Instituto Superior Técnico

Mestrado Bolonha em Engenharia Aeroespacial

Aeronaves Robotizadas

1º Semestre 2021/2022

Laboratório 3:
Controlo de Movimento do Parrot AR.Drone

Grupo 1
Mariana Vinhas, nº 92708
Afonso Carvalho, nº 93209
Afonso Vale, nº 93542

Lisboa, 6 de fevereiro de 2022

Professores: Rita Cunha, José Azinheira e Pedro Trindade

Índice

1 Introdução **1**

2 Seguimento de trajetórias **1**
2.1 Entrada virtual e sistema do erro . . . 1
2.2 Ação de controlo . . . 2
2.3 Função de Lyapunov e estabilidade do sistema . . . 2
2.4 Perturbação desconhecida . . . 3
2.5 Lei de adaptação da estimativa da perturbação . . . 4
2.6 Estabilidade do sistema aumentado . . . 4
2.7 Função de transferência correspondente . . . 5
2.8 Comparação com um controlador PID . . . 5
2.9 Controlador do ângulo de guinada . . . 5

3 Implementação e simulação **6**
3.1 Dimensionamento e validação dos controladores . . . 6
3.1.1 Dimensionamento e validação do controlador de altitude . . . 6
3.1.2 Dimensionamento e validação do controlador de ângulo de guinada . . . 7
3.2 Seguimento de trajetórias retilíneas horizontais . . . 8
3.3 Seguimento de trajetórias circulares horizontais, com ângulo de guinada constante . . . 10
3.4 Seguimento de trajetórias circulares horizontais, com ângulo de guinada variável . . . 11
3.5 Seguimento de referência/trajetórias complexas . . . 13
3.5.1 Path Manager e algoritmo LOS mais complexo . . . 14

4 Conclusão **15**

5 Referências **ii**

A Lateral Tracking **iii**

B Seguimento de trajetória com recurso a *LOS* **iv**

1 Introdução

O presente relatório é referente ao terceiro trabalho laboratorial desenvolvido na cadeira de Aeronaves Robotizadas e cujo tema se centra no controlo de movimento do quadrirotor já estudado no anteriores trabalhos, o Parrot AR.Drone.

Assim sendo, desenvolve-se um sistema completo de controlo deste quadrirotor, passando primeiro pelo design de um controlador de seguimento de trajetória e fazendo a sua comparação com um controlador PID. Estuda-se ainda uma possibilidade de controlador do ângulo de guinada. Com estes controladores obtidos, e um controlador adicional de altitude, faz-se então o seu dimensionamento e a validação da sua implementação, testando diferentes tipos de trajetórias.

$s = tf\,(1s')\,; G1 = -0.05^*\,(s\text{^}2 + 0.2^*s + 0.02)\,/\,(s\text{^}2 + 0.015^*s + 0.016)\,;$ G2 = 0.0093* (s^2 + 0.56* s + 0.1) / (s^2 + 0.015* figure, r locus (-G1, 'r–', G2, ' b '), legend('G1, $K < 0'$, $'G2, K > 0'$) Gaf 1 = feedback $(-1426^*\mathrm{G1}, 1)$ Gaf 2 = feedback $(207.3^*\mathrm{G2}, 1)$ roots (G2. num{1}), roots (Gaf2.num (1})) damp (Gaf2, den {1}) I dcgain (Gaf) figure, step(Gaf)

2 Seguimento de trajetórias

2.1 Entrada virtual e sistema do erro

Para obter leis de controlo pouco complexas que permitam uma abstração da dinâmica do sistema, são utilizadas entradas virtuais, como estudado nas aulas da cadeira sobre sistemas não-lineares.

Por outro lado, a partir das equações também deduzidas nas aulas de modelação do quadrirotor, é possível escrever a dinâmica translacional do quadrirotor como se apresenta abaixo:

$$\ddot{\mathbf{p}} = g\mathbf{e_3} - R\frac{T}{m}\mathbf{e_3}, \tag{1}$$

Aqui, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ é a posição do referencial ligado ao corpo {B} em relação ao referencial inercial {I} (referenciais já definidos no primeiro trabalho de laboratório), g é a aceleração gravítica, $\mathbf{e_S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $R \in SO(3)$ é a matriz de rotação de {B} para {I}, $T \in \mathbb{R}$ é a força de propulsão, e m é a massa do quadrirotor.

Recorrendo a $R = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$, obtemos

$$\ddot{\mathbf{p}} = g\mathbf{e_3} - R_z(\psi)\mathbf{u}^*, \tag{2}$$

Sabendo que $\psi \in \mathbb{R}$ representa o ângulo de guinada, $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ o ângulo de picada e $\phi \in \mathbb{R}$ o ângulo de rolamento, temos que $u^* \in \mathbb{R}^3$ é a dita entrada virtual, cuja função é abstrair as entradas da dinâmica translacional num só vetor, sendo definida por

$$\mathbf{u}^* = \frac{T}{m}R_y(\theta)R_x(\phi)\mathbf{e_x} = \frac{T}{m}\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Na equação (3), observamos uma formulação de u^* que permite extrair T, θ, e ϕ.

Para continuar o raciocínio, é necessário considerar que podemos limitar estas variáveis tais que $T > 0$, $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ e $\phi \in]-\pi/2, \pi/2[$. Decompondo $\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* \end{bmatrix}^T$ e partindo da equação acima, e se seguirmos a lógica de que θ e ϕ são levados para as suas referências por um anel de controlo interno, podemos obter as seguintes expressões:

$$T = m\,\|\mathbf{u}^*\|\,, \tag{4}$$

$$\theta_r = \arctan\left(\frac{u_i^*}{u_3^*}\right), \tag{5}$$

$$\phi_r = -\arcsin\left(\frac{u_2^*}{\|\mathbf{u}^*\|}\right). \tag{6}$$

Note-se que se assume que estas equações são válidas numa escala de tempo suficientemente reduzida em relação às do anel externo.

É agora necessário desenvolver um sistema do erro. O estado será o que se apresenta abaixo

$$\overline{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathrm{p}} \\ \tilde{\mathrm{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}_d \\ \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix} \tag{7}$$

onde $\mathbf{p}_d(t) \in \mathbb{R}^3$ é a trajetória desejada e $\dot{\mathbf{p}}_d(t) \in \mathbb{R}^3$ e $\overrightarrow{\mathbf{p}}_d(t) \in \mathbb{R}^3$ as suas derivadas.

Derivando e aplicando a equação (2)

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d \\ \overrightarrow{\mathbf{p}} - \overrightarrow{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{v}} \\ g\mathbf{e}_3 - R_z(\psi)\mathbf{u}^* - \ddot{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix}, \tag{8}$$

obtemos o espaço de estados

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}} = A\overline{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} \tag{9}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 3}, \quad \mathbf{u} = g\mathbf{e_3} - R_z(\psi)\mathbf{u}^* - \overrightarrow{\mathbf{p}}_{\mathrm{d}}.$$

Aqui interessa também escrever a entrada virtual u^* em função de u, tal como se apresenta abaixo

$$\mathbf{u}^* = R_z(-\psi)\left(g\mathbf{e}_3 - \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{P}}_{\mathbf{d}}\right). \tag{10}$$

2.2 Ação de controlo

É pedido no guião experimental [1] que, de seguida, se implemente uma ação de controlo da forma $u = -K\tilde{\mathrm{x}}$ (com $K \in \mathbb{R}^{6\times 3}$ o vetor de ganhos) que minimize a função de custo

$$J := \int_0^\infty \left(\tilde{\mathrm{x}}^T(t)Q\tilde{x}(t) + \rho\|\mathbf{u}(t)\|^2\right) dt, \tag{11}$$

onde $\rho > 0$ e Q é uma matriz definida positiva.

Para problemas LQR como este, sabe-se das aulas teóricas que o K indicado é dado por

$$K = R^{-1}B^TP, \tag{12}$$

onde $R = \rho$ e P é uma matriz simétrica definida positiva, que se obtém da equação de Riccati em regime estacionário definida por $A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$.

2.3 Função de Lyapunov e estabilidade do sistema

Com a aplicação do controlador pedido, podemos escrever o sistema como

$$\dot{\tilde{\mathrm{x}}} = (A - BK)\tilde{\mathrm{x}}. \tag{13}$$

Como sugerido no guia experimental [1], a análise da estabilidade deste sistema vai fazer-se a partir da função de Lyapunov

$$V_1 = \tilde{\mathrm{x}}^T P_{\tilde{\mathrm{x}}}, \tag{14}$$

(com $V_1 > 0$, por P ser definida positiva).

