

Instituto Superior Técnico

MEAer

Aeronaves Robotizadas

2022/2023 – Primeiro Semestre

Laboratório 1

Grupo 2

1. N.º:95783 Nome: Duarte Lopes

Assinatura: *Duarte Lopes*

2. N.º:95811 Nome: José Medeiro

Assinatura: *José Medeiro*

3. N.º:95840 Nome: Rafaela Chaffilla

Assinatura: *Rafaela Chaffilla*

Professora: Rita Cunha

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Modelação	3
2.1	Expressão das forças externas e torques no referencial $\{B\}$	3
2.2	Efeito da alteração dos eixos correspondentes ao referencial $\{B\}$	4
2.3	Entrada do sistema e transformação linear.	4
2.4	Equações da dinâmica não linear	5
2.5	Estado de Equilíbrio	6
2.6	Linearização do Sistema	7
2.7	Determinação das Funções de Transferência	8
2.8	Efeito do Valor de Equilíbrio da Guinada na Posição	8
2.9	Comparação de Dois Controladores de Altitude	9
2.10	Efeito dos Ganhos Proporcional e Derivativo nos pólos do Sistema	10
3	Height Dynamics	11
3.1	Resposta a diferentes ganhos e degraus	12
3.2	Identificação do sistema em malha fechada	13
3.3	<i>Root-locus</i> do modelo experimental	14
4	Pitch Dynamics	14
4.1	Resposta a diferentes sinusíoides	14
4.2	Identificação do sistema em malha fechada	15
4.3	Resposta a um retângulo	17
5	Conclusão	18

1 Introdução

No presente trabalho laboratorial dá-se início ao estudo do controlo de um Quadrotor *Parrot AR.Drone*, onde se modela a sua dinâmica e cinemática, e é feita uma aproximação linear do seu sistema para que possa ser estudado o seu controlo em torno de uma situação de equilíbrio. Este controlo será focado principalmente no controlo em anel fechado para a altitude, velocidade vertical e ângulo de picada, que será estudado teoricamente na secção 2, e depois visto experimentalmente, sendo analisados os resultados obtidos em laboratório, onde na secção 3 se observa a dinâmica de altitude do quadrrorotor e depois a dinâmica para ângulos de picada, na secção 4, passando pela resposta a degraus, retângulo e resposta em frequência.

Por fim, as comparações entre os resultados teóricos e experimentais são condensadas e retiram-se conclusões da mesma na secção 5.

2 Modelação

Nesta secção, é feita uma modelação teórica da cinemática e dinâmica do quadrrorotor *Parrot AR.Drone*. Para tal, irá ser usado o modelo simplificado do *drone* que está representado na figura 1. Os vetores x_B , y_B e z_B representam os eixos do referencial $\{B\}$ (do corpo). É de notar que a orientação dos eixos do referencial do corpo do *Parrot AR.Drone* serão diferentes dos apresentados na imagem 1, como será observado na secção 2.2.

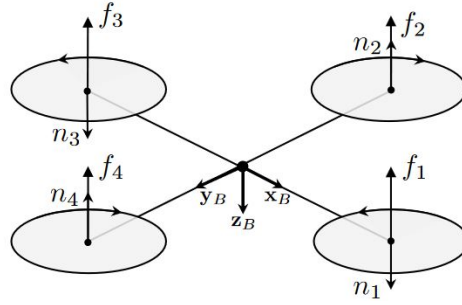


Figura 1: Esquema simplificado do modelo do *Parrot AR.Drone*.

É também importante identificar as forças que atuam no quadrrorotor:

- Força Gravítica, que pode ser representada no referencial $\{I\}$ (de inércia) como:

$$f_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = mg\mathbf{e}_3, \text{ onde } \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

- Forças de Propulsão provenientes da rotação de cada rotor. Sendo f_i a força de propulsão devida ao rotor i representada no referencial $\{B\}$, o vetor das forças individuais de propulsão será definido da seguinte forma:

$$f_T = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Outras variáveis que serão usadas ao longo desta secção são $R(\boldsymbol{\lambda})$, que é a matriz de rotação que representa a transformação do referencial $\{B\}$ para $\{I\}$, a matriz $\mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$, onde n_i representa o momento de força criado no eixo i , \mathbf{J} é a matriz dos momentos de inércia, $Q(\boldsymbol{\lambda})$ é a matriz Jacobiana da velocidade angular.

De forma a simplificar as expressões apresentadas, utiliza-se s_α , c_α e t_α para denotar respetivamente $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ e $\tan(\alpha)$.

2.1 Expressão das forças externas e torques no referencial $\{B\}$

Sendo \mathbf{f} o vetor de forças externas aplicadas no Drone, descritas no referencial do corpo, este será igual à soma das forças que atuam no Drone individualmente: força gravítica e forças de propulsão. As forças de propulsão f_i já se encontram no

referencial do corpo, ao contrário da força gravítica da equação 1, que precisa de ser transformada para o referencial {B}. Como a matriz $R(\boldsymbol{\lambda})$ transforma do referencial {B} para {I}, a sua inversa, $R(\boldsymbol{\lambda})^{-1}$ irá transformar vetores do referencial {I} para {B}. Denotando $R'(\boldsymbol{\lambda}) = R^{-1}(\boldsymbol{\lambda})$ e devido às propriedades da matriz de rotação, $R'(\boldsymbol{\lambda}) = R^T(\boldsymbol{\lambda})$, é possível chegar à seguinte equação, onde $\vec{f}_i = [0 \ 0 \ -f_i]^T$, uma vez que as forças de propulsão têm sentido contrário ao eixo z_B :

$$\mathbf{f} = R'(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{f}_g + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \vec{f}_4,$$

que pode ser simplificada na equação 3.

$$\mathbf{f} = M\mathbf{f}_g + N\mathbf{f}_T, \quad (3)$$

onde:

$$M = R'(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (4) \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Já as componentes do momento no referencial do corpo, representado por \mathbf{n} , podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} n_x &= b f_2 - b f_4; \\ n_y &= b f_1 - b f_3; \\ n_z &= c f_1 - c f_2 + c f_3 - c f_4; \end{aligned} \quad (6)$$

onde b representa a distância entre o centro do Drone e os seus rotores, e c é a constante que relaciona n_i e f_i , tal que $n_i = c f_i$. O valor de c dependerá principalmente das características aerodinâmicas do quadricóptero.

Com isto, é possível chegar à equação 7:

$$\mathbf{n} = P\mathbf{f}_T, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & -b \\ b & 0 & -b & 0 \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.2 Efeito da alteração dos eixos correspondentes ao referencial {B}

O quadricóptero *Parrot AR.Drone* tem o seu eixo x alinhado com a câmara, e não com os rotores como está representado na figura 1. Por isso, o referencial {B} do *Parrot AR.Drone*, a partir de agora representado como {B'}, na verdade sofre uma rotação de 45° em relação ao eixo z_B . Com isto, a matriz de rotação que converte um vetor do referencial da imagem 1 para o novo referencial {B'} será:

$${}^{B'}_B R^T(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} c_{45^\circ} & s_{45^\circ} & 0 \\ -s_{45^\circ} & c_{45^\circ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Como o eixo $z_B = z_{B'}$, permanecendo inalterado, as forças que atuam nesse eixo também se mantêm iguais nos dois referenciais, portanto a matriz N irá manter-se igual. A matriz de rotação do referencial {I} para {B} também será igual à de rotação do referencial {I} para {B'}, sendo que a única alteração causada pela transformação de {B} para {B'} será nos ângulos de Euler, portanto M também não irá sofrer alterações. Estas conclusões também podem ser tiradas vendo que $\mathbf{f}' = {}^{B'}_B R^T(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{f} = \mathbf{f}$.

