
	<p align="center">Universidad Simón Bolívar Departamento de Cómputo Científico y Estadística <i>Cátedra: CO5516- Matemáticas Financieras II</i></p>	
---	---	---

Proyecto II

Selección de Portafolios Óptimos para Diferentes Perfiles de Inversores

Rafael Enrique García Sánchez

Resumen

Este proyecto integra la teoría de utilidad con la optimización de portafolios para construir carteras óptimas personalizadas para inversores con distintos niveles de aversión al riesgo. Utilizando los diez activos principales del S&P 500 analizados en el Proyecto I, se definen tres perfiles de inversores hipotéticos, cada uno caracterizado por una función de utilidad diferente: cuadrática, logarítmica y potencial con aversión al riesgo relativa. Para cada perfil, se derivan numéricamente las curvas de indiferencia y se optimiza la asignación de activos maximizando la utilidad esperada. Los resultados muestran cómo las preferencias de riesgo impactan significativamente la composición y ubicación de los portafolios óptimos en el espacio riesgo-retorno, con diferencias notables en la exposición a activos defensivos versus agresivos.

Abstract

This project integrates utility theory with portfolio optimization to build customized optimal portfolios for investors with different risk aversion levels. Using the ten main S&P 500 assets analyzed in Project I, three hypothetical investor profiles are defined, each characterized by a different utility function: quadratic, logarithmic, and power utility with relative risk aversion. For each profile, indifference curves are numerically derived and asset allocations are optimized to maximize expected utility. The results demonstrate how risk preferences significantly impact the composition and location of optimal portfolios in the risk-return space, with notable differences in exposure to defensive versus aggressive assets.

1 Introducción

La teoría moderna de portafolios establecida por Markowitz (1952) proporciona el marco fundamental para construir fronteras eficientes, pero no considera explícitamente las preferencias subjetivas de los inversores. Este proyecto avanza en dicha dirección integrando funciones de utilidad con la optimización de portafolios, extendiendo el análisis realizado en el Proyecto I. Siguiendo el trabajo con las diez principales acciones del S&P 500 (Microsoft, Nvidia, Apple, Amazon, Meta Platforms, Broadcom, Alphabet A, Tesla, Berkshire Hathaway B, Alphabet C), se personalizan portafolios óptimos para tres perfiles de inversores con distintas funciones de utilidad, modelando así diferentes actitudes hacia el riesgo.

2 Problema

El desafío en la gestión de inversiones no solo radica en identificar combinaciones eficientes de riesgo y retorno, sino en alinear dichas combinaciones con las preferencias particulares de los inversores. Por tanto,

es crucial explorar cómo la teoría de la utilidad modifica la selección de portafolios dentro de la frontera eficiente

2.1 Objetivos del proyecto

- Integrar funciones de utilidad con la frontera eficiente del Proyecto I.
- Definir tres perfiles de inversores con distintas funciones de utilidad.
- Derivar curvas de indiferencia para cada perfil.
- Encontrar portafolios óptimos que maximicen la utilidad esperada.
- Comparar composiciones y ubicaciones en el espacio riesgo-retorno.
- Analizar el impacto de las preferencias de riesgo en las decisiones.

Para ello se continuará con el análisis detallado de las diez acciones más influyentes del índice S&P 500 durante los últimos cinco años, utilizando los bonos

del Tesoro de EE. UU. como proxy del activo libre de riesgo, realizado en el proyecto I.

3 Metodología

3.1 Descripción de los datos y herramientas a utilizar

Se seleccionan los 10 activos más relevantes del S&P 500 por su peso en el índice. Estos son:

- **Microsoft Corp - MSFT**
- **Nvidia Corp - NVDA**
- **Apple Inc. - AAPL**
- **Amazon.com Inc - AMZN**
- **Meta Platforms, Inc. Class A - META**
- **Broadcom Inc - AVGO**
- **Alphabet Inc A - GOOGL**
- **Tesla Inc - TSLA**
- **Berkshire Hathaway B - BRK-B**
- **Alphabet Inc C - GOOG**

Donde se recolecta los datos de estas acciones los últimos 5 años de *Yahoo Finance*, del 01/06/2020 al 31/05/2025 para la evaluación de sus rendimientos. El proxy del activo libre de Riesgo será los bonos del Tesoro de EE.UU, cuyo rendimiento se aproxima a 4.4%; el rendimiento del bono del Tesoro a 10 años fue de 4.21 % en 2024 y se sitúa en aproximadamente 4.38 % a mediados de 2025, según datos de MacroTrends y la Reserva Federal.

