

Instituto Superior Técnico

M.Sc. in Aerospace Engineering

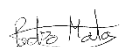
Aeronaves Robotizadas

2021/2022 – Primeiro Semestre

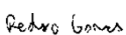
Laboratório 1

Group 10

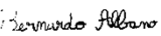
1. N.º: 89703 Name: Pedro Matos

Signature: 

2. N.º: 89705 Name: Pedro Gomes

Signature: 

3. N.º: 90222 Name: Bernardo Albano

Signature: 

Professora: Rita Cunha

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Modelagem	2
2.1	Dinâmica do Parrot AR.Drone	3
2.2	Efeitos dos Eixos na Dinâmica	3
2.3	Transformação Linear e Transformação Inversa	4
2.4	Definição de um Vetor Alternativo de Posição	4
2.5	Interpretação do Quadri-rotor Como Sistema Plano	5
2.6	Equilíbrio	6
2.7	Linearização do Sistema	7
2.8	Determinação das Funções de Transferência	8
2.9	Efeito do Valor de Equilíbrio da Guinada na Posição	9
2.10	Estratégias de Controlo da Altitude	9
2.11	Efeito do Ganho Proporcional nos Pólos do Sistema	11
3	Height Dynamics	12
3.1	Resposta da Altitude a Diferentes Ganhos e Diferentes Degraus	12
3.2	Obtenção das Funções de Transferência em Malha Fechada	13
3.2.1	$k_p = 0.5$ e $step = 1.0m$	14
3.2.2	$k_p = 1$ e $step = 0.5m$	14
3.2.3	$k_p = 2.4$ e $step = 0.25m$	14
3.2.4	$k_p = 3.2$ e $step = 0.2$	14
3.3	Posição dos Pólos do Sistema em Malha Fechada	15
4	Pitch Dynamics	16
4.1	Resposta em Frequência a Uma Entrada Sinusoidal	16
4.2	Resposta a Uma Referência	18
5	Conclusão	18

1 Introdução

O presente relatório destina-se à modelação e identificação de um *Parrot AR.Drone* para a cadeira de Aeronaves Robotizadas. Este trabalho está dividido em duas partes.

A primeira parte deste relatório tem como objetivo responder às questões teóricas presentes no enunciado laboratorial, enquanto que na segunda parte foram analisadas todas as simulações e experiências realizadas em laboratório. Mais concretamente, ao longo do relatório serão analisadas as modelações da cinemática e dinâmica do corpo rígido; a modelação das entradas de controlo do drone; a linearização da dinâmica do sistema do drone em voo pairado; os anéis de controlo interiores e exteriores referentes à altitude e velocidade vertical; e a identificação do sistema de controlo de malha fechada da altitude e do ângulo *pitch*.

2 Modelagem

O *Parrot AR.Drone* tem um design clássico de um quadri-rotor, com quatro rotores montados simetricamente ao longo de dois eixos ortogonais, como se pode observar na figura 1. Deve-se ter em conta que o referencial do corpo é representado por $\{B\}$, e o referencial inercial por $\{I\}$.

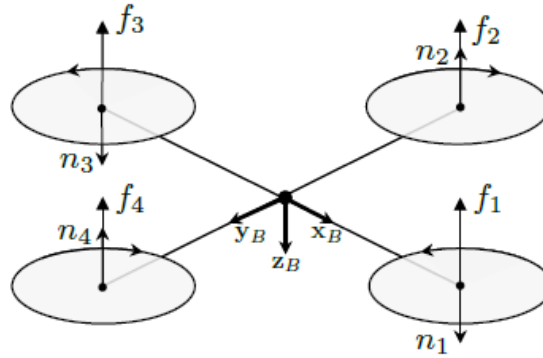


Figura 1: Modelo Simplificado do *Parrot AR.Drone*

Nesta figura as forças de propulsão individuais são representadas por $f_i \in \mathbb{R}$, com $i = \{1, 2, 3, 4\}$. Os torques resultam da conservação do momento angular causada pela rotação dos rotores e operam nos sentidos indicados na figura acima. São dados por $n_i = cT_i$, com $c \in \mathbb{R}$ uma constante escalar, e $i = \{1, 2, 3, 4\}$. Além disso, ainda temos a força gravítica $f_g \in \mathbb{R}^3$, expressa no referencial inercial, definida por $f_g = mg e_3$.

Resumindo, a força resultante aplicada no drone resulta de duas fontes: da força gravítica e das forças de propulsão de cada rotor. Os vetores representantes são representados na equação (1).

$$f_T := \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad f_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (1)$$

Nas questões posteriormente resolvidas, para simplificar a escrita de algumas expressões recorreu-se a s_α , c_α e t_α para substituir $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ e $\tan(\alpha)$, respetivamente.

2.1 Dinâmica do Parrot AR.Drone

As forças f e os momentos n (no referencial do corpo) que atuam no *Parrot AR.Drone* podem ser escritos em função da força gravítica no referencial inercial (f_g), e das forças de propulsão no referencial do corpo (f_T). As matrizes M , N e P representam a passagem dos vetores f_g e f_T para o referencial do corpo, caso seja necessário, e para as respectivas componentes nos eixos.

$$\begin{cases} f = Mf_g + Nf_T \\ n = Pf_T \end{cases} \quad (2)$$

Para a rotação do vetor f_g do referencial inercial para o referencial do corpo, a matriz $M_{3 \times 3}$ representa a matriz de rotação invertida (equivalente à sua transposta), ${}^I_B R^T(\lambda)$.

No entanto, f_T já está no referencial do corpo. Tendo por base este referencial, todas as forças propulsivas estão alinhadas com o eixo vertical z , com sentido negativo. Desta forma, obtém-se a matriz $N_{3 \times 4}$.

$$\begin{cases} M = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \\ N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

A partir da definição de momento, encontra-se a matriz $P_{3 \times 4}$. Analisando a figura 1, o torque nos 3 eixos do referencial do corpo é dado pela seguinte equação (4).

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & l & 0 & -l \\ l & 0 & -l & 0 \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & l & 0 & -l \\ l & 0 & -l & 0 \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix} \quad (4)$$

f_i é a força de propulsão de cada rotor, l representa a distância entre o centro do rotor (onde a força de propulsão atua) e o centro de massa do drone, e c é uma constante escalar.

2.2 Efeitos dos Eixos na Dinâmica

Visto que, neste caso, o sistema de eixos do drone está orientado de maneira diferente ao anterior, a expressão de n da equação (2) vai sofrer alterações. A seguinte matriz de rotação ${}^{B'}_B R$ converte as coordenadas do referencial do corpo $\{B\}$, para o referencial mencionado no enunciado laboratorial $\{B'\}$, que apresenta uma rotação de 45° em torno do eixo z no referencial do corpo.

$${}^{B'}_B R = \begin{bmatrix} c_{\frac{\pi}{4}} & s_{\frac{\pi}{4}} & 0 \\ -s_{\frac{\pi}{4}} & c_{\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

A matriz M permanece inalterada, visto que a matriz de rotação $R^T(\lambda)$ continua a ser a mesma para os novos ângulos de Euler (λ') definidos. A matriz N também não é alterada pois esta apenas tem componentes no eixo z do referencial do corpo, os quais não são alterados pelo novo referencial.