Já a matriz P irá sofrer uma transformação, levando à nova matriz P', calculada na equação 9.

$$P' = {}^{B'}_B R^T(\boldsymbol{\lambda})P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}b & \frac{\sqrt{2}}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}b \\ \frac{\sqrt{2}}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}b & \frac{\sqrt{2}}{2}b \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix} \quad (9)$$

2.3 Entrada do sistema e transformação linear.

Sendo a entrada do sistema, \mathbf{u} , definida por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} T \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

com T igual à soma de todos os f_i , é possível escrever \mathbf{u} em função de \mathbf{f}_T da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \\ P' f_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}b & \frac{\sqrt{2}}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}b \\ \frac{\sqrt{2}}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}b & -\frac{\sqrt{2}}{2}b & \frac{\sqrt{2}}{2}b \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix} f_T \quad (10)$$

Sendo L a matriz tal que $\mathbf{u} = L f_T$, a transformação de \mathbf{u} para f_T pode ser feita com a inversa de L , obtendo $f_T = L^{-1}\mathbf{u}$. Fazendo a inversa da matriz L , obtém-se a equação 11.

$$L^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{b} & \frac{\sqrt{2}}{b} & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{b} & -\frac{\sqrt{2}}{b} & -\frac{1}{c} \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{b} & -\frac{\sqrt{2}}{b} & \frac{1}{c} \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{b} & \frac{\sqrt{2}}{b} & -\frac{1}{c} \end{bmatrix} \quad (11)$$

O cálculo desta matriz L será útil para desenvolver, mais à frente, para obter as equações da dinâmica do quadrrorotor em função da entrada de controlo \mathbf{u} .

2.4 Equações da dinâmica não linear

Considere-se que a posição do quadrrorotor em relação ao referencial $\{B\}$ é representada por ${}^B\mathbf{p}$ ¹, levando à matriz de estados \mathbf{x} descrita na equação 18.

$$\mathbf{x} = [{}^B\mathbf{p}^T \quad \mathbf{v}^T \quad \boldsymbol{\lambda}^T \quad \boldsymbol{\omega}^T]^T \in \mathbb{R}^{12}; \quad \dot{\mathbf{x}} = [{}^B\dot{\mathbf{p}}^T \quad \dot{\mathbf{v}}^T \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}^T]^T \quad (12)$$

De acordo com as equações de cinemática de corpo rígido, e sabendo que ${}^B\mathbf{p} = R'(\lambda)\mathbf{p}$, pode chegar-se ao valor de ${}^B\dot{\mathbf{p}}$ e $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$:

$$\begin{aligned} {}^B\dot{\mathbf{p}} &= \frac{d R'(\lambda)\mathbf{p}}{dt} = \dot{R}^T(\lambda)\mathbf{p} + R^T(\lambda)\dot{\mathbf{p}} = \\ (R(\lambda)S(\omega))^T\mathbf{p} + R^T(\lambda)R(\lambda)\mathbf{v} &= S^T(\omega)R^T(\lambda)\mathbf{p} + \mathbf{v} \iff \\ {}^B\dot{\mathbf{p}} &= -S(\omega){}^B\mathbf{p} + \mathbf{v} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = Q(\lambda)\boldsymbol{\omega} \quad (14)$$

Já as equações da dinâmica indicam a relação entre $\dot{\mathbf{v}}$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ e as suas respetivas derivadas, e estas relações encontram-se nas equações 15 e 16

$$m\dot{\mathbf{v}} = -mS(\omega)\mathbf{v} + \mathbf{f} = -mS(\omega)\mathbf{v} + Mf_g + Nf_T = -mS(\omega)\mathbf{v} + Mf_g + NL^{-1}\mathbf{u} \quad (15)$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = -S(\omega)J\boldsymbol{\omega} + \mathbf{n} = -S(\omega)J\boldsymbol{\omega} + P'f_T = -S(\omega)J\boldsymbol{\omega} + P'L^{-1}\mathbf{u} \quad (16)$$

Juntando as equações 13, 14, 15 e 16, e uma vez que a matriz J é invertível, a relação entre $\dot{\mathbf{x}}$ e \mathbf{x} está descrita na equação 17.

$$\dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} -S(\omega){}^B\mathbf{p} + \mathbf{v} \\ -S(\omega)\mathbf{v} + \frac{1}{m}NL^{-1}\mathbf{u} + \frac{1}{m}Mf_g \\ Q(\lambda)\boldsymbol{\omega} \\ J^{-1}(-S(\omega)J\boldsymbol{\omega} + P'L^{-1}\mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Já se tivermos em conta a posição definida no referencial inercial, podemos definir uma nova matriz de estados \mathbf{x}_1 da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_1 = [\mathbf{p}^T \quad \dot{\mathbf{p}}^T \quad \boldsymbol{\lambda}^T \quad \boldsymbol{\omega}^T]^T \in \mathbb{R}^{12}; \quad \dot{\mathbf{x}}_1 = [\dot{\mathbf{p}}^T \quad \ddot{\mathbf{p}}^T \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}^T]^T \quad (18)$$

¹Uma vez que ${}^B\mathbf{p} = B'\mathbf{p}$, usa-se a notação com B meramente para simplificar as equações.

As equações 14 e 16 continuam a ser aplicadas para \mathbf{x}_1 . Quanto a \ddot{p} , este representa a aceleração sentida pelo Drone no referencial de inércia. Como este referencial é estático, verifica-se a equação 19.

$$m\ddot{\mathbf{p}} = f_g + R(\boldsymbol{\lambda})Nf_T = f_g + R(\boldsymbol{\lambda})NL^{-1}\mathbf{u} \quad (19)$$

Com isto, a relação entre $\dot{\mathbf{x}}$ e \mathbf{x} pode ser descrita como na equação 20:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ -S(\boldsymbol{\omega})\mathbf{v} + \frac{1}{m}R(\boldsymbol{\lambda})NL^{-1}\mathbf{u} + \frac{1}{m}f_g \\ Q(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\omega} \\ J^{-1}(-S(\boldsymbol{\omega})J\boldsymbol{\omega} + P'L^{-1}\mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (20)$$

É importante mencionar que aqui está a ser considerado um caso generalizado em que o corpo tem momentos de inércia cruzados diferentes de zero. Mas se o corpo for axissimétrico, os momentos de inércia cruzados serão nulos e J será uma matriz diagonal, pelo que, nas equações 17 e 20, podia ser feita a seguinte simplificação: $J^{-1}(-S(\boldsymbol{\omega})J\boldsymbol{\omega}) = -S(\boldsymbol{\omega})(J^{-1}J)\boldsymbol{\omega} = -S(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$

2.5 Estado de Equilíbrio

Por definição de estado de equilíbrio de um sistema, à ocorrência de uma pequena perturbação, o sistema volta ao estado de equilíbrio. Então, fazendo uma aproximação de alterações do estado pequenas, o estado de um sistema pode definir-se como se encontra na equação 21, onde $\tilde{\mathbf{x}}$ denota a pequena variação em torno do estado de equilíbrio (esta será estudada em mais detalhe na secção 2.6).

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_0 + \tilde{\mathbf{x}} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{p}_0^T & \mathbf{v}_0^T & \boldsymbol{\lambda}_0^T & \boldsymbol{\omega}_0^T \end{bmatrix}^T \quad (21)$$

Como \mathbf{X}_0 é constante, é possível calcular os estados de equilíbrio como o valor de \mathbf{x} quando $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, significando que o veículo não se encontra em movimento. Desta última conclusão, é possível já concluir que as velocidades lineares e angulares devem ser nulas:

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (22) \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \begin{bmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

Por outro lado, como o veículo se encontra parado em equilíbrio, é possível tirar conclusões diretas sabendo que a soma das forças externas aplicadas será nula:

$$\mathbf{f} = M\mathbf{f}_g + N\mathbf{f}_T = \mathbf{0} \iff mg \begin{bmatrix} -s_{\theta_0} \\ s_{\phi_0}c_{\theta_0} \\ c_{\phi_0}c_{\theta_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} \theta_0 = 0 \\ \phi_0 = 0 \\ T_0 = mg \end{cases} \quad (24)$$

O resultado apresentado na equação anterior era esperável de um ponto de vista físico: Se o veículo deve estar parado, os ângulos de picada e rolamento devem ser nulos. Se tal não acontecesse, existiria uma componente da força de propulsão perpendicular à força gravítica que provocava uma deslocação no plano $x_{B'}Oy_{B'}$, o que já não se trataria de um estado de equilíbrio. Do mesmo modo, com os ângulos ϕ e θ nulos, as forças propulsiva e gravítica são iguais nos 2 referenciais ($\{I\}$ e $\{B'\}$), pelo que T_0 se deverá igualar a mg .

