



TÉCNICO
LISBOA

ELECTRÓNICA GERAL

Conversor Digital Analógico

Afonso Mendes, 75398
David Escudeiro 75479
Élio Pereira, 78535
Pedro Pinto, 75239

6 de Novembro de 2015

Conteúdo

1	Estudo funcional do conversor D/A	2
1.1	Análise Teórica	2
1.1.1	Obtenção da expressão teórica para a tensão de saída do conversor, v_o , em função da palavra digital	2
1.2	Análise Experimental	6
1.2.1	Obtenção dos valores da tensão de saída, v_o , em função da palavra digital produzida por S_1 , S_2 , S_3 e S_4 , com $R_f = 2R$ e $R_f = 4R$	6
1.2.2	Obtenção das formas de onda dos gráficos $v_o(t)$ e $v_{Clk}(t)$ para $R_f = 2R$ e $R_f = 4R$ a partir do osciloscópio digital	7
1.2.3	Variação da tensão de saída do conversor observada entre dois níveis consecutivos, para os dois valores diferentes de R_f	8
2	Influência das resistências de entrada	14
2.1	Análise Teórica	14
2.1.1	Determinação da influência da variação das resistências R_1 a R_4 , variando uma de cada vez	14
2.1.2	Determinação das alterações nas características do circuito diminuindo o valor de uma das resistências de R_1 a R_4 , uma de cada vez	25
2.2	Análise Experimental	27
2.2.1	Obtenção das formas de onda dos gráficos $v_o(t)$ e $v_{Clk}(t)$	27
2.2.2	Monotonicidade do conversor	27
3	Tempo de estabelecimento	29
3.1	Análise Teórica	29
3.2	Análise Experimental	30
4	Picos de tensão na transição de estados	35
4.1	Sinal de entrada e saída	35
4.2	Picos de tensão espúrios	35
4.3	Análise de Resultados	36
5	Conclusões	37

Estudo funcional do conversor D/A

1.1 Análise Teórica

1.1.1 Obtenção da expressão teórica para a tensão de saída do conversor, v_o , em função da palavra digital

O circuito *DAC* que testámos no laboratório pode ser representado pelo seguinte esquema:

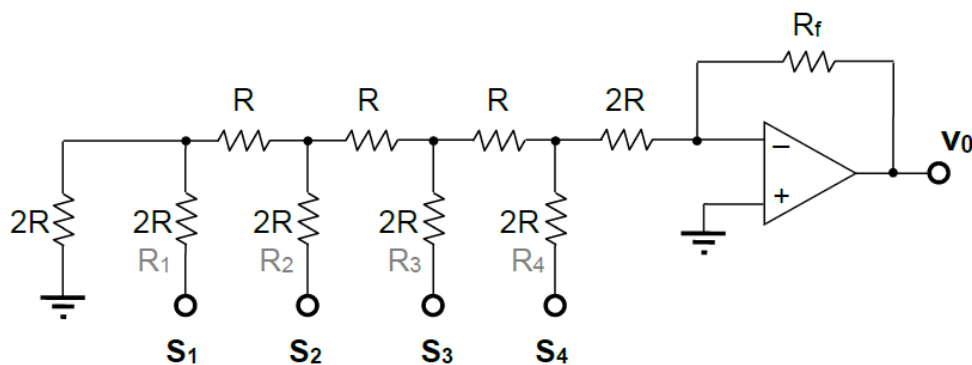


Figura 1.1: Circuito *DAC* testado no laboratório.

Podemos distinguir no circuito do conversor duas secções diferentes: um circuito em escada $R - 2R$ ligado às fontes S_1 , S_2 , S_3 e S_4 , e um circuito multiplicador inversor, sendo a sua saída, v_o , a saída do conversor.

Pretendemos determinar a tensão de saída do conversor em função das tensões de entrada S_1 , S_2 , S_3 e S_4 para 2 valores R_f diferentes, $R_f = 2R$ e $R_f = 4R$. Recorrendo ao Princípio da Sobreposição, podemos obter v_o fazendo $v_o = v_{o1} + v_{o2} + v_{o3} + v_{o4}$, em que v_{oi} , ($i = 1, 2, 3, 4$), corresponde à tensão de saída do conversor quando se tem apenas a fonte S_i activa (isto é, quando as fontes S_j , $j \neq i$, são substituídas por *GND*).

Determinação de v_{o1}

Para a determinação de v_{o1} , substituímos as fontes S_2 , S_3 e S_4 por *ground*, obtendo-se o seguinte circuito:

$$v_{o1} = -R_f i_o = -\frac{R_f S_1}{3R 16} \quad (1.1)$$

Determinação de v_{o2}

Para este caso, substituímos as fontes S_1 , S_3 e S_4 por *ground*, tendo-se obtido o seguinte circuito:

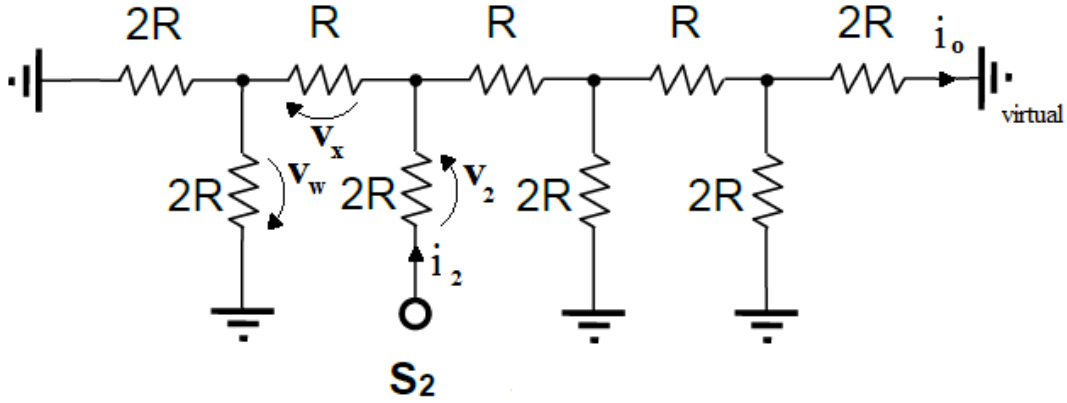


Figura 1.3: Circuito em escada do DAC com as fontes S_1 , S_3 e S_4 substituídas por *GND*.

Pela análise do esquema da figura 1.3 é possível concluir que os fenômenos de divisão sucessiva da corrente de entrada i_2 irão ocorrer nos vários nós, já que as resistências “vistas” nos ramos de chegada serão iguais. Podemos constatar que a corrente i_2 irá dividir-se 3 vezes até chegar ao ramo de corrente i_o . Portanto,

$$i_o = \frac{i_2}{8}$$

Por outro lado, é possível determinar i_2 tendo em conta que:

$$S_2 = v_2 + v_x + v_w = 2Ri_2 + Ri_x + 2Ri_w = 2Ri_2 + R\frac{i_2}{2} + 2R\frac{i_2}{4} = 3Ri_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i_2 = \frac{S_2}{3R}$$

Logo,

$$i_o = \frac{S_2}{3R} \frac{1}{8}$$

Aplicando a lei de Ohm em R_f , vem que:

$$v_{o2} = -\frac{R_f S_2}{3R 8} \quad (1.2)$$

Determinação de v_{o3}

Substituindo as fontes S_1 , S_2 e S_4 por *ground*, obteve-se o seguinte circuito:

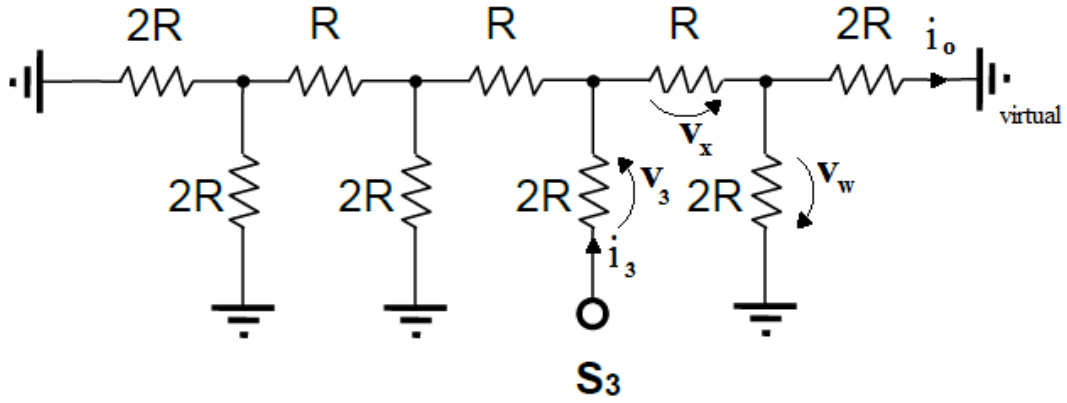


Figura 1.4: Circuito em escada do *DAC* com as fontes S_1 , S_2 e S_4 substituídas por *GND*.

Tal como aconteceu nos casos anteriores, existem divisões sucessivas da corrente i_3 nos vários nós do circuito após a substituição previamente referida. Portanto, analisando o esquema, podemos constatar que:

$$i_o = \frac{i_3}{4}$$

Tem-se que:

$$S_3 = v_3 + v_x + v_w = 2Ri_3 + R\frac{i_3}{2} + 2R\frac{i_3}{4} = 3Ri_3$$

$$\Leftrightarrow i_3 = \frac{S_3}{3R}$$

Portanto,

$$i_o = \frac{S_3}{3R} \frac{1}{4}$$

e

$$v_{o3} = -\frac{R_f}{3R} \frac{S_3}{4} \quad (1.3)$$

Determinação de v_{o4}

Substituindo as fontes S_1 , S_2 e S_3 por *ground*, obteve-se o seguinte circuito:

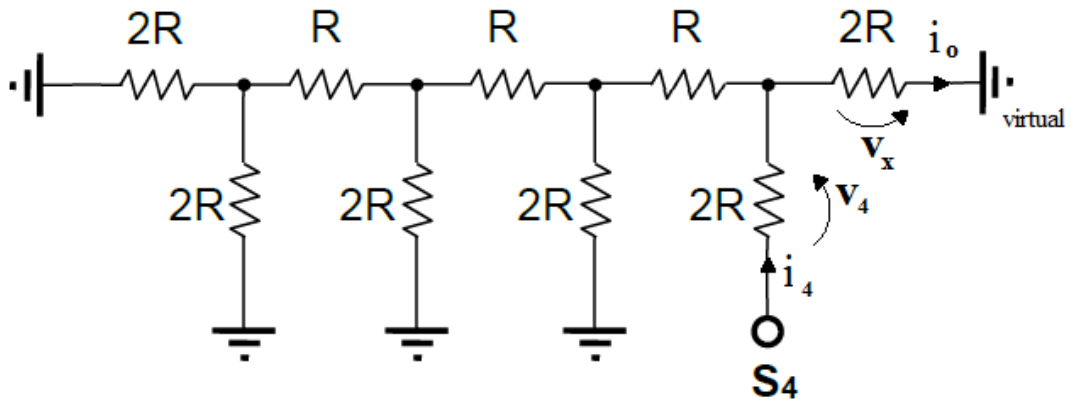


Figura 1.5: Circuito em escada do *DAC* com as fontes S_1 , S_2 e S_3 substituídas por *GND*.

Atendendo ao fenómeno de divisão da corrente i_4 , vem que:

$$i_o = \frac{i_4}{2}$$

sendo que,

$$S_4 = v_4 + v_x = 2Ri_4 + 2Ri_o = 2Ri_4 + 2R\frac{i_4}{2} = 3Ri_4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i_4 = \frac{S_4}{3R}$$

e portanto,

$$v_{o4} = -\frac{R_f}{3R} \frac{S_4}{2} \quad (1.4)$$

Determinação de v_o

A partir das expressões 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4 podemos calcular v_o , fazendo:

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} + v_{o3} + v_{o4} = -\frac{R_f}{3R} \left(\frac{S_1}{16} + \frac{S_2}{8} + \frac{S_3}{4} + \frac{S_4}{2} \right)$$

Como $S_i = V_{Ref}b_i$, em que b_i assume o valor 1, quando a fonte S_i está ligada, e 0, caso contrário, tem-se que:

$$v_o = -\frac{R_f}{3R} V_{Ref} \left(\frac{b_1}{16} + \frac{b_2}{8} + \frac{b_3}{4} + \frac{b_4}{2} \right) \quad (1.5)$$

Para $R_f = 2R$:

$$v_o = -\frac{5}{3} \left(\frac{b_1}{8} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{2} + b_4 \right) \quad (1.6)$$

Para $R_f = 4R$:

$$v_o = -\frac{10}{3} \left(\frac{b_1}{8} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{2} + b_4 \right) \quad (1.7)$$

1.2 Análise Experimental

1.2.1 Obtenção dos valores da tensão de saída, v_o , em função da palavra digital produzida por S_1 , S_2 , S_3 e S_4 , com $R_f = 2R$ e $R_f = 4R$

Começámos por aplicar uma onda quadrada positiva entre 0 e 5V, de frequência $f = 100kHz$ no ponto C_p (*clock*) do conversor.

Neste circuito, a palavra digital é definida por $b_4b_3b_2b_1$, onde b_i é o bit relativo ao sinal S_i . Isto é, um i maior em S_i , ($i = 1, 2, 3, 4$), implica um peso maior do bit b_i , tal como foi possível verificar na secção anterior (ver expressão 1.5). Este sinal de *clock* em conjunto com o contador permite-nos obter uma palavra digital, em que para o tempo do estado de S_i , é possível gerar os 2 estados de S_{i+1} , ($i = 1, 2, 3$). O período do sinal S_i , corresponde

a 2^i períodos do sinal de *clock*, proporcionando num ciclo de S_4 , a obtenção de todas as combinações possíveis de sinais para a construção das palavras digitais.

