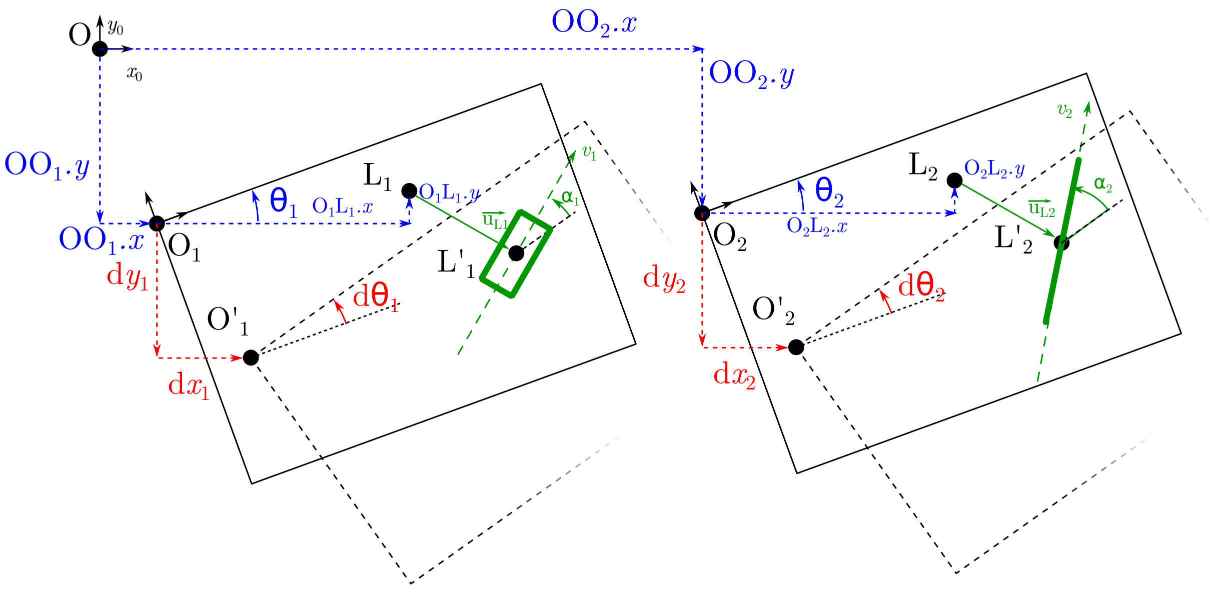
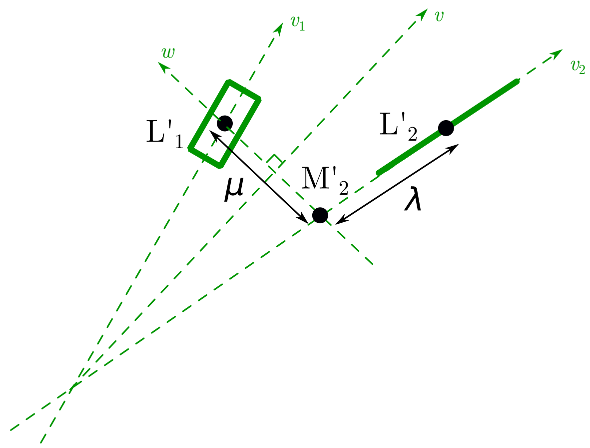
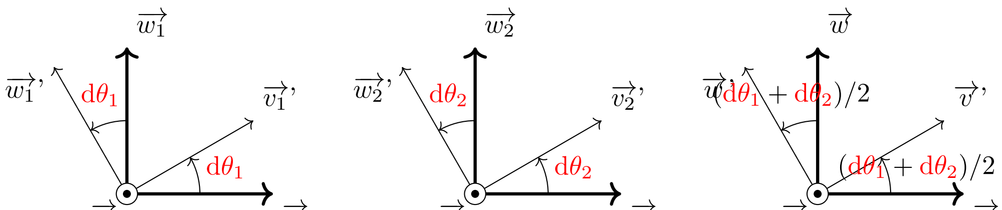