Quanto às variáveis \mathbf{p}_0 e ψ_0 , estas podem tomar qualquer valor, desde que constante, pois estas não vão alterar o estado de equilíbrio do sistema. Por isso, e tendo em conta a equação 24, o vetor de ângulos de Euler de equilíbrio é:

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Por fim, \mathbf{u}_0 pode então ser calculado, por exemplo, recorrendo à equação 16, sabendo que $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$.

$$P'L^{-1}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ n_{x,0} \\ n_{y,0} \\ n_{z,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Como já seria de esperar, \mathbf{n} será uma matriz de zeros. Isto porque se o Drone está parado no equilíbrio, $\boldsymbol{\omega}_0$ é igual a zero, logo a soma de torques externos devem ser nulos. Como os rotores são a única fonte criadora de momento, para a velocidade angular se manter nula, o torque pedido deve ser também nulo.

2.6 Linearização do Sistema

De forma a realizar a linearização do sistema em torno do seu ponto de equilíbrio, define-se o vetor de variáveis de erro $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{\mathbf{p}}^T \quad \tilde{\mathbf{v}}^T \quad \tilde{\lambda}^T \quad \tilde{\omega}^T]^T$, tal que:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{p}} &= {}^B\mathbf{p} - R^T \mathbf{p}_0 = R^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0), \\ \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \\ \tilde{\lambda} &= \lambda - \lambda_0, \\ \tilde{\omega} &= \omega - \omega_0,\end{aligned}\tag{27}$$

bem como o erro associado à entrada \mathbf{u} :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0,\tag{28}$$

Para que a linearização seja válida, as perturbações devem ser pequenas. Como tal, assumindo, para uma certa variável d , que a variável de erro correspondente, \tilde{d} , é nula, admitem-se as seguintes aproximações:

$$\begin{cases} \sin(\tilde{d}) = \tilde{d}, \\ \cos(\tilde{d}) = 1, \\ \tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2 = 0 \end{cases}\tag{29}$$

Como se mencionou na subsecção 2.5, a condição de voo pairado no ponto de equilíbrio implica que $\dot{p}_0, \dot{v}_0, \dot{w}_0$ e $\dot{\lambda}$ sejam nulos, o que facilita os cálculos nas equações da dinâmica.

O vetor posição, \mathbf{p} , lineariza-se através de:

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 + \dot{\tilde{x}} \\ \dot{y}_0 + \dot{\tilde{y}} \\ \dot{z}_0 + \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{bmatrix}\tag{30}$$

Já o vetor velocidade, \mathbf{v} , é linearizado conforme a seguinte equação:

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}_0 + \dot{\tilde{u}} \\ \dot{v}_0 + \dot{\tilde{v}} \\ \dot{w}_0 + \dot{\tilde{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{\tilde{w}} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \left(\begin{bmatrix} -mg\tilde{\theta} \\ mg\tilde{\phi} \\ mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg - \tilde{T} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{T} \end{bmatrix}\tag{31}$$

De forma semelhante, a linearização do vetor dos ângulos de Euler em torno dos eixos Z-Y-X, λ , corresponde a:

$$\dot{\lambda} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_0 + \dot{\tilde{\phi}} \\ \dot{\theta}_0 + \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\psi}_0 + \dot{\tilde{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\phi}} \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\tilde{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \\ \tilde{r} \end{bmatrix}\tag{32}$$

Quanto ao vetor velocidade angular, pode ser linearizado partindo da equação 16:

$$J\dot{\omega} = -S(\omega)J\omega + n \Leftrightarrow \dot{\omega} = -J^{-1}S(\omega)J\omega + J^{-1}n = -S(\omega)\omega + J^{-1}n = J^{-1}n\tag{33}$$

Na dedução anterior, assumiu-se que o quadricóptero é um corpo axissimétrico, pelo que $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$. Assim, a matriz de inércia, J , e a sua inversa, J^{-1} , são diagonais, como se observa na equação 34, e podem, portanto, comutar.

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_{zz}} \end{bmatrix}\tag{34}$$

Daqui vem que:

$$\dot{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{n}_x \\ \tilde{n}_y \\ \tilde{n}_z \end{bmatrix}\tag{35}$$

Por outro lado, também é possível aproximar a função da dinâmica $\dot{\mathbf{x}}$ com recurso a uma expansão de Taylor de primeira ordem em torno do ponto de equilíbrio que, como já se referiu, corresponde à condição de voo pairado. O sistema

linear é, então, representado num espaço de estados pela equação da dinâmica $\dot{\mathbf{x}} = A\tilde{\mathbf{x}} + B\tilde{\mathbf{u}}$, sendo $A_{12 \times 12}$ e $B_{12 \times 4}$ matrizes reais.

A matriz da dinâmica A e a matriz de entrada B , obtidas na condição de equilíbrio, são as seguintes²:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & C & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 4} \\ D_{3 \times 4} \\ 0_{3 \times 4} \\ E_{3 \times 4} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_{zz}} \end{bmatrix}$$

2.7 Determinação das Funções de Transferência

Assumindo que a matriz dos momentos de inércia, J , é diagonal, como se considerou na subsecção anterior, são válidas as seguintes equações linearizadas em torno da posição de equilíbrio:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \tilde{p} \\ \dot{\tilde{p}} = \frac{\tilde{n}_x}{J_{xx}} \\ \ddot{\theta} = \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} = \frac{\tilde{n}_y}{J_{yy}} \\ \ddot{\psi} = \tilde{r} \\ \dot{\tilde{r}} = \frac{\tilde{n}_z}{J_{zz}} \end{cases}, \quad \begin{cases} \tilde{x} = \tilde{u} \\ \ddot{\tilde{u}} = -g\delta\theta \\ \tilde{y} = \tilde{v} \\ \ddot{\tilde{v}} = g\tilde{\phi} \\ \tilde{z} = \tilde{w} \\ \ddot{\tilde{w}} = -\frac{1}{m}\tilde{T} \end{cases} \quad (37)$$

Aplica-se, então, a transformada de Laplace a todas estas equações linearizadas:

$$\begin{cases} s\Phi(s) = P(s) \\ sP(s) = \frac{N_x(s)}{J_{xx}} \\ s\Theta(s) = Q(s) \\ sQ(s) = \frac{N_y(s)}{J_{yy}} \\ s\Psi(s) = R(s) \\ sR(s) = \frac{N_z(s)}{J_{zz}} \end{cases}, \quad \begin{cases} sX(s) = U(s) \\ sU(s) = -g\Theta(s) \\ sY(s) = V(s) \\ sV(s) = g\Phi(s) \\ sZ(s) = W(s) \\ sW(s) = -\frac{1}{m}T(s) \end{cases} \quad (38)$$

Rearranjando o sistema de equações 38, deduzem-se as funções de transferência requeridas no guia de laboratório:

$$\begin{cases} G_\phi(s) = \frac{\Phi(s)}{N_x(s)} = \frac{1}{s^2 J_{xx}} \\ G_\theta(s) = \frac{\Theta(s)}{N_y(s)} = \frac{1}{s^2 J_{yy}} \\ G_\psi(s) = \frac{\Psi(s)}{N_z(s)} = \frac{1}{s^2 J_{zz}} \end{cases}, \quad \begin{cases} G_x(s) = \frac{X(s)}{N_y(s)} = \frac{-g}{s^4 J_{yy}} \\ G_y(s) = \frac{Y(s)}{N_x(s)} = \frac{g}{s^4 J_{xx}} \\ G_z(s) = \frac{Z(s)}{W(s)} = -\frac{1}{s^2 m} \end{cases} \quad (39)$$

2.8 Efeito do Valor de Equilíbrio da Guinada na Posição

De forma a esclarecer a relação existente entre $G_\phi(s)$ e $G_y(s)$ e entre $G_\theta(s)$ e $G_x(s)$, calculou-se a razão correspondente a cada par de funções de transferência:

$$\begin{cases} \frac{G_\phi(s)}{G_y(s)} = \frac{\frac{\Phi(s)}{N_x(s)}}{\frac{Y(s)}{N_x(s)}} = \frac{\Phi(s)}{Y(s)} = \frac{\frac{1}{s^2 J_{xx}}}{\frac{g}{s^4 J_{xx}}} = \frac{s^2}{g} \\ \frac{G_\theta(s)}{G_x(s)} = \frac{\frac{\Theta(s)}{N_y(s)}}{\frac{X(s)}{N_y(s)}} = \frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{s^2 J_{yy}}}{\frac{-g}{s^4 J_{yy}}} = -\frac{s^2}{g} \end{cases} \quad (40)$$

Conclui-se, portanto, que existe uma dependência entre $\Phi(s)$ e $Y(s)$ e entre $\Theta(s)$ e $X(s)$. Como tal, o deslocamento do quadrimotor nestas duas direções só será possível através da alteração dos valores dos ângulos correspondentes. Por outro lado, também se verifica que, sendo ambas as equações acima independentes de Ψ_0 , o valor de equilíbrio do ângulo de guinada não tem efeito na posição do *drone*.