Derivando a equação (14) e aplicando a equação (13), obtemos

$$\dot{V}_1 = \dot{\tilde{\mathrm{x}}}^T P\tilde{\mathrm{x}} + \tilde{\mathrm{x}}^T P\dot{\tilde{\mathrm{x}}} \tag{15}$$

$$\Rightarrow \dot{V}_1 = [(A-BK)\tilde{\mathrm{x}}]^T P\tilde{\mathrm{x}} + \tilde{\mathrm{x}}^T P(A-BK)\tilde{\mathrm{x}} \Leftrightarrow \dot{V}_1 = \tilde{\mathrm{x}}^T \left[(A-BK)^T P + P(A-BK)\right]\tilde{\mathrm{x}} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \dot{V}_1 = -\tilde{\mathrm{x}}^T Q^* \tilde{\mathrm{x}}, \tag{17}$$

Recuperando a expressão de K (equação 12), juntando a equação (16) e sabendo que $R = \frac{1}{\rho}$, calcula-se Q^*:

$$\begin{aligned} Q^* &= -\left[(A-BK)^T P + P(A-BK)\right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q^* &= -\left(A^T P + PA - PBK - K^T B^T P\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow Q^* &= -\left(A^T P + PA - PBK - K^T B^T P\right) \\ \Leftrightarrow Q^* &= -\left[A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P - \left(R^{-1}B^T P\right)^T B^T P\right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow Q^* = Q + \frac{1}{\rho} P^T B B^T P, \tag{18}$$

com B semi-definida positiva e Q e P definidas positivas.

A matriz Q^* é definida positiva, pois é a soma de um termo positivo com um termo semidefinido positivo. Isto significa que $\dot{V}_1 < 0$.

Sendo que a função de Lyapunov é definida positiva e a sua derivada é definida negativa, chega-se então à conclusão de que o ponto de equilíbrio $\tilde{\mathrm{x}} = 0$ é globalmente assintoticamente estável.

2.4 Perturbação desconhecida

Para estudar a presença de uma perturbação desconhecida $w \in \mathbb{R}^3$, no referencial inercial como por exemplo vento, vai assumir-se que a dinâmica linear do quadrirotor é $\ddot{\mathrm{p}} = g\mathbf{e}_3 - R_z(\psi)\mathbf{u}^* + \mathbf{w}$, como referido no guia experimental [1]. $\hat{w}$ representa a estimativa desta perturbação e insere-se na lei de controlo do anel exterior através da equação

$$\begin{aligned} \mathrm{u}^* &= R_z(-\psi)\left(K\tilde{\mathrm{x}} + g\mathrm{e}_3 + \hat{\mathrm{w}} - \ddot{\mathrm{P}}_\mathrm{d}\right). \\ \Leftrightarrow R_z(\psi)\mathbf{u}^* &= \left(K\hat{\mathrm{x}} + g\mathbf{e}_3 + \hat{\mathrm{w}} - \ddot{\mathrm{p}}_\mathrm{d}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Aplicando agora a dinâmica linear assumida nesta secção, obtém-se

$$\begin{aligned} \ddot{\mathrm{p}} &= g\mathbf{e}_3 - K\hat{\mathrm{x}} - g\mathbf{e}_3 - \hat{\mathrm{w}} + \ddot{\mathrm{p}}_\mathrm{d} + \mathbf{w} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ddot{\mathrm{p}} &= -K\hat{\mathrm{x}} + \tilde{\mathrm{w}} + \ddot{\mathrm{p}}_\mathrm{d} \\ \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathrm{v}}} &= -K\hat{\mathrm{x}} + \tilde{\mathrm{w}} \end{aligned}$$

e pode retirar-se

$$\tilde{w} = w - \hat{w}. \tag{20}$$

Conclui-se então que o espaço de estados com a introdução da perturbação desconhecida se descreve por

$$\dot{\tilde{\mathrm{X}}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathrm{X}} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} (-K\tilde{\mathrm{x}} + \hat{\mathrm{w}}), \tag{21}$$

e que, portanto, se escreve a dinâmica do erro em malha fechada (com A e B já definidas atrás) como

$$\dot{\tilde{\mathrm{x}}} = (A-BK)\tilde{\mathrm{x}} + B\tilde{\mathrm{w}}. \tag{22}$$

2.5 Lei de adaptação da estimativa da perturbação

Tomando agora a perturbação desconhecida como constante, vai fazer-se o design de um controlador adaptativo para estimar esta perturbação e garantir o seguimento da trajetória, com base na função de Lyapunov que se define abaixo (com $k_w \in \mathbb{R} : k_w > 0$ um ganho de afinação)

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{k_w}\|\tilde{\mathbf{w}}\|^2. \tag{23}$$

Com base em (14), (22), (12) e (18), por esta ordem, desenvolve-se

$$\dot{V}_2 = \dot{\tilde{\mathrm{x}}}^T P\tilde{\mathrm{x}} + \tilde{\mathrm{x}}^T P\dot{\tilde{\mathrm{x}}} + \frac{1}{k_w}\tilde{\mathrm{w}}^T\tilde{\mathrm{w}}$$

$$\Leftrightarrow \dot{V}_2 = \tilde{\mathrm{x}}^T\left[\left(A^T - K^T B^T\right)P + P(A - BK)\right]\tilde{\mathrm{x}} + 2\tilde{\mathrm{w}}^T B^T P\tilde{\mathrm{x}} + \frac{2}{k_w}\tilde{\mathrm{w}}^T\dot{\tilde{\mathrm{w}}}.$$

$$\Leftrightarrow \dot{V}_2 = -\tilde{\mathrm{x}}^T Q^*\tilde{\mathrm{x}} + 2\rho\tilde{\mathrm{w}}^T K\tilde{\mathrm{x}} + \frac{2}{k_w}\tilde{\mathrm{w}}^T\dot{\tilde{\mathrm{w}}}. \tag{24}$$

Desta última expressão retira-se uma lei de estimação da perturbação.

Manipula-se (24)

$$\tilde{\mathbf{w}}^T\left(2\rho K\tilde{\mathbf{x}} + \frac{2}{k_w}\dot{\tilde{\mathbf{w}}}\right) = 0,$$

identificando que para que esta equação seja aplicável a qualquer valor de $\tilde{\mathbf{w}}$, se deve verificar a condição de que

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = -k_w\rho K\tilde{\mathbf{x}}.$$

Com recurso à expressão (20), obtemos então a lei de adaptação da estimativa da perturbação:

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}} = k_w\rho K\tilde{\mathbf{x}}. \tag{25}$$

Usando (17) (função definida negativa), retira-se uma expressão de $\dot{V}_2$ equivalente à já obtida para $\dot{V}_1$:

$$\dot{V}_2 = -\tilde{\mathrm{x}}^T Q^*\tilde{\mathrm{x}}, \tag{26}$$

Pode então concluir-se que $\dot{V}_2$ é semidefinida negativa para o estado aumentado $\xi = \begin{bmatrix} \tilde{\mathrm{x}}^T & \tilde{\mathrm{w}}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^9$, já que segundo a lei de adaptação, $\dot{V}_2$ fica dependente somente de $\dot{V}_1$, que por sua vez é semidefinida negativa, como mostrado atrás.

2.6 Estabilidade do sistema aumentado

Com base em (26), observa-se que o conjunto Ω onde $\dot{V}_2$ se anula é dado por

$$\Omega = \left\{\xi \in \mathbb{R}^9 : \dot{V}_2(\xi) = 0\right\} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^9 : \xi = \begin{bmatrix} 0_{6\times1}^T & \tilde{\mathbf{w}}^T \end{bmatrix}^T\right\}, \text{ com } \tilde{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3.$$

No entanto, a equação (22) implica que em Ω se tem $\dot{\tilde{\mathrm{x}}} = B\tilde{\mathrm{w}}$, pelo que se $\tilde{\mathrm{w}} \neq 0$, então $\dot{\tilde{\mathrm{x}}} \neq 0$. Assim sendo, $\{\Omega\backslash 0_{9\times1}\}$ não é invariante no tempo.