Por fim, a matriz P é a única matriz alterada. A sua linha de ação já não se encontra alinhada com os eixos, portanto sofre a seguinte transformação da equação (6) que resulta na nova matriz P' .

$$P' = {}^{B'}_B R P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l \\ \frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}l \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.3 Transformação Linear e Transformação Inversa

Definindo o novo controlo de entrada u no referencial do corpo, obtém-se a seguinte equação (7). $T \in \mathbb{R}$ é o escalar positivo que representa o módulo da força total de propulsão (somatório das 4 componentes de f_T) no referencial do corpo, e $n \in \mathbb{R}^3$ é dado na equação (2).

$$u = \begin{bmatrix} T \\ n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad (7)$$

Desta forma, u pode ser escrito em função de f_T , a partir de uma matriz $L_{4 \times 4}$.

$$u = L f_T \quad (8)$$

As entradas da matriz L são obtidas a partir da matriz P' calculada anteriormente na equação (6).

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & P' & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l \\ \frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & -\frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{2}l \\ c & -c & c & -c \end{bmatrix} \quad (9)$$

Esta configuração permite obter a força propulsiva total T e os torques n_i com $i = \{x, y, z\}$ aplicados no drone, a partir do comando dos atuadores f_T . Como tal, não será necessário recorrer ao vetor f_T para se analisar a cinemática e dinâmica do drone. Permite trabalhar diretamente com T e com os torques em cada eixo, em vez de tratar cada rotor individualmente. Na condição de sustentação, é possível controlar facilmente a altitude, sendo necessário apenas aumentar ou diminuir T .

Para saber a força propulsiva em cada rotor e a voltagem aplicada, pode-se efetuar a transformação inversa dada por $f_T = L^{-1}u$.

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4l} & \frac{\sqrt{2}}{4l} & \frac{1}{4c} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4l} & \frac{\sqrt{2}}{4l} & -\frac{1}{4c} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4l} & -\frac{\sqrt{2}}{4l} & \frac{1}{4c} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4l} & -\frac{\sqrt{2}}{4l} & -\frac{1}{4c} \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.4 Definição de um Vetor Alternativo de Posição

Com o objetivo de encontrar as dinâmicas não lineares $\dot{x} = g(x, u)$ e $\dot{x}_1 = g(x_1, u)$, deve-se recorrer às equações de dinâmica de translação e rotação nos referenciais do corpo e de inércia, e à relação entre as velocidades angulares e as derivadas dos ângulos de Euler.

Inicialmente, recorrendo à definição de ${}^B \mathbf{p} = R^T(\lambda) \mathbf{p}$ e derivando no tempo, obtém-se o primeiro elemento de $g(x, u)$.

$${}^B \dot{\mathbf{p}} = \frac{d(R^T(\lambda) \mathbf{p})}{dt} = \dot{R}^T(\lambda) \mathbf{p} + R^T(\lambda) \dot{\mathbf{p}} = -S(\omega)^B \mathbf{p} + {}^B \mathbf{v} \quad (11)$$

O segundo elemento corresponde à aceleração do drone, em relação ao seu próprio referencial.

$$m^B \dot{\mathbf{v}} = mgR^T(\lambda)\mathbf{e}_3 - T\mathbf{e}_3 - S(\omega)m^B \mathbf{v} \quad (12)$$

Por fim, obtêm-se as variáveis em falta. Deve-se ter em conta que o tensor de inércia J é uma matriz diagonal, logo também é invertível.

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = Q(\lambda)\omega \\ J\dot{\omega} = -S(\omega)J\omega + \mathbf{n} \end{cases} \quad (13)$$

Desta forma, apenas se tem de resolver as equações (11), (12) e (13) de forma a isolar as derivadas dos estados, e encontrar finalmente as respetivas expressões. Em forma de matriz, foram encontrados os seguintes resultados já ordenados.

$$\dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} {}^B \dot{\mathbf{p}} \\ {}^B \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B \mathbf{v} - S(\omega){}^B \mathbf{p} \\ gR^T(\lambda)\mathbf{e}_3 - T\mathbf{e}_3/m - S(\omega){}^B \mathbf{v} \\ Q(\lambda)\omega \\ J^{-1}(-S(\omega)J\omega + \mathbf{n}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Para $g_1(x_1, u)$, segue-se o mesmo processo. No entanto, neste caso o referencial é inercial. Logo, algumas equações sofrem alterações, como se pode ver no sistema de equações (15).

$$\begin{cases} {}^I \dot{\mathbf{p}} = {}^I \mathbf{v}_B \\ m^I \dot{\mathbf{v}} = mg\mathbf{e}_3 - TR(\lambda)\mathbf{e}_3 \\ \dot{\lambda} = Q(\lambda)\omega \\ J\dot{\omega} = -S(\omega)J\omega + \mathbf{n} \end{cases} \quad (15)$$

Sabendo que ${}^I \dot{v} = {}^I \ddot{p}$, e após realizar as alterações necessárias (isolar as derivadas e ordená-las), obtém-se a seguinte matriz.

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = g_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} {}^I \dot{\mathbf{p}} \\ {}^I \ddot{\mathbf{p}} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^I \mathbf{v}_B \\ g\mathbf{e}_3 - TR(\lambda)\mathbf{e}_3/m \\ Q(\lambda)\omega \\ J^{-1}(-S(\omega)J\omega + \mathbf{n}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

2.5 Interpretação do Quadri-rotor Como Sistema Plano

Aplicando a 2ª lei de Newton ao referencial inercial, é possível desenvolver o equilíbrio de forças.

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{p}}) = -TR\mathbf{e}_3 + mg\mathbf{e}_3 \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{p}} = -\frac{T}{m}R\mathbf{e}_3 + g\mathbf{e}_3 \quad (17)$$

A matriz $R = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$ é decomposta e rearranjada. Logo, encontra-se então a seguinte equação.

$$-TR\mathbf{e}_3 = m(\ddot{\mathbf{p}} - g\mathbf{e}_3) \Leftrightarrow TR_y(\theta)R_x(\phi)\mathbf{e}_3 = mR_z(-\psi)(g\mathbf{e}_3 - \ddot{\mathbf{p}}) \quad (18)$$

Aplicando as normas dos dois lados da equação, obtém-se:

$$T\|R\mathbf{e}_3\| = m\|\ddot{\mathbf{p}} - g\mathbf{e}_3\| \Leftrightarrow T\|R_y(\theta)R_x(\phi)\mathbf{e}_3\| = m\|R_z(-\psi)(g\mathbf{e}_3 - \ddot{\mathbf{p}})\| \quad (19)$$

No entanto, a norma de qualquer matriz rotação é 1. Portanto, desta forma encontra-se a relação entre T e $\ddot{\mathbf{p}}$.

$$T = m \|\ddot{\mathbf{p}} - g\mathbf{e}_3\| = m \sqrt{\ddot{p}_x^2 + \ddot{p}_y^2 + (\ddot{p}_z - g)^2} \quad (20)$$

Agora, com o objetivo de encontrar as expressões de θ e ϕ , desenvolve-se a equação (18) e obtém-se a seguinte equação.

$$R_y(\theta)R_x(\phi)\mathbf{e}_3 = R_z(-\psi)\frac{(\ddot{\mathbf{p}} - g\mathbf{e}_3)}{\|\ddot{\mathbf{p}} - g\mathbf{e}_3\|} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} s_\theta c_\phi \\ -s_\phi \\ c_\theta c_\phi \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\ddot{\mathbf{p}} - g\mathbf{e}_3\|} \begin{bmatrix} \ddot{p}_x c_\psi + \ddot{p}_y s_\psi \\ \ddot{p}_x c_\psi - \ddot{p}_y s_\psi \\ \ddot{p}_z - g \end{bmatrix} \quad (21)$$

Por fim, depois de alguma manipulação e desenvolvimento algébrico, é possível obter os ângulos pretendidos de picada θ e rolamento ϕ .

$$\begin{cases} \theta = \arctan\left(\frac{\ddot{p}_x c_\psi + \ddot{p}_y s_\psi}{\ddot{p}_z - g}\right) \\ \phi = \arctan\left(\frac{\ddot{p}_x c_\psi - \ddot{p}_y s_\psi}{\sqrt{(\ddot{p}_x c_\psi + \ddot{p}_y s_\psi)^2 + (\ddot{p}_z - g)^2}}\right) \end{cases} \quad (22)$$

A partir desta expressão, repare-se que T apenas depende da aceleração do drone $\ddot{\mathbf{p}}$ nas direções dos 3 eixos, e da aceleração da gravidade g . No entanto, para além das mesmas acelerações, os ângulos θ e ϕ também dependem do ângulo ψ .