²Na representação das matrizes, I é a matriz identidade.

frequência natural e o coeficiente de amortecimento especificadas de acordo com um certo objetivo ou requisito de projeto, recorrendo a k_d para compensar os efeitos no amortecimento devidos à variação de k_p .

Existem, no entanto, outras soluções para o sistema de controlo de altitude do quadrotor, como a que corresponde ao diagrama de blocos da figura 3.

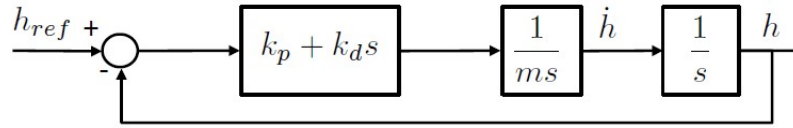


Figura 3: Diagrama de Blocos do Controlador de Altitude 2.

Foi também calculada a função de transferência deste controlador:

$$G_2(s) = \frac{h}{h_{ref}} \Big|_2 = \frac{(k_p + k_d s) \times \frac{1}{ms} \times \frac{1}{s}}{1 + (k_p + k_d s) \times \frac{1}{ms} \times \frac{1}{s}} = \frac{k_d s + k_p}{ms^2 + k_d s + k_p} = \frac{\frac{k_d}{m} s + \frac{k_p}{m}}{s^2 + \frac{k_d}{m} s + \frac{k_p}{m}} \quad (44)$$

Note-se que, neste caso, a entrada é também a altitude de referência, pelo que, mais uma vez, o controlo é feito por servomecanismo.

Por análise das equações 41 e 44, verifica-se que ambos os controladores correspondem a sistemas de segunda ordem com o mesmo polinómio característico (denominador da função de transferência) e, portanto, os mesmos pólos, frequência natural e coeficiente de amortecimento. Além disso, ambos os sistemas são causais, pois o seu número de pólos da função de transferência é superior ao número de zeros, e têm ganho estático unitário ($G_1(0) = G_2(0) = 1$). Como ambos os sistemas têm os mesmos pólos, deverão apresentar respostas dinâmicas semelhantes. A diferença reside no facto de a função de transferência do segundo controlador possuir um zero (em $s = -\frac{k_p}{k_d}$), o que irá moldar a sua resposta e alterar ligeiramente o lugar geométrico das raízes (*root locus*) e os diagramas de Bode respetivos. Este efeito será tanto mais significativo quanto maior for a frequência.

A solução correspondente ao controlador 1 designa-se por controlo em cascata, e caracteriza-se por ter duas malhas de realimentação distintas, uma interna e uma externa, tendo o objetivo de desagregar as variáveis de estado. O projeto de cada malha pode ser realizado de forma quase independente, mas, para que tal seja viável, o tempo de estabelecimento do anel interior tem de ser consideravelmente inferior ao do anel exterior. Admitindo que esta condição se verifica, será possível, em teoria, atenuar perturbações sem que estas cheguem a afetar o controlo primário do sistema, correspondente ao anel exterior. No entanto, se não se conseguir garantir uma diferença adequada nas escalas do tempo de atuação dos dois anéis, estes podem interferir no controlo um do outro, tornando, em último caso, o sistema instável.

Por outro lado, o segundo diagrama de blocos representa uma solução clássica de controlo proporcional derivativo (PD). Este tipo de controladores é, tipicamente, mais simples de aplicar, mas tem a desvantagem de a parte derivativa poder causar problemas no caso de a referência não ser um sinal contínuo, o que pode levar ao aparecimento de indefinições ou mesmo ao comprometimento do sistema de controlo e, até, dos próprios atuadores.

2.10 Efeito dos Ganhos Proporcional e Derivativo nos pólos do Sistema

De forma a esboçar o lugar geométrico das raízes (*root locus*) do sistema correspondente ao primeiro controlador, cujo diagrama de blocos se representa na figura 2, com recurso ao software Matlab, é necessário identificar a respetiva função de transferência em malha aberta, $G_{1ma}(s)$:

$$G_{1ma}(s) = k_p \times \frac{\frac{1}{ms}}{1 + \frac{k_d}{ms}} \times \frac{1}{s} = \frac{k_p}{s(ms + k_d)} = \frac{\frac{k_d}{m}}{s(s + \frac{k_d}{m})} \quad (45)$$

Com $k_d = 3$ e $m = 2$, tendo estes valores sido escolhidos arbitrariamente com a única restrição de serem positivos, conforme requerido no guia de laboratório, a função rlocus do MatLab fornece o lugar geométrico das raízes (LGR) representado na figura 4.

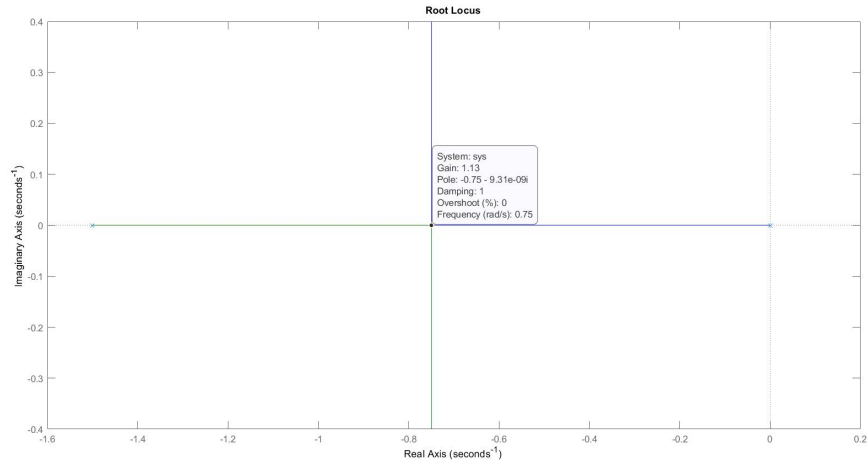


Figura 4: Lugar Geométrico das Raízes do Sistema Correspondente ao Primeiro Controlador.

O LGR mostra que o sistema possui pólos no eixo real quando k_p possui valores positivos reduzidos. O ganho $k_p = 1.13$ corresponde a uma situação limite, em que o sistema apresenta, apenas, um pólo real duplo. Para ganhos superiores, o coeficiente de amortecimento deixa de ter o valor máximo de $\xi = 1$ e, conseqüentemente, o sistema passa a ter dois pólos complexos conjugados. À medida que o ganho k_p aumenta, a parte imaginária dos pares de pólos conjugados tende, em módulo, para $+\infty$; no entanto, a sua parte real permanece constante, deslocando-se os pólos segundo uma reta vertical. Como, por maior que seja $k_p > 0$, o LGR se situa completamente contido no semiplano complexo esquerdo, conclui-se que o sistema é estável independentemente do valor de k_p .

Para avaliar o efeito do ganho derivativo k_d , fixou-se o valor de m em $m = 2$ e selecionando mais dois valores de k_d apresentando-se nas figuras 5 e 6 os LGRs relativos a $k_d = 1$ e a $k_d = 6$, respetivamente.

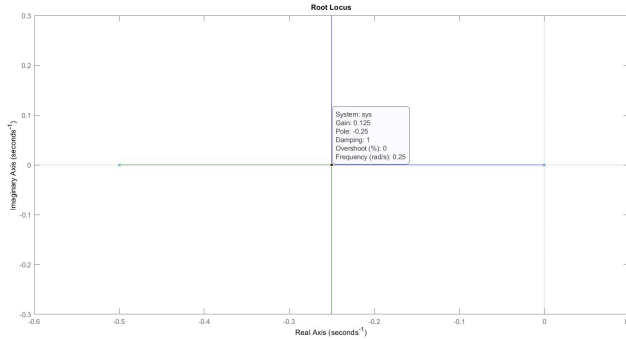


Figura 5: LGR do Sistema do Primeiro Controlador para $k_d = 1$.