O
y_0
x_0
$OO_2.x$
$OO_2.y$
$OO_1.y$
$OO_1.x$
O_1
θ_1
$O_1L_1.x$
L_1
$O_1L_1.y$
u_{L1}
α_1
v_1
L'_1
dy_1
O'_1
$d\theta_1$
dx_1
O_2
θ_2
$O_2L_2.x$
L_2
$O_2L_2.y$
u_{L2}
α_2
v_2
L'_2
dy_2
O'_2
$d\theta_2$
dx_2


v_1
v
w
v_2
L'_1
L'_2
M'_2
μ
λ

On pose :


$\overrightarrow{w_1}$
$\overrightarrow{w_1}'$
$d\theta_1$
$\overrightarrow{v_1}'$
$d\theta_1$
$\overrightarrow{z}$
$\overrightarrow{v_1}$
$\overrightarrow{w_2}$
$\overrightarrow{w_2}'$
$d\theta_2$
$\overrightarrow{v_2}'$
$d\theta_2$
$\overrightarrow{z}$
$\overrightarrow{v_2}$
$\overrightarrow{w}$
$\overrightarrow{w}'$
$(d\theta_1 + d\theta_2)/2$
$\overrightarrow{v}'$
$(d\theta_1 + d\theta_2)/2$
$\overrightarrow{z}$
$\overrightarrow{v}$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= \frac{\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}}{\|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\|}\\
\overrightarrow{w} &= \frac{\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}}{\|\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}\|}\\
\overrightarrow{v_1}' &= \overrightarrow{v_1} + \mathrm{d}\theta_1\overrightarrow{w_1}\\
\overrightarrow{w_1}' &= \overrightarrow{w_1} - \mathrm{d}\theta_1\overrightarrow{v_1}\\
\overrightarrow{v_2}' &= \overrightarrow{v_2} + \mathrm{d}\theta_2\overrightarrow{w_2}\\
\overrightarrow{w_2}' &= \overrightarrow{w_2} - \mathrm{d}\theta_2\overrightarrow{v_2}\\
\overrightarrow{v}' &= \overrightarrow{v} + \frac{\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2}{2}\overrightarrow{w}\\
\overrightarrow{w}' &= \overrightarrow{w} - \frac{\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2}{2}\overrightarrow{v}\\
\overrightarrow{U_{(L_1\in 1/0)}} &= \overrightarrow{U_{(O_1\in 1/0)}} + \overrightarrow{L_1O_1}\wedge\overrightarrow{d\theta_{(1/0)}}\\
\overrightarrow{U_{(L_2\in 2/0)}} &= \overrightarrow{U_{(O_2\in 2/0)}} + \overrightarrow{L_2O_2}\wedge\overrightarrow{d\theta_{(2/0)}}
\end{aligned}
$$

1 Force de L_2 sur L_1

Note : Pour μ, voir ce site.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{R}_{(L_2\to L_1)}} =& k\overrightarrow{L_1'M_2'}\\
=& -k\mu'\overrightarrow{w}'\\
=& -k\left(\frac{\overrightarrow{z}\cdot(\overrightarrow{v_2}'\wedge\overrightarrow{L_1'L_2'})}{\overrightarrow{z}\cdot(\overrightarrow{v_2}'\wedge\overrightarrow{w}')}\right)\overrightarrow{w}'\\
=& k\left(\frac{\overrightarrow{z}\cdot(\overrightarrow{L_1'L_2'}\wedge\overrightarrow{v_2}')}{\overrightarrow{z}\cdot(\underbrace{\overrightarrow{v_2}'\wedge\overrightarrow{w}'}_{\approx\overrightarrow{v_2}\wedge\overrightarrow{w}})}\right)\left(\overrightarrow{w}-\frac{\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2}{2}\overrightarrow{v}\right)\\
=& k\left(\frac{\overrightarrow{z}\cdot\left(\overrightarrow{L_1'L_2'}\wedge(\overrightarrow{v_2}+\mathrm{d}\theta_2\overrightarrow{w_2})\right)}{\overrightarrow{z}\cdot(\overrightarrow{v_2}\wedge\overrightarrow{w})}\right)\left(\overrightarrow{w}-\frac{\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2}{2}\overrightarrow{v}\right)\\
=& k\left(\frac{\overrightarrow{z}\cdot\left(\left(\overrightarrow{L_1'L_1}+\overrightarrow{L_1L_2}+\overrightarrow{L_2L_2'}\right)\wedge(\overrightarrow{v_2}+\mathrm{d}\theta_2\overrightarrow{w_2})\right)}{\overrightarrow{z}\cdot(\overrightarrow{v_2}\wedge\overrightarrow{w})}\right)\left(\overrightarrow{w}-\frac{\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2}{2}\overrightarrow{v}\right)\\
=& k\left(\frac{\overrightarrow{z}\cdot\left(\left(-\overrightarrow{U_{(L_1\in 1/0)}}+\overrightarrow{L_1L_2}+\overrightarrow{U_{(L_2\in 2/0)}}\right)\wedge(\overrightarrow{v_2}+\mathrm{d}\theta_2\overrightarrow{w_2})\right)}{\overrightarrow{z}\cdot(\overrightarrow{v_2}\wedge\overrightarrow{w})}\right)\left(\overrightarrow{w}-\frac{\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2}{2}\overrightarrow{v}\right)
\end{aligned}
$$