T , θ e ϕ são as variáveis controladas pelos atuadores para escolher, de alguma forma, \ddot{p} e ψ . Neste caso de sustentação do drone, o seu movimento vertical é controlado essencialmente pela força de propulsão total T , o movimento longitudinal pelo ângulo de picada θ , e o movimento lateral pelo ângulo de rolamento ϕ . Por outro lado, o ângulo ψ é o principal responsável pela transformação do referenciais.

2.6 Equilíbrio

Assume-se como equilíbrio a situação em que a aeronave está em sustentação numa dada posição estática $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ com um ângulo de guinada constante ψ_0 . O ponto de equilíbrio para o sistema $\dot{\mathbf{x}} = g(x, u)$ é descrito por um *fixed flat output* y_0 . O estado de equilíbrio é designado por x_0 , e a entrada de equilíbrio corresponde a u_0 .

Como não existe movimento do drone na condição de sustentação, não há variação da posição nem da orientação ao longo do tempo. Logo, ambos os vetores são nulos.

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

No entanto, para a condição de equilíbrio, a resultante das forças aplicadas no drone é nula, ou seja $f = 0$.

$$Mf_g + Nf_T = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -s_{\theta_0} \\ s_{\phi_0} c_{\theta_0} \\ c_{\phi_0} c_{\theta_0} \end{bmatrix} \cdot mg + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f_1 - f_2 - f_3 - f_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (24)$$

Resolvendo o sistema acima, obtém-se as entradas de λ_0 (ângulos de Euler em equilíbrio).

$$\lambda_0 = \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Portanto, para o drone se manter nesta posição é necessário que θ_0 e ϕ_0 sejam nulos. Faz sentido, visto que estes ângulos são responsáveis pelas velocidades lateral e longitudinal do mesmo.

A última equação do sistema (24) significa que as duas forças aplicadas no quadri-rotor (a força de propulsão total T e a força gravítica f_g) apresentam a mesma direção e módulo, mas sentidos opostos. Isto com o objetivo da força resultante e do componente n_0 dos momentos serem nulos, e o drone se encontre em sustentação.

$$mg = (f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \Leftrightarrow T = f_g \quad (26)$$

Assim se determinam os vetores de estado e de entrada em equilíbrio.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 = [x_0 & y_0 & z_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_0 & 0 & 0 & 0]^T \\ \mathbf{u}_0 = [mg & 0 & 0 & 0]^T \end{cases} \quad (27)$$

2.7 Linearização do Sistema

A linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio pode ser realizada a partir das variáveis incrementais δx e δu definidas no enunciado. Define-se então o estado do sistema através de variáveis incrementais para os estados x e u .

$$\begin{cases} x = x_0 + \delta x \\ u = u_0 + \delta u \end{cases} \quad (28)$$

As variáveis incrementais de $\delta \mathbf{x} = [\delta \mathbf{p}^T \delta \mathbf{v}^T \delta \lambda^T \delta \omega^T]$ são dadas pelo seguinte sistema.

$$\begin{cases} \delta \mathbf{p} = R^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \\ \delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \\ \delta \lambda = \lambda - \lambda_0 \\ \delta \omega = \omega - \omega_0 \end{cases} \quad (29)$$

Além disso, para que a linearização seja adequada, as perturbações devem ser pequenas. Ou seja, assumindo um δd aproximadamente nulo, têm-se as seguintes aproximações.

$$\begin{cases} s_{\delta d} = \delta d \\ c_{\delta d} = 1 \\ \delta d_1 \cdot \delta d_2 = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Como foi visto anteriormente, as condições de sustentação do voo no ponto de equilíbrio implicam que \dot{p}_0 , \dot{v}_0 , \dot{w}_0 e $\dot{\lambda}$ sejam nulos, o que facilita o cálculo das expressões da dinâmica.

Na **linearização de δp** tem-se que:

$$\delta \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} \quad (31)$$

Na **linearização de δv** tem-se que:

$$\delta \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \delta \dot{u} \\ \delta \dot{v} \\ \delta \dot{w} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -mg\delta\theta \\ mg\delta\phi \\ mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg - \delta T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta T \end{bmatrix} \quad (32)$$

Na **linearização de $\delta \lambda$** tem-se que:

$$\delta \dot{\lambda} = \begin{bmatrix} \delta \dot{\phi} \\ \delta \dot{\theta} \\ \delta \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta q \\ \delta r \end{bmatrix} \quad (33)$$

Na **linearização de $\delta\omega$** tem-se que:

$$\dot{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta n_x \\ \delta n_y \\ \delta n_z \end{bmatrix} \quad (34)$$

Também é possível aproximar a função da dinâmica $\dot{\mathbf{x}}$, através de uma expansão de Taylor de 1ª ordem em torno do ponto de equilíbrio (condição de sustentação). Desta forma, é possível representar o sistema linear num espaço de estados com a equação da dinâmica $\dot{x} = A\delta x + B\delta u$ onde $A_{12 \times 12}$ e $B_{12 \times 4}$ são matrizes reais.

Nas condições de equilíbrio, são obtidas as seguintes matrizes A e B que correspondem à equação da dinâmica linearizada de $\delta\dot{\mathbf{x}}$. Deve-se ter em conta que I é a matriz identidade.

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & C & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 4} \\ D_{3 \times 4} \\ 0_{3 \times 4} \\ E_{3 \times 4} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_{zz}} \end{bmatrix}$$

2.8 Determinação das Funções de Transferência

Assumindo que o momento de inércia J é diagonal, encontram-se as seguintes equações de linearização na posição de equilíbrio.

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \dot{\phi} = \delta p \\ \delta \dot{p} = \frac{\delta n_x}{J_{xx}} \\ \delta \dot{\theta} = \delta q \\ \delta \dot{q} = \frac{\delta n_y}{J_{yy}} \\ \delta \dot{\psi} = \delta r \\ \delta \dot{r} = \frac{\delta n_z}{J_{zz}} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \dot{x} = \delta u \\ \delta \dot{u} = -g\delta\theta \\ \delta \dot{y} = \delta v \\ \delta \dot{v} = g\delta\phi \\ \delta \dot{z} = \delta w \\ \delta \dot{w} = -\frac{1}{m}\delta T \end{array} \right. \quad (36)$$

De seguida aplica-se a transformada de Laplace a todas estas equações de linearização.

$$\left\{ \begin{array}{l} s\Phi(s) = P(s) \\ sP(s) = \frac{N_x(s)}{J_{xx}} \\ s\Theta(s) = Q(s) \\ sQ(s) = \frac{N_y(s)}{J_{yy}} \\ s\Psi(s) = R(s) \\ sR(s) = \frac{N_z(s)}{J_{zz}} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} sX(s) = U(s) \\ sU(s) = -g\Theta(s) \\ sY(s) = V(s) \\ sV(s) = g\Phi(s) \\ sZ(s) = W(s) \\ sW(s) = -\frac{1}{m}T(s) \end{array} \right. \quad (37)$$

Por fim, organizando e rearranjando as equações acima, facilmente se obtêm as seguintes funções transferência.