Quanto maior for o peso do sinal digital S_i , maior será a amplitude do sinal analógico associado. A sobreposição dos sinais irá gerar um sinal com patamares bem definidos e portanto, é possível obter v_o em função da palavra $b_4b_3b_2b_1$ relacionando a amplitude de cada patamar com a sua posição relativa no tempo. É de notar que a tensão de saída $v_o(t)$ que se obtém é não positiva, devido à operação de inversão da configuração amplificadora do conversor. Portanto, devemos de associar palavras digitais de valor superior a tensões v_o absolutas maiores.

Com os dados experimentais extraídos dos gráficos (ver figuras 1.6 e 1.7) que obtivemos no osciloscópio digital, construímos a seguinte tabela de v_o em função da palavra digital $b_4b_3b_2b_1$.

$b_4b_3b_2b_1$	Dec.	$S_4(V)$	$S_3(V)$	$S_2(V)$	$S_1(V)$	$v_o(V) (R_f = 2R)$	$v_o(V) (R_f = 4R)$
0000	0	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.012 ± 0.026	0.006 ± 0.051
0001	1	0.00	0.00	0.00	5.00	-0.194 ± 0.075	-0.446 ± 0.060
0010	2	0.00	0.00	5.00	0.00	-0.426 ± 0.037	-0.884 ± 0.056
0011	3	0.00	0.00	5.00	5.00	-0.626 ± 0.036	-1.250 ± 0.060
0100	4	0.00	5.00	0.00	0.00	-0.838 ± 0.047	-1.712 ± 0.001
0101	5	0.00	5.00	0.00	5.00	-1.047 ± 0.026	-2.0940 ± 0.060
0110	6	0.00	5.00	5.00	0.00	-1.267 ± 0.034	-2.563 ± 0.047
0111	7	0.00	5.00	5.00	5.00	-1.478 ± 0.037	-2.977 ± 0.058
1000	8	5.00	0.00	0.00	0.00	-1.654 ± 0.022	-3.328 ± 0.072
1001	9	5.00	0.00	0.00	5.00	-1.854 ± 0.022	-3.749 ± 0.053
1010	10	5.00	0.00	5.00	0.00	-2.081 ± 0.043	-4.184 ± 0.072
1011	11	5.00	0.00	5.00	5.00	-2.278 ± 0.001	-4.566 ± 0.040
1100	12	5.00	5.00	0.00	0.00	-2.501 ± 0.022	-5.029 ± 0.060
1101	13	5.00	5.00	0.00	5.00	-2.697 ± 0.023	-5.411 ± 0.080
1110	14	5.00	5.00	5.00	0.00	-2.917 ± 0.036	-5.864 ± 0.051
1111	15	5.00	5.00	5.00	5.00	-3.122 ± 0.001	-6.255 ± 0.040

Tabela 1.1: Valores experimentais da tensão $v_o(V)$ em função da palavra $b_4b_3b_2b_1$ para $R_f = 2R$ e $R_f = 4R$. Os erros $e_{v_o}(V)$ correspondem aos desvios máximos em relação à média.

É de notar que o erro e_{v_o} para $b_4b_3b_2b_1 = 0000$ é superior ao valor v_o associado, e portanto, v_o neste caso, tem origem no ruído da montagem experimental.

1.2.2 Obtenção das formas de onda dos gráficos $v_o(t)$ e $v_{Clk}(t)$ para $R_f = 2R$ e $R_f = 4R$ a partir do osciloscópio digital

Obtivemos a partir do osciloscópio digital os seguintes gráficos dos sinais de saída do conversor, $v_o(t)$, e de *clock*, $v_{Clk}(t)$, para $R_f = 2R$ e $R_f = 4R$:

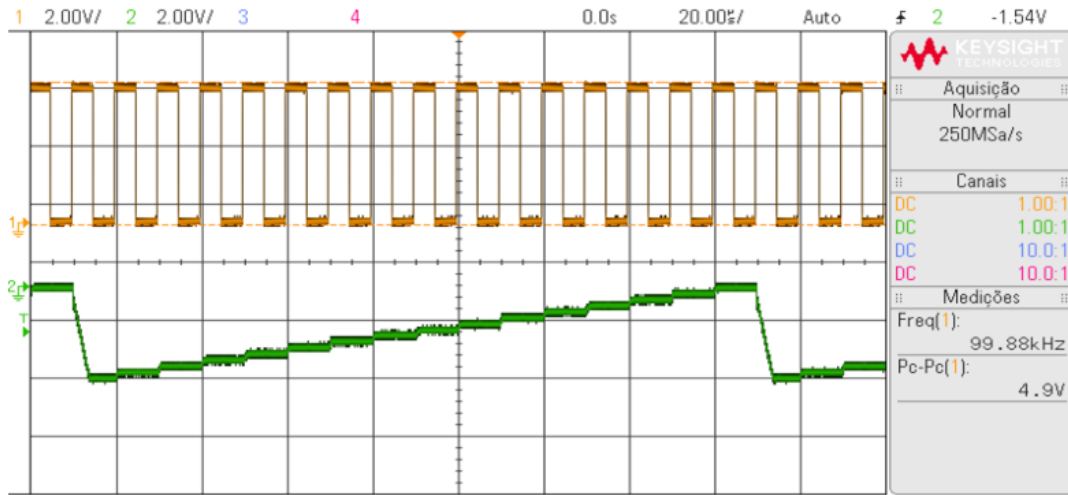


Figura 1.6: Gráficos $v_o(t)$ (a verde) e $v_{Clk}(t)$ (a laranja) para $R_f = 2R$ obtidos pelo osciloscópio digital via *Microsoft Excel*.

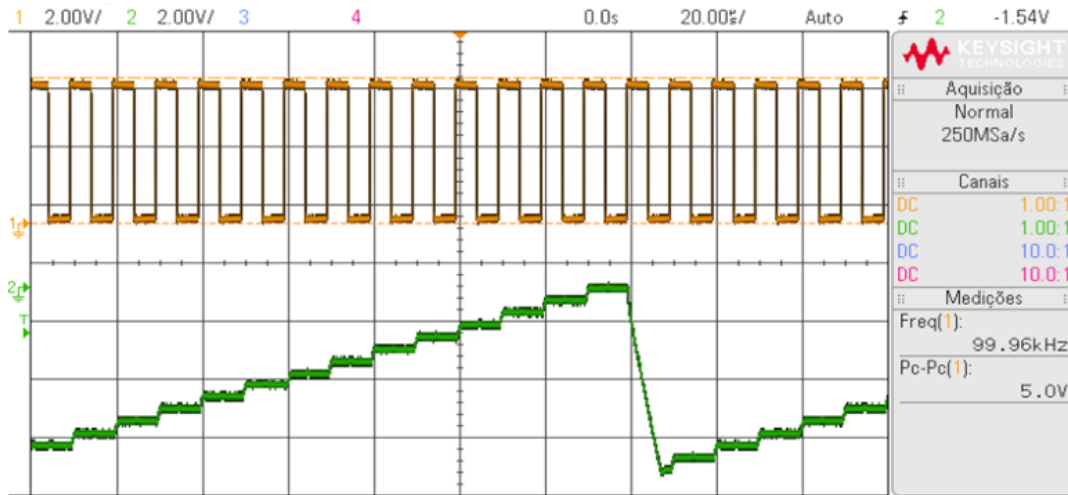


Figura 1.7: Gráficos $v_o(t)$ (a verde) e $v_{Clk}(t)$ (a laranja) para $R_f = 4R$ obtidos pelo osciloscópio digital via *Microsoft Excel*.

1.2.3 Variação da tensão de saída do conversor observada entre dois níveis consecutivos, para os dois valores diferentes de R_f

Podemos constatar pela análise dos gráficos das figuras 1.6 e 1.7 que as variações da tensão v_o entre níveis consecutivos são praticamente uniformes entre si, sendo que se verificou para $R_f = 4R$ um maior passo incremental de tensão que para $R_f = 2R$. Este facto pode ser explicado pela expressão 1.5, já que $v_o \propto R_f$.

De forma a analisarmos este comportamento quantitativamente, construímos a seguinte tabela de variações v_o entre níveis consecutivos, para $R_f = 2R$ e $R_f = 4R$:

$b_4b_3b_2b_1$	Dec.	$ \Delta v_o (V) (R_f = 2R)$	$ \Delta v_o (V) (R_f = 4R)$
0000	0	—	—
0001	1	0.181 ± 0.078	0.451 ± 0.079
0010	2	0.232 ± 0.083	0.438 ± 0.082
0011	3	0.201 ± 0.052	0.365 ± 0.082
0100	4	0.211 ± 0.059	0.462 ± 0.060
0101	5	0.208 ± 0.053	0.381 ± 0.060
0110	6	0.219 ± 0.042	0.469 ± 0.076
0111	7	0.211 ± 0.050	0.413 ± 0.074
1000	8	0.175 ± 0.042	0.351 ± 0.093
1001	9	0.200 ± 0.031	0.420 ± 0.090
1010	10	0.226 ± 0.048	0.435 ± 0.113
1011	11	0.197 ± 0.044	0.381 ± 0.108
1100	12	0.222 ± 0.021	0.462 ± 0.072
1101	13	0.196 ± 0.032	0.381 ± 0.100
1110	14	0.220 ± 0.043	0.453 ± 0.095
1111	15	0.205 ± 0.036	0.391 ± 0.065

Tabela 1.2: Valores experimentais da variação de tensão, $|\Delta v_o|(V)$, entre palavras consecutivas $b_4b_3b_2b_1$ para $R_f = 2R$ e $R_f = 4R$.

Antes de determinarmos o valor esperado para o passo entre patamares consecutivos, podemos em primeiro lugar verificar se os incrementos são realmente uniformes. Com os dados da tabela 1.2 realizámos ajustes gráficos, recorrendo à função-base $y = ax + b$, de $|\Delta v_o|(V)$ vs *Palavra decimal* para $R_f = 2R$ (figura 1.8) e $R_f = 4R$ (figura 1.9).

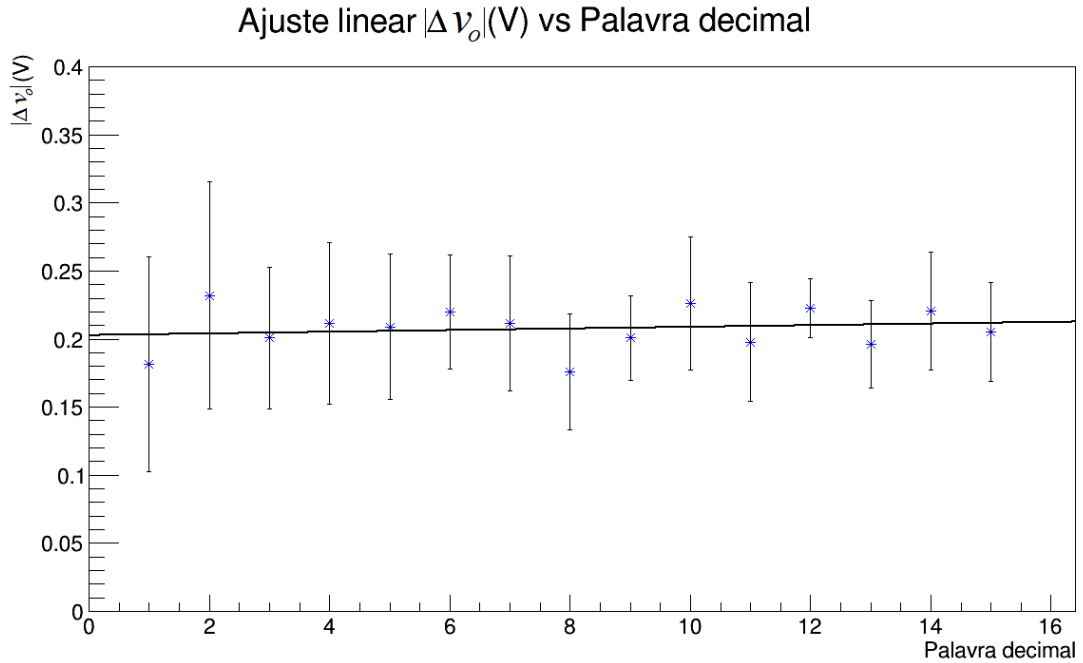


Figura 1.8: Ajuste, pelo método dos mínimos quadrados, de $|\Delta v_o|(V)$ vs *Palavra decimal* para $R_f = 2R$, via *ROOT*.