$$=k\left(\frac{\vec{z}\cdot\left(\overbrace{\left(-\overrightarrow{U_{(O_1\in 1/0)}}-\overrightarrow{L_1O_1}\wedge\overrightarrow{d\theta_{(1/0)}}+\overrightarrow{L_1L_2}+\overrightarrow{U_{(O_2\in 2/0)}}+\overrightarrow{L_2O_2}\wedge\overrightarrow{d\theta_{(2/0)}}\right)\wedge\left(\vec{v_2}+\mathrm{d}\theta_2\vec{w_2}\right)}^{A}\right)}{\vec{z}\cdot\left(\vec{v_2}\wedge\vec{w}\right)}\right)$$
$$\times\left(\vec{w}-\frac{\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2}{2}\vec{v}\right)$$

Développons A, en simplifiant les termes dont le produit sera très petit (exemple : $\mathrm{d}\theta_2\times\mathrm{d}x_2$) :

$$\begin{aligned}
A&=\left(-\overrightarrow{U_{(O_1\in 1/0)}}-\overrightarrow{L_1O_1}\wedge\overrightarrow{d\theta_{(1/0)}}+\overrightarrow{L_1L_2}+\overrightarrow{U_{(O_2\in 2/0)}}+\overrightarrow{L_2O_2}\wedge\overrightarrow{d\theta_{(2/0)}}\right)\wedge\left(\vec{v_2}+\mathrm{d}\theta_2\vec{w_2}\right)\\
&=\left(-\overrightarrow{U_{(O_1\in 1/0)}}-\overrightarrow{L_1O_1}\wedge\overrightarrow{d\theta_{(1/0)}}+\overrightarrow{L_1L_2}+\overrightarrow{U_{(O_2\in 2/0)}}+\overrightarrow{L_2O_2}\wedge\overrightarrow{d\theta_{(2/0)}}\right)\wedge\vec{v_2}\\
&+\left(-\underbrace{\cancel{\overrightarrow{U_{(O_1\in 1/0)}}}}_{\approx 0}-\underbrace{\cancel{\overrightarrow{L_1O_1}\wedge\overrightarrow{d\theta_{(1/0)}}}}_{\approx 0}+\overrightarrow{L_1L_2}+\underbrace{\cancel{\overrightarrow{U_{(O_2\in 2/0)}}}}_{\approx 0}+\underbrace{\cancel{\overrightarrow{L_2O_2}\wedge\overrightarrow{d\theta_{(2/0)}}}}_{\approx 0}\right)\wedge\left(\mathrm{d}\theta_2\vec{w_2}\right)\\
&=\begin{pmatrix}-\mathrm{d}x_1-L_1O_1.\mathbf{y}\times\mathrm{d}\theta_1+L_1L_2.\mathbf{x}+\mathrm{d}x_2+L_2O_2.\mathbf{y}\times\mathrm{d}\theta_2\\-\mathrm{d}y_1+L_1O_1.\mathbf{x}\times\mathrm{d}\theta_1+L_1L_2.\mathbf{y}+\mathrm{d}y_2-L_2O_2.\mathbf{x}\times\mathrm{d}\theta_2\end{pmatrix}\wedge\vec{v_2}+\mathrm{d}\theta_2\left(L_1L_2.\mathbf{x}\times w_2.\mathbf{y}-L_1L_2.\mathbf{y}\times w_2.\mathbf{x}\right)\vec{z}\\
&=[(-\mathrm{d}x_1-L_1O_1.\mathbf{y}\times\mathrm{d}\theta_1+L_1L_2.\mathbf{x}+\mathrm{d}x_2+L_2O_2.\mathbf{y}\times\mathrm{d}\theta_2)\times v_2.\mathbf{y}\\
&\quad-(-\mathrm{d}y_1+L_1O_1.\mathbf{x}\times\mathrm{d}\theta_1+L_1L_2.\mathbf{y}+\mathrm{d}y_2-L_2O_2.\mathbf{x}\times\mathrm{d}\theta_2)\times v_2.\mathbf{x}\\
&\quad+\mathrm{d}\theta_2\left(L_1L_2.\mathbf{x}\times w_2.\mathbf{y}-L_1L_2.\mathbf{y}\times w_2.\mathbf{x}\right)]\,\vec{z}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{R}_{(L_2\to L_1)}}=&\frac{k}{\vec{z}\cdot\left(\vec{v_2}\wedge\vec{w}\right)}[(-\mathrm{d}x_1-\mathrm{d}\theta_1L_1O_1.\mathbf{y}+L_1L_2.\mathbf{x}+\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}\theta_2L_2O_2.\mathbf{y})\times v_2.\mathbf{y}\\
&+(\mathrm{d}y_1-\mathrm{d}\theta_1L_1O_1.\mathbf{x}-L_1L_2.\mathbf{y}-\mathrm{d}y_2+\mathrm{d}\theta_2L_2O_2.\mathbf{x})\times v_2.\mathbf{x}\\