$$\begin{cases} G_\phi(s) = \frac{\Phi(s)}{N_x(s)} = \frac{1}{s^2 J_{xx}} \\ G_\theta(s) = \frac{\Theta(s)}{N_y(s)} = \frac{1}{s^2 J_{yy}} \\ G_\psi(s) = \frac{\Psi(s)}{N_z(s)} = \frac{1}{s^2 J_{zz}} \end{cases}, \quad \begin{cases} G_x(s) = \frac{X(s)}{N_y(s)} = \frac{-g}{s^4 J_{yy}} \\ G_y(s) = \frac{Y(s)}{N_x(s)} = \frac{g}{s^4 J_{xx}} \\ G_z(s) = \frac{Z(s)}{W(s)} = -\frac{1}{s^2 m} \end{cases} \quad (38)$$

2.9 Efeito do Valor de Equilíbrio da Guinada na Posição

A partir das equações imediatamente abaixo, conclui-se rapidamente que existe uma relação de dependência de $X(s)$ e $\Phi(s)$ e entre $Y(s)$ e $\Theta(s)$. Como tal, apenas é possível deslocar o drone nestas duas direções alterando os valores dos ângulos correspondentes. Conclui-se também que, uma vez que ambas as expressões são independentes de Ψ_0 , o valor de equilíbrio do ângulo de guinada não influencia a posição do drone.

$$\begin{cases} \frac{G_y(s)}{G_\phi(s)} = \frac{X(s)}{\Phi(s)} = -\frac{g}{s^2} \\ \frac{G_x(s)}{G_\theta(s)} = \frac{Y(s)}{\Theta(s)} = \frac{g}{s^2} \end{cases} \quad (39)$$

O quadri-rotor utilizado no laboratório é um sistema sub-atuado. Isto significa que não é possível aplicar diretamente acelerações segundo o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas, no referencial centrado no centro de massa do drone. Apenas a aceleração vertical pode ser controlada diretamente pela força de propulsão. Uma vez que a força de propulsão e a aceleração gravítica são colineares neste referencial, dividindo esta força pela massa do drone obtemos a aceleração. Integrando, consegue-se obter a velocidade vertical. Para obter a posição vertical, apenas é necessário aplicar uma dupla integração a esta aceleração vertical.

As velocidades lateral e longitudinal apenas podem ser controladas de forma indireta, recorrendo aos ângulos de rolamento e de picada, respetivamente. Por sua vez, de modo a alterar estes ângulos de Euler, é necessário aplicar um momento ao quadri-rotor. Deste modo, conclui-se que a posição em x e em y é controlada integrando quatro vezes os respetivos momentos. Integrando duplamente os momentos, obtém-se as suas relações com os ângulos de Euler e, conseqüentemente, com as acelerações lineares. Integrando novamente por duas vezes, chega-se à relação entre estas acelerações e as posições lateral e longitudinal.

2.10 Estratégias de Controlo da Altitude

Na figura 2 é observa-se o diagrama de blocos do primeiro esquema de controlo da altitude h do drone, partindo de uma altitude de referência h_{ref} .

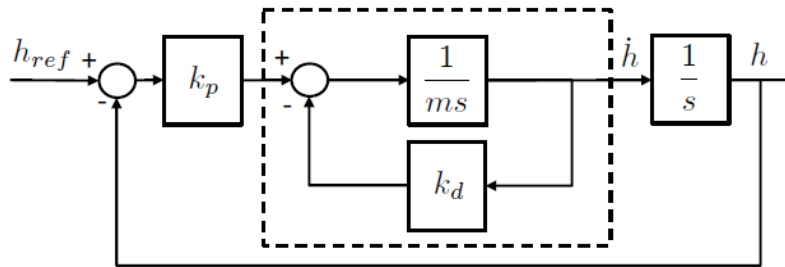


Figura 2: Esquema de controlo da altitude 1

A função de transferência em anel fechado, que relaciona a saída h com a entrada h_{ref} , $G_1(s)$, pode ser então obtida da seguinte forma:

$$G_1(s) = \frac{h}{h_{ref}} = \frac{k_p \left(\frac{\left(\frac{1}{ms} \right)}{1 + k_d \left(\frac{1}{ms} \right)} \right) \left(\frac{1}{s} \right)}{1 + k_p \left(\frac{\left(\frac{1}{ms} \right)}{1 + k_d \left(\frac{1}{ms} \right)} \right) \left(\frac{1}{s} \right)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{k_p}{s^2 + \frac{k_d}{m}s + \frac{k_p}{m}} \quad (40)$$

A função de transferência em malha fechada de um sistema de segunda ordem com ganho estático unitário pode ser descrita da forma

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (41)$$

onde ξ é o coeficiente de amortecimento e ω_n é a frequência natural do sistema. Estabelecendo o paralelismo com a função de transferência para o método 1 calculada na alínea anterior, encontra-se a relação entre estes parâmetros e k_p e k_d . Assim:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_p}{m}} \quad (42)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{k_d^2}{4mk_p}} \quad (43)$$

Note-se que a frequência natural apenas depende do ganho de controle, k_p , enquanto que o coeficiente de amortecimento depende de k_p e k_d . Como tal, variando ambos os valores, é possível desenhar um sistema com os valores de ω_n e de ξ desejados, usando k_d para equilibrar os efeitos no amortecimento do aumento ou da diminuição do ganho de controle.

É possível, no entanto, apresentar outro esquema de controlo de altitude do quadri-rotor. O respetivo diagrama de blocos está representado na figura 3.

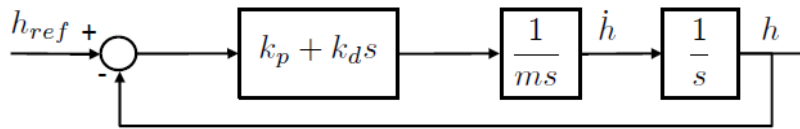


Figura 3: Esquema de controlo da altitude 2

Analogamente, podemos também determinar a função de transferência deste novo esquema, $G_2(s)$.

$$G_2(s) = \frac{h}{h_{ref}} = \frac{(k_p + k_d s) \left(\frac{1}{ms} \right) \left(\frac{1}{s} \right)}{1 + (k_p + k_d s) \left(\frac{1}{ms} \right) \left(\frac{1}{s} \right)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{k_p + k_d s}{s^2 + \frac{k_d}{m}s + \frac{k_p}{m}} \quad (44)$$

Partindo das equações 40 e 44, facilmente se conclui que ambos os sistemas são de segunda ordem, causais (número de pólos superior ao número de zeros) e têm um ganho estático unitário ($G_1(0) = 1$ e $G_2(0) = 1$). Observa-se também que os pólos são exatamente os mesmos nas duas expressões, pelo que a dinâmica esperada não deverá ser muito diferente nos dois casos. Note-se, ainda assim, que o segundo método apresenta um zero, que deverá alterar ligeiramente o desenho do *root locus* e dos diagramas de bode. Esta diferença será mais significativa quanto maior for a frequência.

O esquema de controlo 1 denomina-se por controlo em cascata. Este tipo de controlo consiste em duas malhas de realimentação distintas, uma interna e uma externa, e é desenhado com o objetivo de desagregar as variáveis de estado, podendo o desenho de cada malha ser feito de forma aproximadamente independente. Para tal ser exequível, o tempo de estabelecimento do anel interior tem de

ser consideravelmente menor do que o do anel exterior. Com um tempo de estabelecimento bastante inferior do anel interior, é possível, pelo menos em teoria, atenuar perturbações sem que estas afetem o controlo primário do sistema, representado pelo anel exterior. No entanto, se as diferentes escalas de tempo de atuação dos dois anéis não forem asseguradas, estes podem interferir no controlo um do outro, potencialmente tornando o sistema instável.

