

Instituto Superior Técnico

Mestrado em Engenharia Aeroespacial

## Aeronaves Robotizadas

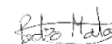
2021/2022 – Primeiro Semestre

### Laboratório 2

#### Grupo 10

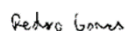
1. N.º:89703 Name: Pedro Matos

Signature:



2. N.º: 89705 Name: Pedro Gomes

Signature:



3. N.º: 90222 Name: Bernardo Albano

Signature:



Professora: Rita Cunha

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modelagem e Caracterização dos Sensores</b>	<b>2</b>
2.1	Experiência A	3
2.2	Experiência B	5
2.3	Experiência C	6
2.4	Emulação de um Inclinômetro apartir dos Acelerómetros	7
<b>3</b>	<b>Filtros de Kalman</b>	<b>8</b>
3.1	Introdução Teórica	8
3.1.1	Variação das Matrizes $Q$ e $R$	9
3.1.2	Complementaridade	9
3.2	Ângulo de Picada	10
3.2.1	Design e Implementação do Filtro sem Bias	10
3.2.2	Design e Implementação do Filtro com Bias	12
3.3	Ângulo de Rolamento	14
3.3.1	Design e Implementação do Filtro sem Bias	14
3.3.2	Design e Implementação do Filtro com Bias	16
<b>4</b>	<b>Estimação Integrada dos Ângulos de Picada e de Rolamento</b>	<b>17</b>
4.1	Introdução Teórica	17
4.2	Design do Filtro de Kalman	18
4.3	Implementação do Filtro de Kalman	19
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>20</b>

## 1 Introdução

Na realização do laboratório e correspondente relatório pretendeu-se desenvolver, implementar e analisar soluções de estimação de certas variáveis de movimento de um quadri-rotor. O objetivo é aprofundar os conhecimentos lecionados nas aulas teóricas de Aeronaves Robotizadas.

Iniciou-se pela modelação e caracterização dos sensores de movimento utilizados na orientação, navegação e controlo do drone. Foram ainda estimados os ângulos de picada e de rolamento. Isto foi possível graças à recolha e tratamento dos dados obtidos por estes sensores, durante os testes experimentais realizados nas aulas de problemas da cadeira.

De seguida, desenvolveram-se e implementaram-se diferentes filtros de Kalman, em estado estacionário, com e sem a consideração do bias associado aos sensores. As propriedades e os comportamentos dos filtros elaborados foram comparados e analisados, tal como a sua complementaridade.

Por fim, com base no documento referido no enunciado laboratorial<sup>[1]</sup>, foi estudada e implementada uma solução avançada que permite estimar a atitude do drone (os ângulos de picada e rolamento), bem como os bias dos giroscópios, simultaneamente.

## 2 Modelagem e Caracterização dos Sensores

Com o objetivo de modelar e caracterizar os sensores do drone a foram realizadas 4 experiências, conforme descritas no enunciado da atividade laboratorial. Os sensores em análise são 3 acelerómetros alinhados com os 3 eixos do drone e 3 giroscópios axiais alinhados com os mesmos 3 eixos. Os dados destes sensores foram recolhidos a partir do *simulink* usando a opção “(3) Replay from stored data” do programa “start\_here\_NAV.m”.

### Caracterização dos acelerómetros e giroscópios

Os dados recolhidos dos **acelerómetros** são dados que, face à aceleração do drone, apresentam uma dinâmica que pode ser aproximada por:

$$a_i = k_a a_{sen_i}, \quad i = \{x_B, y_B, z_B\} \quad (1)$$

Onde  $a_i$  é a aceleração relativa ao eixo  $i$  no referencial do drone,  $a_{sen_i}$  o valor registado no respetivo acelerómetro e  $K_a$  o ganho necessário para ajustar o valor medido. Assim sendo o fator  $K_a$  é o primeiro fator referente aos acelerómetros que deverá ser encontrado.

Pare se encontrar este valor foram usados os dados dos acelerómetros recolhidos na experiência A.

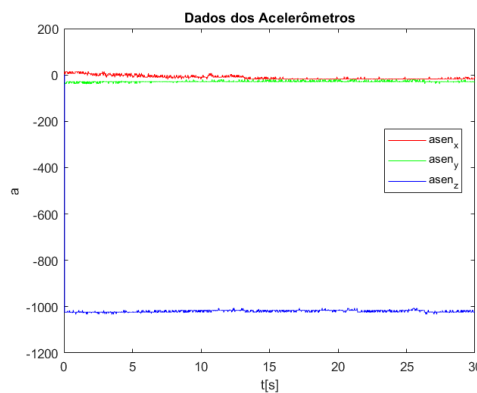


Figura 1: Dados não processados dos acelerómetros.

<sup>1</sup>P. Batista, C. Silvestre, e P. Oliveira, "Partial Attitude and Rate Gyro Bias Estimation: Observability Analysis, Filter Design, and Performance Evaluation," International Journal of Control, vol. 84, no. 5, pp. 895-903, Maio 2011.

Uma vez que a experiência A foi feita a recolha de dados na situação de repouso a aceleração sentida no drone foi:

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad a_z = -g = -9.81 \quad (2)$$

Assim sendo,  $k_a = 0.009622$ .

Os dados recolhidos dos **giroscópios** são dados que, face à posição angular do drone, apresentam uma dinâmica que pode ser aproximada por:

$$\dot{\alpha}_i = k_{gir} gir_i, \quad i = \{x_B, y_B, z_B\} \quad (3)$$

Onde  $\dot{\alpha}_i$  é a velocidade angular relativa ao eixo  $i$  no referencial do drone,  $gir_i$  o valor registado no respetivo giroscópio e  $K_{gir}$  o ganho necessário para ajustar o valor medido. Assim sendo o fator  $K_{gir}$  é o primeiro fator referente aos giroscópios que deverá ser encontrado.

Pare se encontrar este valor foram usados os dados dos giroscópios recolhidos na experiência D uma vez que nesta o rolamento é mais acentuado. Os dados do giroscópio alinhado com o eixo  $x_B$  foram comparados com o rolamento do drone. Para tal os dados do sensor foram integrados.

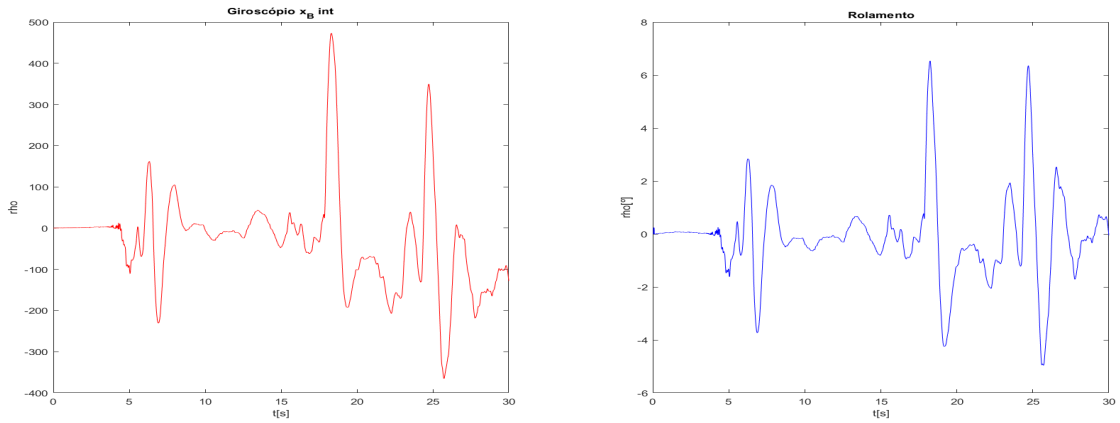


Figura 2: Dados não processados do Giroscópio

Assim sendo,  $K_{gir} = 0.01568$ .