Se utilizará el lenguaje de programación Python para este proyecto al igual que se hizo en el anterior. Para este análisis se utilizaron las librerías *numpy*, *pandas*, *matplotlib*, *sns*, *PyPortfolioOpt*, *yfinance*.

3.2 Perfiles de Inversores y Funciones de Utilidad

Se definen tres perfiles hipotéticos basados en funciones de utilidad, definimos primero su versión común en base a la riqueza W y luego planteamos una versión alternativa en función al rendimiento esperado y el riesgo, que es la que utilizaremos en nuestro código :

- **Perfil 1: Conservador (Utilidad Cuadrática)**

$$U(W) = W - \alpha W^2$$

Que en su versión alternativa en función del rendimiento y el riesgo:

$$U = E[R_p] - 0.5(A)\sigma_p^2$$

Con una aversión absoluta al riesgo constante (CARA) y que prioriza la preservación de capital. Definimos $A=6$ para nuestro problema.

- **Perfil 2: Moderado (Utilidad Logarítmica)**

$$U(W) = \ln(W)$$

La versión alternativa en función al riesgo y el rendimiento sería:

$$U = \ln(1 + E[R_p]) - 0.5(\gamma)\left(\frac{\sigma_p^2}{(1 + E[R_p])^2}\right)$$

Con una aversión relativa al riesgo constante (CRRA), y que busca un equilibrio entre el crecimiento y la estabilidad. Se define $\gamma = 5$.

- **Perfil 3: Agresivo (Utilidad Exponencial)**

$$U(W) = -e^{-\alpha W}$$

Es la única función que presenta CARA ($A(W) = a$)

Su versión alternativa con respecto al rendimiento y al riesgo es:

$$U = -e^{-\alpha E[R_p] + \frac{(\alpha \sigma_p)^2}{2}}$$

Con una alta tolerancia al riesgo, dado que definimos $\alpha = 1$

3.3 Procesos de Optimización

Para determinar el portafolio ideal para cada inversor, se implementa un proceso de optimización en dos etapas. Primero, se construye el conjunto de todas las carteras eficientes posibles utilizando los diez activos seleccionados. Segundo, se superponen las preferencias de cada inversor, modeladas a través de sus curvas de indiferencia, sobre este conjunto para encontrar el punto que maximiza su utilidad esperada.

3.3.1 Frontera Eficiente

La Frontera Eficiente es un concepto central de la Teoría Moderna de Portafolios, representa el conjunto de carteras que ofrecen el máximo rendimiento esperado para un nivel de riesgo determinado. Cualquier portafolio que se encuentre por debajo de la frontera es subóptimo, ya que existe otro portafolio con el mismo riesgo pero mayor rendimiento, o con el mismo rendimiento pero menor riesgo.

La construcción de esta frontera se basa en la optimización de Markowitz. Para ello, se utilizan los rendimientos esperados anualizados y la matriz de varianza - covarianza de los diez activos seleccionados. Con el fin de obtener una estimación más robusta y estable de la covarianza, se aplica una técnica de “encogimiento” (shrinkage), como recomienda la documentación de la librería.

3.3.2 Curvas de Indiferencia

Una vez definida la Frontera Eficiente, el siguiente paso es seleccionar un único portafolio óptimo para cada perfil de inversor. Esta selección se realiza encontrando el punto de la frontera que maximiza la función de utilidad particular de cada inversor.

Las **curvas de indiferencia** representan todas las combinaciones de riesgo (σ) y rendimiento ($E[R]$) que le reportan a un inversor un nivel de utilidad constante. Para cada perfil (Conservador, Moderado y

Agresivo), estas curvas tendrán una forma distinta, determinada por su función de utilidad específica (cuadrática, logarítmica y exponencial, respectivamente).

El portafolio óptimo se encuentra en el **punto de tangencia** entre la Frontera Eficiente y la curva de indiferencia más alta posible que un inversor puede alcanzar. Este punto representa la cartera que ofrece la mejor combinación posible de riesgo y retorno, alineada perfectamente con las preferencias de ese inversor.

El proceso de optimización se realiza numéricamente, resolviendo el siguiente problema para cada perfil:

$$\max_w U(E[R_p], \sigma_p)$$

Sujeto al Portafolio p , definido por los pesos w , pertenezca a la Frontera Eficiente. El resultado de esta maximización es un vector de pesos óptimos que define la composición exacta de la cartera recomendada para cada perfil de riesgo.