&+\mathrm{d}\theta_2\left(L_1L_2.\mathbf{x}\times w_2.\mathbf{y}-L_1L_2.\mathbf{y}\times w_2.\mathbf{x}\right)]\\
&\times\begin{pmatrix}w.\mathbf{x}-\frac{\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2}{2}v.\mathbf{x}\\w.\mathbf{y}-\frac{\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2}{2}v.\mathbf{y}\end{pmatrix}\\
=&\overbrace{\frac{k}{v_2.\mathbf{x}\;w.\mathbf{y}-v_2.\mathbf{y}\;w.\mathbf{x}}}^{B}\times\\
&[(-v_2.\mathbf{y})\mathrm{d}x_1+(v_2.\mathbf{x})\mathrm{d}y_1+(-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y}+v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})\mathrm{d}\theta_1\\
&+(v_2.\mathbf{y})\mathrm{d}x_2-(v_2.\mathbf{x})\mathrm{d}y_2+(v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y}+v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x}+L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y}-L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})\mathrm{d}\theta_2\\
&+\underbrace{L_1L_2.\mathbf{x}\;v_2.\mathbf{y}-L_1L_2.\mathbf{y}\;v_2.\mathbf{x}}_{C}\Bigg]\\
&\times\begin{pmatrix}w.\mathbf{x}-\frac{\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2}{2}v.\mathbf{x}\\w.\mathbf{y}-\frac{\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2}{2}v.\mathbf{y}\end{pmatrix}\\
=&B\times\\
&\Bigg[\Bigg(\begin{matrix}(-v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x})\mathrm{d}x_1+(v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x})\mathrm{d}y_1+(-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y}+v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{x}\mathrm{d}\theta_1+(v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x})\mathrm{d}x_2\dots\\(-v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y})\mathrm{d}x_1+(v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y})\mathrm{d}y_1+(-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y}+v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{y}\mathrm{d}\theta_1+(v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y})\mathrm{d}x_2\dots\end{matrix}\\
&\begin{matrix}\dots-(v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x})\mathrm{d}y_2+(v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y}+v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x}+L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y}-L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{x}\mathrm{d}\theta_2+Cw.\mathbf{x}\\\dots-(v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y})\mathrm{d}y_2+(v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y}+v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x}+L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y}-L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{y}\mathrm{d}\theta_2+Cw.\mathbf{y}\end{matrix}\Bigg)\\
&+\begin{pmatrix}-\frac{Cv.\mathbf{x}}{2}\mathrm{d}\theta_1-\frac{Cv.\mathbf{x}}{2}\mathrm{d}\theta_2\\-\frac{Cv.\mathbf{y}}{2}\mathrm{d}\theta_1-\frac{Cv.\mathbf{y}}{2}\mathrm{d}\theta_2\end{pmatrix}\Bigg]
\end{aligned}$$