## 2.1 Experiência A

Na primeira experiência, procedeu-se à análise da situação de recolha de dados em repouso no solo. Foram calculadas as médias e covariâncias dos dos sinais medidos nos acelerómetros e giroscópios cortando os valores iniciais e finais de modo a remover possíveis interferências relacionadas com a inicialização dos sensores.

### Acelerómetros

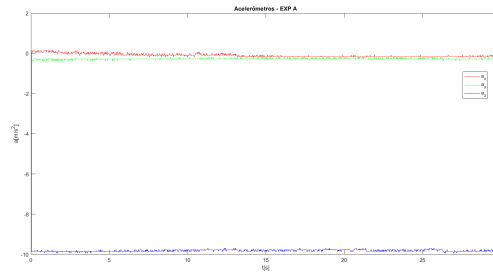


Figura 3: Aceleração medida nos acelerômetros - Exp A

Experiência A	$x_B$	$y_B$	$z_B$
$\mu \text{ [m/s}^2\text{]}$	-0.1405	-0.2632	-9.7936
$\sigma^2 \text{ [(m/s}^2\text{)}^2\text{]}$	0.0023	0.0008	0.0014

Tabela 1: Valores Médios e Variâncias dos Acelerômetros - Exp. A

Tal como seria de esperar, na experiência onde os dados foram recolhidos em repouso com os motores desligados, o valor médio das acelerações é próximo de zero nas direções  $x_B$  e  $y_B$  e  $-g$  na direção  $z_B$ . A covariância é próxima a zero para as 3 acelerações, conclui-se que sem ruído proveniente de motores ou escoamento externo o ruído interno aos próprios sensores é baixo.

## Giroscópios

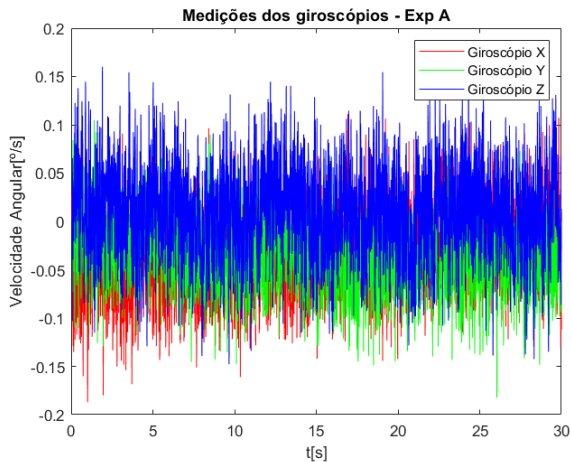


Figura 4: Velocidade angular medida nos Giroscópios - Exp A

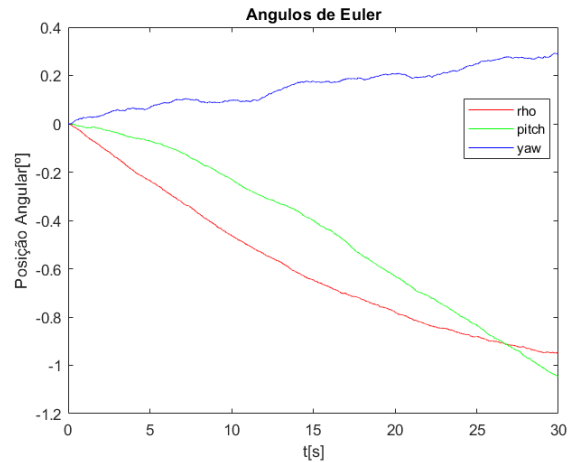


Figura 5: Ângulos resultantes da integração - Exp A

Experiência A	$x_B$	$y_B$	$z_B$
$\mu \text{ [}^\circ\text{/s]}$	-0.0280	-0.0403	0.0100
$\sigma^2 \text{ [(}^\circ\text{/s)}^2\text{]}$	0.0015	0.0012	0.0022

Tabela 2: Valores Médios e Variâncias dos Giroscópios - Exp. A

De forma semelhante aos valores medidos nos acelerômetros, os valores médios dos giroscópios são zero, o que é esperado da situação de repouso no chão. As covariâncias do sinal, representação do ruído

Gaussiano, são também aproximadamente zero. Observando o gráfico na figura 5 podemos perceber as consequências do valor médio das velocidades algures medidas não ser zero. Os ângulos têm uma evolução linear consequente da integração de um valor médio diferente de zero.

## 2.2 Experiência B

Na experiência B, analisou-se a situação em que o drone é forçado a permanecer no solo com os motores ligados. Calculou-se as médias e covariâncias dos sinais medidos nos acelerómetros e giroscópios, novamente cortando os valores iniciais e finais.

### Acelerómetros

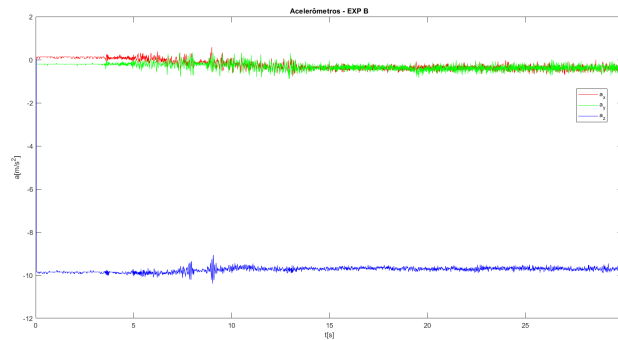


Figura 6: Aceleração medida nos acelerómetros - Exp B

Experiência B	$x_B$	$y_B$	$z_B$
$\mu [m/s^2]$	-0.3575	-0.3725	-9.6954
$\sigma^2 [(m/s^2)^2]$	0.0123	0.0188	0.0041

Tabela 3: Valores Médios e Variâncias dos Acelerómetros - Exp. B

Comparando os dados com os dados obtidos na experiência A vemos que os valores médios são semelhantes, o que é esperado pois o drone continua seguro na posição inicial. No entanto, a covariância é cerca de uma ordem de grandeza superior, tal como inicialmente previsto, uma vez que os motores são uma fonte de ruído.

### Giroscópios

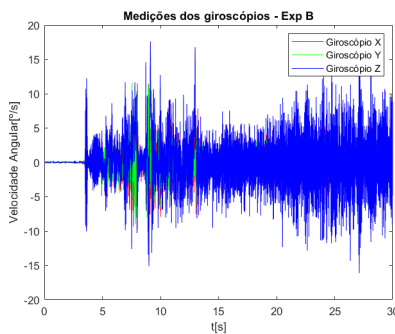


Figura 7: Velocidade angular medida nos Giroscópios - Exp B

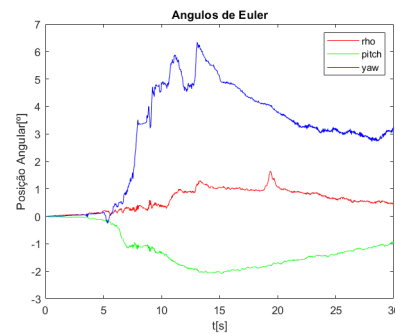


Figura 8: Ângulos resultantes da integração - Exp B

Experiência B	$x_B$	$y_B$	$z_B$
$\mu [^\circ/s]$	0.0167	-0.0026	-0.1090
$\sigma^2 [(^\circ/s)^2]$	3.7895	1.7415	13.4688

Tabela 4: Valores Médios e Variâncias dos Giroscópios - Exp. B

Comparando os dados recolhidos do giroscópio com os dados recolhidos na experiência A, notou-se um aumento do valor médio de uma ordem de grandeza. Embora em termos relativos o aumento possa ser considerado elevado, em termos absolutos os valores médios continuam próximos de zero. Por outro lado o aumento da covariância teve foi de 3 ordens de grandeza. Este aumento substancial é esperado pois as vibrações introduzidas pelos motores se fazem sentir nos sensores.