O esquema 2 representa um tipo clássico de controlo proporcional derivativo (PD). Estes controladores são inerentemente mais simples de aplicar. Contudo, a parte derivativa destes controladores pode causar problemas na eventualidade de a referência não ser um sinal contínuo. Tal pode levar a indefinições do sistema de controlo e ao comprometimento do mesmo, ou até dos próprios atuadores.

2.11 Efeito do Ganho Proporcional nos Pólos do Sistema

A função de transferência em malha aberta correspondente ao primeiro método de controlo é:

$$G_{1ma}(s) = k_p \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s(s + \frac{k_d}{m})} \quad (45)$$

Substituindo $\frac{k_d}{m}$ pelos valores arbitrários $m = 0.5$ e $k_d = 1.5$, e utilizando a função *rlocus* do *Matlab*, obteve-se o seguinte diagrama de *root locus*:

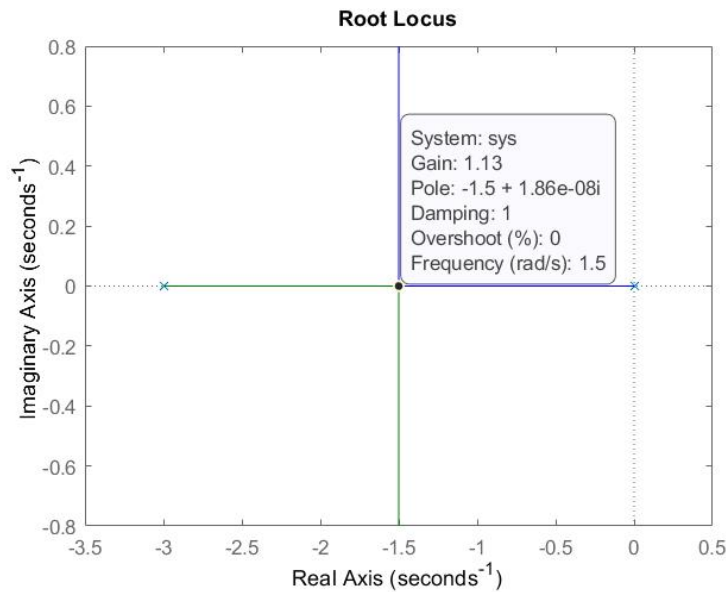


Figura 4: Root locus G_1

É visível neste diagrama que para ganhos positivos baixos, os pólos se encontram no eixo real. Para um ganho de 1.13, temos um pólo duplo no eixo e real e, para ganhos proporcionais superiores a este valor, passamos a ter um par de pólos complexos conjugados. Estes pares de pólos tendem para infinito segundo uma reta vertical, ou seja, mantêm a sua parte real constante e veem a sua parte imaginária aumentar indefinidamente. Do ponto de vista do controlo do sistema, isto significa que este é estável independentemente do valor de k_p .

3 Height Dynamics

3.1 Resposta da Altitude a Diferentes Ganhos e Diferentes Degraus

Para dar início à atividade laboratorial, foram simulados e testados os valores da tabela 1 de forma a se obterem respostas a diferentes degraus com diferentes ganhos.

Ganho	Degrau ($t = 5s$)	Degrau Cumulativo ($t = 15s$)
0,5	$1m$	$1m$
1	$1m$	$0,5m$
2,4	$1m$	$0,25m$
3,2	$1m$	$0,2m$

Tabela 1: Parâmetros para a entrada de altura de referência

Para simular os degraus pretendidos com o *Parrot AR.Drone*, o ficheiro *Simulink* da simulação foi alterado, como se pode ver na figura 5. Foram adicionados 2 blocos de *step* para a referência de altitude do drone h_{ref} , com o primeiro degrau aos 5 segundos, e o segundo aos 15 segundos, como se pode confirmar na tabela 1.

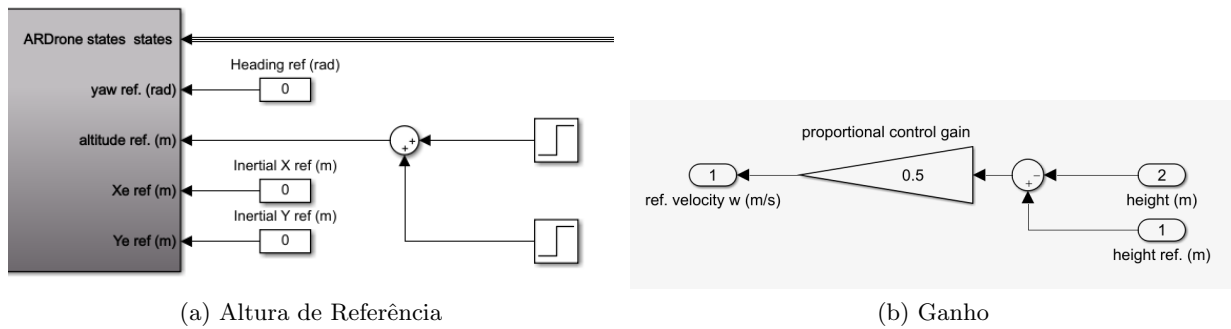


Figura 5: Simulação do *Parrot AR.Drone* com a alteração de h_{ref} e k_p , respetivamente

Na figura 6 encontram-se os gráficos onde é possível visualizar e comparar os valores de referência dados no enunciado laboratorial, os valores da simulação corrida no *Matlab*, e os valores experimentais obtidos com o drone.