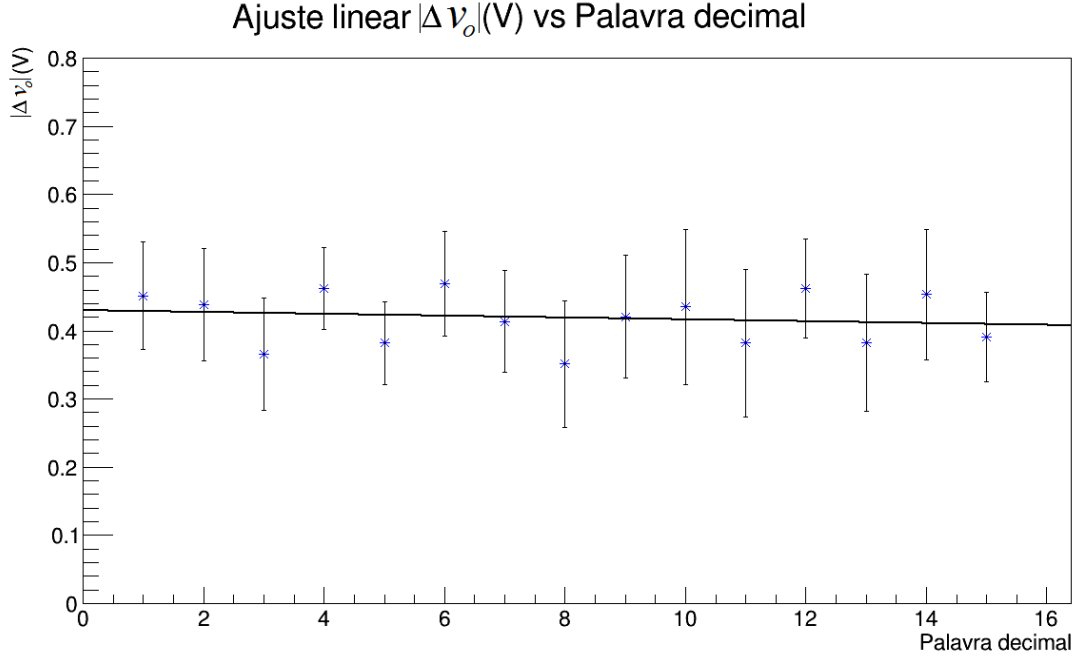


Figura 1.9: Ajuste, pelo método dos mínimos quadrados, de $|\Delta v_o|(V)$ vs *Palavra decimal* para $R_f = 4R$, via *ROOT*.

Obtivémos do ajuste linear $|\Delta v_o|(V)$ vs *Palavra decimal* para $R_f = 2R$ (figura 1.8), os seguintes resultados:

$a(V)$	$b(V)$	X^2_{ndf}
$(6.043 \pm 28.763) \times 10^{-4}$	0.203 ± 0.030	0.137

Tabela 1.3: Resultados do ajuste $|\Delta v_o|(V)$ vs *Palavra decimal*, para $R_f = 2R$.

Podemos constatar que o declive da reta de ajuste, a , corresponde a um valor aproximadamente nulo, sendo que o próprio erro o suplanta. Portanto a reta de ajuste será uma boa aproximação de uma reta constante $y = b$. Sendo assim, o valor de b dará uma boa estimativa do valor de $|\Delta v_{oexp}|$ para o caso de $R_f = 2R$.

Obtivémos para o caso do ajuste linear $|\Delta v_o|(V)$ vs *Palavra decimal* com $R_f = 4R$ (figura 1.9), os seguintes resultados:

$a(V)$	$b(V)$	X^2_{ndf}
-0.001 ± 0.005	0.429 ± 0.040	0.258

Tabela 1.4: Resultados do ajuste $|\Delta v_o|(V)$ vs *Palavra decimal*, para $R_f = 4R$.

Tal como verificámos para $R_f = 2R$, o declive da reta de ajuste a , corresponde a um valor aproximadamente nulo em que o próprio erro o suplanta. Portanto a reta de ajuste $|\Delta v_o|(V)$ vs *Palavra decimal* para $R_f = 4R$ será igualmente uma boa aproximação de uma reta constante $y = b$. O valor de b dará uma ideia do valor de $|\Delta v_{oexp}|$ para o caso de $R_f = 4R$.

Para a determinação do valor esperado para o passo entre patamares consecutivos, é necessário obter o declive da reta $y = a \times x + b$ que melhor se ajusta aos pontos (*Palavra decimal*, v_o).

Com os dados da tabela 1.1 realizámos ajustes lineares, de $|v_o|(V)$ vs *Palavra decimal* para $R_f = 2R$ (figura 1.10) e $R_f = 4R$ (figura 1.11).

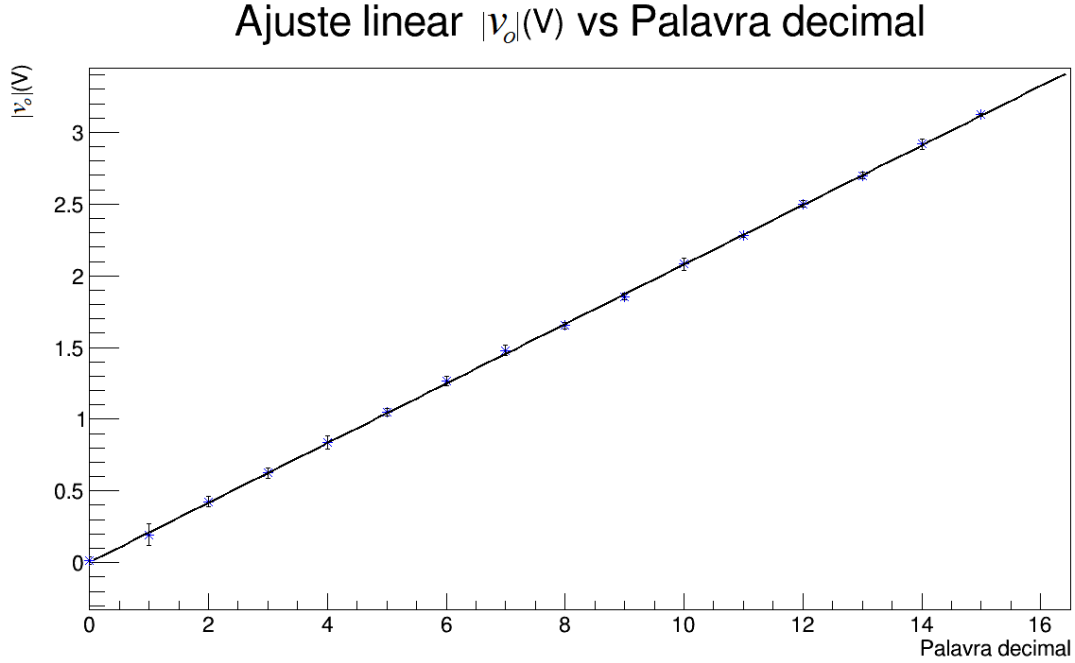


Figura 1.10: Ajuste, pelo método dos mínimos quadrados, de $|v_o|(V)$ vs *Palavra decimal* para $R_f = 2R$, via *ROOT*.

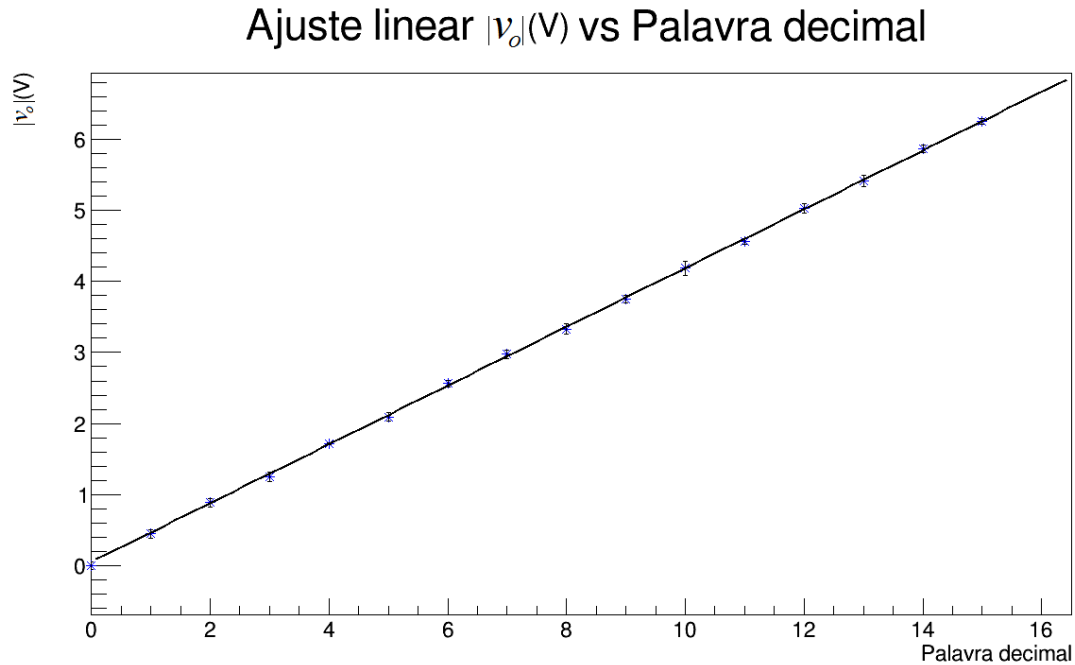


Figura 1.11: Ajuste, pelo método dos mínimos quadrados, de $|v_o|(V)$ vs *Palavra decimal* para $R_f = 4R$, via *ROOT*.

Obtivémos para o ajuste linear $|v_o|(V)$ vs *Palavra decimal* para o caso $R_f = 2R$ os seguintes resultados:

$a(V)$	$b(V)$	X_{ndf}^2
0.208 ± 0.001	0.003 ± 0.015	0.209

Tabela 1.5: Resultados do ajuste $|v_o|(V)$ vs *Palavra decimal*, para $R_f = 2R$.

O valor do parâmetro $a = 0.208 \pm 0.001V$ indica-nos que a variação da tensão v_o entre níveis consecutivos (passo) para $R_f = 2R$ foi aproximadamente:

$$|\Delta v_{o_{exp}}| = 0.208 \pm 0.001V \quad (1.8)$$

Obtivemos para o ajuste linear $|v_o|(V)$ vs *Palavra decimal* para o caso $R_f = 4R$ que:

$a(V)$	$b(V)$	X_{ndf}^2
0.414 ± 0.002	0.052 ± 0.016	0.323

Tabela 1.6: Resultados do ajuste $|v_o|(V)$ vs *Palavra decimal*, para $R_f = 4R$.

E portanto, o valor do parâmetro $a = 0.414 \pm 0.002V$ indica-nos que o passo entre níveis consecutivos, para $R_f = 4R$, foi aproximadamente:

$$|\Delta |v_{o_{exp}}| = 0.414 \pm 0.002V \quad (1.9)$$

Comentário e comparação de resultados

Podemos determinar o valor teórico para o passo entre níveis consecutivos para $R_f = 2R$ e $R_f = 4R$, tendo em conta as expressões 1.6 e 1.7 respectivamente. O passo incremental corresponderá ao valor de v_o associado à palavra $b_4b_3b_2b_1 = 0001$, isto é, quando $b_4 = 0$, $b_3 = 0$, $b_2 = 0$ e $b_1 = 0$. Recorrendo a 1.6 e 1.7 e associando o índice “1” a $R_f = 2R$ e “2” a $R_f = 4R$, tem-se que:

$$|\Delta v_{o1_{teo}}| = \frac{5}{24} \approx 0.208(33) \Rightarrow \sigma_{exat.} \approx 0 \quad (1.10)$$

$$|\Delta v_{o2_{teo}}| = \frac{5}{12} \approx 0.416(66) \Rightarrow \sigma_{exat.} = 0.48\% \quad (1.11)$$

em que $\sigma_{exat.}$ corresponde ao desvio à exatidão dos valores $|\Delta v_o|$ experimentais expressos em 1.8 e 1.9 respectivamente. Como os valores $\sigma_{exat.}$ são aproximadamente nulos é correcto dizer que os resultados experimentais de $|\Delta v_o|$ foram os teoricamente previstos.

Podemos ainda dizer por 1.8 e 1.9 que a variação da tensão v_o entre níveis consecutivos para $R_f = 4R$ foi praticamente 2 vezes superior à correspondente a $R_f = 2R$. Tem-se que:

$$\left(\frac{|\Delta v_{o2}|}{|\Delta v_{o1}|} \right)_{exp} = 1.99 \pm 0.002, \quad \sigma_{exat.} = 0.5\% \quad (1.12)$$

O valor teórico $\left(\frac{|\Delta v_{o2}|}{|\Delta v_{o1}|}\right)_{teo} = 2$ obtém-se trivialmente pela expressão 1.5 já que $R_{f2} = 4R = 2R_{f1}$. Podemos assim notar que $\left(\frac{|\Delta v_{o2}|}{|\Delta v_{o1}|}\right)_{exp}$ e $\left(\frac{|\Delta v_{o2}|}{|\Delta v_{o1}|}\right)_{teo}$ são praticamente coincidentes.

Relativamente às discrepâncias individuais dos valores dos patamares v_o face aos valores teóricos, podemos construir a seguinte tabela:

$b_4b_3b_2b_1$	Dec.	$v_{o1exp}(V)$	$v_{o1teo}(V)$	$\sigma_{exat.1}(\%)$	$v_{o2exp}(V)$	$v_{o2teo}(V)$	$\sigma_{exat.2}(\%)$
0000	0	-0	0	0	0	0	0
0001	1	-0.193	-0.208	7.092	-0.445	-0.416	6.975
0010	2	-0.425	-0.416	2.160	-0.883	-0.833	6.070
0011	3	-0.626	-0.625	0.219	-1.249	-1.250	2.013
0100	4	-0.837	-0.833	0.527	-1.712	-1.666	2.724
0101	5	-1.046	-1.041	0.478	-2.093	-2.083	0.511
0110	6	-1.266	-1.250	1.323	-2.562	-2.500	2.519
0111	7	-1.477	-1.458	1.341	-2.976	-2.916	2.054
1000	8	-1.653	-1.666	0.783	-3.328	-3.333	0.156
1001	9	-1.854	-1.875	1.102	-3.748	-3.750	2.905
1010	10	-2.080	-2.083	0.130	-4.184	-4.166	0.426
1011	11	-2.278	-2.291	0.584	-4.566	-4.583	0.371
1100	12	-2.500	-2.500	0.036	-5.028	-5.000	0.573
1101	13	-2.697	-2.708	0.417	-5.410	-5.416	0.113
1110	14	-2.917	-2.916	0.027	-5.863	-5.833	0.521
1111	15	-3.122	-3.125	0.080	-6.254	-6.250	0.006

Tabela 1.7: Valores experimentais e teóricos de $v_o(V)$ em função da palavra $b_4b_3b_2b_1$, com os desvios à exactidão, $\sigma_{exat.}$, associados.