### 2.3 Experiência C

Na experiência C, deu-se a análise da situação de recolha de dados dos sensores do drone numa situação de *hover*. As médias e covariâncias foram calculadas a partir dos sinais medidos nos acelerómetros e giroscópios cortando os valores iniciais e finais de modo a remover possíveis interferências relacionadas com a inicialização dos sensores.

#### Acelerómetros

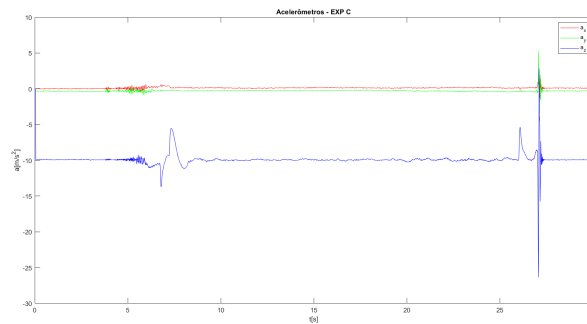


Figura 9: Aceleração medida nos acelerómetro - Exp C

Experiência C	$x_B$	$y_B$	$z_B$
$\mu [m/s^2]$	0.1339	-0.2685	-9.9443
$\sigma^2 [(m/s^2)^2]$	0.0022	0.0037	0.0092

Tabela 5: Valores Médios e Variâncias dos Acelerómetros - Exp. C

Comparando os dados com os dados obtidos na experiência A e B, vemos que os valores médios são semelhantes, o que seria de esperar, pois os ângulos de Euler do drone continuam os mesmos comparativamente às experiências anteriores. Tal como aconteceu na experiência B a covariância aumentou, no entanto a covariância foi ligeiramente inferior à covariância desta medições para o caso da experiência B.

## Giroscópios

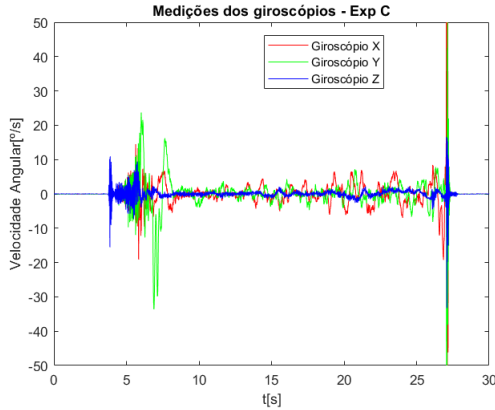


Figura 10: Velocidade angular medida nos Giroscópios - Exp C

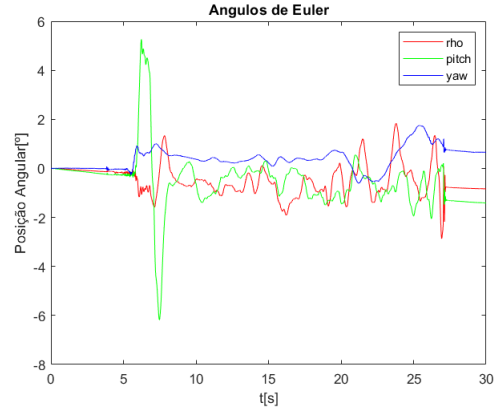


Figura 11: Ângulos resultantes da integração - Exp C

Experiência C	$x_B$	$y_B$	$z_B$
$\mu$ [ $^{\circ}/s$ ]	-0.0006	-0.0886	0.0718
$\sigma^2$ [ $(^{\circ}/s)^2$ ]	6.0743	3.1602	0.4539

Tabela 6: Valores Médios e Variâncias dos Giroscópios - Exp. C

Comparando os dados com os dados obtidos na experiência A e B, é perceptível que os valores médios são equiparáveis, aproximadamente zero, este comportamento é tal como nas experiências anteriores o drone permaneceu aproximadamente parado em hover. A covariância não diferiu muito em relação à experiência B.

Conclui-se das 3 experiências que os motores são a principal fonte de ruído nos sensores. O escoamento de ar na experiência C não se mostrou uma fonte considerável de perturbações. Como a experiência foi realizada num espaço fechado, com pouco movimento, as perturbações do ar não foram suficientemente elevadas para se fazerem sentir nos sensores. No entanto, numa situação de voo no exterior, onde o escoamento não é tão previsível, certamente que teriam uma influência mais impactante nas medições.

## 2.4 Emulação de um Inclinômetro a partir dos Acelerômetros

Nesta secção foi emulado um inclinômetro para estimar  $\rho$  ( $\phi$ ) e pitch ( $\theta$ ) a partir do acelerômetro. Como se pretende simular o inclinômetro com recurso apenas ao acelerômetro para se simplificar o problema a dinâmica do inclinômetro será considerada como função dos ângulos de Euler em funcionamento na zona próxima da situação de equilíbrio e desprezando as acelerações consequentes da deslocação do drone. Esta aproximação irá levantar problemas no funcionamento do acelerômetro como inclinômetro que serão discutidas mais à frente.

Tendo em consideração as aproximações mencionadas podemos modelar o sistema como:

$$\vec{a} = -gR^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (4)$$

A forma incremental do sistema pode ser escrita como:



$$d\vec{a} = -g \cdot dR^T \cdot e_3 = -g \cdot d \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} -d\theta \\ d\phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Para concluir, os estados do inclinómetro serão dados por:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = -g \begin{bmatrix} -d\theta \\ d\phi \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d\theta = \frac{a_x}{g} \\ d\phi = -\frac{a_y}{g} \end{cases} \quad (6)$$

Para se emular o inclinómetro foram usados os dados da experiência D para se poderem calcular ângulos com magnitude relevante, nas restantes experiências o drone encontra-se em equilíbrio pelo que os ângulos de Euler seriam próximos a zero.

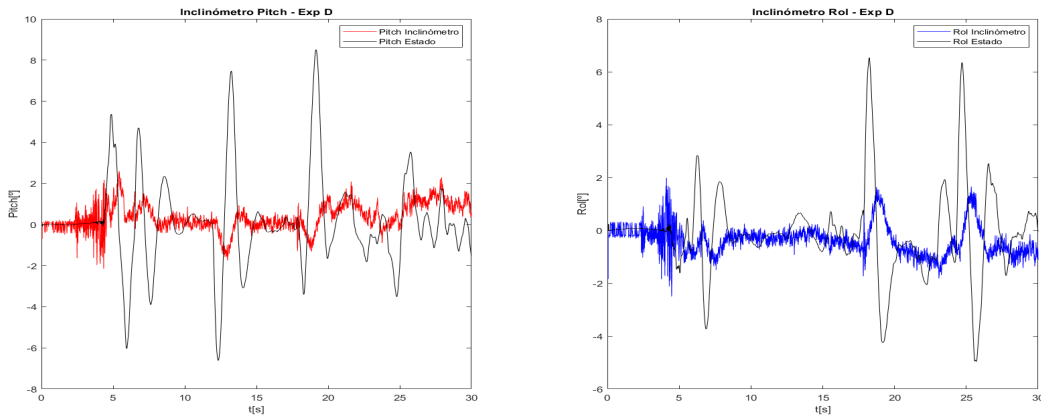


Figura 12: Dados não processados do Giroscópio

Observando os dados processados do acelerómetros para emular um inclinómetro é possível perceber-se que de facto do acelerómetro se podem obter estimativas para o rolamento  $\phi$  e picada  $\theta$  do drone, no entanto, tal como se pode observar nos gráficos com os acelerómetros em questão as estimativas são longe de serem precisas. Podem ser apontadas várias causas para erro elevado da estimativa, desde ao facto de o drone ter acelerações nos eixos do corpo devidas ao deslocamento do drone nesta experiência, ao ruído considerável face à magnitude das medições a ser realizadas ou à dinâmica dos acelerómetros que não necessariamente é proporcional aos ângulos de interesse. Em conclusão, para se obter uma estimativa do ângulo de picada e rolamento os acelerómetros podem ser usados, no entanto se medidas precisas forem necessárias recomenda-se o uso de um sistema mais sofisticado.