Com esta conclusão, comprova-se que a origem é o único conjunto invariante contido em Ω, sendo então possível aplicar o Princípio da Invariância de La Salle, que demonstra que a origem é globalmente assintoticamente estável. Assim sendo, a partir de uma condição inicial arbitrária espera-se que utilizando (25) o valor estimado para a perturbação convirja para o real.

2.7 Função de transferência correspondente

Para descrever a ação de controlo aqui desenvolvida, pode encontrar-se uma função de transferência.

Com base em (22), temos que $\ddot{\mathrm{p}} - \ddot{\mathrm{p}}_{\mathrm{d}} = -K\tilde{\mathrm{x}} + \tilde{\mathrm{w}}$. Agora, recorrendo a (25), e sabendo que $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$, $K_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}, K_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, pode desenvolver-se

$$\ddot{\mathrm{p}} = \ddot{\mathrm{p}}_{\mathbf{d}} - K_1\left(\mathrm{p} - \mathrm{p}_{\mathbf{d}}\right) - K_2\left(\dot{\mathrm{p}} - \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{d}}\right) + \int_{t_0}^{t} -k_w\rho\left(K_1\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\mathbf{d}}\right) + K_2\left(\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{d}}\right)\right) dt. \tag{27}$$

Tendo em conta que as transformadas de Laplace de $p(t)$ e $p_d(t)$ são, respetivamente, $P(s)$ e $P_d(s)$, e que se assume que temos condições iniciais nulas, transforma-se (27) em

$$s^2 P(\mathrm{s}) = \bar{K}(s)\left(P(s) - P_d(s)\right) + s^2 P_d(s), \tag{28}$$

com

$$\bar{K}(s) = -\left(K_1 + k_w\rho K_2\right) - K_2 s - k_w\rho K_1 \frac{1}{s}. \tag{29}$$

Com a expressão obtida em (28), temos então feita a inclusão da lei de controlo no sistema em anel fechado para controlar o seguimento de trajetória.

2.8 Comparação com um controlador PID

Das expressões (28) e (29), observa-se que a estrutura do controlador que inserimos é semelhante a um PID, mais especificamente, se se incluísse um termo de feed-forward da aceleração desejada, $\ddot{\mathrm{P}}_{\mathrm{d}}$.

Como já referido atrás, $\bar{K}(s) = \bar{K}_1(s) + \bar{K}_2(s)$, o que significa que o controlador pode fragmentar-se em duas partes: um controlador PD, $\bar{K}_1(s) = -K_1 - K_2 s + s^2\mathbf{P}_{\mathrm{d}}(s)$, que controla a posição sem ter em conta a perturbação w; um controlador PI, $\bar{K}_2(s) = -k_w\rho K_2 - k_w\rho K_1/s$, que rejeita a perturbação w.

Estas duas partes do controlador fazem sentido, uma vez que, por um lado, queremos controlar a posição do quadrirotor e, por outro, queremos eliminar uma perturbação constante (para o que usamos um integrador, como usual).

Abaixo mostra-se o diagrama de blocos sugerido no enunciado deste trabalho laboratorial.

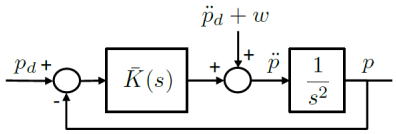


Figura 1: Lei de controlo do sistema em anel fechado de controlo da trajetória. [1]

Analisando o diagrama, observa-se o bloco que corresponde ao $\bar{K}(s)$ já definido atrás. Comparando com a equação (28) é evidente a correspondência, uma vez que fazendo a expressão do sistema em malha fechada do diagrama se obtém esta mesma expressão.

2.9 Controlador do ângulo de guinada

No guia laboratorial [1], é ainda pedido que se desenvolva um controlador do ângulo de guinada para seguimento de uma referência constante, sem erro estático.

Tomando $\Psi(s)$ como a transformada de Laplace do ângulo de guinada, $\dot{\Psi}_r(s)$ como a transformada de Laplace da referência da velocidade de guinada e $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ parâmetros do sistema, temos que para o quadrirotor em questão, o ângulo de guinada pode ser descrito pelo sistema de primeira ordem abaixo

$$\frac{\Psi(s)}{\dot{\Psi}_r(s)} = \frac{b}{s+a}. \tag{30}$$

Para cumprir com o seguimento da referência sem erro estático, vai aplicar-se então um controlador PI (proporcional integrativo), de função de transferência

$$K(s) = k_P \left(1 + \frac{k_I}{s}\right) = k_P \frac{s + k_I}{s}, \tag{31}$$

(k_P é um ganho proporcional e k_I um ganho integrativo).

Incluindo este controlador na função de (30), observamos a função de transferência do sistema em malha fechada

$$\frac{\Psi(s)}{\dot{\Psi}_r(s)} = \frac{bk_P s + bk_I K_P}{s^2 + (a + k_P b)\, s + bk_I K_P}. \tag{32}$$

Observa-se, então, que a mesma tem ganho estacionário unitário, o que significa que o erro de seguimento de entradas constantes em regime estacionário é nulo, cumprindo assim os requisitos.

Refere-se ainda que, para obter um erro estático nulo, poderia recorrer-se à inversão do ganho estático. No entanto, esta não seria uma boa solução, uma vez que não apresenta robustez a erros nas variáveis a e b nem às perturbações, ao contrário do controlador PI.

3 Implementação e simulação

Faz-se agora a implementação e simulação dos controladores projetados na Secção 2. Nos casos em que foi possível testar o código desenvolvido em laboratório, serão também apresentados os dados obtidos experimentalmente. Primeiramente, os controladores serão dimensionados e validados com recurso a simulação. De seguida, serão aplicados no seguimento de diversas trajetórias, tanto simples como complexas, sendo depois também validados em simulação e em ambiente real.

3.1 Dimensionamento e validação dos controladores

3.1.1 Dimensionamento e validação do controlador de altitude

No ficheiro SIMULINK fornecido no *DevKit*, retira-se do sistema da altitude h que uma das entradas é uma referência da velocidade de subida, ω_r, e que este sistema pode ser assim descrito pela função de transferência

$$\frac{H(s)}{W_r(s)} = \frac{0.1526s + 5.153}{s^2 + 5.82s}. \tag{33}$$

Note-se que $H(s)$ e $W_r(s)$ correspondem às funções de transferência de $h(t)$ e $\omega_r(t)$ respetivamente. Por outro lado, o controlador de altitude sugerido no enunciado é dado por

$$w_r = -k_z\,(h - h_d)\,. \tag{34}$$

Na análise feita no primeiro trabalho laboratorial foi utilizado este controlador, onde se verificou que, aumentando o ganho proporcional, o sistema se tornava mais rápido, até um determinado limite, relacionado com o atraso da atuação de controlo e o *inner-loop* do controlador da velocidade de subida. A partir desse limite, o sistema tinha uma resposta cada vez mais oscilatória. Para $k_z = 1$, observou-se que o sistema era rápido sem exibir de forma significativa os efeitos adversos mencionados, pelo que se utilizará assim este valor. Para validar o funcionamento do controlador de altitude, utilizou-se uma referência correspondente a um degrau de 1.0m a 5s e um segundo degrau de 1.5m a 15s, obtendo-se os resultados das Figuras 2 e 3.

Na Figura 2, observa-se que a resposta é adequadamente rápida, suficiente para que não haja ocorrência de oscilações significativas. É também possível verificar, no instante em que ocorrem os degraus, a presença do atraso da ação de controlo em ambas as figuras, notório no atraso do inicio da subida da altitude. Na Figura 3, está representada a referência pedida de velocidade de subida e os respetivos limites de saturação impostos. Verifica-se a saturação da velocidade de subida no intervalo entre os 5s e os 6s, logo é crítico que o controlador do *inner-loop* respeite a saturação na entrada dada aos atuadores.

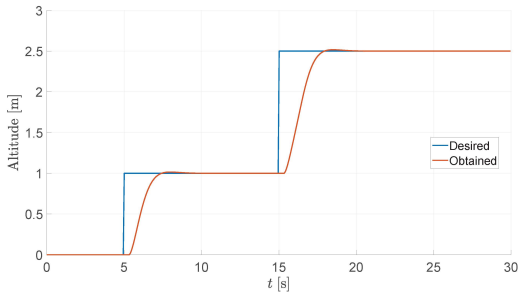


Figura 2: Resposta da altitude obtida com o controlador de altitude a dois degraus sucessivos.