2 Moment en O'_1 de L_2 sur L_1

Appelons $\overrightarrow{C_{L_2\mapsto L_1}}$ le couple du ressort de torsion de liaison.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{M}_{O'_1(2\to1)}}\cdot\overrightarrow{z} =& \overrightarrow{C_{L_2\mapsto L_1}}\cdot\overrightarrow{z} + \left(\overrightarrow{O'_1L'_1}\wedge\overrightarrow{\mathscr{R}_{(2\to1)}}\right)\cdot\overrightarrow{z}\\
=& k_{\text{rot}}(\alpha_2 + \mathrm{d}\theta_2 + \theta_2 - \alpha_1 - \mathrm{d}\theta_1 - \theta_1)\\
&+\left(-\overrightarrow{U_{(O_1\in1/0)}} + \overrightarrow{O_1L_1} + \overrightarrow{U_{(L_1\in1/0)}}\right)\wedge(\text{Voir résultante})\cdot\overrightarrow{z}\\
=& k_{\text{rot}}(\alpha_2 + \mathrm{d}\theta_2 + \theta_2 - \alpha_1 - \mathrm{d}\theta_1 - \theta_1)\\
&+\left(-\cancel{\overrightarrow{U_{(O_1\in1/0)}}} + \overrightarrow{O_1L_1} + \cancel{\overrightarrow{U_{(O_1\in1/0)}}} - \overrightarrow{O_1L_1}\wedge\overrightarrow{d\theta_{(1/0)}}\right)\wedge(\text{Voir résultante})\cdot\overrightarrow{z}\\
=& k_{\text{rot}}(\alpha_2 + \mathrm{d}\theta_2 + \theta_2 - \alpha_1 - \mathrm{d}\theta_1 - \theta_1)\\
&+\begin{pmatrix} O_1L_1.\mathbf{x} - O_1L_1.\mathbf{y}\mathrm{d}\theta_1\\ O_1L_1.\mathbf{y} + O_1L_1.\mathbf{x}\mathrm{d}\theta_1\end{pmatrix}\wedge(\text{Voir résultante})\cdot\overrightarrow{z}\\
=& k_{\text{rot}}(\alpha_2 + \mathrm{d}\theta_2 + \theta_2 - \alpha_1 - \mathrm{d}\theta_1 - \theta_1)\\
+B\times[&\\
&(-v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y}\ O_1L_1.\mathbf{x})\mathrm{d}x_1 + (v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y}O_1L_1.\mathbf{x})\mathrm{d}y_1\\
&+O_1L_1.\mathbf{x}\left[(-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{y} - \frac{1}{2}Cv.\mathbf{y}\right]\mathrm{d}\theta_1\\
&+(v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y}O_1L_1.\mathbf{x})\mathrm{d}x_2 - (v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y}O_1L_1.\mathbf{x})\mathrm{d}y_2\\
&+O_1L_1.\mathbf{x}\left[(v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} + L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} - L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{y} - \frac{1}{2}Cv.\mathbf{y}\right]\mathrm{d}\theta_2\\
&+(Cw.\mathbf{y}O_1L_1.\mathbf{x})\\
&-(O_1L_1.\mathbf{y}Cw.\mathbf{y})\mathrm{d}\theta_1\\
&+(v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x}O_1L_1.\mathbf{y})\mathrm{d}x_1 - (v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x}O_1L_1.\mathbf{y})\mathrm{d}y_1\\
&+O_1L_1.\mathbf{y}\left[(v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} - v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{x} + \frac{1}{2}Cv.\mathbf{x}\right]\mathrm{d}\theta_1\\
&-(v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x}O_1L_1.\mathbf{y})\mathrm{d}x_2 + (v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x}O_1L_1.\mathbf{y})\mathrm{d}y_2\\
&+O_1L_1.\mathbf{y}\left[(-v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} - v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} - L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} + L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{x} + \frac{1}{2}Cv.\mathbf{x}\right]\mathrm{d}\theta_2\\
&-(O_1L_1.\mathbf{y}Cw.\mathbf{x})\\
&-(O_1L_1.\mathbf{x}Cw.\mathbf{x})\mathrm{d}\theta_1\\
&]
\end{aligned}$$