### 3 Filtros de Kalman

#### 3.1 Introdução Teórica

O filtro de Kalman é um algoritmo ótimo de processamento recursivo de dados. Partindo de medições realizadas na presença de incerteza e ruído, o algoritmo permite chegar a estimativas bastante precisas de variáveis desconhecidas. O algoritmo funciona como estimador de estados, prevendo os futuros estados do sistema e iterativamente corrigindo as suas previsões com base nos estados conhecidos. O filtro de Kalman também é denominado de LQE (*Linear Quadratic Estimation*).

As equações que descrevem o sistema a observar são as seguintes:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + v \\ y = Cx + Du + n \end{cases} \quad (7)$$

$v$  corresponde ao ruído do processo e  $n$  corresponde ao ruído da medição. Ambos os ruídos podem ser considerados gaussianos com valor esperado nulo e covariâncias  $Q$  e  $R$ , respetivamente. Partindo destas equações do estado, o observador do filtro de Kalman é da forma (considerando que a matriz  $D$  é nula):

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \quad (8)$$

Nesta expressão,  $L$  é o valor do ganho de Kalman e  $\hat{x}$  é o valor da estimativa do estado  $x$ . De forma análoga a um controlador LQR (*Linear Quadratic Regulator*), a estimativa do filtro de Kalman é calculada recorrendo à minimização de uma função de custo  $J$ .

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T] = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) \quad (9)$$

Recorrendo à equação de Ricatti para encontrar a solução em regime estacionário que minimiza esta função de custo, chegamos a:

$$0 = (A - LC)P_{\infty} + P_{\infty}(A^T - C^T L^T) + Q + LRL^T \Leftrightarrow L = P_{\infty}C^T R^{-1} \quad (10)$$

### 3.1.1 Variação das Matrizes $Q$ e $R$

O aumento e a diminuição dos valores das matrizes  $Q$  e  $R$  influenciam o valor do ganho  $L$ . Esta influência depende da relação entre os valores de  $Q$  e  $R$ , e não do seu valor absoluto. A matriz  $Q$  está relacionada com o ruído de processo, enquanto que a matriz  $R$  está relacionada com o ruído das medições.

Fixando os valores de  $R$  e aumentando  $Q$ , o valor do ganho de Kalman aumenta. Valores elevado de  $Q$  significam que o processo é menos confiável enquanto que valores elevados de  $R$  significam que as medições são de menor confiança (mais ruidosas). Manipulando estas duas matrizes é possível descobrir experimentalmente um ponto aproximadamente ótimo, em que a função de custo é minimizada.

### 3.1.2 Complementaridade

Os filtros complementares são filtros que, em funcionamento conjunto, permitem cobrir toda a gama de frequências. Ou seja, está-se perante um filtro *all pass*, resultado da soma de um filtro passa-alto  $G_H(s)$ , e de um filtro passa-baixo  $G_L(s)$ . Deste modo, para se verificar matematicamente a complementaridade entre dois filtros, o resultado da soma entre as suas funções transferência tem de ser 1.

$$G_L(s) + G_H(s) = 1 \quad (11)$$

No entanto, sem recorrer à matemática, é possível deduzir a cumplicidade dos filtros de forma bastante intuitiva. Por exemplo, a estimação do ângulo de picada  $\theta$  através do giroscópio ocorre através da sua integração, que inclui ruído de baixa frequência. Logo, recorre-se a um filtro passa-alto, com o objetivo de se evitarem estas perturbações. Nos acelerómetros a estimativa é sujeita a ruído de alta frequência, e como tal, utiliza-se um filtro passa-baixo.

Desta forma, os dois filtros mencionados complementam-se, e juntos formam um filtro *all pass*, como se pode observar na figura [15](#).

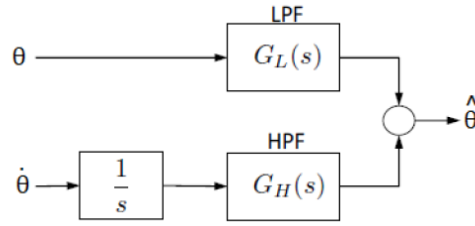


Figura 13: Complementaridade dos filtros no caso da estimação do ângulo de picada  $\theta$

No caso de se pretender estimar o ângulo de rolamento  $\phi$ , sem perda de generalidade, o mesmo sistema se aplica.

## 3.2 Ângulo de Picada

### 3.2.1 Design e Implementação do Filtro sem Bias

Uma vez que estamos a tentar estimar os valores do ângulo de picada, o nosso estado será  $x = \theta$  e  $\dot{\theta} = w_{ym}$  é o valor da medição da velocidade angular realizada pelo giroscópio. Uma vez que nos encontramos na presença de pequenos ângulos de atuação, é possível considerar que  $\dot{\theta} = w_{ym} = q$ . A saída  $y$  toma o valor de  $\theta_m$ . O sistema em espaço de estados toma então a seguinte forma.

$$\begin{cases} \dot{\theta} = A\theta + Bu + v \\ \theta_m = C\theta + Du + n \end{cases} \quad (12)$$

É possível deduzir o valor das matrizes, chegando aos valores de  $A_{1 \times 1} = [0]$ ,  $B_{1 \times 1} = [1]$ ,  $C_{1 \times 1} = [1]$  e  $D_{1 \times 1} = [0]$ . Deste modo, rapidamente se percebe que  $u = w_{ym}$ . O sistema em espaço de estados está presente na seguinte equação [13](#)

$$\begin{cases} \dot{\theta} = w_{ym} + v \\ \theta_m = \theta + n \end{cases} \quad (13)$$

A expressão do observador é dada por:

$$\dot{\hat{\theta}} = w_{ym} + L_{\theta} (\theta_m - \hat{\theta}) \quad (14)$$

No caso das matrizes  $Q$  e  $R$ , decidiu-se fixar o valor de  $R$  em dez vezes o valor de  $cov_{ym}$  ( $2.2167 \times 10^{-4}$ ) e, após sucessivas experiências, encontrou-se o valor de  $3.5609 \times 10^{-7}$  para a matriz  $Q$ , como o valor que melhores resultados de soma dos erros quadráticos assegurava. O ganho de Kalman  $L$  ficou com o valor de 0.04008.

No ajuste destas matrizes foi encontrada uma grande dificuldade em arranjar valores para  $Q$  e  $R$  que se ajustassem de forma adequada aos dados reais. Não foi possível encontrar valores que convergissem de forma satisfatória para os dados reais, independentemente dos valores que foram introduzidos para  $Q$  e  $R$  (possivelmente algum erro no pré-processamento dos dados). Tal pode ser verificado nas figuras abaixo, em que para valores com superiores de  $Q$ , apenas se obtém um sistema mais responsivo mas que ainda assim não converge para os dados desejados. Aumentando ainda mais este valor, ou reduzindo o valor de  $R$ , os dados ficam cada vez mais ruidosos, sem nenhuma melhoria aparente na convergência.