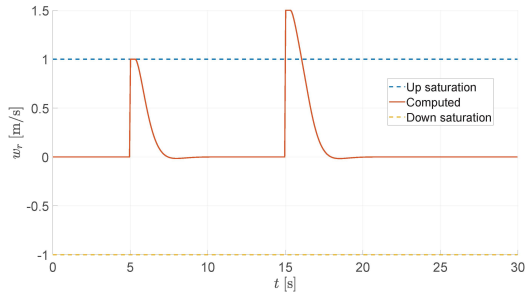


Figura 3: Resposta da velocidade de subida com o controlador de altitude.

3.1.2 Dimensionamento e validação do controlador de ângulo de guinada

Tal como anteriormente, retira-se do ficheiro SIMULINK fornecido, que o sistema do ângulo de guinada, ψ, do AR.Drone tem como entrada uma referência de velocidade de guinada, $\dot{\psi}_r$, e pode ser representado pela função de transferência

$$\frac{\Psi(s)}{\dot{\Psi}_r(s)} = \frac{1.265}{s + 5.879 \times 10^{-3}}. \tag{35}$$

Para além disto, tal como mostrado na Secção 2.9, para obter com este sistema um erro estacionário nulo no seguimento de uma referência constante de uma forma robusta, é necessário recorrer ao controlador representado pela função de transferência (31). Daí, é possível chegar à conclusão de que k_I corresponde à posição do zero do controlador.

Por outro lado, os pólos do sistema em malha aberta estão localizados na origem e, analisando (32), em 5.879×10^{-3}. Tendo isto em conta, de forma a obter-se um sistema estável, k_I deve ser positivo. No entanto, posicionar o zero entre os pólos resultaria numa resposta lenta, pelo que se deve escolher um zero real tal que a sua parte real seja inferior à dos pólos. Adicionalmente, valores elevados de k_I levam à existência de sobre-elevações significativas, e valores pequenos de k_I levam a uma perda de robustez do sistema a perturbações de vários tipos. Como tal, utilizou-se $k_I = 0.1$. Obteve-se assim o root-locus do sistema em malha aberta que está representado na figura 4. Há que ter em conta que neste root-locus não é modelada toda a dinâmica do sistema, tal como por exemplo o atraso.

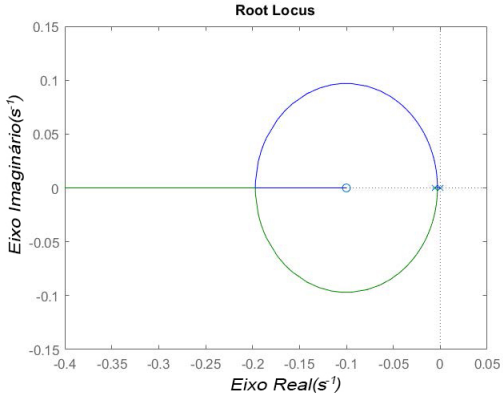


Figura 4: Root-locus para o controlador do ângulo de guinada, definindo k_I=0.1.

Analisando k_P, do root-locus da figura 4 é possível concluir que, tendo em conta a proximidade da origem dos polos (magnitude inferior a 0.2), para se obter uma resposta pouco oscilatória é necessário escolher um ganho k_P tal que eles se encontrem o mais próximo possível do eixo real. Nesta região, deslocar o pólo mais lento para o zero aumenta a rapidez do sistema. Logo, para um k_P baixo, o tempo de estabelecimento aumenta, mas se k_P for

demasiado elevado, as oscilações tornam-se significativas e há um aumento da sobre-elevação. Por estas razões, de modo a ter o melhor equilíbrio possível, utilizou-se $k_P = 1$.

Nas Figuras 5 e 6, valida-se a resposta do sistema com os valores escolhidos de $k_P = 1$ e $k_I = 0.1$ para um pedido de $\frac{\pi}{2}$rad, de forma a poder avaliar a resposta sem saturações.

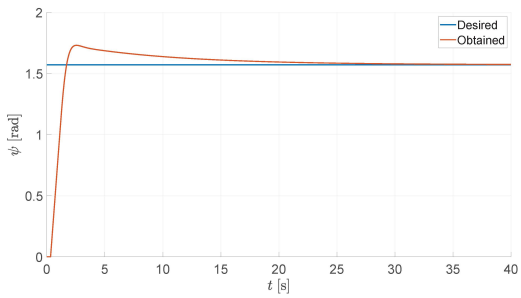


Figura 5: Resposta do ângulo de guinada obtida com o controlador do ângulo de guinada.

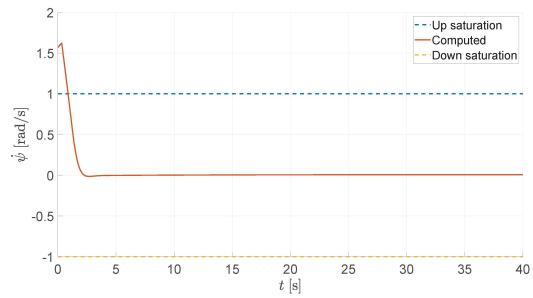


Figura 6: Resposta da velocidade de guinada obtida com o controlador do ângulo de guinada.

Verifica-se uma resposta satisfatória, convergente para o valor pedido com rapidez adequada, verificada pelo baixo tempo de estabelecimento, e sem sobre-elevação excessiva, pelo que o controlador é assim validado.

3.2 Seguimento de trajetórias retilíneas horizontais

Antes da implementação desta trajetória, é necessário dimensionar o controlador dos ângulos de picada e de rolamento e, consequentemente, da dinâmica horizontal. Conclui-se, tal como anteriormente, do ficheiro *Simulink* fornecido, que os sistemas dos ângulos de picada, θ, e de rolamento, ϕ, do AR.Drone têm como entradas θ_r e ϕ_r respetivamente. Retiram-se ainda as funções de transferência

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{2.514s + 4.866}{s^2 + 3.978s + 11.92}, \tag{36}$$

$$\frac{\Phi(s)}{\Phi_r(s)} = \frac{1.483s + 3.524}{s^2 + 4.268s + 12.69}. \tag{37}$$

Os controladores propostos são neste caso dados por (5) e (6), onde $\mathbf{u}^*$ é obtido a partir de (19). Para implementar estes controladores, é necessário dimensionar os ganhos K e k_w. Para obter o ganho de Kalman K, resolveu-se o seguinte sistema de matrizes, de um LQR:

$$Q = \begin{bmatrix} 2I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 20I_{3\times3} \end{bmatrix}, \quad R = 1,$$

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} 1.4142I_{3\times3} & 4.7779I_{3\times3} \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Para k_w utilizou-se o valor de 0.1. Para validar estes dois controladores, simulou-se uma trajetória retilínea horizontal desejada. Inicialmente, apenas foi testada esta porção do controlador, pelo que para tal o seguimento aconteceu a uma altitude nula e ângulo de guinada nulo. Impôs-se ainda que a sexta componente de $\bar{x}$ fosse nula, pois a velocidade vertical medida pelo drone é sempre zero, o que implica obviamente que a terceira componente seja constante.

A trajetória retilínea horizontal com velocidade constante partindo da origem pode ser descrita pelas equações

$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{xy}t \\ -h_d(t) \end{bmatrix}, \tag{39}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_d(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{xy} \\ -h_d(t) \end{bmatrix}, \tag{40}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_d(t) = 0_{3\times 1}, \tag{41}$$

$$\psi_d(t) = \psi_d, \tag{42}$$

onde $\mathbf{v}_{xy} \in \mathbb{R}^2$ é a velocidade no plano horizontal do drone na trajetória, $\dot{h}_d \in \mathbb{R}$ é a velocidade de subida de referência, e $\psi_d \in \mathbb{R}$ é o ângulo de guinada desejado. ψ_d é dado como entrada para demonstrar a possibilidade de efetuar o seguimento de uma trajetória pedida, enquanto o drone simultaneamente é capaz de manter um determinado ângulo de guinada. A posição inicial não influenciaria os resultados obtidos, pois corresponderia apenas a uma mudança da origem do referencial.