3 Matrices de L_1

On met les actions mécaniques précédentes sous la forme :

$$=\bar{\bar{A}}\cdot\overrightarrow{X} - \overrightarrow{F} \tag{1}$$

avec

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}y_1\\ \mathrm{d}\theta_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \mathrm{d}y_2\\ \mathrm{d}\theta_2\end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{A}} = \left[\begin{array}{ccc} (-B\ v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x}) & (B\ v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x}) & \dots \\ (-B\ v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y}) & (B\ v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y}) & \dots \\ Bv_2.\mathbf{y}(w.\mathbf{x}O_1L_1.\mathbf{y} - w.\mathbf{y}O_1L_1.\mathbf{x}) & Bv_2.\mathbf{x}(w.\mathbf{y}O_1L_1.\mathbf{x} - w.\mathbf{x}O_1L_1.\mathbf{y}) & \dots \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \dots & B\left((-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{x} - \frac{Cv.\mathbf{x}}{2}\right) & \dots \\ \dots & B\left((-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{y} - \frac{Cv.\mathbf{y}}{2}\right) & \dots \\ \dots & -k_{\text{rot}} + B\left(O_1L_1.\mathbf{x}\left[(-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{y} - \frac{1}{2}Cv.\mathbf{y}\right] - (O_1L_1.\mathbf{y}Cw.\mathbf{y}) + O_1L_1.\mathbf{y}\left[(v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} - v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{x} + \frac{1}{2}Cv.\mathbf{x}\right] - (O_1L_1.\mathbf{x}Cw.\mathbf{x})\right) & \dots \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{cccc} \dots & (Bv_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x}) & -(B\ v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x}) & \dots \\ \dots & (B\ v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y}) & -(B\ v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y}) & \dots \\ \dots & Bv_2.\mathbf{y}(w.\mathbf{y}O_1L_1.\mathbf{x} - w.\mathbf{x}O_1L_1.\mathbf{y}) & Bv_2.\mathbf{x}(w.\mathbf{x}O_1L_1.\mathbf{y} - w.\mathbf{y}O_1L_1.\mathbf{x}) & \dots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} \dots & B\left((v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} + L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} - L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{x} - \frac{Cv.\mathbf{x}}{2}\right) \\ \dots & B\left((v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} + L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} - L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{y} - \frac{Cv.\mathbf{y}}{2}\right) \\ \dots & k_{\text{rot}} + B\left(O_1L_1.\mathbf{x}\left[(v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} + L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} - L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{y} - \frac{1}{2}Cv.\mathbf{y}\right] + O_1L_1.\mathbf{y}\left[(-v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} - v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} - L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} + L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{x} + \frac{1}{2}Cv.\mathbf{x}\right]\right) \end{array} \right]$$

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} -B\ C\ w.\mathbf{x} \\ -B\ C\ w.\mathbf{y} \\ k_{\text{rot}}(\alpha_1 + \theta_1 - \alpha_2 - \theta_2) + B\ C(w.\mathbf{x}O_1L_1.y - w.\mathbf{y}O_1L_1.\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

4 Force de L_1 sur L_2

La force est strictement l'opposée :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathscr{R}_{(L_1 \to L_2)}} &= -\overrightarrow{\mathscr{R}_{(L_2 \to L_1)}} \\ &= -B\times \\ &\left[\left(\begin{array}{l} (-v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x})\mathrm{d}x_1 + (v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x})\mathrm{d}y_1 + (-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{x}\mathrm{d}\theta_1 + (v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x})\mathrm{d}x_2 \dots \\ (-v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y})\mathrm{d}x_1 + (v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y})\mathrm{d}y_1 + (-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{y}\mathrm{d}\theta_1 + (v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y})\mathrm{d}x_2 \dots \end{array} \right.\right. \\ &\left. \begin{array}{l} \dots - (v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x})\mathrm{d}y_2 + (v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} + L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} - L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{x}\mathrm{d}\theta_2 + Cw.\mathbf{x} \\ \dots - (v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y})\mathrm{d}y_2 + (v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} + L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} - L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{y}\mathrm{d}\theta_2 + Cw.\mathbf{y} \end{array} \right) \\ &\left. + \begin{pmatrix} -\frac{Cv.\mathbf{x}}{2}\mathrm{d}\theta_1 - \frac{Cv.\mathbf{x}}{2}\mathrm{d}\theta_2 \\ -\frac{Cv.\mathbf{y}}{2}\mathrm{d}\theta_1 - \frac{Cv.\mathbf{y}}{2}\mathrm{d}\theta_2 \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