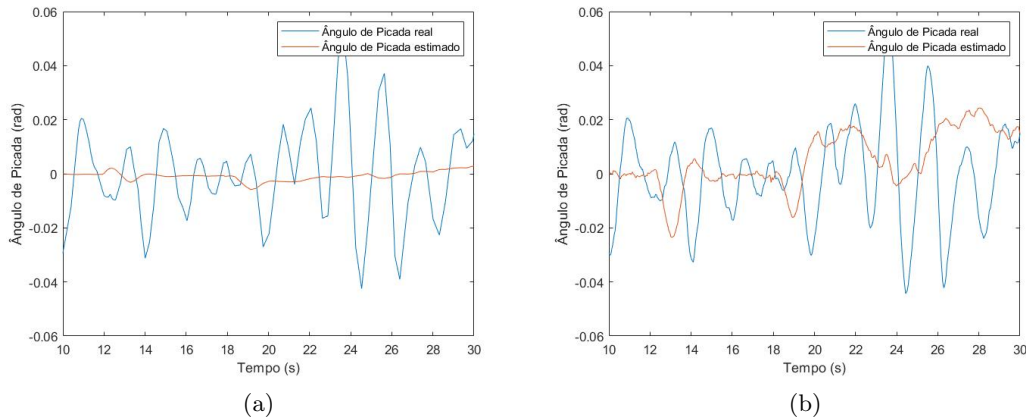


Figura 14: Comparação da estimativa do ângulo de picada obtido pelo filtro de Kalman com os resultados obtidos diretamente da Experiência D para diferentes ordens de grandeza de  $Q$

Esta situação foi recorrente nos diferentes filtros aplicados ao longo deste relatório. Optamos por apresentar sempre os valores de  $Q$  e de  $R$  que apresentam a menor soma dos erros quadráticos em cada caso. Sabemos que existirá algum erro no nosso código, pois temos noção de que estes não são os resultados desejados. Ainda assim, procederemos à análise destes resultados.

Para obter os resultados acima apresentados, utilizou-se a seguinte montagem no *simulink*:

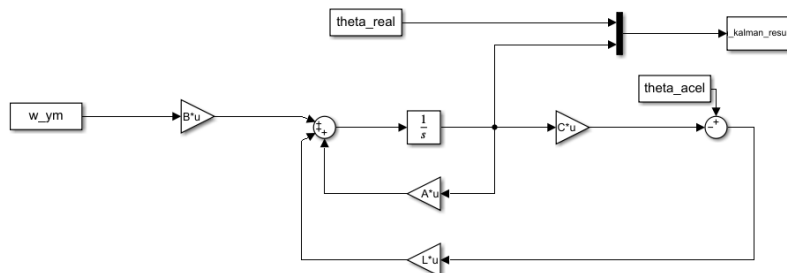


Figura 15: Implementação do filtro de Kalman para estimação do ângulo de picada

Partindo da equação [14](#) e considerando que as entradas de ruído são nulas ( $v$  e  $n$ ), é possível obter a função de transferência do observador da expressão [15](#).

$$s\hat{\Theta}(s) = W_{ym} + L_{\theta} \left( \Theta_m(s) - \hat{\Theta}(s) \right) \quad (15)$$

Simplificando esta expressão, obtém-se:

$$\hat{\Theta}(s) = \frac{1}{s + L_{\theta}} W_{ym} + \frac{L_{\theta}}{s + L_{\theta}} \Theta_m(s) \quad (16)$$

Desta forma se consegue extrair as funções de transferência que relacionam a estimativa do ângulo de picada, com as medidas do inclinómetro e do giroscópio. As funções de transferência são apresentadas na equação [17](#).

$$\begin{cases} \frac{\hat{\Theta}}{W_{ym}}(s) = \frac{1}{s + 0.04008} \\ \frac{\hat{\Theta}}{\Theta_m}(s) = \frac{0.04008}{s + 0.04008} \end{cases} \quad (17)$$

Em termos da complementaridade do filtro, facilmente se chega à seguinte relação [18], tendo sempre em mente a presença e a função do integrador em conjunto com o filtro passa-alto.

$$\frac{s}{s + 0.04008} + \frac{0.04008}{s + 0.04008} = 1 \quad (18)$$

Logo se comprova que o filtro elaborado é complementar, pois existe atenuação do ruído tanto nas altas frequências como nas baixas frequências. Assim, este é um filtro *all pass*.

### 3.2.2 Design e Implementação do Filtro com Bias

Com o objetivo de considerar o erro estático do giroscópio, foi necessário introduzir um novo estado no sistema: o *bias*. Este *bias* rege-se pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{b}_y = 0 \\ w_{ym} = q + b_y \end{cases} \quad (19)$$

O sistema passa a ser então descrito, em espaço de estados, pelo seguinte sistema [20]. A expressão de saída do sistema passa a ser dada pela equação [21].

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{b}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ b_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w_{ym} + \begin{bmatrix} v_\theta \\ v_b \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\theta_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ b_y \end{bmatrix} + n_\theta \quad (21)$$

Tendo em conta este novo estado, e sabendo que  $x = [\theta \ b_y]^T$ , é possível proceder à sua substituição na equação do observador.

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w_{ym} + L (\theta_m - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}) \quad (22)$$

Desta vez, o objetivo é obter uma matriz  $L_{2 \times 2}$  de ganhos de Kalman. Para tal, voltou a manipular-se os valores de  $Q$  e  $R$ . A matriz  $Q_{2 \times 2}$  passou a ser uma matriz diagonal, enquanto que  $R_{1 \times 1}$  se manteve um escalar, com o mesmo valor. Foram obtidos então os seguintes valores para as matrizes  $Q$ ,  $R$  e  $L$ .

$$Q = \begin{bmatrix} 3.5609 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 3.5609 \times 10^{-7} \end{bmatrix}, \quad R = [2.2167 \times 10^{-4}] \quad (23)$$

$$L = \begin{bmatrix} 4.01817 \\ -0.04008 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Nos seguintes gráficos pode-se observar os valores que o ângulo de picada toma realmente, em relação aos valores estimados.

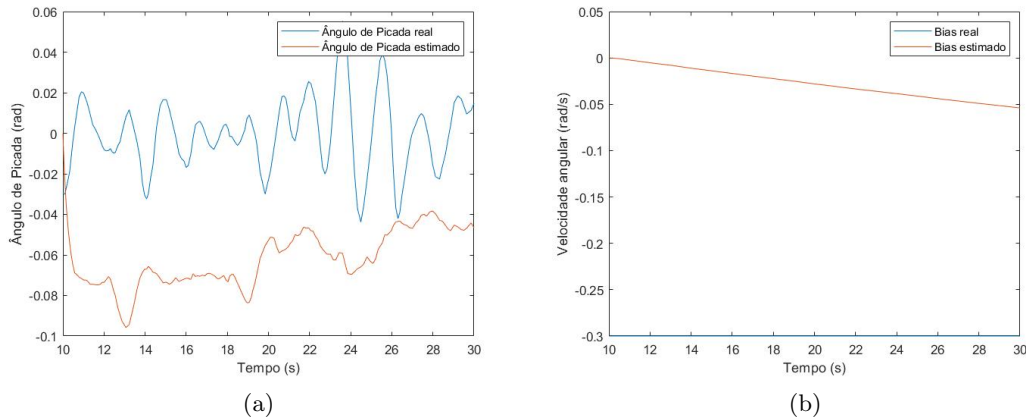


Figura 16: Comparação das estimativas do ângulo de picada e do bias obtidas pelo filtro de Kalman com os resultados obtidos diretamente da Experiência D

Mais uma vez, verifica-se que estes dados de saída do filtro de Kalman não são satisfatórios. Verifica-se a mesma tendência de não convergência dos dados estimados, independentemente dos valores dos parâmetros de ajuste de  $Q$  e  $R$ .

Implementou-se no *simulink* a montagem seguinte para obter as comparações entre os dados estimados pelo filtro e os dados reais. Foi introduzido um bloco constante no *simulink* numa tentativa de simular o *bias*. Escolheu-se o valor de  $b = -0.3 \text{ rad/s}$  para a simulação.