A trajetória horizontal tem como parâmetros a direção, sentido e velocidade (horizontal) a que se pretende que seja percorrida. Como tal, o vetor $\mathbf{v}_{xy}$ vem de

$$\mathbf{v}_{xy} = v \begin{bmatrix} \cos\chi \\ \sin\chi \end{bmatrix}, \tag{43}$$

onde v é o módulo da velocidade e χ é o ângulo de rumo, no plano horizontal, definido em relação ao eixo x e no sentido positivo. Utilizando as equações que acabamos de definir e recorrendo aos controladores validados anteriormente, podemos assim obter resultados, aplicando os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \chi &= 30^\circ, \\ v &= 0.1 \text{ m s}^{-1}, \\ h_d(t) &= 2 \text{ m}, \\ \psi_d &= 60^\circ. \end{aligned}$$

Note-se que se considerou uma rampa na altitude até os 2m, de modo a considerar o caso mais complexo.

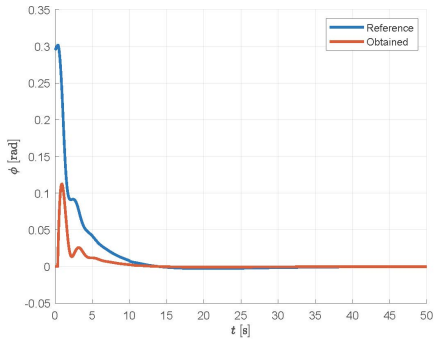


Figura 7: Ângulo de rolamento no seguimento de uma trajetória retílinea.

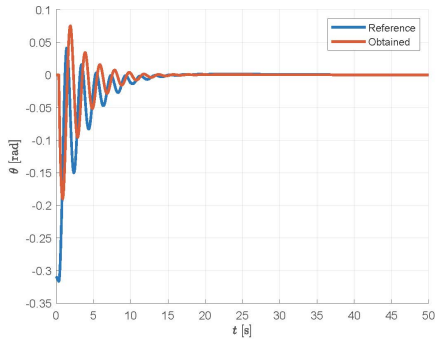


Figura 8: Ângulo de picada no seguimento de uma trajetória retílinea.

Analisando as figuras 7 e 8, verificamos o seguimento adequado das referências pedidas, havendo um ligeiro erro de seguimento durante a variação da referência. Contudo, quando as referências deixam de variar significativamente, este erro desaparece. Note-se que havendo robustez suficiente, esta lentidão que se verifica não afetará o resultado final do seguimento da posição.

Consideramos assim que o controlador utilizado neste caso foi validado, pelo que a análise irá agora focar-se no seguimento da posição.

Nas figuras 9 e 10 são apresentados os resultados do seguimento obtido tanto em simulação como experimentalmente, sendo que experimentalmente alterámos $K_2 = 2.6$.

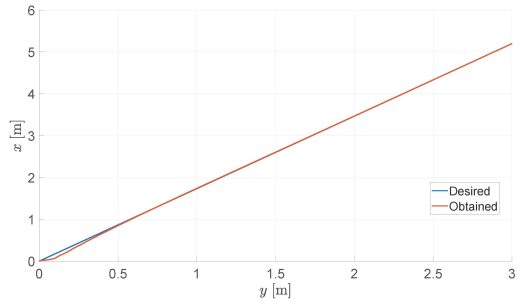


Figura 9: Representação da trajetória do drone no plano xy, no modelo simulado.

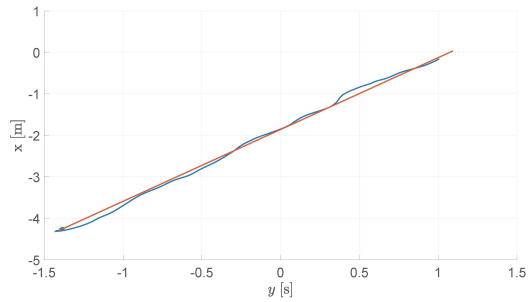


Figura 10: Representação da trajetória do drone no plano xy, com base nos dados recolhidos em laboratório.

Na figura 9 verifica-se um seguimento bastante satisfatório. O pedido de guinada constante não tem assim um efeito negativo significativo no seguimento. Tal como anteriormente, o erro de seguimento é maior inicialmente, mas rapidamente é atenuado. Por outro lado, na figura 10 verifica-se igualmente um seguimento adequado, com reduzido erro de seguimento. Ao contrário da simulação, verifica-se que o erro de seguimento não é completamente atenuado ao longo de toda a trajetória, o que se poderá dever ao facto de este ser causado por possíveis perturbações externas como forças aerodinâmicas ou pequenas imprecisões no sistema de captação de imagem.

3.3 Seguimento de trajetórias circulares horizontais, com ângulo de guinada constante

Pretende-se agora que o drone descreva uma trajetória circular, com um raio definido por R, no plano horizontal com velocidade angular definida por ω. As equações que descrevem esta trajetória são assim

$$\alpha(t) = \omega t \tag{44}$$

$$\mathbf{p}_d(t) = R \begin{bmatrix} \cos\alpha(t) - 1 \\ \sin\alpha(t) \\ -h_d \end{bmatrix} \tag{45}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_d(t) = \omega R \begin{bmatrix} -\sin\alpha(t) \\ \cos\alpha(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_d(t) = \omega^2 R \begin{bmatrix} -\cos\alpha(t) \\ -\sin\alpha(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{47}$$

$$\psi_d = 0. \tag{48}$$

Iterativamente, verificando os resultados que se obtinham com cada conjunto de ganhos, definiram-se os seguintes valores para os ganhos:

$$K = \begin{bmatrix} 4I_{3\times3} & 6I_{3\times3} \end{bmatrix} \text{ e } k_w = .5.$$

Utilizando $R = 1$ m, $\omega = 0.1$ rads^{-1} e $h_d = p_3$, obteve-se em simulação os resultados exibidos na figura 11. Nesta figura é evidente o seguimento quase perfeito, com erro bastante reduzido. Note-se que o erro de seguimento nunca chega a ser nulo. Contudo, o seguimento é ainda assim muito satisfatório, sendo quase indistinguíveis as trajetórias pretendidas e obtidas.

Na figura 12 estão representados os resultados obtidos experimentalmente (com ganhos no controlador iguais aos de 10). Comparativamente com os resultados de simulação, o seguimento apresenta um erro bastante mais elevado, verificando-se, no entanto, uma tendência do erro de seguimento em diminuir à medida que se avança na trajetória. O aumento esporádico deste erro poderá dever-se à dificuldade na estimação da posição com recurso ao sistema instalado no laboratório, bem como outras perturbações externas.

É de notar que tanto na simulação como experimentalmente, o drone manteve o mesmo ângulo de guinada adequadamente, com algum erro na parte experimental, provavelmente também devido a perturbações externas.

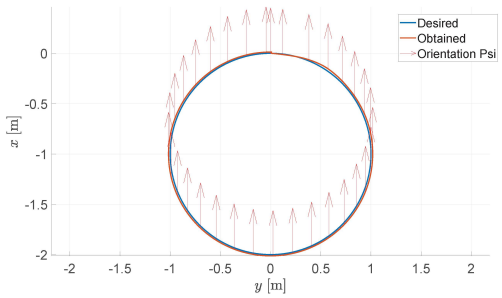


Figura 11: Percurso em XY da trajetória simulada (laranja) vs a trajetória desejada (azul), com ângulo de guinada constante

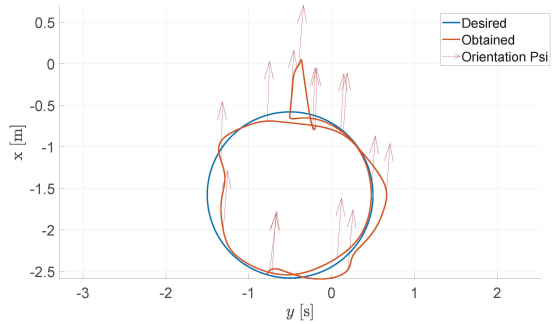


Figura 12: Percurso em XY da trajetória real (laranja) vs a trajetória desejada (azul), quando em *commands_enabled*, com ângulo de guinada constante.

3.4 Seguimento de trajetórias circulares horizontais, com ângulo de guinada variável

Nesta secção pretende-se que o drone descreva uma trajetória circular, como anteriormente, excepto que neste caso se pretende que o ângulo de guinada varie de modo a manter o drone a apontar para o centro da circunferência. Para definir esta trajetória são utilizadas as mesmas expressões, alterando apenas

$$\psi_d(t) = \alpha(t). \tag{49}$$

Com os mesmos valores $R = 1$ m, $\omega = 0.1\text{rad}s^{-1}$ e $h_d = 0$, obtiveram-se os resultados representados nas Figuras 13 a 16.