É importante referir que considerámos na tabela 1.7, $v_{o1exp} = 0$ e $v_{o2exp} = 0$ para a palavra $b_4b_3b_2b_1 = 0000$, pois para este caso, obtiveram-se erros experimentais e_{v_o} superiores ao próprio valor v_o , em que $v_o \approx 0$.

Analisando os desvios à exactidão, $\sigma_{exat.}$, evidenciados na tabela anterior, podemos concluir que os valores de v_o que obtivemos experimentalmente foram bastante próximos dos teóricos, já que o valor máximo dos desvios obtidos foi $\sigma_{exat.m\acute{a}x} = 7.092\%$. Isto revela que a experiência executada no laboratório pode ser explicada pela fundamentação teórica que anteriormente formulámos.

Influência das resistências de entrada

2.1 Análise Teórica

2.1.1 Determinação da influência da variação das resistências R_1 a R_4 , variando uma de cada vez

Nesta secção iremos fazer uma análise semelhante ao que foi feito anteriormente, mas agora alterando o valor de uma das resistências R_i ($i = 1, 2, 3, 4$) de cada vez. Desta forma, em vez de todas as resistências tomarem o valor $2R$, admitimos que a resistência alterada tem o valor R_i , e as restantes o valor $2R$, como anteriormente.

Começamos então por determinar o valor da tensão v_o , para um qualquer valor de R_1 .

R_1 - Determinação de v_{o1}

Para determinar o valor de v_{o1} , iremos substituir as fontes S_2 , S_3 e S_4 por *ground*, tal como fizemos na análise da secção anterior, obtendo-se o gráfico da figura 2.1:

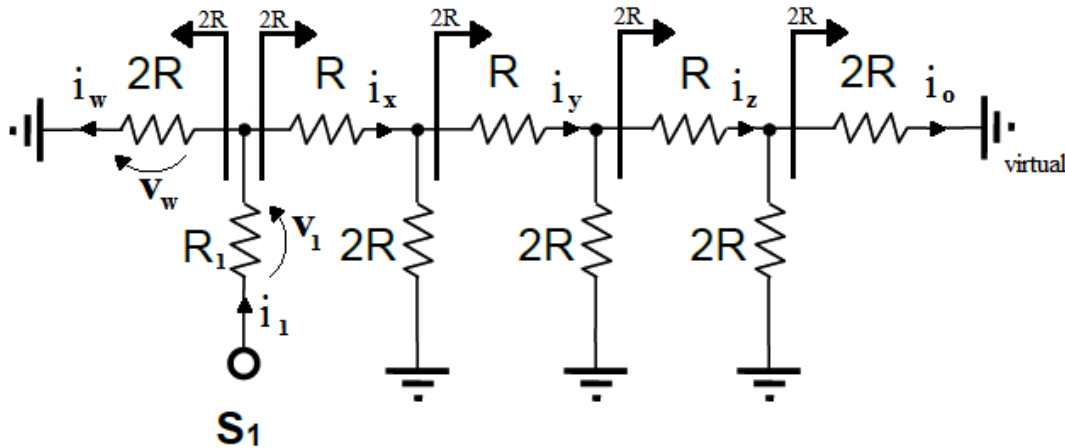


Figura 2.1: Circuito em escada do *DAC* com as fontes S_2 , S_3 e S_4 substituídas por *GND*.

Desta forma, a corrente i_o vai ser igual à calculada na secção anterior, tendo o valor $i_o = \frac{i_1}{16}$.

Agora para determinar o valor de i_1 temos:

$$S_1 = v_1 + v_w = R_1 i_1 + 2R i_w = R_1 i_1 + 2R \frac{i_1}{2} = (R_1 + R) i_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i_1 = \frac{S_1}{R_1 + R}$$

Logo,

$$i_o = \frac{S_1}{R_1 + R} \frac{1}{16}$$

Aplicando agora a lei de Ohm em R_f , obtemos:

$$v_{01} = -R_f i_o = -\frac{R_f}{R_1 + R} \frac{S_1}{16} \quad (2.1)$$

R_1 - Determinação de v_{o2}

Neste ponto, substituímos as fontes S_1 , S_3 e S_4 por *ground*, obtendo o circuito da 2.2:

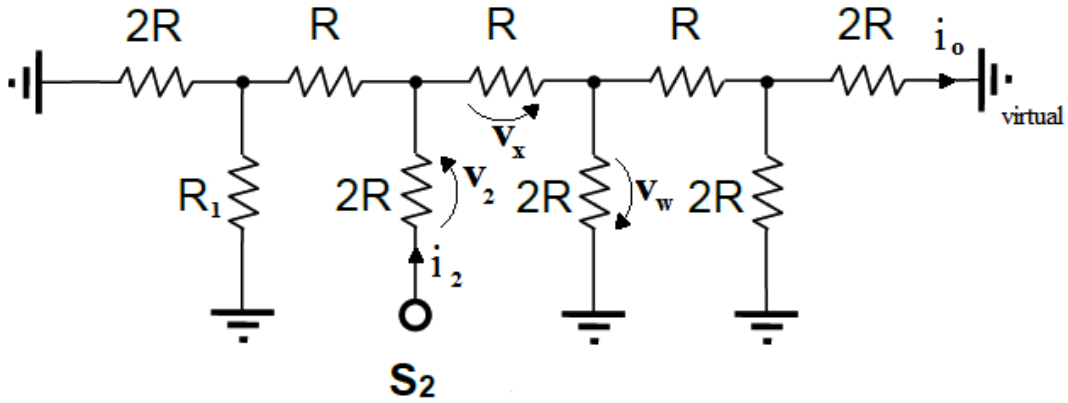


Figura 2.2: Circuito em escada do *DAC* com as fontes S_1 , S_3 e S_4 substituídas por *GND*.

Fazendo a análise das resistências “vistas” à direita e à esquerda do nó 2, verificamos que a resistência à direita continua a ser $2R$, como na secção anterior, mas a resistência à esquerda vai ser diferente, a que damos o nome de R'_1 :

$$R'_1 = R + (2R \parallel R_1) = R + \frac{2R \cdot R_1}{2R + R_1}$$

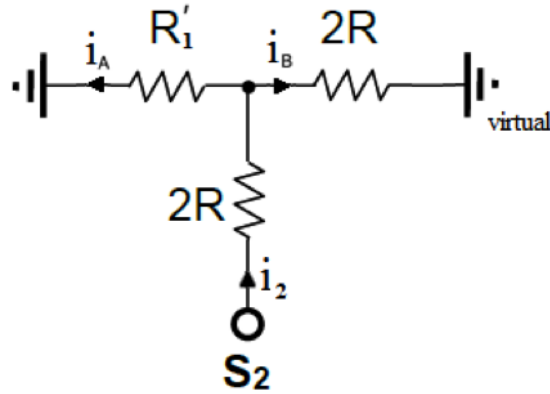


Figura 2.3: Divisor de corrente no nó 2.

Fazendo agora um divisor de corrente no nó 2, como apresentado na figura 2.3, verificamos que a corrente para a esquerda vai ser $i_A = \frac{v'_2}{R'_1}$ e a corrente para a direita vai ser $i_B = \frac{v'_2}{2R}$, sendo v'_2 a tensão no nó 2:

$$v'_2 = i_2 (R'_1 \parallel 2R) = i_2 \frac{R'_1 \cdot 2R}{R'_1 + 2R}$$

Obtemos assim a expressão para a corrente à direita do nó 2:

$$\Rightarrow i_B = i_2 \frac{R'_1}{R'_1 + 2R}$$

Neste caso a corrente i_B irá ser dividida duas vezes até chegar a i_o , pelo que esta corrente é dada por:

$$i_o = \frac{i_B}{4} = \frac{1}{4} \frac{R'_1}{R'_1 + 2R} i_2$$

Agora para determinar o valor de i_2 temos:

$$S_2 = v_2 + v_x + v_w = 2Ri_2 + Ri_B + 2R \frac{i_B}{2} = 2R(i_2 + i_B) = 2R \left(1 + \frac{R'_1}{R'_1 + 2R}\right) i_2$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{S_2}{2R \left(1 + \frac{R'_1}{R'_1 + 2R}\right)}$$

Aplicando de novo a lei de Ohm em R_f , obtemos:

$$\begin{aligned} v_{o2} = -R_f \cdot i_o &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{R_f R'_1}{R'_1 + 2R} \cdot \frac{S_2}{2R \left(1 + \frac{R'_1}{R'_1 + 2R}\right)} \\ \Rightarrow v_{o2} &= -\frac{R_f}{R \left(1 + \frac{R}{R'_1}\right)} \cdot \frac{S_2}{16} \end{aligned} \quad (2.2)$$

R_1 - Determinação de v_{o3}

Substituindo as fontes S_1 , S_2 e S_4 por *ground*, obtivemos o circuito da 2.4:

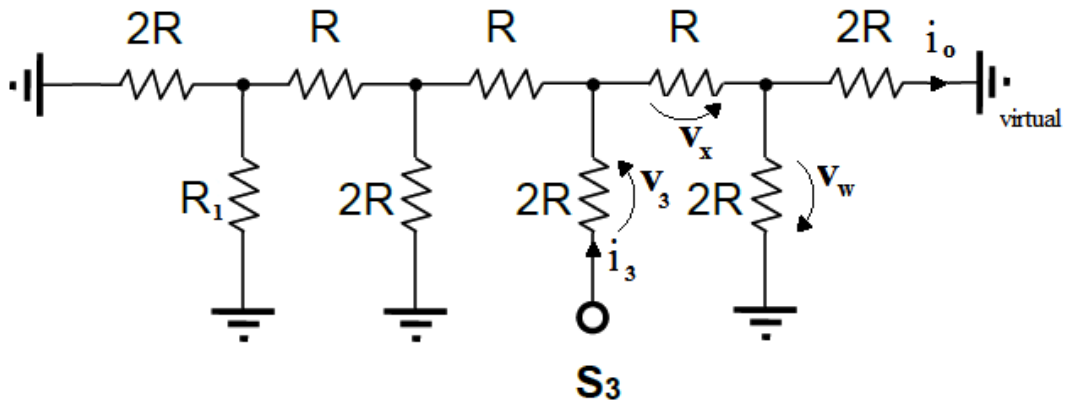


Figura 2.4: Circuito em escada do DAC com as fontes S_1 , S_2 e S_4 substituídas por *GND*.

Fazendo agora a análise das resistências “vistas” à direita e à esquerda do nó 3, verificamos que a resistência equivalente à direita continua a ter o valor $2R$, e a resistência equivalente à esquerda, a que damos o nome de R_1'' tem o seguinte valor:

$$R_1'' = R + (2R \parallel R_1') = R + \frac{2R \cdot R_1'}{2R + R_1'}$$

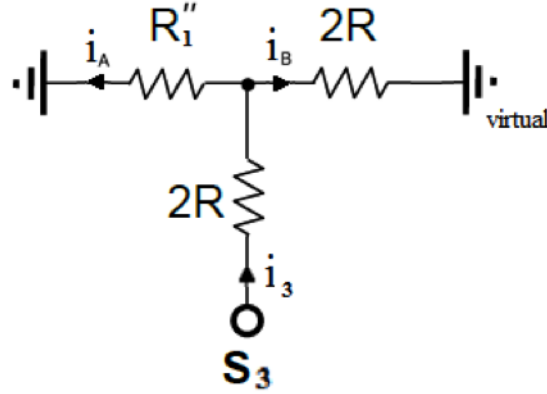


Figura 2.5: Divisor de corrente no nó 3.