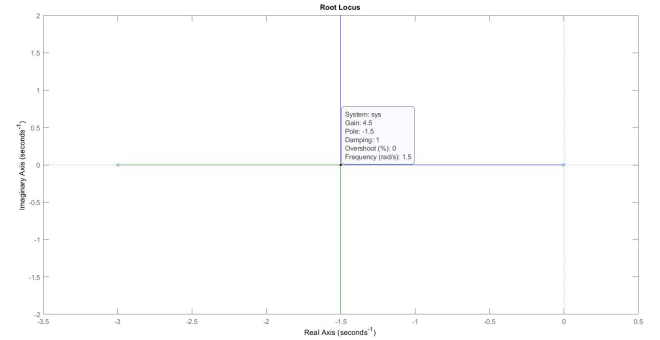


Figura 6: LGR do Sistema do Primeiro Controlador para $k_d = 6$.

Os gráficos são semelhantes ao obtido para $k_d = 3$, variando apenas ao nível da localização do pólo duplo e, conseqüentemente, dos pólos complexos conjugados. Verifica-se, assim, que o pólo duplo e a reta vertical do LGR se deslocam para a esquerda quando k_d diminui (de que é exemplo o caso em que $k_d = 1$), ou, reciprocamente, que se deslocam para a direita quando k_d aumenta (como se vê no gráfico para $k_d = 6$). Como tal, se se quiser aumentar a estabilidade do sistema, dever-se-á diminuir o valor de k_d .

3 Height Dynamics

A componente experimental aqui discutida pretende avaliar a dinâmica do quadrrorotor no que respeita a altitude. Com este fim, na alínea 3.1 começa-se por testar a resposta do sistema ao pedido de diferentes degraus para diferentes ganhos; posteriormente, na alínea 3.2 os dados obtidos são utilizados para estimar os coeficientes do modelo proposto na alínea 2.10; finalmente, os pólos das funções de transferência estimadas são utilizados para criar um *root-locus* do sistema e o resultante é comentado.

3.1 Resposta a diferentes ganhos e degraus

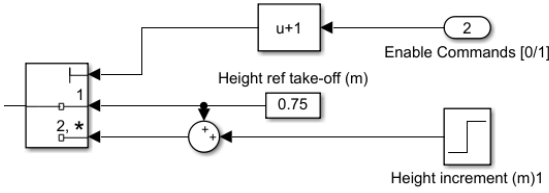
Com o objetivo de se estudar a dinâmica do quadricóptero as entradas presentes na tabela 1 foram testadas no laboratório, assim como simuladas com o auxílio do modelo *ARDroneHoverSim.slx* presente no *DevKit_Lab1.zip* disponibilizado na página da cadeia.

k_p [s^{-1}]	$u(t_{\geq t_0})$ [m]
0.5	1
1	0.8
2	0.3
3	0.2

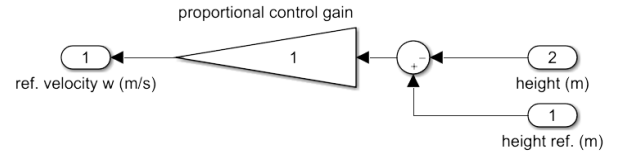
Tabela 1: Valores dos ganhos proporcionais k_p e degraus utilizados.

É possível verificar que, para ganhos maiores, os valores do degraus, $u(t)$, propostos são menores. Quando se utilizam ganhos mais elevados os pedidos aos atuadores vão ser também superiores, dado o mesmo erro entre a posição desejada e a efetiva; assim, existe o risco de saturar os controles, que são reais e por isso têm limites de atuação, o que resultaria na interferência de não linearidades na identificação do sistema. Para além disso, com o sistema colocado em hipótese na alínea 2.10, o *overshoot* e o tempo de estabelecimento aumentarão, assim como a possibilidade de instabilidade, não prevista teoricamente mas observável após a realização do *root-locus* na alínea 3.3. Então, diminuir o valor do degrau para ganhos maiores permite mitigar estes problemas.

As alterações realizadas nos modelos providenciados para a simulação e controlo do quadricóptero encontram-se nas figuras 7, consistindo na introdução de um degrau na altitude de referência e na mudança do *proportional control gain*; a altitude de referência, $h_0 = 0.75m$ foi passada para dentro do bloco de controlo.



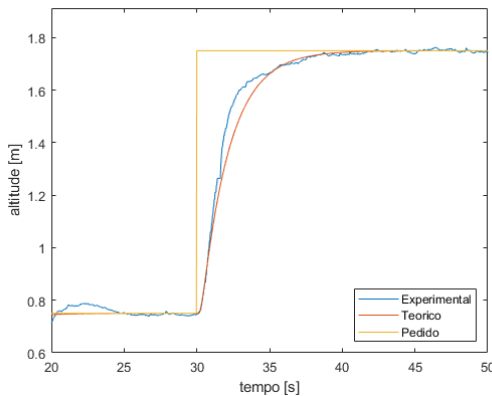
(a) Esquema para a implementação do degrau $u(t)$.



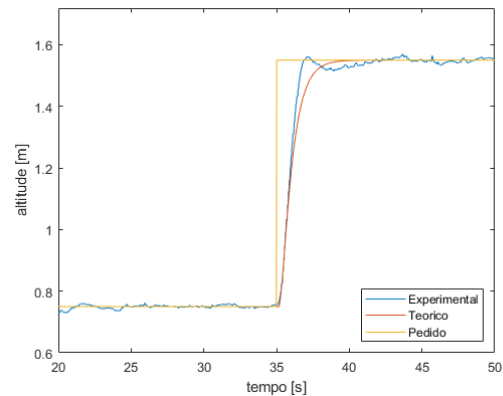
(b) Bloco de controlo P, com $k_p = 1s^{-1}$.

Figura 7: Esquemas no *Simulink* para o controlo de altitude.

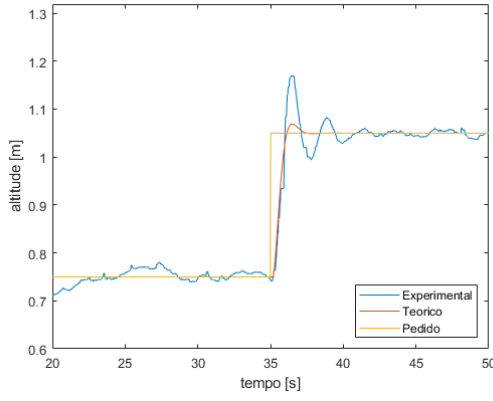
Os resultados obtidos durante os voos, assim como os comandos, podem ser encontrados no conjunto de figuras 8, para cada um dos ganhos e degraus propostos. O tempo dos gráficos começa aos 30s dado não existir interesse nos dados até aí, uma vez que o controlador projetado não está a ser usado até à ativação dos comandos.



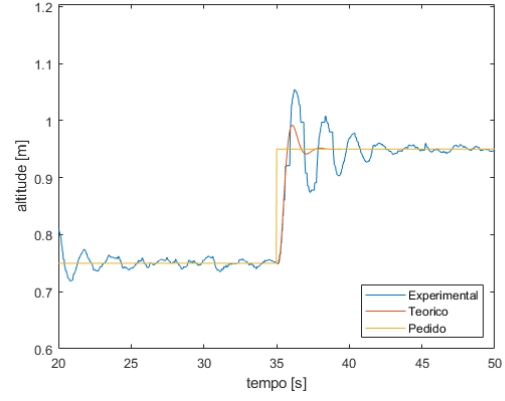
(a) $h(t)$ com $k_p = 0.5s^{-1}$.



(b) $h(t)$ com $k_p = 1s^{-1}$.



(c) $h(t)$ com $k_p = 2s^{-1}$.



(d) $h(t)$ com $k_p = 3s^{-1}$.

Figura 8: Gráficos da resposta simulada e experimental a um degrau no pedido de altitude para diferentes k_p .