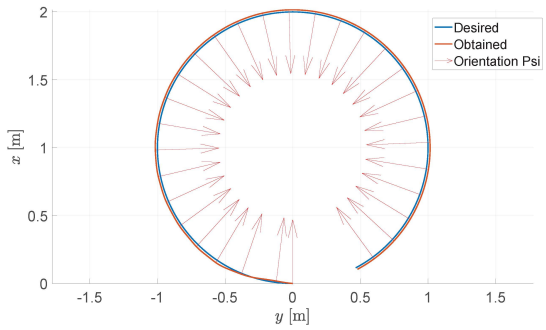


Figura 13: Percurso em XY de trajetória circular interrompida com trajetória real (laranja) vs. a trajetória desejada (azul) feita com o ângulo de guinada apontando para o centro, na simulação.

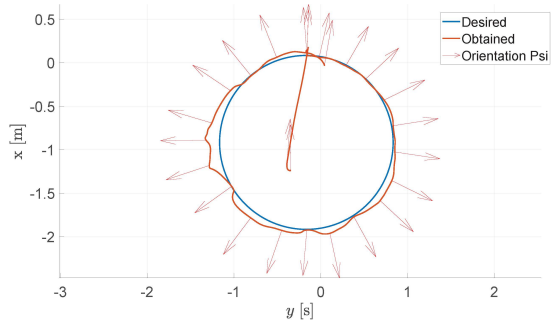


Figura 14: Percurso em XY da trajetória real (laranja) vs. a trajetória desejada (azul), a partir do ponto de *commands_enabled*, obtido experimentalmente, feita com ângulo de guinada apontando para centro + π.

Após a análise da figura 13, verifica-se que na posição, o seguimento é ligeiramente mais preciso que nos resultados obtidos anteriormente, pois enquanto na Secção 3.3 se verificou que seria necessário que os ângulos de picada e de rolamento variassem, de modo a permitir que o ângulo de guinada permanecesse constante, nesta experiência o drone aponta para o centro da órbita, ou seja, espera-se que os ângulos de picada e de rolamento tenham valores constantes, pedindo menos atuação do controlador horizontal. Verifica-se portanto um seguimento satisfatório da posição ao longo da trajetória. No que diz respeito ao ângulo de guinada, analisando a figura (17), o seguimento

do mesmo é também adequado, existindo inicialmente um reduzido erro de seguimento, mas que rapidamente é atenuado.

Note-se que o objetivo pretendido de fazer a trajetória mantendo o drone sempre voltado para o centro da circunferência é cumprido, como é evidente na figura 13. Adicionalmente, podemos concluir que existe um atraso na referência em si, o que é corroborado pelas figuras 15 e 16, onde se verifica que o erro de posição tem caráter oscilatório em x e y, ou seja, o gráfico do erro em x e y representa uma circunferência.

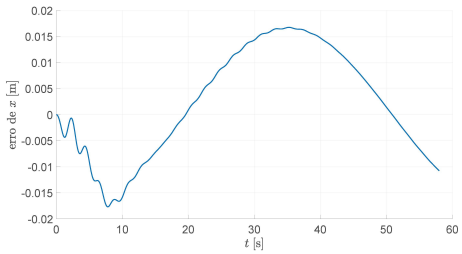


Figura 15: Gráfico de erro em x ao fazer a trajetória circular interrompida.

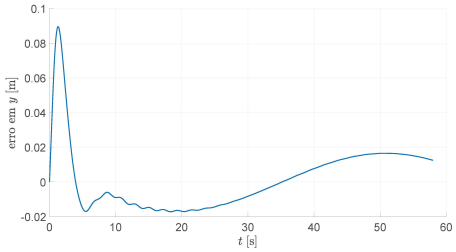


Figura 16: Gráfico de erro em y ao fazer a trajetória circular interrompida.

Nos resultados experimentais (com ganhos no controlador iguais aos de 10), representados nas figuras 14 e 18, verifica-se um resultado na posição muito semelhante ao concluído na secção anterior, havendo um erro de seguimento ao longo de toda a trajetória, que contudo não afeta significativamente o resultado global obtido. No que diz respeito ao seguimento do ângulo de guinada, os resultados obtidos são semelhantes ao que se obteve em simulação, com a exceção de ter sido fornecida uma referência errada, com um acréscimo de π rad.

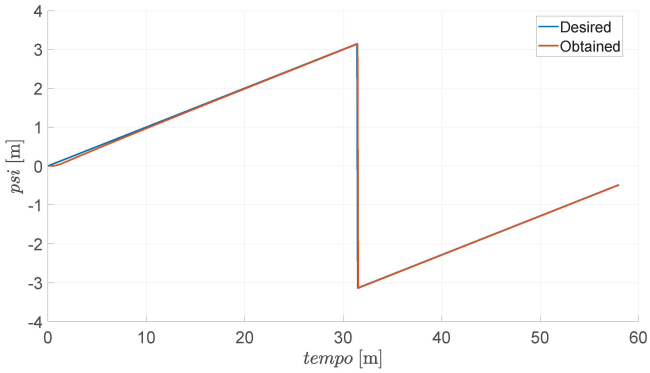


Figura 17: Variação temporal do ângulo de guinada, durante o seguimento da trajetória em simulação.

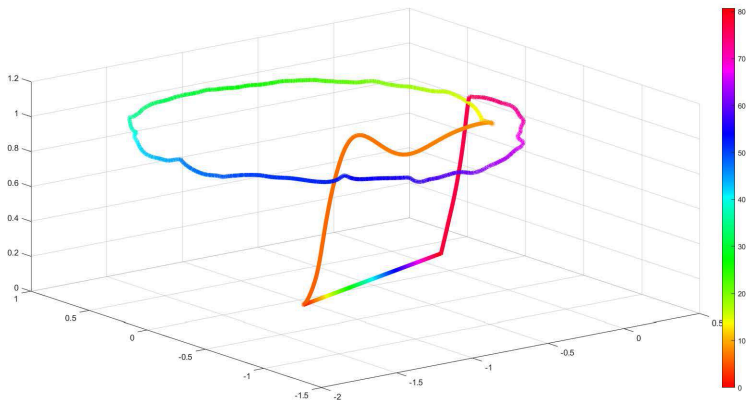


Figura 18: Representação em 3D da trajetória real do drone com escala de tempo a cores, obtida experimentalmente.

3.5 Seguimento de referência/trajetórias complexas

Foi pedido que se fizesse um esquema para implementar um esquema de *line-of-sight* para fazer *straight line path-following*, envolvendo expressões para o ângulo de guinada desejado ψ_d e componentes de velocidade desejada $\dot{x}_d$ e $\dot{y}_d$, dado por

$$\psi_d = \arctan\left(-\left(y - y_d\right)/\Delta\right), \tag{50}$$

$$\dot{x}_d = V\cos\left(\psi_d\right), \tag{51}$$

$$\dot{y}_d = V\sin\left(\psi_d\right). \tag{52}$$

Como explicado em [2], V influencia a velocidade com que se tende para a reta (aumentando também o *overshoot*) e Δ a suavidade (rapidez da transição do rumo) com que o ângulo da velocidade tende para a orientação. Ou seja, tendo um V muito grande, tenderemos mais rápido para a reta, com maior overshoot, e tendo um Δ muito pequeno, tenderemos quase perpendicularmente para a reta (e consequentemente teremos ainda maior overshoot), como observado nas figuras do anexo A. Para a posição decidiu-se usar um ganho de posição desejada nulo, ou seja, $p_d = p$. Apenas se considerou a velocidade desejada e não se incluiu a aceleração nesta implementação, pois verificou-se que, incluindo esta última, a resposta era mais abrupta, com um erro acrescido nos instantes iniciais, proveniente do termo dependente da derivada de ψ_d que, como observável no gráfico 20, tem um grande pico nos primeiros 5 segundos.

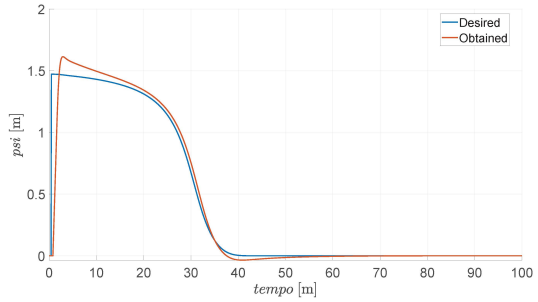


Figura 19: Gráfico de ângulo ψ desejado (azul) vs ângulo ψ real (laranja) no seguimento de trajetória LOS.