5 Moment en O'_2 de L_1 sur L_2

Appelons $\overrightarrow{C_{L_1 \mapsto L_2}} = -\overrightarrow{C_{L_2 \mapsto L_1}}$ le couple du ressort de torsion de liaison.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{M}_{O'_{2(1\to 2)}}}\cdot\overrightarrow{z} =& \overrightarrow{C_{L_1\mapsto L_2}}\cdot\overrightarrow{z} + \left(\underbrace{\overrightarrow{O'_2M'_2}}_{(\text{ou } \overrightarrow{O'_2L'_1})} \wedge \overrightarrow{\mathscr{R}_{(1\to 2)}}\right)\cdot\overrightarrow{z}\\
=& k_{\text{rot}}(\alpha_1 + \mathrm{d}\theta_1 + \theta_1 - \alpha_2 - \mathrm{d}\theta_2 - \theta_2)\\
&+ \left(\left(\overrightarrow{O'_2O_2} + \overrightarrow{O_2L_1} + \overrightarrow{L_1L'_1}\right)\wedge(\text{Voir résultante})\right)\cdot\overrightarrow{z}\\
=& k_{\text{rot}}(\alpha_1 + \mathrm{d}\theta_1 + \theta_1 - \alpha_2 - \mathrm{d}\theta_2 - \theta_2)\\
&+ \left(\left(-\overrightarrow{U_{(O_2\in 2/0)}} + \overrightarrow{O_2L_1} + \overrightarrow{U_{(L_1\in 1/0)}}\right)\wedge(\text{Voir résultante})\right)\cdot\overrightarrow{z}\\
=& k_{\text{rot}}(\alpha_1 + \mathrm{d}\theta_1 + \theta_1 - \alpha_2 - \mathrm{d}\theta_2 - \theta_2)\\
&+ \left(\left(-\overrightarrow{U_{(O_2\in 2/0)}} + \overrightarrow{O_2L_1} + \overrightarrow{U_{(O_1\in 1/0)}} + \overrightarrow{L_1O_1}\wedge\overrightarrow{d\theta_{(1/0)}}\right)\wedge(\text{Voir résultante})\right)\cdot\overrightarrow{z}\\
=& k_{\text{rot}}(\alpha_1 + \mathrm{d}\theta_1 + \theta_1 - \alpha_2 - \mathrm{d}\theta_2 - \theta_2)\\
&+ \left(\left(\begin{array}{l} -\mathrm{d}x_2 + O_2L_1.\mathbf{x} + \mathrm{d}x_1 + L_1O_1.\mathbf{y}\mathrm{d}\theta_1\\ -\mathrm{d}y_2 + O_2L_1.\mathbf{y} + \mathrm{d}y_1 - L_1O_1.\mathbf{x}\mathrm{d}\theta_1\end{array}\right)\wedge(\text{Voir résultante})\right)\cdot\overrightarrow{z}\\
=& k_{\text{rot}}(\alpha_1 + \mathrm{d}\theta_1 + \theta_1 - \alpha_2 - \mathrm{d}\theta_2 - \theta_2)\\
-B[&\\
&(Cw.\mathbf{y})\mathrm{d}x_1 - (Cw.\mathbf{y})\mathrm{d}x_2 + (L_1O_1.\mathbf{y}Cw.\mathbf{y})\mathrm{d}\theta_1\\
&-(O_2L_1.\mathbf{x}v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y})\mathrm{d}x_1 + (O_2L_1.\mathbf{x}v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y})\mathrm{d}y_1\\
&+\left(O_2L_1.\mathbf{x}\left((-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{y} - \frac{1}{2}Cv.\mathbf{y}\right)\right)\mathrm{d}\theta_1\\
&+(O_2L_1.\mathbf{x}v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y})\mathrm{d}x_2 - (O_2L_1.\mathbf{x}v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y})\mathrm{d}y_2\\
&+\left(O_2L_1.\mathbf{x}\left((v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} + L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} - L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{y} - \frac{1}{2}Cv.\mathbf{y}\right)\right)\mathrm{d}\theta_2\\
&+(O_2L_1.\mathbf{x}Cw.\mathbf{y})\\
&-(Cw.\mathbf{x})\mathrm{d}y_1 + (Cw.\mathbf{x})\mathrm{d}y_2 + (L_1O_1.\mathbf{x}Cw.\mathbf{x})\mathrm{d}\theta_1\\
&+(O_2L_1.\mathbf{y}v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x})\mathrm{d}x_1 - (O_2L_1.\mathbf{y}v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x})\mathrm{d}y_1\\
&-\left(O_2L_1.\mathbf{y}\left((-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{x} - \frac{1}{2}Cv.\mathbf{x}\right)\right)\mathrm{d}\theta_1\\
&-(O_2L_1.\mathbf{y}v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x})\mathrm{d}x_2 + (O_2L_1.\mathbf{y}v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x})\mathrm{d}y_2\\
&-\left(O_2L_1.\mathbf{y}\left((v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} + L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} - L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{x} - \frac{1}{2}Cv.\mathbf{x}\right)\right)\mathrm{d}\theta_2\\
&-(O_2L_1.\mathbf{y}Cw.\mathbf{x})\\
&]
\end{aligned}
$$

