experimentalmente, sendo o resultado pior, à semelhança da alínea 3.4.

Os resultados presentes na figura 12b mostram um início atribulado no controlo do quadrrorotor, em parte devido à mudança súbita de pedido no ângulo de guinada, mas, eventualmente, a aeronave consegue aproximar-se satisfatoriamente do eixo pretendido, apesar da excursão elevada e da derrapagem que, de acordo com as expressões 53, não deveria acontecer. Acrescenta-se que, no final, o quadrrorotor parou a missão devido a falta de bateria, tendo tentativas futuras de ele realizar o mesmo desempenho (com outra bateria recarregada) sido infrutíferas.

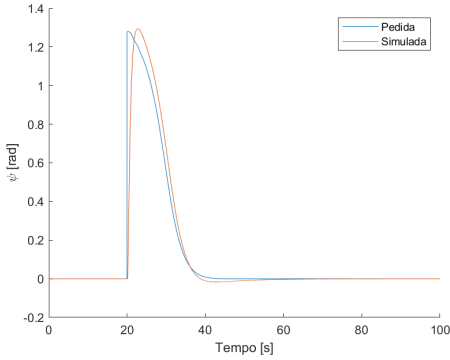


(a) Resposta simulada.

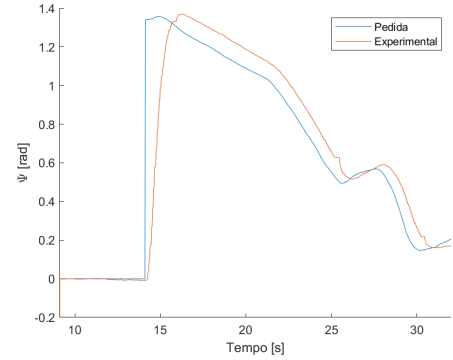


(b) Resposta experimental.

Figura 12: Resultados obtidos com LOS.



(a) Resposta simulada.



(b) Resposta experimental.

Figura 13: Resposta de ψ para LOS.

Os resultados da simulação e da experiência presentes no conjunto de figuras 13 revelam que o tempo até o quadricóptero convergir foi bem estimado, uma vez que, ao fim de 15 s após o começo do LOS, o ψ pedido experimentalmente é aproximadamente o mesmo que o simulado. Para além disso, revela-se, na figura 13b, um pico no pedido de guinada entre os instantes 25 s e 30 s, algo que não foi previsto pela simulação. O quadricóptero foi capaz de seguir satisfatoriamente estes pedidos de guinada.

Uma nota importante a reforçar, sobretudo nesta experiência, é que a obtenção dos dados da posição foram obtidos através dos sensores e estimação do quadricóptero, ao invés do sistema de câmaras disponível no laboratório, o que acrescentou ao sistema um erro considerável face às medidas mais precisas que se poderiam obter com a utilização da instrumentação externa das instalações.

4 Conclusão

Este relatório teve como objeto de estudo o projeto de controladores de seguimento de trajetória e do ângulo de guinada para um quadricóptero, em particular, o *Parrot AR.Drone*, também utilizado nos relatórios anteriores da Unidade Curricular. Após a fase de projeto, dimensionaram-se e testaram-se estes controladores, recorrendo ao *AR.Drone Kit* para *Simulink* fornecido em conjunto com o guia de laboratório [1]. A eficácia dos controladores foi posta à prova em trajetórias retilíneas e curvilíneas de complexidade crescente.

A secção 2 corresponde à fase inicial de projeto dos controladores, a partir de fundamentos teóricos lecionados nas aulas da cadeira. Começando pelo controlador de seguimento de trajetória, definiu-se, em primeiro lugar, uma entrada virtual, através da qual se simplificaram as leis de controlo que regem o sistema. Analisou-se, então, a possibilidade de implementar uma solução de controlo ótimo, através do método LQR, que garantisse a estabilidade assintótica do sistema não-linear em causa, tendo sido aplicada a Teoria da Estabilidade de Lyapunov.

O controlador foi, de seguida, reforçado de forma a manter-se eficaz face à introdução de uma perturbação constante, tendo-se deduzido uma lei de controlo capaz de estimar esta perturbação e, ao mesmo tempo, controlar o sistema. De acordo

com o Princípio da Invariância de Krazovskii-LaSalle, a origem deste sistema aumentado é globalmente assintoticamente estável, pelo que se espera que a estimação da perturbação convirja para o valor real.

Verificou-se, também, que o sistema de controlo completo, com inclusão da perturbação, equivalia a um controlador PID, correspondendo a parte PD à ação de controlo e a parte PI à rejeição da perturbação.

Por outro lado, foi projetada uma solução para um controlador do ângulo de guinada, que recorre a um termo integrador para obter um ganho estático unitário e, conseqüentemente, um erro de seguimento nulo.

Na secção 3, procedeu-se à realização de um controlador que seguisse a trajetória pedida. Fizeram-se, inicialmente, diferentes simulações para a escolha dos ganhos apropriados ao controlo, verificando-se, no entanto, que os ganhos relacionados com o controlo dos ângulos de picada e rolamento tiveram de ser reduzidos na fase experimental. Tal pode dever-se ao pedido de controlo com os ganhos originais ser demasiado exigente para as capacidades físicas do atuador, tornando a resposta menos desejável.

Os resultados experimentais para a trajetória horizontal e circular com um ângulo de guinada constante revelaram erros de posição relativamente elevados; no entanto, tal era expectável devido à existência de possíveis perturbações externas, assim como o uso dos sensores do quadrrrotor para a obtenção da posição, contrariamente ao uso, por exemplo, do sistema de câmaras instalado no laboratório.

Para se tentar resolver o problema do seguimento da órbita circular, adicionou-se um pedido de guinada ao quadrrrotor, de forma a este estar sempre a apontar na mesma direção face ao centro da circunferência, mais em concreto, apontado para fora. Os resultados obtidos foram positivamente melhores face à tentativa de seguimento sem mudança de guinada, demonstrando as vantagens deste método, em parte devido à menor oscilação dos pedidos de rolamento e picada, idealmente constantes, como se pode verificar.

Posteriormente, foi implementado um método diferente de seguimento, não baseado no seguimento de um ponto ao longo do tempo (*path tracking*), mas sim de um caminho (*path following*). Mais especificamente, o método *Line of Sight* (LOS) foi testado, tendo-se verificado, primeiramente, que um rácio maior entre a distância de observação e a velocidade leva a um menor *overshoot*, mas também a uma maior distância de aproximação. Experimentalmente, conseguiu-se implementar com sucesso este método, sendo a distância de aproximação simulada semelhante à obtida experimentalmente, apesar de ter de notar a derrapagem e o recuo inicial do quadrrrotor.

Conclui-se o relatório com a apresentação da principal dificuldade transversal às experiências realizadas: a não utilização do sistema de câmaras presente no laboratório que forçou à utilização da instrumentação interna do quadrrrotor e às estimações da posição a partir dos dados medidos pela mesma. Disto resultou uma maior imprecisão dos resultados e, por conseguinte, um pior seguimento das trajetórias desejadas.

Referências

- [1] Rita Cunha; Pedro Batista. *Motion Control of the Parrot AR.Drone*. 2022.