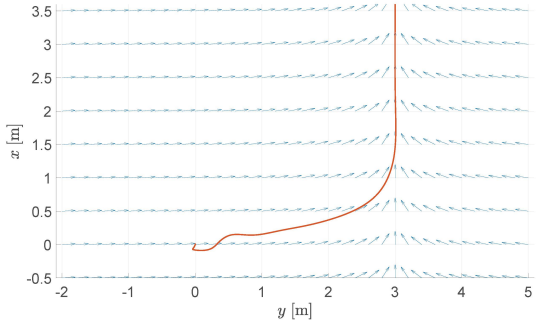


Figura 20: Representação do campo vetorial e da trajetória obtida em simulação seguindo a trajetória e velocidade desejada.

Por experimentação, decidiu-se usar os valores ganhos no controlador horizontal de $k_w = 1$ e $k_1 = 1$ $k_2 = 2.6, V = 0.1m/s$ e $\Delta = 0.3$ (sendo que k_1 poderia ser arbitrário já que $p - p_d = 0$). Com estes, obteve-se o gráfico 21 abaixo, onde se mostra a trajetória obtida e o campo vetorial equivalente.

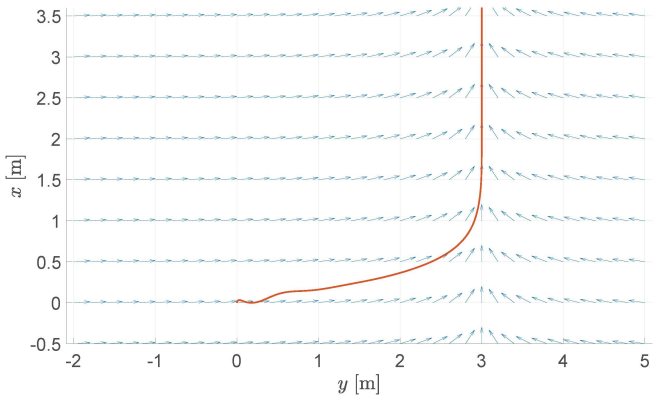


Figura 21: Representação do campo vetorial e da trajetória obtida em simulação apenas seguindo a velocidade desejada.

3.5.1 Path Manager e algoritmo LOS mais complexo

De forma a pôr em prática os conhecimentos dados na cadeira, procurou-se ir um pouco mais a fundo e aplicar conceitos de *Path Manager*, com algoritmos de trajetória mais diretos.

Para tal, utilisaram-se dois métodos de decisão, o método de semi-plano e de *b-ball*. O método de semi-plano foi utilizado no algoritmo LOS proposto no guia experimental, consistindo em dar como cumprida a parte do segmento quando passado um certo semi-plano. O método *b-ball* foi usado num algoritmo LOS mais complexo, *Carrot Chasing*, e consiste em ter (neste caso em 2D) um círculo a partir do qual se pode passar ao próximo segmento da trajetória [3] . Para este algoritmo mais complexo, usou-se as expressões do paper [4], cuja explicação do processo e algoritmo pode ser encontrado no anexo B.

Por iteração, chegaram-se aos parâmetros que se apresentam abaixo e que se utilizaram para este algoritmo, por serem os que apresentavam melhores resultados: $k_w = 1$ e $k_2 = 2.6, V = 0.1m/s$ e $\delta = 0.5$ (sendo que, de novo, k_1 poderia ser arbitrário já que $p - p_d = 0$). Com estes, obtive-se o gráfico da figura 22, onde se evidencia o bom e rápido seguimento da trajetória.

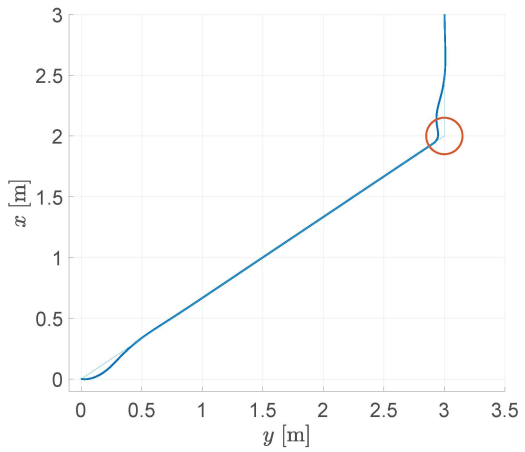


Figura 22: Trajetória do drone (azul escuro), trajetória desejada (azul claro) e bola de decisão (laranja).

É visível na figura 23 que o método *Carrot Chasing* permite seguir uma trajetória retilínea de forma muito mais eficiente.

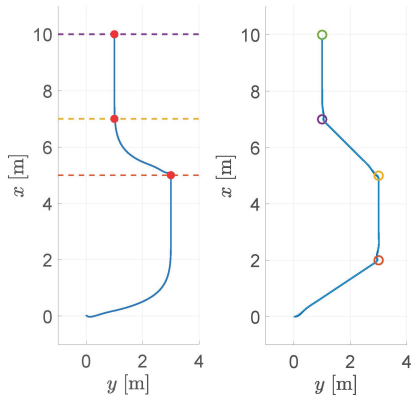


Figura 23: Comparação entre o algoritmo LOS proposto no laboratório (à esquerda), que tira partida de semi-planos de decisão e o algortimo LOS *Carrot Chasing* (à direita) com *b-balls* de decisão de segmentos de trajetória.

Com este algoritmo, foi também possível demonstrar a exatidão do algoritmo e do controlador usado com uma trajetória mais complexa, como se mostra na figura 24 abaixo.

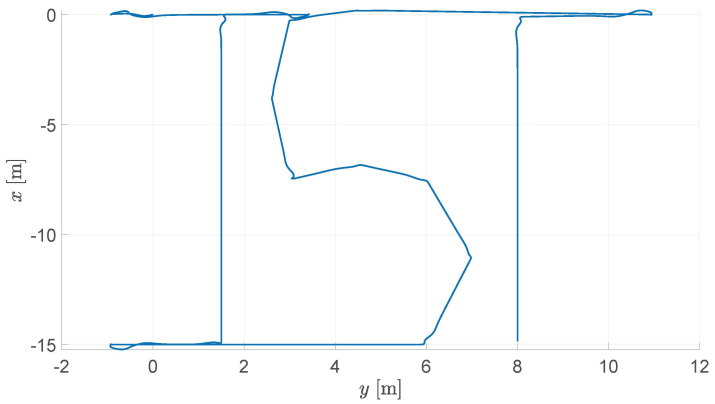


Figura 24: Símbolo do IST desenhado com a trajetória do quadrirotor, com recurso ao algoritmo LOS *Carrot Chasing*.

4 Conclusão

Ao longo do presente trabalho experimental, estudaram-se os controladores de seguimento de trajetória e ângulo de guinada em quadrirotores, mais concretamente, utilizando o Parrot AR.Drone já utilizado nos trabalhos anteriores. Procedeu-se ao seu design e, de seguida, dimensionaram-se e testaram-se estes mesmos controladores simulando com o AR.Drone Kit em *Simulink*, experimentando em trajetórias retilíneas e curvilíneas de diferente complexidade.

Na fase de design dos controladores, começando pelo controlador de trajetória, recorreu-se a entradas de controlo virtuais para simplificar as leis de controlo, ao que se seguiu a análise da possibilidade de desenvolver uma lei de controlo com base no método LQR, que garantisse a estabilidade assintótica do sistema não-linear. Esta análise foi feita com recurso à teoria da estabilidade de Lyapunov.

De seguida, introduziu-se uma perturbação que se considerou constante, para a qual se desenvolveu uma lei de controlo capaz de simultaneamente estimar esta perturbação e controlar o sistema. Com recurso ao Princípio da

Invariância de La Salle, provou-se que a origem deste sistema aumentado era globalmente assintoticamente estável, o que fazia esperar que a estimação da perturbação convergisse para o valor real.

Tendo em consideração o sistema de controlo completo que se obteve com a perturbação incluída, notou-se a semelhança com um controlador PID, correspondendo a parte PD à ação de controlo e a parte PI à estimação da perturbação.

Adicionalmente, desenvolveu-se um controlador do ângulo de guinada, ao qual se aplicou uma ação integrativa de forma a obter um erro de seguimento nulo.