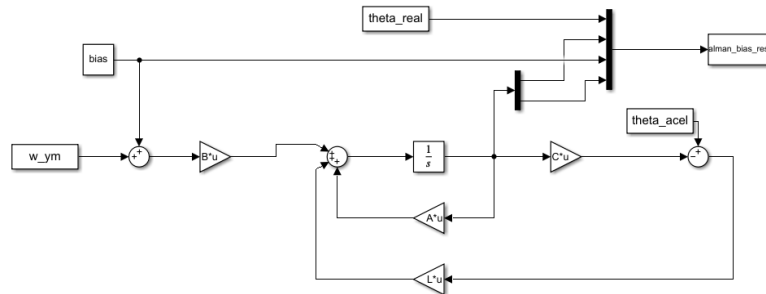


Figura 17: Implementação do filtro de Kalman para estimação do ângulo de picada com *bias*

Aplicando as transformadas de Laplace à equação [22](#), chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{cases} s\hat{\Theta} = W_{ym} - \hat{B}_y + L_1 (\Theta_m - \hat{\Theta}) \\ s\hat{B}_y = L_2 (\Theta_m - \hat{\Theta}) \end{cases} \quad (25)$$

Após alguma manipulação algébrica, é possível simplificar o sistema acima apenas numa única equação.

$$\hat{\Theta} = \frac{s^2}{s^2 + L_1 s - L_2} \frac{W_{ym}}{s} + \frac{L_1 s - L_2}{s^2 + L_1 s - L_2} \Theta_m \quad (26)$$

Desta forma se consegue encontrar as funções transferência que relaciona o estado  $\hat{\theta}$  com a entrada  $w_{ym}$ , e com a saída  $\theta_m$ . As funções transferência estão presentes no sistema [27](#)

$$\begin{cases} \frac{\Theta}{W_{ym}}(s) = \frac{s}{s^2 + 4.01817s + 0.04008} \\ \frac{\Theta}{\Theta_m}(s) = \frac{4.01817s + 0.04008}{s^2 + 4.01817s + 0.04008} \end{cases} \quad (27)$$

Por fim, com o objetivo de se provar a complementaridade do filtro em mãos, é necessário que a soma dos filtros passa-alto e passa-baixo seja igual a 1.

$$\frac{s^2}{s^2 + 4.01817s + 0.04008} + \frac{4.01817s + 0.04008}{s^2 + 4.01817s + 0.04008} = 1 \quad (28)$$

Portanto, pode-se concluir que o filtro é, sem dúvida, complementar.

### 3.3 Ângulo de Rolamento

#### 3.3.1 Design e Implementação do Filtro sem Bias

Para o ângulo de rolamento, o processo é bastante similar ao realizado anteriormente para o ângulo de picada, dado que se utilizam os mesmos sensores (giroscópio e acelerômetro), apenas segundo eixos diferentes.

Desta forma, o novo modelo elaborado terá por base o seguinte sistema de equações de estado.

$$\begin{cases} \dot{\phi} = A\phi + Bu + v \\ \phi_m = C\phi + Du + n \end{cases} \quad (29)$$

Semelhante ao caso anterior, as matrizes tomam os valores  $A_{1 \times 1} = [0]$ ,  $B_{1 \times 1} = [1]$ ,  $C_{1 \times 1} = [1]$  e  $D_{1 \times 1} = [0]$  e  $u = w_{xm}$ . O sistema em espaço de estados toma a seguinte forma do sistema [30](#)

$$\begin{cases} \dot{\theta} = w_{ym} + v \\ \theta_m = \theta + n \end{cases} \quad (30)$$

A expressão do observador é dada por:

$$\dot{\hat{\phi}} = w_{xm} + L_{\phi}(\phi_m - \hat{\phi}) \quad (31)$$

Utilizando os valores das covariâncias medidas através da Experiência C para a medição do acelerômetro e do giroscópio, podem-se obter as novas matrizes  $Q$  e  $R$ . Do mesmo modo do ângulo de picada, mantém-se o valor da matriz  $R$  e varia-se o valor da matriz  $Q$  até se encontrar um valor aproximadamente ideal, que minimiza a função de custo. Após várias tentativas, os melhores resultados encontrados foram para  $Q = 6.8446 \times 10^{-7}$  e  $R = 3.7238 \times 10^{-4}$ . O ganho de Kalman fica com valor  $L = 0.0429$ .

O resultado no modelo simulado é o seguinte, apresentando os mesmos problemas das outras simulações:

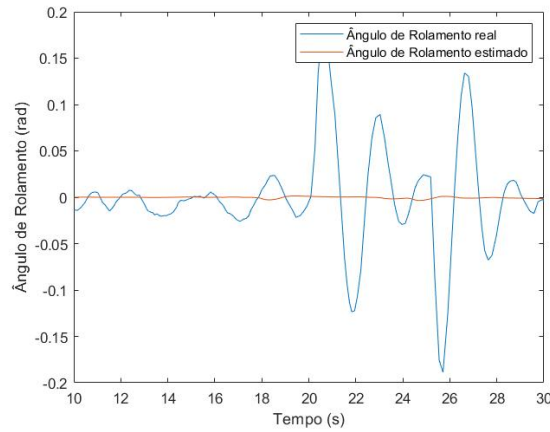


Figura 18: Comparação das estimativas do ângulo de rolamento obtido pelo filtro de Kalman com os resultados obtidos diretamente da Experiência D

Claramente que os resultados pretendidos não eram estes. O ângulo de rolamento estimado é aproximadamente nulo, algo que não pode acontecer visto que o ângulo real apresenta uma oscilação variável quase até aos  $0.2\text{rad}$ .

A simulação destes valores foi feita com recurso ao *simulink*, consoante se pode observar na montagem abaixo:

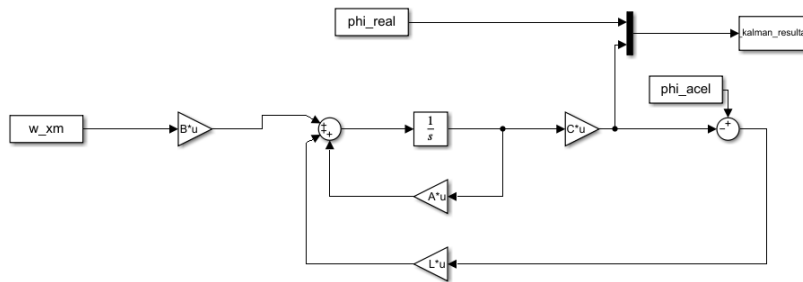


Figura 19: Implementação do filtro de Kalman para estimação do ângulo de rolamento

Ignorando de novo as entradas de ruído do sistema e aplicando a transformada de Laplace à equação 31 obtida anteriormente, facilmente se determinam as seguintes funções de transferência.

$$\begin{cases} \frac{\hat{\Phi}}{W_{xm}}(s) = \frac{1}{s + 0.0429} \\ \frac{\hat{\Phi}}{\Phi_m}(s) = \frac{0.0429}{s + 0.0429} \end{cases} \quad (32)$$

Para avaliar a complementaridade do filtro em questão, é necessário avaliar a soma do filtro passa-alto com o filtro passa-baixo.

$$\frac{s}{s + 0.0429} + \frac{0.0429}{s + 0.0429} = 1 \quad (33)$$

Desta forma, o filtro implementado é também complementar.



### 3.3.2 Design e Implementação do Filtro com Bias

Como realizado para o caso do design e implementação do filtro de Kalman com *bias* do ângulo de picada na secção 3.2.2, neste caso, é necessário construir um filtro de Kalman com um estado novo: o *bias* da medição do ângulo de rolamento. O *bias*  $b_x$  é definido pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{b}_x = 0 \\ w_{xm} = p + b_x \end{cases} \quad (34)$$

O espaço de estados e a equação de saída do sistema são dados pelas equações 35 e 36, respetivamente.

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{b}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ b_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w_{xm} + \begin{bmatrix} v_\phi \\ v_b \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\phi_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ b_x \end{bmatrix} + n_\phi \quad (36)$$

Sendo o estado representado por  $x = [\phi \ b_x]^T$ , obtém-se a equação 37 do observador.