Ao fazer de novo um divisor de corrente, agora no nó 3, como representado na figura 2.5, obtemos a corrente que vai para a esquerda do nó, $i_A = \frac{v_3'}{R_1''}$, e a que vai para a direita, $i_B = \frac{v_3'}{2R}$. A tensão no nó 3, v_3' obtém-se fazendo o paralelo das resistências equivalentes:

$$v_3' = i_3 (R_1'' \parallel 2R) = i_3 \frac{R_1'' \cdot 2R}{R_1'' + 2R}$$

Vem assim o valor da corrente à direita do nó 3:

$$i_B = i_3 \frac{R_1''}{R_1'' + 2R}$$

A corrente i_B vai agora ser dividida apenas uma vez, até à corrente i_o , que é dada por:

$$i_o = \frac{i_B}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1''}{R_1'' + 2R} i_3$$

Para determinar o valor de i_3 vem:

$$S_3 = v_3 + v_x + v_w = 2Ri_3 + Ri_B + 2R \frac{i_B}{2} = 2R(i_3 + i_B) = 2R \left(1 + \frac{R_1''}{R_1'' + 2R} \right) i_3$$

$$\Rightarrow i_3 = \frac{S_3}{2R \left(1 + \frac{R_1''}{R_1'' + 2R} \right)}$$

Aplicando a lei de Ohm em R_f obtemos então:

$$v_{o3} = -R_f \cdot i_o = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R_f R_1''}{R_1'' + 2R} \cdot \frac{S_3}{2R \left(1 + \frac{R_1''}{R_1'' + 2R} \right)}$$

$$\Rightarrow v_{o3} = -\frac{R_f}{R\left(1 + \frac{R}{R_1''}\right)} \frac{S_3}{8} \quad (2.3)$$

R_1 - Determinação de v_{o4}

De forma semelhante ao que fizemos nos casos anteriores, substituímos as fontes S_1 , S_2 e S_3 por *ground*, obtendo o circuito da 2.6:

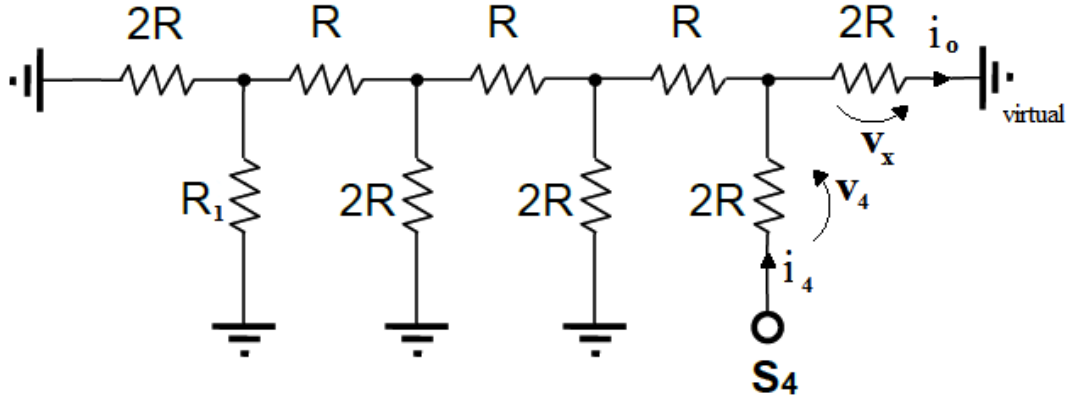


Figura 2.6: Circuito em escada do *DAC* com as fontes S_1 , S_2 e S_3 substituídas por *GND*.

Fazendo a mesma análise das resistências equivalentes, desta vez para o nó 4, obtemos à direita o valor $2R$, e à esquerda R_2'' :

$$R_1''' = R + (2R \parallel R_1'') = R + \frac{2R \cdot R_1''}{2R + R_1''}$$

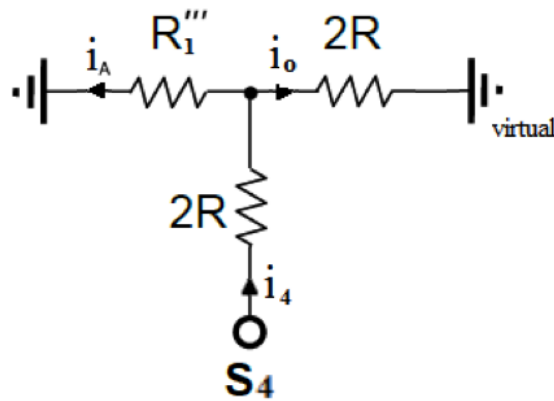


Figura 2.7: Divisor de corrente no nó 4.

Fazendo o divisor de corrente a partir do nó 4, como representado na figura 2.7, obtemos o valor da corrente que vai para a esquerda, $i_A = \frac{v_4'}{R_1'''}$, e da corrente que vai para a direita, $i_o = \frac{v_4'}{2R}$, sendo a tensão no nó 4, v_4' :

$$v'_4 = i_4 (R_1''' // 2R) = \frac{R_1''' \cdot 2R}{R_1''' + 2R} i_4$$

Ficando assim:

$$i_o = \frac{R_1'''}{R_1''' + 2R} i_4$$

Agora para determinar o valor de i_4 :

$$S_4 = v_4 + v_x = 2R \cdot i_4 + 2R \cdot i_o = 2R \left(1 + \frac{R_1'''}{R_1''' + 2R} \right) i_4$$

$$\Rightarrow i_4 = \frac{S_4}{2R \left(1 + \frac{R_1'''}{R_1''' + 2R} \right)}$$

Aplicando agora a lei de Ohm em R_f obtemos então:

$$v_{o4} = -R_f \cdot i_o = -\frac{R_f R_1'''}{R_1''' + 2R} \cdot \frac{S_4}{2R \left(1 + \frac{R_1'''}{R_1''' + 2R} \right)}$$

$$\Rightarrow v_{o4} = -\frac{R_f}{R \left(1 + \frac{R}{R_1'''} \right)} \frac{S_4}{4} \quad (2.4)$$

R_1 - *Determinação de v_o*

A partir das expressões 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 podemos calcular o valor de v_o para uma resistência R_1 arbitrária, e as restantes $R_i = 2R$, ($i = 2, 3, 4$), fazendo:

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} + v_{o3} + v_{o4} = -\frac{R_f}{R} \left[\frac{S_1}{16 \left(1 + \frac{R_1}{R} \right)} + \frac{S_2}{16 \left(1 + \frac{R}{R_1'} \right)} + \frac{S_3}{8 \left(1 + \frac{R}{R_1''} \right)} + \frac{S_4}{4 \left(1 + \frac{R}{R_1'''} \right)} \right]$$

Uma vez que $S_i = V_{Ref} b_i$, como explicado anteriormente, ficamos com a expressão:

$$-\frac{R_f}{R} V_{Ref} \left[\frac{b_1}{16 \left(1 + \frac{R_1}{R} \right)} + \frac{b_2}{16 \left(1 + \frac{R}{R_1'} \right)} + \frac{b_3}{8 \left(1 + \frac{R}{R_1''} \right)} + \frac{b_4}{4 \left(1 + \frac{R}{R_1'''} \right)} \right] \quad (2.5)$$

Para confirmar a validade desta expressão, se fizermos $R_1 = 2R$, ficando também $R_1' = R_1'' = R_1''' = R_1 = 2R$, obtemos a mesma expressão que foi obtida na secção anterior, 1.5:

$$v_o = -\frac{R_f}{R} V_{Ref} \left[\frac{b_1}{16 (1 + 2)} + \frac{b_2}{16 \left(1 + \frac{1}{2} \right)} + \frac{b_3}{8 \left(1 + \frac{1}{2} \right)} + \frac{b_4}{4 \left(1 + \frac{1}{2} \right)} \right]$$

$$\Leftrightarrow v_o = -\frac{R_f}{3R} V_{Ref} \left[\frac{b_1}{16} + \frac{b_2}{8} + \frac{b_3}{4} + \frac{b_4}{2} \right]$$

Passamos agora à determinação da expressão de v_o para um valor de R_2 arbitrário, e as restantes $R_i = 2R$, ($i = 2, 3, 4$). Uma vez que esta análise é semelhante à anterior, mudando apenas a resistência em causa, não vamos fazer uma explicação pormenorizada como anteriormente, apresentando apenas os resultados intermédios obtidos.

R_2 - *Determinação de v_{o1}*

$$R'_2 = R + (2R // R_2) = R + \frac{2R.R_2}{2R + R_2}$$

$$i_o = \frac{1}{2} \frac{R.R_2}{(R'_2 + 2R)(R_2 + 2R)} i_1$$

$$i_1 = \frac{S_1}{2R \left(1 + \frac{R'_2}{R'_2 + 2R}\right)}$$

$$v_{o1} = -\frac{R_f R_2}{(R_2 + 2R)(R'_2 + R)} \cdot \frac{S_1}{8}$$

R_2 - *Determinação de v_{o2}*

$$i_2 = \frac{S_2}{R_2 + R}$$

$$i_o = \frac{i_2}{8} = \frac{1}{R_2 + R} \cdot \frac{S_2}{8}$$

$$v_{o2} = -\frac{R_f}{R_2 + R} \cdot \frac{S_2}{8}$$

R_2 - *Determinação de v_{o3}*

$$i_o = \frac{1}{2} \frac{R'_2}{R'_2 + 2R} i_3$$

$$i_3 = \frac{S_3}{2R \left(1 + \frac{R'_2}{R'_2 + 2R}\right)}$$

$$v_{o3} = -\frac{R_f.R'_2}{R(R'_2 + R)} \cdot \frac{S_3}{8}$$

R_2 - *Determinação de v_{o4}*

$$R''_2 = R + (2R // R'_2) = R + \frac{2R.R'_2}{2R + R'_2}$$

$$i_o = \frac{R_2''}{R_2'' + 2R} i_4$$

$$i_4 = \frac{S_4}{2R \left(1 + \frac{R_2''}{R_2'' + 2R}\right)}$$

$$v_{o4} = -\frac{R_f \cdot R_2''}{R (R_2'' + R)} \cdot \frac{S_4}{4}$$

R_2 - Determinação de v_o

$$v_o = -R_f \left[\frac{R_2}{(R_2 + 2R)(R_2' + R)} \cdot \frac{S_1}{8} + \frac{1}{R_2 + R} \cdot \frac{S_2}{8} + \frac{R_2'}{R(R_2' + R)} \cdot \frac{S_3}{8} + \frac{R_2''}{R(R_2'' + R)} \cdot \frac{S_4}{4} \right]$$

Agora substituindo $S_i = V_{Ref} b_i$, obtemos:

$$v_o = -R_f V_{Ref} \left[\frac{R_2}{(R_2 + 2R)(R_2' + R)} \cdot \frac{b_1}{8} + \frac{1}{R_2 + R} \cdot \frac{b_2}{8} + \frac{R_2'}{R(R_2' + R)} \cdot \frac{b_3}{8} + \frac{R_2''}{R(R_2'' + R)} \cdot \frac{b_4}{4} \right] \quad (2.6)$$

Para confirmar a validade desta expressão, substituímos R_2 por $2R$, como era na secção anterior, ficando também $R_2' = R_2'' = R_2 = 2R$, e verificamos que chegamos à mesma expressão, 1.5:

$$v_o = -R_f V_{Ref} \left[\frac{2R}{12R^2} \cdot \frac{b_1}{8} + \frac{1}{3R} \cdot \frac{b_2}{8} + \frac{2R}{R(3R)} \cdot \frac{b_3}{8} + \frac{2R}{R(3R)} \cdot \frac{b_4}{4} \right]$$

$$\Leftrightarrow v_o = -\frac{R_f}{3R} V_{Ref} \left[\frac{b_1}{16} + \frac{b_2}{8} + \frac{b_3}{4} + \frac{b_4}{2} \right]$$

Segue-se a dedução da expressão de v_o para uma resistência arbitrária R_3 , de novo com todas as outras $R_i = 2R$, ($i = 2, 3, 4$). Apresentamos também apenas as principais expressões intermédias, uma vez que o raciocínio é em tudo idêntico ao que foi feito no primeiro caso (para R_1 arbitrário).

R_3 - Determinação de v_{o1}

$$R_3' = R + (2R \parallel R_3) = R + \frac{2R \cdot R_3}{2R + R_3}$$

$$R_3'' = R + (2R \parallel R_3') = R + \frac{2R \cdot R_3'}{2R + R_3'}$$

$$i_o = i_1 \frac{2R_3 R^2}{(R_3 + 2R)(R'_3 + 2R)(R''_3 + 2R)}$$

$$i_1 = \frac{S_1}{2R \left(1 + \frac{R''_3}{R'_3 + 2R}\right)}$$

$$v_{o1} = -\frac{R_f R_3 R}{(R_3 + 2R)(R'_3 + 2R)(R''_3 + 2R)} \cdot \frac{S_1}{2}$$

R₃ - Determinação de v_{o2}

$$i_o = \frac{R R_3}{(R_3 + 2R)(R'_3 + 2R)} i_2$$

$$i_2 = \frac{S_2}{2R \left(1 + \frac{R'_3}{R'_3 + 2R}\right)}$$

$$v_{o2} = -\frac{R_f R_3}{(R_3 + 2R)(R'_3 + 2R)} \cdot \frac{S_2}{4}$$

R₃ - Determinação de v_{o3}

$$i_3 = \frac{S_3}{R_3 + R}$$

$$i_o = \frac{i_3}{4} = \frac{1}{R_3 + R} \cdot \frac{S_3}{4}$$

$$v_{o3} = -\frac{R_f}{R_3 + R} \cdot \frac{S_3}{4}$$

R₃ - Determinação de v_{o4}

$$i_o = \frac{R'_3}{R'_3 + 2R} i_4$$

$$i_4 = \frac{S_4}{2R \left(1 + \frac{R'_3}{R'_3 + 2R}\right)}$$

$$v_{o4} = -\frac{R_f R'_3}{R(R'_3 + R)} \cdot \frac{S_4}{4}$$

R₃ - Determinação de v_o

$$v_o = -R_f V_{Ref} \left[\frac{R_3 R}{(R_3 + 2R)(R'_3 + 2R)(R''_3 + R)} \cdot \frac{b_1}{2} + \frac{R_3}{(R_3 + 2R)(R'_3 + R)} \cdot \frac{b_2}{4} + \right. \\ \left. + \frac{1}{R_3 + R} \cdot \frac{b_3}{4} + \frac{R'_3}{R(R'_3 + R)} \cdot \frac{b_4}{4} \right] \quad (2.7)$$

Substituímos então $R_3 = 2R$, ficando também $R'_3 = R''_3 = R_3 = 2R$, e verificamos que se obtém de novo a expressão 1.5:

$$v_o = -R_f V_{Ref} \left[\frac{2R^2}{(4R)(4R)(3R)} \cdot \frac{b_1}{2} + \frac{2R}{(4R)(3R)} \cdot \frac{b_2}{4} + \frac{1}{3R} \cdot \frac{b_3}{4} + \frac{2R}{R(3R)} \cdot \frac{b_4}{4} \right] \\ \Leftrightarrow v_o = -\frac{R_f}{3R} V_{Ref} \left[\frac{b_1}{16} + \frac{b_2}{8} + \frac{b_3}{4} + \frac{b_4}{2} \right]$$

Falta-nos então obter a expressão de v_o para R_4 arbitrário, com as restantes $R_i = 2R$, ($i = 2, 3, 4$).