Dos resultados obtidos, o único que se pode considerar mais enquadrado nos valores simulados é o apresentado na figura 8a, que corresponde ao menor k_p experimentado; na imagem 8b consegue-se ver que, para uma resposta simulada perto de criticamente amortecida o quadricóptero respondeu de uma forma sub amortecida, com oscilações visíveis, embora tenha tido um tempo de subida menor do que o esperado; para ambos os k_p mais elevados observa-se um *overshoot* consideravelmente superior ao já previsto e estabelecimento menor, partilhando com a simulação o tempo de subida.

Os resultados experimentais apresentam algum ruído, o que seria de esperar tendo em consideração a existência de perturbações quer ao nível do ambiente experimental (*ground effect*) ao nível do sistema em si (centro de massa do quadricóptero variável, resistência desigual provocada pela proteção que não está completamente fixa) dos controlos (hélices flexíveis que não produzem torque e força constante) ou ao nível dos sensores e a respetiva captação da posição do quadricóptero. Mesmo assim, os resultados aparentam ser bons o suficiente, distinguindo-se a resposta do ruído.

3.2 Identificação do sistema em malha fechada

Com base nos resultados obtidos na alínea 3.2 é possível, com a utilização da *System Identification toolbox* do Matlab, a identificação dos parâmetros da função de transferência que regem a resposta do sistema em malha fechada para cada um dos 4 ganhos testados. É de notar que se forçou o sistema de identificação a obter resultados que correspondessem à função de transferência

$$T(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{kab}{(s+a)(s+b)},$$

sem nenhum zero e com dois pólos estáveis, uma vez que é a natureza da sua resposta, como observado nas figuras 8. No caso de os pólos degenerarem, isto é, a e b não forem conjugados, as frequências naturais de cada parte da resposta serão esses mesmos pólos e ω_n deixa de fazer sentido fisicamente.

k_p	ω_n [rad s ⁻¹]	ξ [%]	k	a [rad s ⁻¹]	b [rad s ⁻¹]	<i>overshoot</i> [%]	T_s	<i>fit</i> [%]
0.5	-	100	0,9895	0,7317	2,4404	0	5,8339	95,86
1	1,7687	73,90	0,9903	1,3071 - 1,1916i	1,3071 + 1,1916i	3,1866	3,2942	95,85
2	2,2820	33,40	0,9878	0,7622 - 2,1509i	0,7622 + 2,1509i	32,8389	4,8632	87,81
3	2,7499	20,02	0,9905	0,5505 - 2,6942i	0,5505 + 2,6942i	52,6222	7,1216	82,45

Tabela 2: Estimação dos coeficientes das funções de transferência em malha fechada para diferentes ganhos.

Com os resultados presentes na tabela 2 comprova-se que para $k_p = 0.5s^{-1}$ a resposta é sobre amortecida mas para as restantes já existem oscilações, com o fator de amortecimento diminuindo significativamente, até 20%, implicando um *overshoot* cada vez maior, chegando mesmo a aos 52%, e o tempo de estabelecimento T_s a aumentar, comprovado pela observação das figuras 8; o ganho estático estimado também se encontra de acordo com as expectativas, bastante perto de 1, o que, tendo em atenção a presença de ruído nos resultados é bom. Para além disso, a correspondência entre os *fits* e os dados experimentais é elevada em todos os casos, chegando a ser 96% para os k_p menores e caindo apenas para 82% no caso de $k_p = 3s^{-1}$, o que, não sendo perfeito, considera-se aceitável face ao ruído mencionado e às aproximações feitas no modelo forçado.

3.3 *Root-locus* do modelo experimental

Com base nos pólos presentes na tabela 2 é possível determinar pontos do *root-locus* para o sistema em função de k_p .

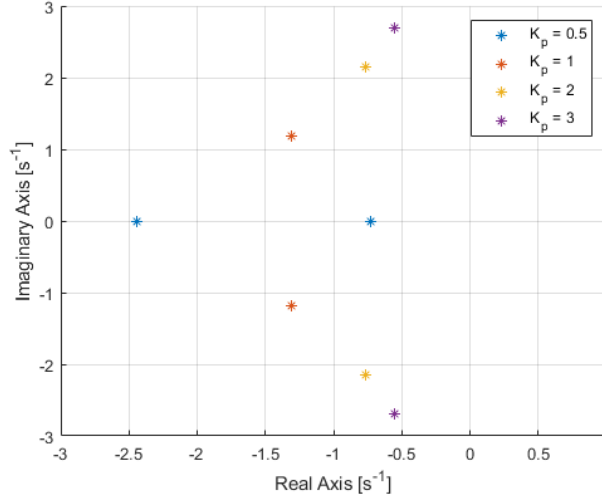


Figura 9: Pontos experimentais do *root-locus* para a dinâmica de altitude.

Analisando a figura 9, observa-se que o sistema não se comporta como o teoricamente previsto na alínea 2.10. Considerando-se o modelo da parte teórica, seria expectável que, para k_p sucessivamente maiores, os pólos complexos se deslocassem paralelamente ao eixo imaginário, como é patente na figura 4. Em contraste, a imagem obtida com os resultados experimentais mostra que, após os pólos passarem a ser complexos conjugados eles aproximam-se do eixo imaginário, para além de se afastarem do eixo real. A implicação que estes resultados têm é da existência da possibilidade de, para um k_p suficientemente elevado, o sistema se tornar instável, ou seja, com os pólos no semiplano complexo direito; para além disso o tempo de estabelecimento tende a diminuir com o aumento de k_p a partir do momento em que os pólos passam a ser conjugados.

Uma justificação plausível para esta discrepância entre o teorizado e experimentalmente obtido é a existência de um atraso no *feedback* do sistema que, podendo ser modelado com blocos específicos para o efeito, não é, mesmo assim, representado fielmente nas simulações e não foi considerado na parte teórica.

A fim de colmatar esta diferença, podem-se introduzir os efeitos aproximados deste atraso no *root-locus* através de uma aproximação de Padé, que consiste na aproximação do efeito através de funções racionais. Considerando um atraso de T segundos e a sua transformada de Laplace e^{-sT} é possível obter a sua aproximação de Padé para a função de transferência e incluí-la no *root-locus*, simulando melhor o comportamento esperado do quadrrirrotor.

4 Pitch Dynamics

Esta parte laboratorial tem como objetivo determinar a dinâmica do ângulo de picada, θ . Assim, a secção começa por apresentar as respostas do sistema para um conjunto de respostas forçadas sinusoidais na alínea 4.1, seguindo-se da sua análise, na secção 4.2, com diagramas de Bode para determinar os parâmetros do modelo arbitrado para descrever o sistema em malha fechada e, na alínea 4.1 impõe-se um retângulo de atuação a θ , sendo estes resultados comparados com o esperado da avaliação anterior.

4.1 Resposta a diferentes sinusioides

Tal como na alínea 3.1, foi necessária a modificação do modelo disponibilizado. Apesar de se ter automatizado o processo da geração da função de entrada, o diagrama 10 encapsula a mudança essencial: a alteração de θ_{ref} para a entrada gerada, em oposição à saída do bloco controlador.

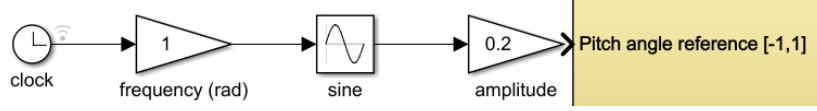


Figura 10: Esquema da implementação de $\theta_{\text{ref}} = 0.2 \sin(t)$

Os resultados obtidos para diferentes excitações, assim como informação sobre as mesmas, estão disponíveis na tabela 3.

ω [rad s ⁻¹]	Amplitude de entrada, A [rad]	Amplitude de saída, B [rad]	A/B [dB]
1	0.100	0.0417	-7.607
2	0.200	0.1134	-4.926
2.5	0.200	0.1437	-2.872
3	0.150	0.1125	-2.493
3.5	0.100	0.0779	-2.160
4	0.200	0.1393	-3.136
4.5	0.150	0.1101	-2.680
5	0.200	0.1110	-5.108
5	0.200	0.1266	-3.958
6	0.200	0.1139	-4.880
7	0.250	0.1218	-6.228
8	0.300	0.1209	-7.880
10	1.000	0.1225	-18.205
15	1.000	0.0623	-24.013
20	2.000	0.0339	-35.294

Tabela 3: Valores das amplitudes e ganhos obtidos para diferentes frequências. ω . de excitação.