6 Matrices de L_2

On met les actions mécaniques précédentes sous la forme :

$$=\bar{\bar{A}}\cdot\overrightarrow{X} - \overrightarrow{F} \tag{2}$$

avec (attention à l'ordre !)

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}y_1\\ \mathrm{d}\theta_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \mathrm{d}y_2\\ \mathrm{d}\theta_2\end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{A}} = \left[\begin{array}{ccc} (B\ v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x}) & (-B\ v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x}) & \dots \\ (B\ v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y}) & (-B\ v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y}) & \dots \\ -B(Cw.\mathbf{y} + O_2L_1.\mathbf{x}v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y}) & -B(O_2L_1.\mathbf{x}v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y} - Cw.\mathbf{x} - O_2L_1.\mathbf{y}v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x}) & \dots \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \dots & -B\left((-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{x} - \frac{Cv.\mathbf{x}}{2}\right) & \dots \\ \dots & -B\left((-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{y} - \frac{Cv.\mathbf{y}}{2}\right) & \dots \\ \dots & \left(k_{\text{rot}} - B\left[L_1O_1.\mathbf{y}Cw.\mathbf{y} + O_2L_1.\mathbf{x}\left((-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{y} - \frac{1}{2}Cv.\mathbf{y}\right) + L_1O_1.\mathbf{x}Cw.\mathbf{x} - O_2L_1.\mathbf{y}\left((-v_2.\mathbf{y}L_1O_1.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_1O_1.\mathbf{x})w.\mathbf{x} - \frac{1}{2}Cv.\mathbf{x}\right)\right]\right) & \dots \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{cccc} \dots & (-Bv_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x}) & (B\ v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x}) & \dots \\ \dots & (-B\ v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y}) & (B\ v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y}) & \dots \\ \dots & -B(-Cw.\mathbf{y} + O_2L_1.\mathbf{x}v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{y} - O_2L_1.\mathbf{y}v_2.\mathbf{y}w.\mathbf{x}) & -B(-O_2L_1.\mathbf{x}v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{y} + O_2L_1.\mathbf{y}v_2.\mathbf{x}w.\mathbf{x}) & \dots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{cc} \dots & -B\left((v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} + L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} - L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{x} - \frac{Cv.\mathbf{x}}{2}\right) \\ \dots & -B\left((v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} + L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} - L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})w.\mathbf{y} - \frac{Cv.\mathbf{y}}{2}\right) \\ \dots & -k_{\text{rot}} - B\left[(v_2.\mathbf{y}L_2O_2.\mathbf{y} + v_2.\mathbf{x}L_2O_2.\mathbf{x} + L_1L_2.\mathbf{x}w_2.\mathbf{y} - L_1L_2.\mathbf{y}w_2.\mathbf{x})(O_2L_1.\mathbf{x}w.\mathbf{y} - O_2L_1.\mathbf{y}w.\mathbf{x}) + \frac{1}{2}C(O_2L_1.\mathbf{x}v.\mathbf{y} - O_2L_1.\mathbf{y}v.\mathbf{x})\right] \end{array} \right]$$

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} B\ C\ w.\mathbf{x} \\ B\ C\ w.\mathbf{y} \\ k_{\text{rot}}(-\alpha_1 + -\theta_1 + \alpha_2 + \theta_2) + B\ C(O_2L_1.\mathbf{x}w.\mathbf{x} - O_2L_1.\mathbf{y}w.\mathbf{y}) \end{pmatrix}$$