R_4 - Determinação de v_{o1}

$$R'_4 = R + (2R \parallel R_4) = R + \frac{2R \cdot R_4}{2R + R_4} \\ R''_4 = R + (2R \parallel R'_4) = R + \frac{2R \cdot R'_4}{2R + R'_4} \\ R'''_4 = R + (2R \parallel R''_4) = R + \frac{2R \cdot R''_4}{2R + R''_4} \\ i_o = \frac{R_4 (2R)^3}{(R'''_4 + 2R)(R''_4 + 2R)(R'_4 + 2R)(R_4 + 2R)} i_1 \\ i_1 = \frac{S_1}{2R \left(1 + \frac{R'''_4}{R'_4 + 2R} \right)} \\ v_{o1} = -\frac{R_f R_4 (2R)^2}{(R''_4 + 2R)(R'_4 + 2R)(R_4 + 2R)(R'''_4 + R)} \cdot \frac{S_1}{2}$$

R_4 - Determinação de v_{o2}

$$i_o = \frac{R_4 (2R)^2}{(R''_4 + 2R)(R'_4 + 2R)(R_4 + 2R)} i_2 \\ i_2 = \frac{S_2}{2R \left(1 + \frac{R''_4}{R'_4 + 2R} \right)}$$

$$v_{o2} = -\frac{2R_f R_4 R}{(R'_4 + 2R)(R_4 + 2R)(R''_4 + R)} \cdot \frac{S_2}{2}$$

R₄ - Determinação de v_{o3}

$$\begin{aligned} i_o &= \frac{2R R_4}{(R'_4 + 2R)(R_4 + 2R)} i_3 \\ i_3 &= \frac{S_3}{2R \left(1 + \frac{R'_4}{R'_4 + 2R}\right)} \\ v_{o3} &= -\frac{R_f R_4}{(R_4 + 2R)(R'_4 + R)} \cdot \frac{S_3}{2} \end{aligned}$$

R₄ - Determinação de v_{o4}

$$\begin{aligned} i_4 &= \frac{S_4}{R_4 + R} \\ i_o &= \frac{i_4}{2} = \frac{1}{R_4 + R} \cdot \frac{S_4}{2} \\ v_{o4} &= -\frac{R_f}{R_4 + R} \cdot \frac{S_4}{2} \end{aligned}$$

R₄ - Determinação de v_o

$$\begin{aligned} v_o &= -R_f V_{Ref} \left[\frac{R_4 (2R)^2}{(R'''_4 + R)(R''_4 + 2R)(R'_4 + 2R)(R_4 + 2R)} \cdot \frac{b_1}{2} + \frac{2R_4 R}{(R''_4 + R)(R'_4 + 2R)(R_4 + 2R)} \cdot \frac{b_2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_4}{(R'_4 + R)(R_4 + 2R)} \cdot \frac{b_3}{2} + \frac{1}{R_4 + R} \cdot \frac{b_4}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Substituindo $R_3 = 2R$, ficando $R'_3 = R''_3 = R_3 = 2R$, verificamos que se obtém de novo a expressão 1.5:

$$\begin{aligned} v_o &= -\frac{R_f}{3R} V_{Ref} \left[\frac{(2R)^3}{(4R)(4R)(4R)} \cdot \frac{b_1}{2} + \frac{(2R)^2}{(4R)(4R)} \cdot \frac{b_2}{2} + \frac{2R}{(4R)} \cdot \frac{b_3}{2} + \frac{b_4}{2} \right] \\ &\Leftrightarrow v_o = -\frac{R_f}{3R} V_{Ref} \left[\frac{b_1}{16} + \frac{b_2}{8} + \frac{b_3}{4} + \frac{b_4}{2} \right] \end{aligned}$$

Tendo já obtido todas as expressões de v_o , considerando variável uma das resistências de cada vez, passamos de seguida à substituição dessas resistências por R , uma de cada vez, apresentando posteriormente as conclusões a que chegamos.

2.1.2 Determinação das alterações nas características do circuito diminuindo o valor de uma das resistências de R_1 a R_4 , uma de cada vez

Determinação de v_o para $R_1 = R$, $R_2 = R_3 = R_4 = 2R$

Se tivermos $R_1 = R$, ficamos com o seguinte valor das resistências equivalentes:

$$\begin{aligned} R'_1 &= R + \frac{2R^2}{2R + R} = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R \\ R''_1 &= R + \frac{2R^2}{2R + \frac{5}{3}R} \cdot \frac{5}{3} = R + \frac{10}{11}R = \frac{21}{11}R \\ R'''_1 &= R + \frac{2R^2}{2R + \frac{21}{11}R} \cdot \frac{21}{11} = R + \frac{42}{43}R = \frac{85}{43}R \end{aligned}$$

Substituindo agora estes valores na expressão 2.5, obtemos:

$$\begin{aligned} v_o &= -\frac{R_f}{R} V_{Ref} \left[\frac{b_1}{16 \left(1 + \frac{R}{R}\right)} + \frac{b_2}{16 \left(1 + \frac{3}{5}\right)} + \frac{b_3}{8 \left(1 + \frac{11}{21}\right)} + \frac{b_4}{4 \left(1 + \frac{43}{85}\right)} \right] \\ &\Leftrightarrow v_o = -\frac{R_f}{R} V_{Ref} \left[\frac{1}{32}b_1 + \frac{5}{128}b_2 + \frac{21}{256}b_3 + \frac{85}{512}b_4 \right] \\ &\Rightarrow v_o \approx -\frac{R_f}{3R} V_{Ref} \left(\frac{b_1}{10.67} + \frac{b_2}{8.53} + \frac{b_3}{4.06} + \frac{b_4}{2.01} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Determinação de v_o para $R_2 = R$, $R_1 = R_3 = R_4 = 2R$

Considerando $R_2 = R$, obtemos o seguinte valor das respectivas resistências equivalentes:

$$\begin{aligned} R'_2 &= R + \frac{2R^2}{2R + R} = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R \\ R''_2 &= R + \frac{2R^2}{2R + \frac{5}{3}R} \cdot \frac{5}{3} = R + \frac{10}{11}R = \frac{21}{11}R \end{aligned}$$

Ao substituir estes valores na expressão 2.6, obtém-se:

$$\begin{aligned} v_o &= -R_f V_{Ref} \left[\frac{R}{(3R) \left(\frac{8}{3}R\right)} \cdot \frac{b_1}{8} + \frac{1}{2R} \cdot \frac{b_2}{8} + \frac{\frac{5}{3}R}{R \left(\frac{8}{3}R\right)} \cdot \frac{b_3}{8} + \frac{\frac{21}{11}R}{R \left(\frac{32}{11}R\right)} \cdot \frac{b_4}{4} \right] \\ &\Leftrightarrow v_o = -\frac{R_f}{R} V_{Ref} \left[\frac{1}{64}b_1 + \frac{1}{16}b_2 + \frac{5}{64}b_3 + \frac{21}{128}b_4 \right] \\ &\Rightarrow v_o \approx -\frac{R_f}{3R} V_{Ref} \left[\frac{b_1}{21.33} + \frac{b_2}{5.33} + \frac{b_3}{4.27} + \frac{b_4}{2.03} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Determinação de v_o para $R_3 = R$, $R_1 = R_2 = R_4 = 2R$

Fazendo $R_3 = R$, obtemos o seguinte valor das respectivas resistências equivalentes:

$$R'_3 = R + \frac{2R^2}{2R + R} = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R$$

$$R''_3 = R + \frac{2R^2}{2R + \frac{5}{3}R} \cdot \frac{5}{3} = R + \frac{10}{11}R = \frac{21}{11}R$$

Substituindo estes valores na expressão 2.7, obtemos:

$$v_o = -R_f V_{Ref} \left[\frac{R^2}{(3R) \left(\frac{11}{3}R\right) \left(\frac{32}{11}R\right)} \cdot \frac{b_1}{2} + \frac{R}{(3R) \left(\frac{8}{3}R\right)} \cdot \frac{b_2}{4} + \frac{1}{2R} \cdot \frac{b_3}{4} + \frac{\frac{5}{3}R}{R \left(\frac{8}{3}R\right)} \cdot \frac{b_4}{4} \right]$$

$$\Leftrightarrow v_o = -\frac{R_f}{R} V_{Ref} \left[\frac{1}{64}b_1 + \frac{1}{32}b_2 + \frac{1}{8}b_3 + \frac{5}{32}b_4 \right]$$

$$\Rightarrow v_o \approx -\frac{R_f}{3R} V_{Ref} \left[\frac{b_1}{21.33} + \frac{b_2}{10.67} + \frac{b_3}{2.67} + \frac{b_4}{2.13} \right] \quad (2.11)$$

Determinação de v_o para $R_4 = R$, $R_1 = R_2 = R_3 = 2R$

Ao fazer $R_4 = R$, ficamos com o seguinte valor das resistências equivalentes:

$$R'_4 = R + \frac{2R^2}{2R + R} = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R$$

$$R''_4 = R + \frac{2R^2}{2R + \frac{5}{3}R} \cdot \frac{5}{3} = R + \frac{10}{11}R = \frac{21}{11}R$$

$$R'''_4 = R + \frac{2R^2}{2R + \frac{21}{11}R} \cdot \frac{21}{11} = R + \frac{42}{43}R = \frac{85}{43}R$$

Substituindo estes valores na expressão 2.8, obtemos:

$$v_o = -R_f V_{Ref} \left[\frac{4(R)^3}{\left(\frac{128}{43}R\right) \left(\frac{43}{11}R\right) \left(\frac{11}{3}R\right) (3R)} \cdot \frac{b_1}{2} + \frac{2R^2}{\left(\frac{32}{11}R\right) \left(\frac{11}{3}R\right) (3R)} \cdot \frac{b_2}{2} + \frac{R}{\left(\frac{8}{3}R\right) (3R)} \cdot \frac{b_3}{2} + \frac{1}{2R} \cdot \frac{b_4}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow v_o = -\frac{R_f}{R} V_{Ref} \left[\frac{1}{64}b_1 + \frac{1}{32}b_2 + \frac{1}{16}b_3 + \frac{1}{4}b_4 \right]$$

$$\Rightarrow v_o \approx -\frac{R_f}{3R} V_{Ref} \left[\frac{b_1}{21.33} + \frac{b_2}{10.67} + \frac{b_3}{5.33} + \frac{b_4}{1.33} \right] \quad (2.12)$$

Analisando as expressões obtidas nesta secção, 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12, e comparando com a expressão 1.5, podemos constatar que ao diminuir o valor da resistência associada a um bit, mantendo as outras iguais, irá aumentar o peso desse bit relativamente aos outros.

2.2 Análise Experimental

2.2.1 Obtenção das formas de onda dos gráficos $v_o(t)$ e $v_{Clk}(t)$

Após termos feito a montagem indicada no enunciado relativa a este ponto, aplicámos o mesmo sinal de *clock* que anteriormente, uma onda quadrada positiva entre 0 e 5V, de frequência $f = 100kHz$, no ponto C_p *clock* do conversor.

Apresenta-se de seguida nas figuras 2.8 e 2.9, respetivamente, os gráficos dos sinais de saída do conversor, $v_o(t)$, e de *clock*, $v_{Clk}(t)$, para $R_1 = R$ e $R_4 = R$, sendo que, em cada um dos casos, as restantes resistências (no primeiro caso, R_2 , R_3 e R_4 , e no segundo R_1 , R_2 e R_3) têm o valor de $2R$. De notar que neste caso a resistência R_f tem o valor $R_f = 4R$.

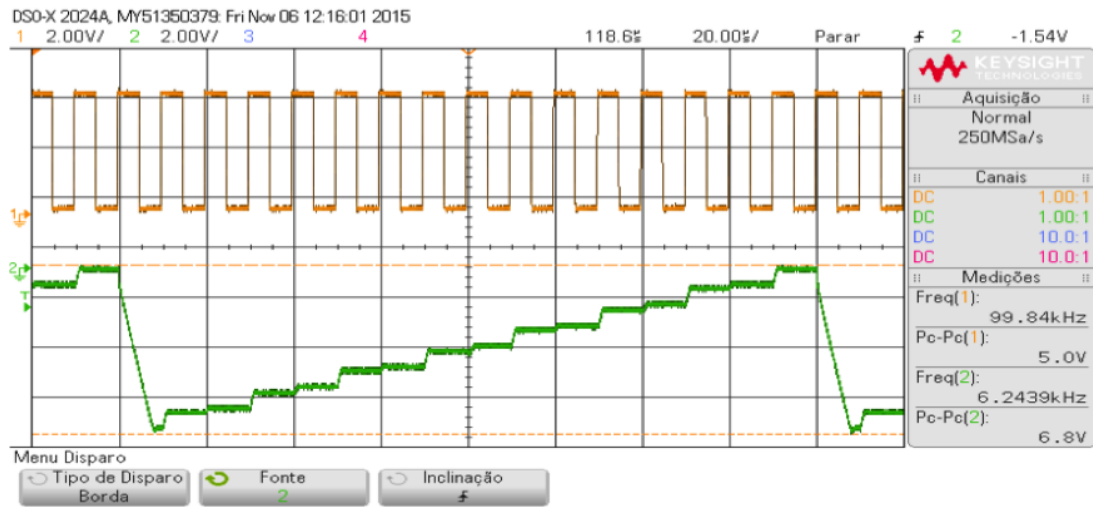


Figura 2.8: Gráficos $v_o(t)$ (a verde) e $v_{Clk}(t)$ (a laranja) para $R_1 = R$, $R_2 = R_3 = R_4 = 2R$ e $R_f = 4R$, obtidos pelo osciloscópio digital via *Microsoft Excel*.