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w_{xm} + L(\phi_m - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}) \quad (37)$$

Novamente, seguindo o mesmo raciocínio de anteriormente, pretende-se determinar uma matriz  $L_{2 \times 2}$  de ganhos de Kalman. Para tal, é necessário encontrar as duas matrizes diagonais  $Q_{2 \times 2}$  e  $R_{1 \times 1}$  que produzem os melhores resultados possíveis.

$$Q = \begin{bmatrix} 6.8446 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 6.8446 \times 10^{-7} \end{bmatrix}, \quad R = 0.00037 \quad (38)$$

$$L = \begin{bmatrix} 4.2974 \\ -0.0428 \end{bmatrix} \quad (39)$$

No gráfico da figura 20 é possível analisar e comparar os valores do ângulo de rolamento real e estimado, ao longo do tempo.

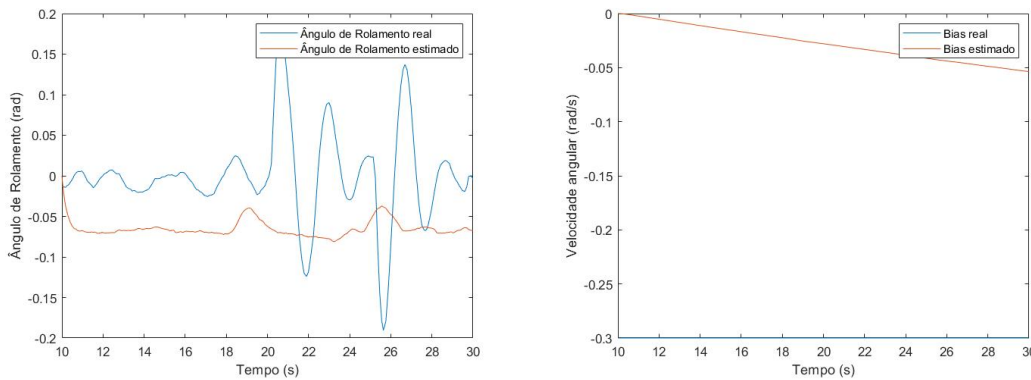


Figura 20: Comparação das estimativas do ângulo de rolamento e do *bias* obtidos pelo filtro de Kalman com os resultados obtidos diretamente da Experiência D

Os resultados obtidos não são satisfatórios, novamente. Os dados de saída do filtro não convergem para os dados reais medidos pelos sensores, e não mostraram grandes alterações consoante os ajustes das matrizes  $Q$  e  $R$ .

No entanto, implementou-se a seguinte montagem no *simulink*. Ainda se introduziu um bias de  $b = -0.3\text{rad/s}$  na simulação do sistema.

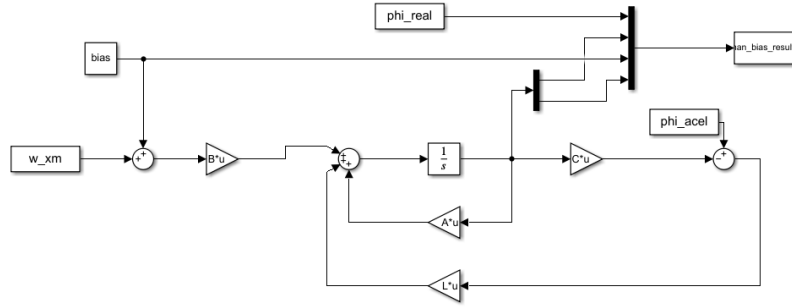


Figura 21: Implementação do filtro de Kalman para estimação do ângulo de rolamento com *bias*

Para obter as funções transferência deste filtro, deve-se aplicar as transformadas de Laplace à equação 37. Desta forma, relaciona-se o estado  $\hat{\phi}$  com a entrada  $w_{xm}$ , e com a saída  $\phi_m$ . Após alguma manipulação algébrica, facilmente se obtém o pretendido no seguinte sistema 40.

$$\begin{cases} \frac{\Phi}{W_{xm}}(s) = \frac{s}{s^2 + 4.2974s + 0.0428} \\ \frac{\Phi}{\phi_m}(s) = \frac{4.2974s + 0.0428}{s^2 + 4.2974s + 0.0428} \end{cases} \quad (40)$$

Concluindo, falta apenas mostrar a complementaridade deste filtro. Para tal, deve-se calcular a soma dos dois filtros. No caso de 1, então o filtro é complementar.

$$\frac{s^2}{s^2 + 4.2974s + 0.0428} + \frac{4.2974s + 0.0428}{s^2 + 4.2974s + 0.0428} = 1 \quad (41)$$

Como se pode observar e concluir pela equação acima, o filtro implementado é complementar.

## 4 Estimação Integrada dos Ângulos de Picada e de Rolamento

### 4.1 Introdução Teórica

No documento referenciado no enunciado laboratorial - P. Batista, C. Silvestre, e P. Oliveira, "Partial Attitude and Rate Gyro Bias Estimation: Observability Analysis, Filter Design, and Performance Evaluation," International Journal of Control, vol. 84, no. 5, pp. 895-903, Maio 2011 - é proposta uma solução que permite estimar parcialmente os valores da atitude do drone (ângulos de picada e de rolamento), e os bias do giroscópio de razão, simultaneamente. Isto, a partir de um único vetor de observação, em coordenadas fixas do referencial do corpo do drone.

No entanto, com esta solução não é possível estimar o ângulo de guinada. Como é um vetor constante, quando rodado segundo a sua direção, permanece igual. É apenas possível agir desta forma porque, para baixas frequências, o acelerómetro é dominado pela aceleração da gravidade.

A cinemática da atitude do quadri-rotor é dada por:

$$\dot{R}(t) = R(t)S[\omega(t)] \quad (42)$$

onde  $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$  é a velocidade angular segundo o referencial do corpo,  $R$  é a matriz de rotação do referencial do corpo para o referencial de inércia, e  $S$  é a matriz *skew-symmetric*. Assume-se que

a velocidade angular é limitada e continuamente diferenciável com derivada limitada, e o bias dos giroscópios é  $b_w(t) \in \mathbb{R}^3$ , tal que  $\omega_m(t) = \omega(t) + b_w(t)$ .

Considerando uma abordagem baseada em sensores, com a incorporação da derivada das observações vetoriais na dinâmica do sistema, obtém-se o seguinte sistema [43](#) de forma compacta.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(y(t), w_m(t)) x(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (43)$$

$x(t) = [x_1^T(t) \ x_2^T(t)]$  é o estado do sistema e as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  e  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  são:

$$A(y(t), w_m(t)) = \begin{bmatrix} -S[\omega_m(t)] & -S[y(t)] \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [I \ 0] \quad (44)$$

## 4.2 Design do Filtro de Kalman

Embora o sistema [43](#) seja um sistema não linear, pode ser considerado linear e variável no tempo pois a saída está disponível para propósitos do observador. Considerando os distúrbios do sistema aditivo e os ruídos dos sensores, a dinâmica do sistema é dada pela seguinte equação, conhecendo já as matrizes  $A$  e  $C$  da equação [44](#).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + w(t) \\ \dot{y}(t) = Cx(t) + n(t) \end{cases} \quad (45)$$

$w(t)$  e  $n(t)$  são ruídos brancos Gaussianos incorrelacionados de média nula, e apresentam covariâncias  $\sigma_w$  e  $\sigma_n$ , respetivamente. A matriz  $Q_{6 \times 6}$  é uma matriz diagonal, cujas 6 entradas não nulas correspondem às covariâncias das velocidades angulares da experiência C, enquanto que as 3 entradas da matriz diagonal  $R_{3 \times 3}$  parte das covariâncias das medidas do acelerómetro.

$$Q = \begin{bmatrix} 6.845 \times 10^{-05} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.561 \times 10^{-05} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.115 \times 10^{-06} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.845 \times 10^{-08} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.561 \times 10^{-08} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.115 \times 10^{-09} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.02227 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03726 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09263 \end{bmatrix} \quad (47)$$

No entanto as entradas destas matrizes foram sujeitas a alguns testes e ajustes de valor, com o objetivo de se obterem os melhores resultados possíveis.