Numa fase seguinte, como referido, procedeu-se ao dimensionamento e validação dos controladores obtidos, recorrendo à simulação em ambiente *Simulink*. Ao experimentar em trajetórias retilíneas, verificou-se a possibilidade de efetuar o seguimento de retas com bastante precisão, tendo os resultados experimentais obtidos sido bastante satisfatórios.

Relativamente às trajetórias circulares, o seguimento obtido é igualmente adequado, havendo contudo experimentalmente maior erro de seguimento. Ainda assim, verificou-se a possibilidade de simultaneamente seguir uma trajetória e manter um ângulo de guinada desejado, algo a considerar para aplicações de visão, onde tal afeta o que se está a observar.

Por fim, aplicaram-se conhecimentos de path following a uma trajetória retilínea, com recurso a um campo vetorial, sendo os resultados também bem conseguidos. Decidiu-se ainda aplicar os conhecimentos da cadeira em Path Manager, usando tanto semi-planos de decisão, como *b-balls*, para mudar de segmentos de trajetória. Comparou-se o algoritmo proposto no guia com um algoritmo LOS (*Carrot Chasing*) mais complexo, com o qual se conseguiu um *tracking* mais rápido e preciso de trajetórias retas. Um algoritmo deste tipo poderia ser aplicado numa situação real em diversas aplicações de monitorização, ou de realização de missões.

5 Referências

[1] Rita Cunha, José Azinheira e Pedro Trindade (2021), "Motion Control of the Parrot AR.Drone"

[2] Beard McLain, "Small Unmanned Aircraft," Princeton University Press, 2012, Ch.8 Path Following, Cadeira de Aeronaves Robotizadas, URL: https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/845043405567540/21_22_UAVs_Ch9_PathManager.pdf

[3] Beard McLain, "Small Unmanned Aircraft," Princeton University Press, 2012, Ch.9 Path Manager, Cadeira de Aeronaves Robotizadas, URL: https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/845043405567540/21_22_UAVs_Ch9_PathManager.pdf

[4] Safwat, E., Zhang, W., Mohsen, A., Kassem, M. (2019). Design and Analysis of a Robust UAV Flight Guidance and Control System Based on a Modified Nonlinear Dynamic Inversion. Applied Sciences, 9(17), 3600. URL: https://doi.org/10.3390/app9173600

Anexos

A Lateral Tracking

Nas seguintes imagens observa-se o efeito de aumentar os parâmetros V e diminuir Δ.

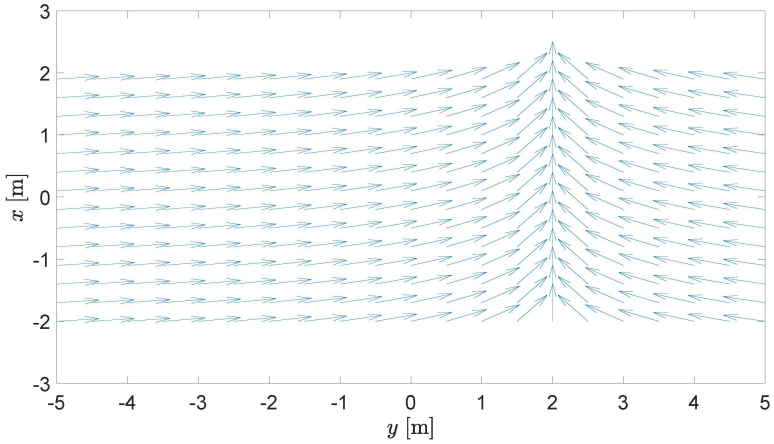


Figura 25: Campo vetorial com parâmetro V grande.

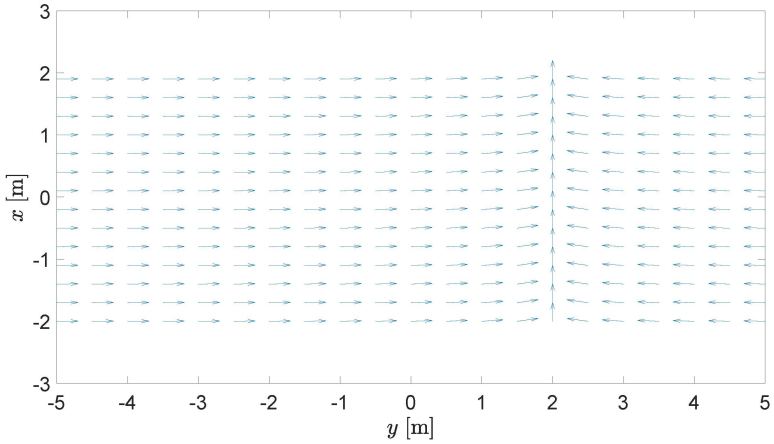
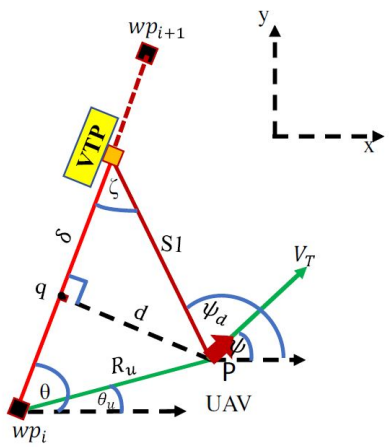


Figura 26: Campo vetorial com parâmetro Δ pequeno.

B Seguimento de trajetória com recurso a *LOS*

O algoritmo alternativo usado neste trabalho laboratorial para fazer path following de linhas retas é o *LOS (Line of Sight)* com *Carrot Chasing Guidance*, esquematizado na figura 27. Em todos os cálculos efetuados, assume-se que $\beta \approx 0°$ (derrapagem nula), ou seja, $\lambda \approx \psi$.

Sejam W_{p_1} e $W_{p_{i+1}}$ dois pontos de referência arbitrários com coordenadas (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}) respetivamente, em primeiro lugar é definido o ângulo *LOS*, $\theta_{LOS} = \arctan\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right)$, que representa aquele que seria o rumo exato que o quadrirotor deveria ter, ou seja, idealmente $\psi - \theta_{LOS} \to 0$. Ao longo do tempo, o quadrirotor (na posição atual P), persegue aquele que é designado de *VTP* ou ponto de seguimento virtual, sendo que a distância d denominada de *crosstrack error* (distância medida da perpendicular ao segmento de reta que une os pontos de referência até ao ponto P) deve tender para zero. De seguida, são efetuados os cálculos presentes nas equações (53), (54), (55), (56).



$$\theta_u = \arctan\left(\frac{y_p - y_i}{x_p - x_i}\right) \tag{53}$$

$$R_u = \sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2} \tag{54}$$

$$S_1 = \sqrt{\delta^2 + (R_u \sin(\theta - \theta_u))^2} \tag{55}$$

$$\zeta = \arctan\left(\frac{R_u \sin(\theta - \theta_u)}{S1}\right) \tag{56}$$

Figura 27: Seguimento em LOS, retirado de [4]

.

Finalmente, podemos obter o rumo desejado $\psi_d = \zeta + \theta$. Tanto para o θ_{LOS}, como o θ_u, teve-se o cuidado de mantê-los na gama dos 0 a 2π.

Foram também definidas bolas de decisão de um raio de tolerância r, tal que, caso

$$\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} \leq r, \tag{57}$$

considera-se que a aeronave alcançou o ponto de referência e poderá começar a perseguir o próximo.

δ está diretamente relacionado com a performance do controlo no seguimento, atua como um filtro passa-baixo. Um δ pequeno irá dirigir melhor a aeronave para o ponto exato, mas terá como consequência uma sobre-elevação. Por outro lado, um δ grande irá filtrar melhor os pedidos de trajetória, mas irá realizar com menor precisão o caminho. Tendo isto em conta, decidiu-se escolher $\delta = 0.5 * R_{\min}$.

Uma vez que o quadrirotor permite ter referências em três velocidades angulares, decidiu-se alimentar o sistema de controlo com $\dot{\psi}_d$, bem como com referência nas duas velocidades horizontais.

Assumiu-se $\dot{\psi} \approx \Delta\psi$, tendo o cuidado que $\Delta\psi$ deve estar na gama $-\pi$ a π.

Sendo que depois se deu simplesmente referência igual que no método mais simples, ou seja , $p_d = p$, $\dot{x_d} = V\cos(\psi_d)$ e $\dot{y_d} = V\sin(\psi_d)$, e aceleração nula.