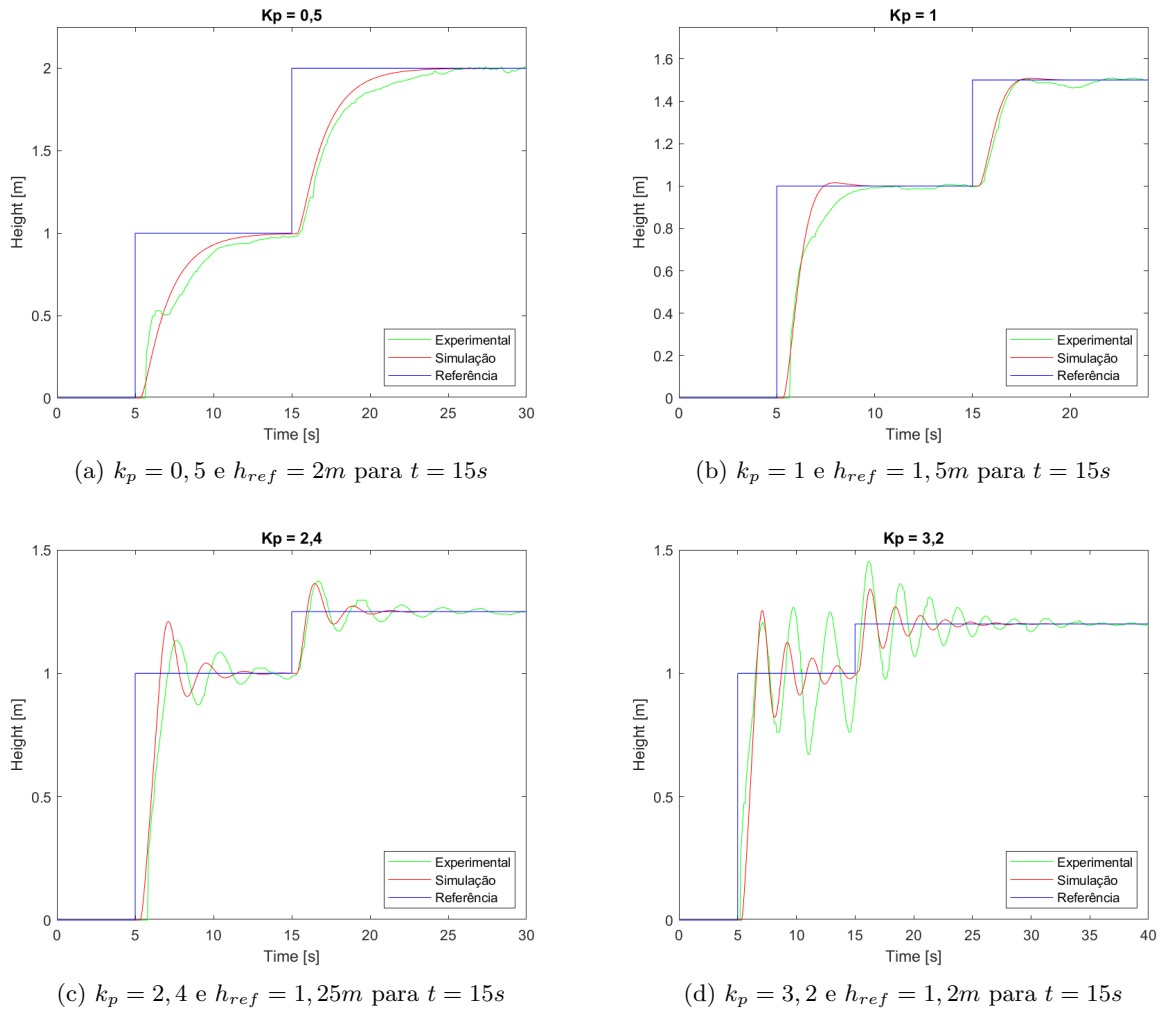


Figura 6: Valores de referência, de simulação e experimentais

Repare-se nas figuras acima que para o caso de $k_p = 0,5$, o controle é do tipo sobreamortecido enquanto que os outros ganhos ($k_p = 1$, $k_p = 2,4$ e $k_p = 3,2$) se tratam dum controle do tipo sub-amortecido, onde as oscilações aumentam à medida que se aumenta k_p .

Como se pode ver na tabela 1, os valores indicados para os degraus cumulativos são cada vez mais pequenos à medida que se aumenta o ganho. Este aumento de ganho aumenta o comando aplicado aos atuadores, o que torna a resposta do sistema mais rápida. Portanto existe um aumento da instabilidade, do *overshoot* e do tempo de estabelecimento. Como a atuação dos atuadores reais está sempre limitada, é necessário ter atenção aos valores de entrada. Isto quer dizer que a alternativa mais segura é tornar a diferença entre os degraus de referência mais pequena com o aumento do ganho.

No entanto, ao pedir um ganho muito elevado aos atuadores, eles irão saturar e vão deixar de trabalhar na sua zona linear. Nestas condições, os atuadores limitam, e também podem comprometer a ação de controle.

3.2 Obtenção das Funções de Transferência em Malha Fechada

Partindo dos resultados obtidos na subsecção anterior, e recorrendo à aplicação *systemIdentification* do *Matlab*, foi possível estimar as funções de transferência em anel fechado correspondentes a cada um dos 4 ganhos testados. Nesta estimativa forçou-se a apresentação de funções de transferência que

fossem estáveis e que apenas tivessem dois pólos e nenhum zero.

3.2.1 $k_p = 0.5$ e $step = 1.0m$

No primeiro teste, utilizou-se um step de 1 metro e um ganho proporcional de $0.5s^{-1}$. A função de transferência estimada foi a seguinte:

$$G_1 = \frac{1.5582}{s^2 + 3.7205s + 1.5777} \quad (46)$$

Esta função de transferência apresenta um *fit* de 93.87%, revelando ser uma excelente aproximação aos dados obtidos experimentalmente. Os seu pólos encontram-se no eixo real, em $p_1 = -0.488$ e em $p_2 = -3.23$. O coeficiente de amortecimento, ξ , é igual a 1, e a frequência natural dos pólos é dada por $\omega_{n1} = 0.488rad/s$ e $\omega_{n2} = 3.23rad/s$. Esta situação trata-se de um sistema criticamente amortecido. Como tal, não existe oscilação nem sobre-elevação. O tempo de subida (definido entre 10% e 90%) é de 4.8317s e o tempo de estabelecimento (com uma tolerância de 5%) é de 7.0293s.

3.2.2 $k_p = 1$ e $step = 0.5m$

Na segunda experiência, obteve-se a seguinte função de transferência, para um degrau de 0.5m e um ganho proporcional de $1s^{-1}$:

$$G_2(s) = \frac{2.699}{s^2 + 2.419s + 2.768} \quad (47)$$

Neste caso, o valor do *fit* foi de 90.36%, simbolizando mais uma vez uma excelente relação entre a estimativa e os dados experimentais. Esta função de transferência tem dois pólos complexos conjugados em $p_{1,2} = -1.21 \pm 1.14j$. O coeficiente de amortecimento é igual a 0.727 e a frequência natural é de $1.66rad/s$. O tempo de subida e de estabelecimento são substancialmente mais rápidos, sendo de 1.3294s e 1.8143s, respetivamente. É de salientar, por fim, que existe uma sobre-elevação de 3.5879%.

3.2.3 $k_p = 2.4$ e $step = 0.25m$

No terceiro conjunto de dados, para um degrau de 0.25m e um ganho proporcional de $2.4s^{-1}$, chegou-se à função de transferência:

$$G_3(s) = \frac{5.519}{s^2 + 0.8483s + 5.591} \quad (48)$$

Obteve-se, com esta função de transferência, um valor de *fit* de 83%, um valor ainda bastante satisfatório. Os pólos desta função de transferência estão em $p_{1,2} = -0.424 \pm 2.33j$. O coeficiente de amortecimento é de 0.179, espelhando o maior carácter oscilatório do sistema com este ganho. A frequência natural é igual a $2.36rad/s$. O tempo de subida é notoriamente mais rápido, com 0.5055s. No entanto, o tempo de estabelecimento torna-se mais lento devido ao seu modo oscilatório, ficando em 6.9686s. A sobre-elevação atinge um valor de 56.028%.

3.2.4 $k_p = 3.2$ e $step = 0.2$

Por fim, a última função de transferência obtida foi:

$$G_4(s) = \frac{0.0258}{s^2 + 0.02308s + 0.02573} \quad (49)$$

Nesta função de transferência, o *fit* obtido foi de 76.69%. Ainda que seja um valor razoável e espelhe uma boa relação entre os dados estimados e os dados experimentais, é naturalmente mais

baixo do que nos outros casos. Isto deve-se ao seu carácter fortemente oscilatório, adicionado de uma grande presença de ruído nos dados experimentais, que é amplificado mais significativamente graças ao maior ganho proporcional do sistema. Os pólos encontram-se em $p_{1,2} = -0.178 \pm 2.46j$. O coeficiente de amortecimento é igual a 0.0719, evidenciando um claro caso de subamortecimento. A frequência natural é de 2.47 rad/s . O tempo de subida é igual a 0.4466s e o tempo de estabelecimento é igual a 16.7091s. Destaca-se a magnitude da sobre-elevação, que é igual a 79.7241%.

3.3 Posição dos Pólos do Sistema em Malha Fechada

Partindo das funções de transferência estimadas na alínea anterior, é possível desenhar o mapa dos pólos das mesmas no plano complexo.