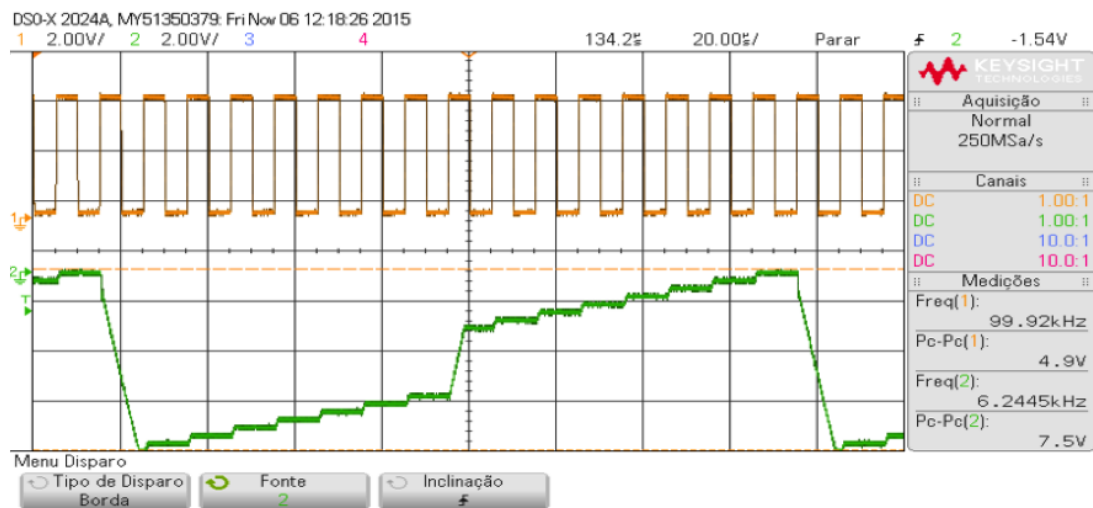


Figura 2.9: Gráficos $v_o(t)$ (a verde) e $v_{Clk}(t)$ (a laranja) para $R_4 = R$, $R_1 = R_2 = R_3 = 2R$ e $R_f = 4R$, obtidos pelo osciloscópio digital via *Microsoft Excel*.

2.2.2 Monotonicidade do conversor

Tal como previsto na análise teórica, ao diminuir a resistência associada a um bit do conversor, o peso deste bit vai aumentar em relação aos outros, o que faz com que a

variação de tensão à saída do conversor seja maior quando existe uma alteração de estado desse bit.

Desta forma, verifica-se que ao diminuir o valor de R_1 de $2R$ para R , o bit b_1 , a que está associada esta resistência, torna-se o menos significativo, pois no gráfico da figura 2.8 observamos que ocorre uma maior mudança de tensão a cada dois ciclos de relógio, ou seja, quando à uma transição de $b_1b_2b_3b_4$ de $XXX0$ para $XXX1$.

Já no caso em que se diminui a resistência R_4 de $2R$ para R , o bit b_4 , a que está associada esta resistência torna-se o mais significativo, como se pode observar no gráfico da figura 2.9, onde se verifica uma maior variação de tensão após 8 ciclos de relógio, do que nas outras transições, que corresponde à passagem de $b_1b_2b_3b_4$ de 0111 para 1000.

Tempo de estabelecimento

Pretende-se nesta secção estudar o tempo de estabelecimento do conversor em análise. Para tal, assumir-se-à que este tem origem apenas no tempo de estabelecimento do AMPOP integrado no circuito que, por sua vez, se encontra relacionado com o *slew rate* (SR) do mesmo.

O *slew rate* de um amplificador operacional é, por definição, o declive máximo da tensão de saída v_0 ou, por outras palavras, a taxa de variação máxima de v_0 .

$$SR = \left(\frac{dv_0}{dt} \right)_{\text{máx}} \quad (3.1)$$

O SR é a característica do amplificador que modela a sua não-idealidade relativamente ao tempo de resposta da entrada para a saída. Num AMPOP ideal, o SR seria infinito e a saída teria variações síncronas com a entrada. Na prática existe sempre um atraso temporal, designado tempo de estabelecimento, o que implica um SR finito.

3.1 Análise Teórica

Para o AMPOP utilizado (741), assumiu-se como valor teórico do SR o valor típico de $0.5 \text{ V}/\mu\text{s}$. Com este valor, é-nos possível determinar a previsão teórica para o tempo de estabelecimento (t_s) do circuito em estudo se conhecermos a variação máxima de tensão que impomos ao conversor.

Relembre-se a equação 1.6 que relaciona v_0 com a palavra digital para $R_f = 2R$:

$$v_0 = -\frac{5}{3} \left(\frac{b_1}{8} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_3}{2} + b_4 \right) \quad (1.6)$$

Substituindo na equação anterior os coeficientes b_i de forma a obter o valor de v_0 para as palavras $b_1b_2b_3b_4 = 1111$ e $b_1b_2b_3b_4 = 0000$ é possível, subtraíndo os resultados, determinar a variação máxima de v_0 , dado que a primeira palavra representa o mínimo de v_0 e a segunda o máximo.

$$|\Delta v_0|_{\text{máx}} = |v_0(b_1b_2b_3b_4 = 1111) - v_0(b_1b_2b_3b_4 = 0000)| = \frac{25}{8} \quad (3.2)$$

Assumindo então que o tempo de estabelecimento do conversor se deve apenas ao *slew rate* do AMPOP, vem:

$$t_{\text{steo}} = \frac{|\Delta v_0|_{\text{máx}}}{SR_{\text{teo}}} = \frac{25}{8} / 0.5 = 6.25 \mu\text{s} \quad (3.3)$$

Dado que a variação da tensão de saída é igual quando se passa de $b_1b_2b_3b_4 = 1111$ para $b_1b_2b_3b_4 = 0000$ ou para a transição inversa, conclui-se que o tempo de estabelecimento também será igual.

3.2 Análise Experimental

De forma a estudar o tempo de estabelecimento do conversor, ligou-se o *reset* do contador ao nível lógico “1” (5V) e aplicou-se uma onda quadrada de frequência 100kHz e amplitude 5V no ponto A. Este esquema de montagem permite obter, à entrada do conversor

$$\begin{cases} S_1 S_2 S_3 S_4 = 1111 & \text{para } A = 0 \\ S_1 S_2 S_3 S_4 = 0000 & \text{para } A = 1 \end{cases}$$

Com $R_f = 2R$, obteve-se a resposta apresentada de seguida.

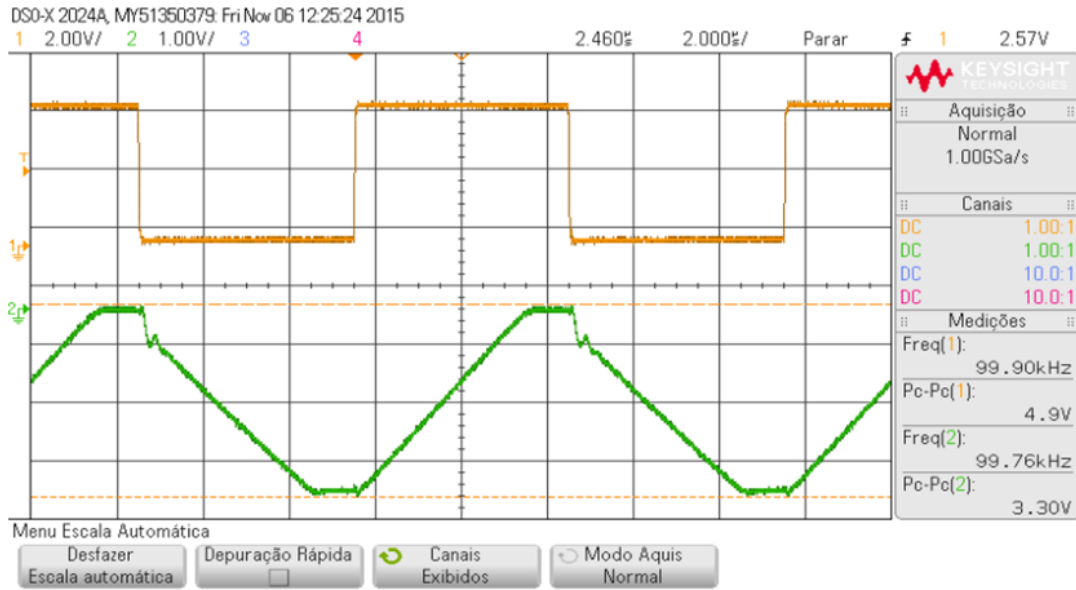


Figura 3.1: Gráficos $v_o(t)$ (a verde) e $v_A(t)$ (a laranja) para $R_f = 2R$ obtidos pelo osciloscópio digital via *Microsoft Excel*.

Por observação da figura anterior é possível inferir sobre a importância relativa do estudo do tempo de estabelecimento deste circuito conversor. De facto, observamos que a saída do AMPOP leva quase a totalidade do tempo em que a entrada se encontra num estado para transitar do estado anterior para esse estado actual. Esta resposta diverge muito do que seria um AMPOP ideal com *slew rate* infinito onde a saída acompanharia a entrada sem atrasos no tempo.

Tendo em vista a estimação do tempo de estabelecimento experimental, podemos utilizar os três semi-períodos disponíveis na resposta de v_0 de forma a ter três estimativas diferentes de t_s para, no fim, assumir como $t_{s_{exp}}$ a média desses três valores. A última transição terá de ser descartada pela razão óbvia de que se encontra truncada antes da estabilização do sinal no nível lógico correcto.

A análise dos dados para obtenção do tempo de estabelecimento experimental em cada variação da entrada foi efectuada com o auxílio de software *Matlab* e resume-se aos seguintes passos:

1. Determinação dos instantes de tempo em que a palavra digital (entrada) muda;
2. Determinação das tensões de saída correspondentes;
3. Determinação dos instantes de tempo em que a saída estabiliza;

4. Determinação das tensões de saída correspondentes;
5. Estimação do tempo de estabelecimento experimental;
6. Estimação do *slew rate* experimental.

O código desenvolvido foi o seguinte.

```

1  close all; clear all; clc
2
3  filename='lab2.xlsx'; %-leitura dos dados do ficheiro excel
4  sheet=3;
5  xlRange = 'B5:B254';
6  time = xlsread(filename,sheet,xlRange);
7  xlRange = 'C5:C254';
8  A = xlsread(filename,sheet,xlRange);
9  xlRange = 'D5:D254';
10 v0 = xlsread(filename,sheet,xlRange);
11 disp('terminada a leitura')
12 %%
13 j=1;
14 %-Deteccao dos instantes em que se inicia a variacao em A
15 for i=1:length(time)-1
16     if abs(A(i)-A(i+1))>2
17         index(j)=i;
18         v0_1(j)=v0(i);
19         j=j+1;
20     end
21 end
22
23 %-Daqui resultam quatro variacoes mas temos de descartar a
    ultima
24 index=index(1:3);
25 v0_1=v0_1(1:3);
26 %-tempo de inicio da variacao
27 t_delta=time(index);
28
29 %-Procurar agora quando e que v0 estabiliza
30 j=1;
31 for i=1:length(index)
32     index(end+1)=length(time)-1;
33     for k=index(i):index(i+1)
34         %-Estabiliza quando varia menos que 1%
35         if abs(v0(k+1)-v0(k))<0.01*abs(v0(k)) && abs(v0(k)-v0
            (k-1))<0.01*abs(v0(k))
36             index_t_e(j)=k;
37             t_e(j)=time(k);
38             j=j+1;
39         end

```



```

40     end
41 end
42 indices = TiraRepetidos (index_t_e,20);%tempos em que v0
    estabilizou
43 %tensao de saida estabilizada e tempo correspondente
44 for i=1:length(indices)
45     v0_2(i)=v0(indices(i));
46     tempos(i)=time(indices(i));
47 end
48
49 Vector_ts=tempos-t_delta'; %tempos de estabelecimento
50 %Estimativa de Ts como a media
51 Ts_exp=mean(Vector_ts)*10^6 %em us
52 %Utilizacao de Ts_exp para estimar SR_exp
53 delta_v0=abs(v0_2-v0_1);
54 Delta_v0_max=mean(delta_v0);%media das variacoes maximas de
    saida
55 %SR_exp em volt/us
56 SR_exp=Delta_v0_max/Ts_exp
57
58 %Erros relativos para Ts_exp e SR_exp
59 Ts_teo=6.25 %us
60 SR_teo=0.5 %volt/us
61 e_Ts=abs(Ts_teo-Ts_exp)/abs(Ts_teo)*100
62 e_SR=abs(SR_teo-SR_exp)/abs(SR_teo)*100
63
64
65 %Guardar resultados num ficheiro .txt
66 fileID = fopen('ResultadosPonto6.txt','wt');
67 fprintf(fileID,'Tempo de estabelecimento: %8.3f us\n',Ts_exp)
    ;
68 fprintf(fileID,'Slew Rate: %8.3f \n',SR_exp);
69 fprintf(fileID,'Erro relativo do Tempo de estabelecimento:
    %8.3f %% \n',e_Ts);
70 fprintf(fileID,'Erro relativo do Slew Rate: %8.3f %% \n',e_SR
    );
71 fclose(fileID);

```

A função integrada TiraRepetidos resume-se a:

```

1 function resultado = TiraRepetidos (vector,diff)
2 n=length(vector);
3 k=1;
4 resultado(1)=vector(1);
5 for u=1:n-1
6     if abs(vector(u+1)-vector(u))>diff
7         %passagem entre extremos e maior que diff

```

```

8      resultado(k+1)= vector(u+1);
9      k=k+1;
10     end
11 end
12 end

```

A execução do código apresentado conduziu então aos resultados organizados na tabela 3.1.