É importante observar que o intervalo de tempo entre amostras é 0.03s, ou seja, a frequência de amostragem é de, aproximadamente, 210rad s⁻¹, o que, apesar de possibilitar a amostragem correta da resposta, de acordo com o teorema de Nyquist, faz com que apenas existam aproximadamente 10 pontos para cada período de resposta no caso em que ω é 20rad s⁻¹, condicionando uma medição exímia dos máximos. Para além disto, o intervalo de tempo entre comandos enviados é idêntico, 0.03s, significando, na prática, que a entrada do sistema é distorcida para as maiores frequências testadas, sobretudo quando ω é 20rad s⁻¹; o facto de para estas frequências também se ter de aumentar a amplitude da entrada magnifica essa distorção. Por esse motivo os resultados obtidos para as mais altas frequências, principalmente para $\omega = 20\text{rad s}^{-1}$ devem ser tomados com precaução.

4.2 Identificação do sistema em malha fechada

Com base nos resultados apresentados na tabela 3 da alínea anterior é possível, com a utilização da função *nlinfit* do Matlab, encontrar os parâmetros que definam a função de transferência da dinâmica em malha fechada. Em particular, foram testadas três funções de transferência diferentes, todas elas com pólos no semiplano complexo esquerdo:

$$T_1(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad T_2(s) = \frac{k(s+a)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad T_3(s) = \frac{k(s+a)}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s+b)} \quad (46)$$

em que T_1 é a função mais simples, com apenas um par de pólos, sugerida durante a realização do laboratório, T_2 possui dois pólos e um zero, tal como indicado para utilizar no guia laboratorial, e T_3 adiciona um pólo a T_2 , fruto da observação do resultado do *fitting* presente nas imagens 11.

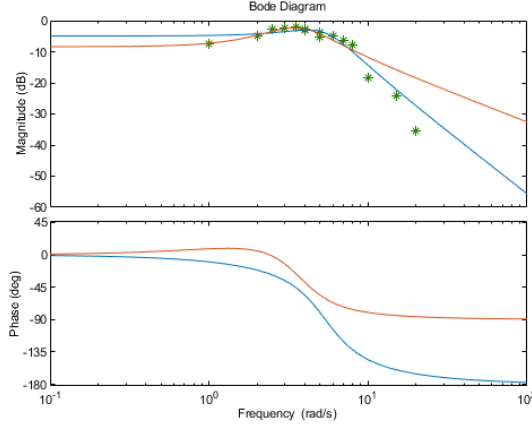
As funções utilizadas para a descoberta dos parâmetros é o módulo das respetivas funções de transferência que se encontram nas equações 46,

$$|T_1(\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}}$$

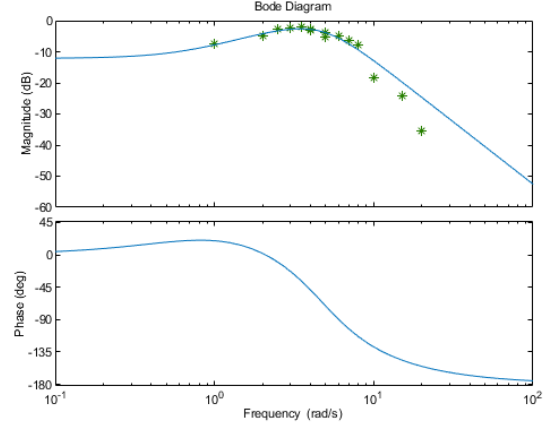
$$|T_2(\omega)| = \frac{k\sqrt{\omega^2 + a^2}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}}$$

$$|T_3(\omega)| = \frac{k\sqrt{\omega^2 + a^2}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}\sqrt{\omega^2 + b^2}}$$

em que os parâmetros são k , ω_n , ξ , a e b . Os resultados para estas três funções de transferência podem ser consultados na tabela 4 e, graficamente, nas figuras 11.



(a) Bode plots para T_1 a azul e T_2 a laranja.



(b) Bode plot para T_3 .

Figura 11: Gráficos de Bode para T_1 , T_2 e T_3 , sobrepostos aos pontos experimentais.

Observando a figura 11a, percebe-se o porquê da adição de um terceiro pólo à função de transferência T_2 , sugerida pelo guia: enquanto T_2 consegue acompanhar geralmente o declive para altas frequências, ou seja, $\omega \in \{10; 15; 20\} \text{ rad s}^{-1}$ deixa o ganho previsto para baixas frequências, notavelmente $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ acima do testado em laboratório; por outro lado T_1 tem o comportamento oposto, aproximando bem para ω 's baixos mas, tendo apenas dois pólos, não consegue obter o declive elevado, de aproximadamente -40 dB dec^{-1} para as frequências mais elevadas. A adição de um pólo extra permite conciliar estas duas realidades, existindo um zero que impulsiona o ganho para as médias frequências, podendo-se baixar $|T_3|$ para ω 's reduzidos e, ao mesmo tempo para ω 's elevados, ter o decréscimo de 40 dB por década, visível na figura 11b.

	$k [\text{rad}^2 \text{s}^{-2}]$ ou $[\text{rad s}^{-1}]$	$\omega_n [\text{rad s}^{-1}]$	$\xi [\%]$	$a [\text{rad s}^{-1}]$	$b [\text{rad s}^{-1}]$	MSE $[\%]$
T_1	16.458	5.386	44.755	-	-	0.703
T_2	2.342	3.711	48.123	2.243	-	0.604
T_3	23.581	4.802	66.737	0.704	2.907	0.382

Tabela 4: Valores dos parâmetros obtidos para T_1 , T_2 e T_3 .

Com base nos resultados numéricos da tabela 4 é possível concluir que T_3 é o tipo de função de transferência, dos três escolhidos, que melhor aproxima os dados experimentais, tal como graficamente previsto, seguindo-se o modelo T_2 mas, no entanto, todos eles possuem erros médios baixos, abaixo de 1% , indicando que, à partida, qualquer um destes modelos é uma boa aproximação.

Quanto às constantes, percebe-se que, independentemente da função de transferência escolhida, ξ é sempre menor que um, pelo que o par de pólos é complexo; ω_n varia entre 5.39 e 3.71 rad s^{-1} para T_1 e T_2 , estando então sempre na mesma ordem de grandeza; k , por outro lado, varia significativamente, desde 2.342 rad s^{-1} para T_2 a $23.58 \text{ rad}^2 \text{ s}^{-2}$ para a última função de transferência; por fim, tanto a e b são menores que ω_n , com os zeros das respetivas funções de transferência a surgirem primeiro, depois o pólo isolado, se for esse o caso, e finalmente o par de pólos complexos.

Para além disso, nota-se que as margens de ganho e fase são infinitas para qualquer um dos casos, uma vez que a fase é sempre diferente de 180° e $\max(|T|) < 0 \text{ dB}$.

4.3 Resposta a um retângulo

Após a obtenção da resposta em frequência do quadrirrotor feita na secção anterior, foram obtidas algumas funções de transferência experimentais que podem modelar a resposta do sistema em relação a um pedido do ângulo de picada. Nesta secção, pretende-se então realizar um pedido do tipo retângulo e comparar a resposta obtida com o que seria esperado, tendo em conta as diferentes funções de transferência.

Como referência para o θ , pediu-se um valor de 0.2rad a partir dos 15s de com duração de 3s, voltando de seguida a 0. O esquema implementado no *Simulink* para efetuar este pedido encontra-se na figura 12.

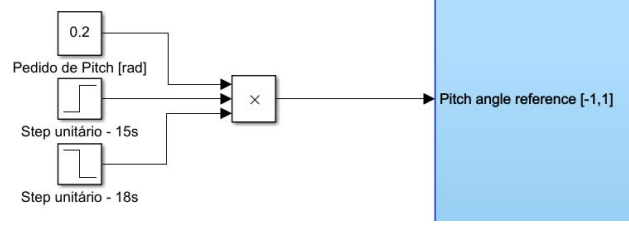


Figura 12: Esquema da implementação de um pedido de retângulo de θ .

A resposta experimental do sistema, em conjunto com as esperadas de acordo com as funções de transferência da equação 46 e o pedido de θ estão representados graficamente na figura 13.