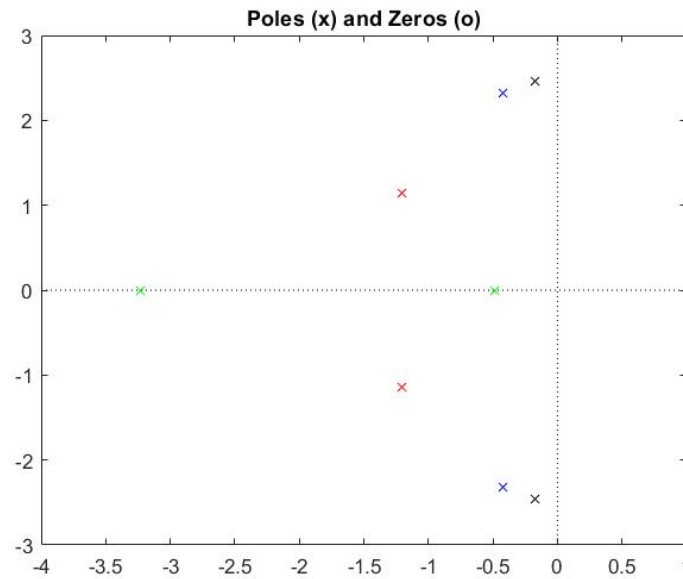


Figura 7: Mapa dos pólos das funções de transferência obtidas experimentalmente

Através da análise desta figura, facilmente se percebe que esta não apresenta o comportamento esperado e deduzido na parte teórica deste relatório. Na parte teórica vimos que, à medida que o ganho aumenta, os pólos deveriam deslocar-se na vertical, afastando-se do eixo real. No entanto, podemos observar que os pólos se afastam de facto do eixo real, mas com alguma obliquidade, aproximando-se do semi-plano complexo direito. Isto significa que, aumentando o ganho, nos estamos a aproximar da região instável do sistema, podendo mesmo atingi-la caso continuássemos a aumentar k_p .

Uma possível justificação para este comportamento é o facto de existir um delay entre a comunicação wifi entre o computador e o drone, e um delay na execução dos movimentos dos atuadores. Ainda que se tente simular este comportamento através de um bloco de atraso, não se consegue fazê-lo com precisão, não sendo previsto este comportamento tendencialmente instável do quadri-rotor.

É possível introduzir os efeitos aproximados deste delay no diagrama de root locus através de uma aproximação de Padé, que visa aproximar atrasos por modelos racionais. Tendo um atraso T uma transformada de Laplace e^{-sT} , podemos obter a sua aproximação de Padé de uma função de transferência racional e incluí-la no root locus. Desta forma, é possível melhor modelar o comportamento real do quadri-rotor.

4 Pitch Dynamics

4.1 Resposta em Frequência a Uma Entrada Sinusoidal

Com o intuito de identificar a dinâmica em malha fechada do ângulo de picada, foram introduzidas as seguintes alterações ao circuito *simulink ARDroneHoverPitch*. Na figura 8(a) encontram-se as alterações referentes às alíneas 4.1 e 4.2, que consistem na substituição da referência 0 do ângulo de picada por uma entrada sinusoidal, multiplicada por um degrau de modo a retardar o início dos efeitos da sinusóide, dando tempo ao drone para descolar. Na figura 8(b), encontra-se a modificação introduzida na alínea 4.3, em que a sinusóide da entrada foi substituída por um degrau invertido.

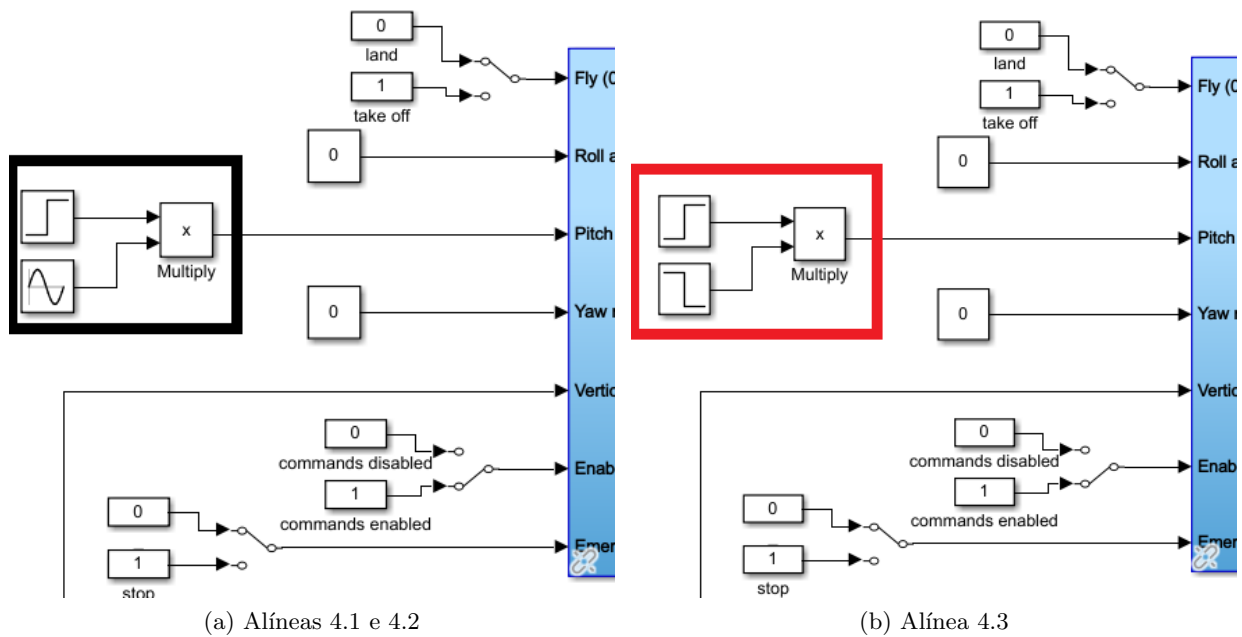


Figura 8: Alterações introduzidas no simulink

O sinal escolhido para responder às primeiras duas questões do guia laboratorial foi a sinusóide $A(\omega, t) = 0.2 \sin(\omega t)$, em que a frequência ω foi variada entre na gama $\omega \in [1; 20] \text{ rad/s}$. Na tabela 2 são expostos os valores da amplitude média obtidos na simulação e experimentalmente, para diferentes valores de ω .

$\omega \text{ (rad/s)}$	Simulação (rad)	Resultado Experimental (rad)
1	0.094	0.081
3	0.147	0.119
5	0.117	0.102
7	0.079	0.081
9	0.060	0.060
11	0.048	0.041
13	0.040	0.031
15	0.035	0.022
17	0.030	0.018
20	0.026	0.012

Tabela 2: Amplitudes médias para diferentes valores de ω

A partir dos valores experimentais apresentados na tabela, normalizados com a amplitude da onda de referência, é possível descobrir a função de transferência da dinâmica em anel fechado da picada. Sabe-se que esta função de transferência será causal, de segunda ordem, tendo um zero de fase mínima. Será da forma:

$$G_p(s) = \frac{k_p(s + a)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (50)$$

ou então, substituindo s por $j\omega$, obtém a expressão para o módulo de G_p :

$$|G_p(j\omega)| = \frac{k_p \sqrt{\omega^2 + a^2}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega_n \xi \omega)^2}} \quad (51)$$

Recorrendo à função *nlinfit* do *Matlab*, encontrou-se os parâmetros $[k_p, a, \xi, \omega_n]$. Os parâmetros estimados foram então $\beta = [1.9787, 3.6337, 0.5043, 4.2969]$, tendo sido obtido um erro RMS (*Root Mean Square*) de 0.0293, indicando uma boa aproximação dos valores estimados. A aproximação poderia ser, no entanto, mais precisa caso tivessem sido testados mais pontos experimentalmente. Para além disto, a presença de ruído e o facto de os atuadores não serem ideais, também condicionam a validade da estimativa. Ainda assim, a estimativa apresentada tem um erro suficientemente baixo para poder ser considerada fidedigna. A função de transferência, G_p , é então a seguinte:

$$G_p(s) = \frac{1.9787(s + 3.6337)}{s^2 + 4.3339s + 18.4633} \quad (52)$$

Esta função de transferência tem dois pólos complexos conjugados situados no semi-plano complexo esquerdo - estáveis -, em $p_{1,2} = -2.1669 \pm 3.7105j$, e um zero de fase mínima em $z_1 = -3.6337$. De seguida, partindo desta função de transferência, é possível desenhar o diagrama de Bode da resposta em frequência do ângulo de picada:

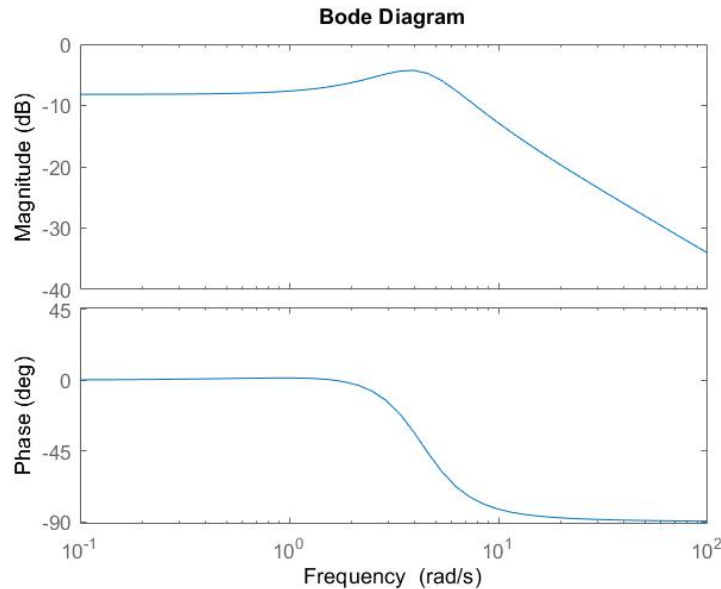


Figura 9: Diagrama de bode da função de transferência estimada

Através da análise deste diagrama de Bode, facilmente se conclui que a margem de ganho e a margem de fase são ambas infinitas, uma vez que o diagrama de fase nunca atinge os 180^o nem o diagrama de ganho atinge os 0dB.

4.2 Resposta a Uma Referência

Nesta secção, pretende-se estudar a resposta do sistema a uma referência do ângulo de picada. Esta situação assemelha-se mais a uma situação real. A referência utilizada foi:

$$\theta_{ref}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 15s \\ 0.2, & 15 \leq t < 18s \\ 0, & t \geq 18s \end{cases} \quad (53)$$

Na figura 10 pode encontrar-se o gráfico da referência, da resposta da simulação e da resposta experimental em ordem ao tempo.

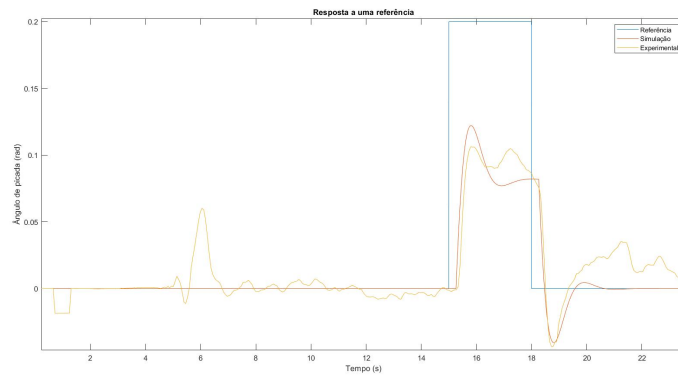


Figura 10: Referência, simulação e resposta experimental a uma referência

Através da análise do gráfico, facilmente se conclui que o sistema não é capaz de seguir fielmente a referência. Este resultado é esperado teoricamente, sendo facilmente comprovado através do cálculo do ganho estático ou da aplicação do Teorema do Valor Final ($G_p(0) = 0.389 \implies \theta_\infty(s) = 0.078$). Repare-se também na existência de ruído nos dados experimentais, o que condiciona a obtenção de dados fidedignos. No entanto, é visível a concordância entre os resultados da simulação e os resultados experimentais.

É de notar que, aos 15 segundos, quando o primeiro degrau sobe de 0 para 0.2, existe alguma sobre-elevação da resposta da simulação, confirmada pelos resultados experimentais. Segue-se um comportamento oscilatório estável em torno do valor para o qual tende a resposta, mas antes que este estabilize, existe o regresso a 0 radianos. Esta descida apresenta novamente "sobre-elevação", desta vez negativa, novamente confirmada pelos resultados experimentais.

Por fim, resta reconhecer o efeito do *delay* na atuação do drone. Este faz com que a subida não aconteça exatamente quando t é igual a 15s. Este delay é também simulado no *simulink* através de um bloco idealizado para tal.

5 Conclusão

Concluída a simulação dos resultados e sua consequente experimentação, foi possível identificar diferentes aspetos da dinâmica em anel fechado da altitude e da picada.

Na introdução teórica deste relatório começou-se por derivar as equações da cinemática e da dinâmica do quadri-rotor Parrot AR.Drone. De seguida estudou-se o impacto da utilização de referenciais diferentes, nomeadamente o do corpo e um referencial inercial, nas equações da dinâmica. Estudou-se os pontos de equilíbrio e a linearização do sistema e derivou-se as diferentes funções de transferência, correspondentes às diferentes saídas do sistema complexo que é um quadri-rotor. Por

fim, estudou-se duas metodologias de controlo da altitude em anel fechado e desenhou-se o *root locus* correspondente a um destes métodos.

Na parte experimental, foi possível concluir que existe uma boa concordância entre os resultados obtidos no *simulink* de simulação e os resultados obtidos experimentalmente, através do controlo via *wifi* do drone.

No controlo da altitude, obteve-se as diferentes respostas para vários valores de ganho proporcional e diferentes valores de degrau cumulativo. Tratando estes dados, recorreu-se à ferramenta interativa do *Matlab*, a aplicação *systemIdentification*, para estimar uma função de transferência, equivalente ao primeiro método estudado na parte teórica, que se adequasse aos valores obtidos. No geral, os resultados obtidos foram bastante satisfatórios, sendo que à medida que o ganho foi aumentando, foi se obtendo resultados cada vez menos concordantes com os dados experimentais. A maior causa disto está na presença de ruído que, multiplicado por ganhos cada vez maiores, se torna cada vez mais preponderante nos dados obtidos. Por fim, desenhou-se o mapa dos pólos das diferentes funções de transferência e analisou-se o comportamento a tender para a instabilidade do mesmo. Falou-se ainda da possibilidade de utilizar uma aproximação de Padé para modelar a função de transferência do atraso e incluir os seus efeitos no *root locus*.

No controlo da picada, estudou-se a resposta do quadri-rotor a vários sinais sinusoidais, com diferentes frequências. Tratados os dados, desenhou-se o diagrama de Bode e estudou-se a resposta do ângulo de picada à frequência. Obteve-se ainda uma função de transferência de segunda ordem e com um zero de fase mínima para este sistema, recorrendo à função *nlinfit* do *Matlab*. Por último, estudou-se a resposta do sistema a uma referência constante num intervalo de tempo. Esta parte representa melhor uma situação real da atuação do drone.

Concluindo, este trabalho foi extremamente útil para termos uma melhor compreensão sobre a identificação e a modelação de diferentes aspetos de um quadri-rotor. Os resultados obtidos foram satisfatórios, ainda que, previsivelmente, fosse observável os efeitos do ruído, de sensores e atuadores não ideais e de atrasos.