	Tempo de Estabelecimento [μ s]	Slew Rate [V/ μ s]
Valor teórico	6.25	0.5
Valor Experimental	4.533	0.683
Erro relativo	27.467 %	36.565 %

Tabela 3.1: Resultados da estimação do tempo de estabelecimento e *slew rate*.

É possível observar que a variação de tensão de saída máxima experimental (em módulo) é relativamente próxima da prevista teoricamente (3.125 V). De facto, obteve-se:

$$|\Delta v_0|_{\text{máx}} = SR_{\text{exp}} \times t_{s_{\text{exp}}} = 3.0955 \text{ V} \quad (3.4)$$

Desta forma, dado que a obtenção do tempo de estabelecimento experimental foi efectuada directamente pelas medições, sem cálculos intermédios, podemos concluir que o erro de $\approx 27\%$ advém do facto do valor teórico poder não ser de facto uma boa previsão para o circuito utilizado, ou seja, o valor assumido para o *slew rate* teórico pode de facto não corresponder ao circuito real utilizado no laboratório. Esta conclusão pode ser apoiada por uma análise do valor do erro relativo na medição do tempo de estabelecimento experimental em função do valor teórico considerado para o *slew rate* do AMPOP utilizado. Essa análise resulta no gráfico apresentado de seguida.

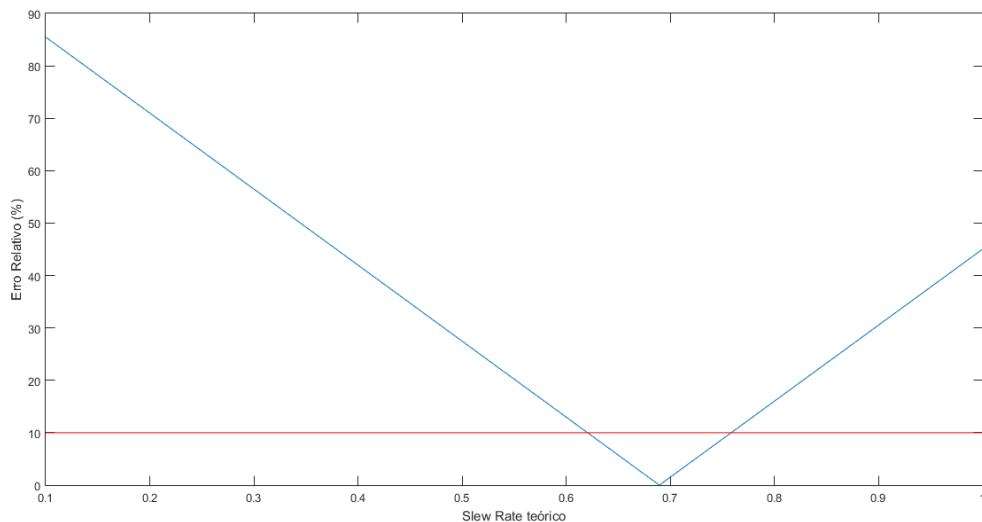


Figura 3.2: Erro relativo da medição de t_s em função do valor de SR_{teo} (a azul) e barreira dos 10% (a vermelho).

Com esta análise, podemos então concluir que os valores experimentais obtidos, embora apresentem erros relativos próximos de 30%, podem ter o seu desvio face ao previsto explicado por uma hipótese inicial incorrecta. Se, devido aos defeitos de fabrico, o *slew rate* verdadeiro do AMPOP fosse de 0.62, o erro relativo obtido experimentalmente seria de apenas 10%. Se fosse maior, o erro ainda diminuiria mais até o SR ser maior que 0.689. Assumindo então que o circuito utilizado não possui, pelas condições de fabrico, um *slew rate* de 0.5 mas sim talvez algo mais perto de 0.6 ou 0.7, podemos concluir que o erro experimental de $\approx 37\%$ não advém da qualidade das medições e, portanto, que não nos impede de afirmar que a análise experimental confirma a análise teórica realizada previamente.

Picos de tensão na transição de estados

4.1 Sinal de entrada e saída

Nesta parte do trabalho, a entrada C é mantida a zero (estado *reset*) e é aplicado à entrada A uma onda quadrada de frequência 100kHz e amplitude 5V. Esta onda está representada na figura pela curva a laranja.

Com esta montagem, as portas lógicas NOR funcionam como inversores do sinal A (pois a outra entrada da NOR, que vem de C, está sempre a zero), ou seja, quando o sinal A está a high temos uma saída a low e vice versa. No entanto, o bit mais significativo, S_4 , ainda atravessa a porta lógica NOT que vai inverter novamente o sinal. Assim, é possível ter dois estados de equilíbrio: $S_1S_2S_3S_4 = 1110$ para $A=0$ e $S_1S_2S_3S_4 = 0001$ para $A=1$.

A saída é representada na imagem pela curva a verde.

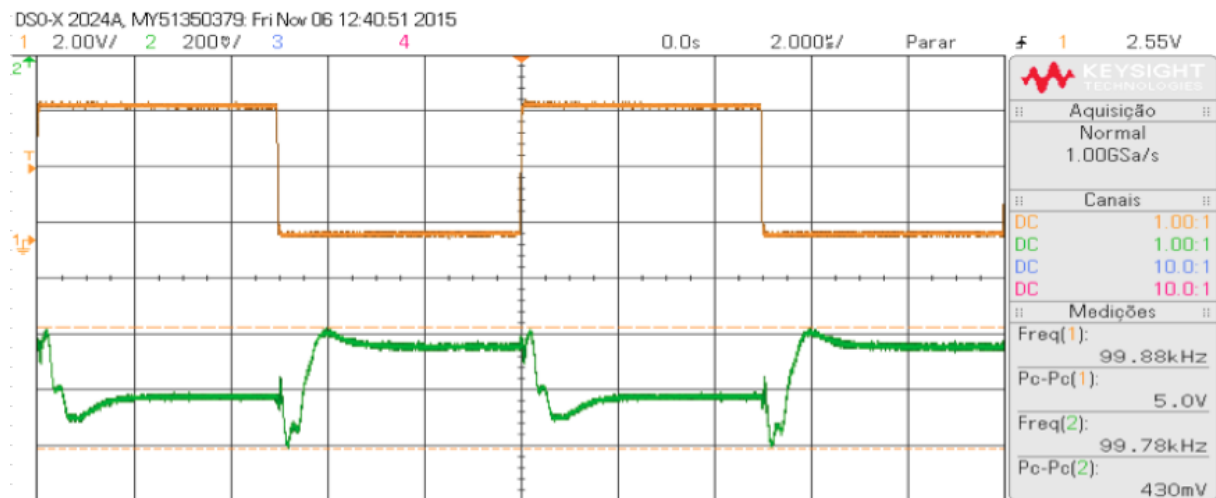


Figura 4.1: Sinal de entrada e saída observado

4.2 Picos de tensão espúrios

Os dois patamares estáveis estão situados em $V_0 = -1,63008V$ para o estado $S_1S_2S_3S_4 = 0001$, $A=1$ e em $V_0 = -1,44893V$ para o estado $S_1S_2S_3S_4 = 1110$, $A=0$. Contudo o valor da saída não é sempre estável como se pode constatar na figura seguinte.

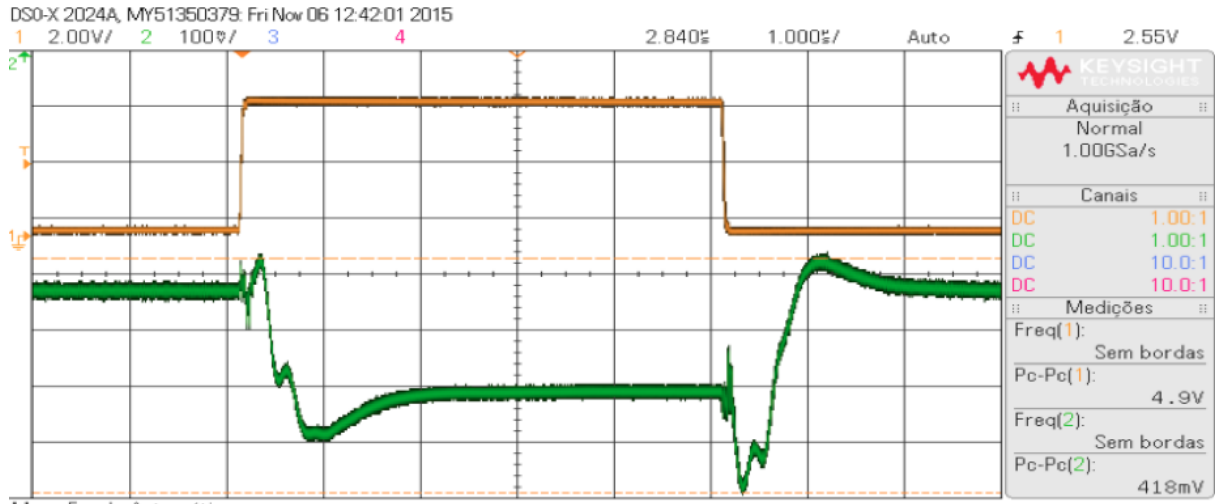


Figura 4.2: Zoom do sinal de entrada e de saída

Nota-se que existe um período oscilatório antes de cada estado estável, existe um *glitch*. Isto é, a tensão de saída que se encontra em -1,63008V (estado 0001) primeiro desce até -1,8002V e depois sobe até -1,3982V e só depois é que estabiliza em -1,44893V (estado 1110). Aquando da transição do estado 1110 → 0001 também ocorre o mesmo processo, mas subindo primeiro o valor da tensão e depois descendo, passando o patamar de equilíbrio e voltando a este instantes depois.

4.3 Análise de Resultados

Como já foi referido, aquando da transição de estados ocorre um *glitch*, isto é, a tensão de saída não estabiliza instantaneamente. Este efeito pode ser explicado pelo facto de que os componentes do circuito não são ideais, tendo por isso um tempo de *set-up* o que provoca um atraso no tempo. Nomeadamente o efeito da porta NOT (inversor) relativamente ao bit mais significativo S_4 .

Todos os bits atravessam a porta NOR e o ampop, no entanto, o bit S_4 atravessa ainda a porta NOT, atrasando o estado final e gerando um estado quase instantâneo devido ao seu atraso. Este atraso pode ser visto como:

$$\begin{cases} 1110 \rightarrow 1001 \rightarrow 0001 \\ 0001 \rightarrow 0110 \rightarrow 1110 \end{cases}$$

Posto isto, é possível explicar a intensidade do glitch, pois trata-se do bit com maior peso relativo no valor da tensão de saída e o sistema tende inicialmente a evoluir para um patamar de equilíbrio instantâneo que é logo alterado para o patamar de equilíbrio efetivo.

Conclusões

Com esta atividade laboratorial houve oportunidade de aplicar conhecimentos adquiridos nas aulas teóricas e presenciar um conversor D/A, implementado pelos alunos, em funcionamento. A utilização do circuito R-2R revela ser uma forma muito fácil e intuitiva de converter sinais digitais em sinais analógicos e ainda bastante versátil para alterar o peso relativo de cada bit se assim for desejado.

O conversor digital-analógico permitiu-nos associar a cada palavra digital uma tensão de conversão de valor específico e bem definido. As transições entre palavras consecutivas correspondem a transições uniformes no valor de tensão do sinal analógico.

Podemos assim concluir que uma boa conversão de sinal, implica um gráfico de sinal analógico regular, com perturbações reduzidas promovendo a injectividade na conversão.

É ainda importante referir que os valores de tensão dos patamares do gráfico de sinal analógico são múltiplos inteiros do patamar-unidade associado à palavra digital 0001, sendo a palavra 0000 associada ao zero de tensão.

Adicionalmente, devido às não-idealidades dos componentes do circuito é possível observar pequenos desvios dos resultados teóricos, como seria de esperar de um trabalho experimental. Não existem transições instantâneas e existe um período de resposta que é condicionado pelo *slew rate* do AMPOP. O *slew rate* do AMPOP utilizado é inevitavelmente limitado pelas pequenas correntes internas que o percorrem e também pelas capacitâncias internas desenhadas para compensar oscilações a altas frequências. Embora alguns amplificadores operacionais sejam compensados externamente e, dessa forma, ofereçam algum controlo sobre o *slew rate*, esse não é o caso do AMPOP utilizado.

Desta forma, haverá uma frequência máxima à qual o amplificador conseguirá variar a sua tensão de saída. Como a onda quadrada apresenta um espectro de potência com largura de banda infinita, espera-se que a saída do AMPOP não consiga replicar esse sinal no tempo e esteja limitado a uma frequência máxima. Essa característica é modelada pelo *slew rate*, definido então como a taxa máxima de variação da saída do AMPOP.

Para o AMPOP utilizado, assumiu-se o valor do *datasheet* de $0.5 \text{ V}/\mu\text{s}$. Contudo, mesmo admitindo algum ruído experimental, o trabalho laboratorial permitiu concluir que esse valor teórico pode de facto não ser adequado. O motivo aparentemente mais óbvio para o desvio será o de haver defeitos no fabrico que permitam que o valor real obtido para o *slew rate* do AMPOP oscile consideravelmente em torno do valor de projecto. Alternativamente, o uso repetitivo do circuito em laboratório pode, com o tempo, desgastar as componentes internas do AMPOP e promover um maior número de não-idealidades que resultem numa oscilação ainda maior face ao valor projectado.