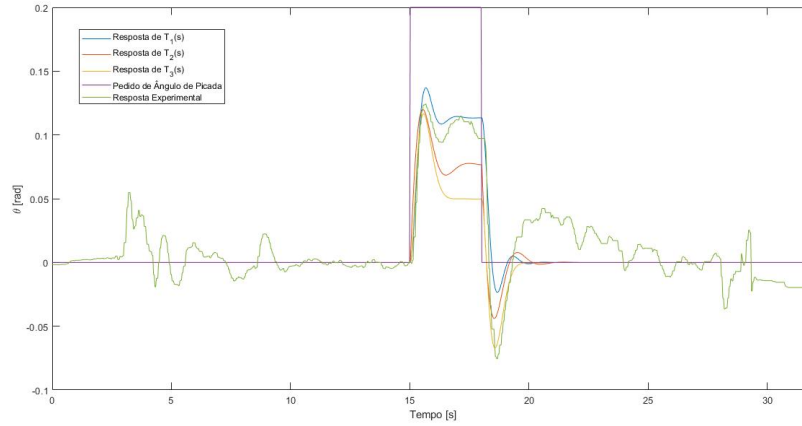


Figura 13: Resposta de $T_1(s)$, $T_2(s)$, $T_3(s)$ e experimental a um pedido de retângulo de θ

Como já é sabido dos dados das diferentes funções de transferência, expostos na tabela 4, $T_1(s)$, $T_2(s)$ e $T_3(s)$ têm um fator de amortecimento crescente mas menor do que 1, ou seja, devem todas apresentar uma *overshoot*, com o valor de pico maior em $T_1(s)$ e menor em $T_3(s)$, tal como se verifica no gráfico 13.

Também é visível que nem as respostas simuladas, nem a experimental seguem o pedido efetuado. Tal é esperado, uma vez que os seus ganhos estáticos são menores do que 1, logo o valor final de θ será menor do que o pedido. Também se verifica que os 3 segundos do pedido são suficientes para as respostas da função de transferência tenderem para o seu respetivo valor final que se encontra calculado na equação 47.

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_1(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} 0.2T_1(s) = 0.2 \frac{k}{\omega_n^2} = 0.2 \frac{16.458}{5.386^2} = 0.113 \text{ rad} \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_2(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} 0.2T_2(s) = 0.2 \frac{ka}{\omega_n^2} = 0.2 \frac{2.342 \cdot 2.243}{3.711^2} = 0.076 \text{ rad} \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_3(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} 0.2T_3(s) = 0.2 \frac{ka}{\omega_n^2 b} = 0.2 \frac{23.581 \cdot 0.704}{4.802^2 \cdot 2.907} = 0.050 \text{ rad}
 \end{aligned} \tag{47}$$

De facto, as respostas simuladas tendem para os seus respetivos valores de ganho estático. Já a resposta obtida experimentalmente também apresenta o *overshoot* característico de um $\xi < 1$, mas não aparenta tender já para um valor estático após os 3 segundos. Tal é plausível porque, uma vez que na vida real o quadrirrotor está sujeito a mais influências

externas, ou até interferências aerodinâmicas entre os rotores, é normal que também demore mais tempo a estabilizar. No entanto, devido ao espaço limitado, não seria possível efetuar o pedido de $\theta = 0.2\text{rad}$ até que θ ficasse aproximadamente constante, uma vez que isso implicaria que o quadrirrotor se continuaria a deslocar no mesmo sentido.

Considerando isto, e comparando com as respostas previstas, a resposta experimental aquando do pedido de escada de 0.2rad assemelha-se mais à função de transferência $T_1(s)$, mas com um ganho menor e oscilação posterior ao primeiro *overshoot* maior. No entanto, tal já não se verifica quando o pedido do ângulo de picada altera dos 0.2rad para 0 . Nesse caso, em termos de ganho, o resultado experimental aproxima-se mais da função $T_3(s)$. Contudo, quando θ retorna do primeiro pico negativo para 0 , continua a apresentar oscilação em torno de 0 , característico apenas das funções de transferência $T_1(s)$ e $T_2(s)$. Dito isso, é de notar que, se se partisse dos resultados experimentais para resposta à subida do retângulo, a sua descida não teria esta oscilação tão prolongada no tempo, existindo fatores em jogo não contabilizados, nomeadamente forças não modeladas, atrasos no controlo e a captação dos alguns dados por meio de *optical flow*, o que não é ótimo para um controlo exato. Portanto, em geral pode dizer-se que a resposta experimental a este pedido aproxima-se mais da função de transferência $T_1(s)$, o que contradiz a análise em frequência realizada na alínea 4.2. Também é destacável a presença de ruído, pelos mesmos motivos já identificados na secção 3.1.

5 Conclusão

No início da análise teórica, na secção 2, foram calculadas as equações da dinâmica e cinemática para os referenciais do corpo e inercial, em função dos estados e da entrada de controlo. Também foi calculado o ponto de equilíbrio e, então, as equações da dinâmica foram linearizadas, permitindo analisar o sistema algebricamente, com recurso à transformada de Laplace. Como tal, determinaram-se as funções de transferência para as coordenadas de posição e os ângulos de Euler, estabelecendo, em particular, a relação entre a variação destes ângulos e as velocidades e posições laterais e longitudinais. Verificou-se, ainda, que o ângulo de guinada de equilíbrio não afetava de forma alguma a posição do quadrirrotor.

Estudaram-se, ainda, duas configurações possíveis para o controlador de altitude do quadrirrotor, tendo-se calculado as funções de transferência dos sistemas correspondentes e discutido as vantagens e desvantagens de cada implementação. Para terminar a análise teórica, aprofundou-se o estudo do primeiro dos controladores comparados, averiguando a forma como os ganhos proporcional e derivativo do sistema respetivo influenciavam a localização dos pólos da sua função de transferência no plano complexo.

Experimentalmente foi possível avaliar o comportamento real do quadrirrotor, observando que as aproximações teóricas efetuadas, apesar de não serem exatas, terem um grau de concordância aceitável. Foi verificada também a presença constante de ruído nas respostas medidas, o que sendo expectável não deixa de ser uma diferença com significância para os modelos teóricos utilizados.

Na secção 3, dedicada ao estudo do controlo da altitude, foram comparadas com sucesso as respostas esperadas, através de simulações, com as que o quadrirrotor produziu no laboratório, notando-se uma clara diferença para ganhos proporcionais maiores que 1, uma vez que os polos das funções de transferência modeladoras da resposta real se deslocam para a direita no semiplano complexo esquerdo em vez de se distanciarem um do outro paralelamente ao eixo imaginário, o que significa um *overshoot* maior, tempo de estabelecimento menor e um sinal de maior instabilidade do sistema; o motivo apontado para a discrepância entre as expectativas e a realidade foi a presença de atraso no sistema, tendo sido sugerida a aproximação de Padé para as funções de transferência teóricas a fim de contabilizar este fenómeno.

O estudo da dinâmica do ângulo de picada, realizado na secção 4, possibilitou a obtenção da resposta desta parte do sistema a entradas de diferentes frequências, criando-se assim um diagrama de Bode com pontos experimentais. Com esses resultados foram obtidas e comparadas três funções de transferência diferentes para modelarem o sistema, tendo sido concluído, neste ponto, que a melhor função era aquela que tem 3 polos e 1 zero, permitindo, à partida, o acompanhamento do ganho estático e também o declive estimado para altas frequências, que será de segunda ordem. Por fim, foi estudada a resposta do quadrirrotor a um retângulo de ângulo de picada, concluindo-se aqui que, em oposição ao ponto anterior que a função de transferência T_1 , com apenas dois polos, é a que mais se aproxima do ganho estático do sistema real, tendo-se também observado, no entanto, que qualquer uma das aproximações não coincidia com resposta depois do primeiro pico, em que o quadrirrotor continua a oscilar ainda durante os três segundos de duração da entrada.

Em geral, pode-se concluir a relevância deste laboratório para um conhecimento mais aprofundado dos modelos teóricos estudados na unidade curricular, das aproximações realizadas na sua adaptação para corresponderem ao fenómenos reais e do comportamento de um quadrirrotor na realidade, verificando-se semelhanças e diferenças face ao previsto, assim como ganhando intuição e experiência na manipulação do quadrirrotor para a sua utilização em projetos futuros, servindo assim como uma introdução ideal ao ambiente laboratorial.