O espaço de estados do observador neste filtro de Kalman é dado pela equação [48](#).

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + K(t)(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (48)$$

A matriz  $A$  nesta abordagem depende das medições dos giroscópios e dos acelerómetros, o que torna o sistema variante no tempo. A matriz  $K$  é a matriz do ganho do filtro de Kalman, e determina-se a partir da expressão da matriz  $P$  (propagação da matriz covariância dos erros).

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A'(t) + Q - P(t)C'R^{-1}C'P(t) \quad (49)$$

Por fim, é possível encontrar a matriz do ganho do filtro de Kalman, de forma análoga aos casos anteriores. No entanto, ao contrário dos casos anteriores, como seria de esperar, a matriz  $K$  também varia com o tempo, graças à variação da matriz  $A$  (como referido anteriormente).

### 4.3 Implementação do Filtro de Kalman

O diagrama de blocos implementado na figura 22, é o de um filtro de Kalman, no qual o seu ganho é calculado em cada iteração. Isto por causa das não linearidades geradas pelas funções trigonométricas na transformação do vetor gravidade observado para ângulos de Euler. Como referido na subsecção anterior, a melhor solução é ter uma matriz  $A$  variante no tempo, que forma um sistema linear variante no tempo (LTV).

A partir da teoria presente neste relatório e no documento referido na subsecção anterior, foi implementado o modelo do filtro de Kalman presente na seguinte figura.

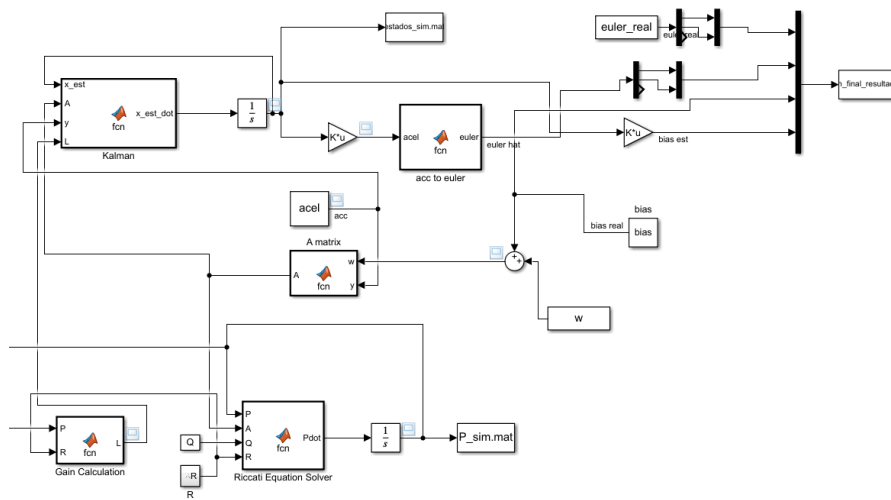


Figura 22: Implementação do filtro de Kalman para estimação integrada do ângulo de picada e de rolamento

A partir dos dados filtrados dos acelerómetros no referencial do corpo é possível estimar os ângulos de picada e rolamento. É possível observar as novas estimativas dos ângulos na seguinte figura 23. Este modelo é responsável pela implementação do filtro de Kalman para a estimação integrada do ângulo de rolamento e do ângulo de picada.

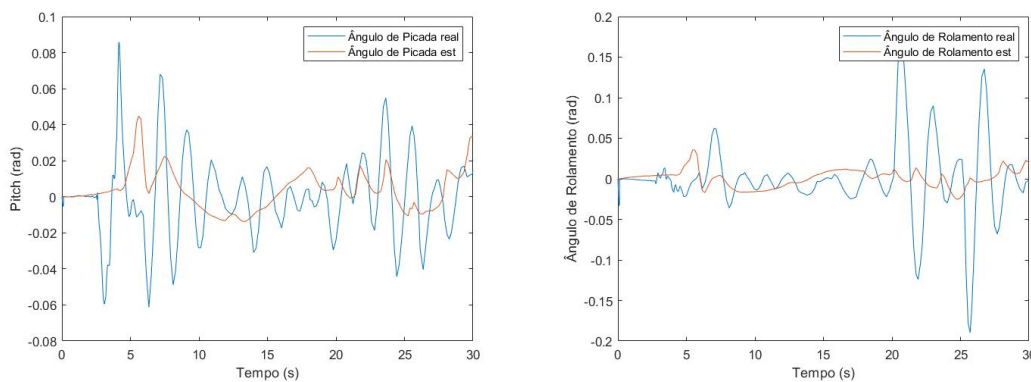


Figura 23: Ângulos de Picada e Rolamento obtidos na estimação integrada

Mais uma vez, como é visível nos gráficos acima, os resultados obtidos não são os mais adequados. Não foi possível ajustar os parâmetros da matriz  $Q$  de modo a que os ângulos estimados convergissem para os ângulos reais. Após o teste de vários valores das diferentes entradas de  $Q$ , os valores apresentados são os que apresentam o menor somatório de erros quadráticos, ainda que seja claro que a resposta não segue os ângulos reais. No entanto, quando se manipulou as matrizes de  $Q$  e  $R$  de modo a tornar o sistema mais responsivo, tal não se verificou.

## 5 Conclusão

A realização desta atividade laboratorial permitiu o aprofundamento do conhecimento sobre a estimação de parâmetro do *ARDrone* recorrendo à leitura e tratamento de dados obtidos através dos sensores. Mais especificamente, foram desenvolvidos métodos para a estimação do ângulo de picada e para o ângulo de rolamento, partindo de medidas do acelerómetro e do giroscópio de razão.

A primeira etapa deste trabalho consistiu na modelação e caracterização dos sensores da aeronave. Foram realizadas várias experiências, em diversificadas condições, visando estudar o ruído dos sensores e as perturbações introduzidas pelo funcionamento dos rotores e pelo próprio voo da aeronave. Recolheu-se os valores das médias e das covariâncias das medidas dos acelerómetros e giroscópios para cada experiência. Por fim, nesta etapa, explicou-se como se obtém os dados do inclinómetro partindo das medições do acelerómetro.

De seguida, foram implementados vários filtros de Kalman, procurando estimar as variáveis pretendidas: ângulo de picada e ângulo de rolamento. Estudou-se o impacto de ajustar as matrizes  $Q$  e  $R$  no filtro de Kalman e derivou-se as funções de transferência correspondentes ao sistema estudado. Verificou-se também a complementaridade dos filtros deduzidos. Foi ainda estudada a hipótese de incluir o *bias* como um estado do sistema e o impacto que esta alteração teria nos resultados dos filtros de Kalman. Todas estas simulações foram realizadas com recurso ao *simulink*.

Os resultados obtidos nesta secção não foram satisfatórios. Apesar de inúmeras tentativas de encontrar os melhores valores para os parâmetros das diferentes matrizes  $Q$  e  $R$ , nunca foi possível encontrar valores para os quais os valores estimados convergissem de forma confiável para os valores reais. Acreditamos que tal se possa dever a um erro no tratamento dos sinais dos sensores. No entanto, não foi possível identificar o erro.

Por último, abordou-se a estimação integrada dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ , assim como do *bias* associado a cada giroscópio. Esta implementação seguiu-se pelo artigo sugerido no enunciado da atividade laboratorial. Os resultados obtidos voltaram a não ser os ideais, provavelmente devido ao mesmo erro de processamento de dados.

Em suma, esta atividade laboratorial foi extremamente útil para perceber melhor o funcionamento dos filtros de Kalman para a estimação de variáveis. Ainda que os resultados obtidos não tenham sido os mais adequados, é possível considerar que o desenho dos modelos de *simulink* para as simulações, a construção do código de suporte aos filtros de Kalman e as justificações teóricas apresentadas neste relatório foram realizados com relativo sucesso.