4 Resultados

4.1 Descripción de los datos

Usando la librería *yfinance* descargamos el desempeño diario en el mercado de las 10 acciones establecidas en la sección 3.1 desde el 1 de junio del 2020 hasta el 31 de mayo del 2025. Siguiendo las instrucciones de la librería nos quedamos con los valores “Close” de las acciones.

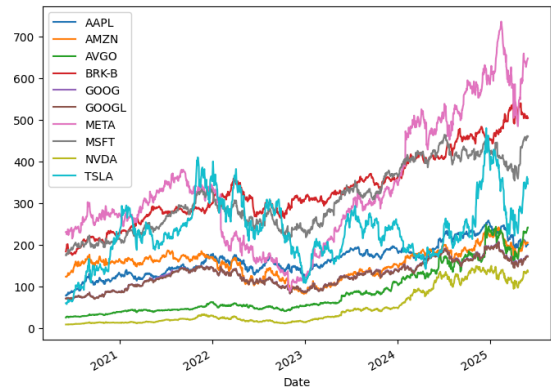


Fig 4.1 Desempeño diario de los activos 01/06/2020 a 31/05/2025

4.2 Procesamiento de los datos

Se calcula el rendimiento logarítmico de cada activo usando la fórmula establecida en la sección anterior.

Con estos se calcula el rendimiento anual esperado de cada activo.

Activo	Rend. Esperado Anual
AAPL	0.189220
AMZN	0.101602
AVGO	0.451352
BRK-B	0.202329
GOOG	0.177800
GOOGL	0.176090
META	0.206948
MSFT	0.193869
NVDA	0.548632
TSLA	0.352225

Se calculan a su vez usando la librería *PyPortfolioOpt* especificando que deseamos los rendimientos logarítmicos y media aritmética, y llegamos a los mismos resultados.

Se procede a calcular la matriz de Varianza - Covarianza, y evaluamos el riesgo anual de cada acción.

Activo	Riesgo Anual
AAPL	0.299609
AMZN	0.357168
AVGO	0.403000
BRK-B	0.182963
GOOG	0.310662
GOOGL	0.311347
META	0.445435
MSFT	0.271241
NVDA	0.526478
TSLA	0.638103

Tabla 4.2 Riesgo Anual de los Activos

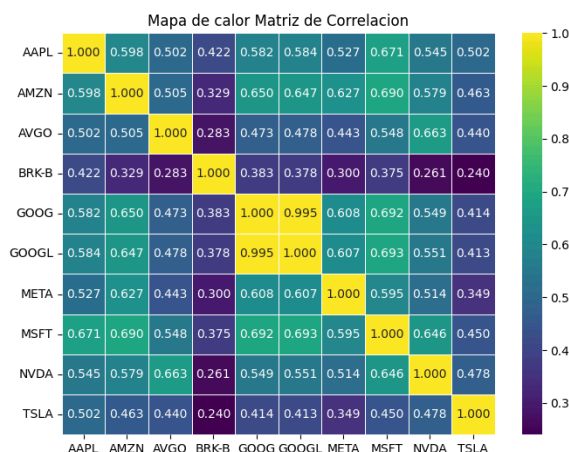


Fig 4.2 Mapa de Calor Matriz de Correlación

Se puede apreciar que BRK-B es el activo con el menor riesgo y TSLA el de mayor riesgo, de aproximadamente 64%. Se procede a calcular la matriz de correlaciones y hacer un gráfico de esta. En el que se puede apreciar que GOOG y GOOGL posee una correlación de 0.995, lo cual tiene sentido dado que estas acciones son de la misma empresa pero la diferencia es que GOOGL (Clase A) posee derecho de voto y GOOG (Clase C) no. El activo BRK-B es el que menos se correlaciona con los demás, lo cual se debe a ser un activo de un sector diferente (Finanzas) al de los otros evaluados, (Tecnología y Servicios de Comunicación).

Por recomendación de la documentación de *PyPortfolioOpt* se utiliza el “encogimiento” de la covarianza para obtener una mejor estimación de la matriz.

4.3 Frontera Eficiente

Tal como se hizo en el proyecto I, se utilizara la librería *PyPortfolioOpt* para graficar la Frontera Eficiente con los activos, sin permitir ventas en corto.

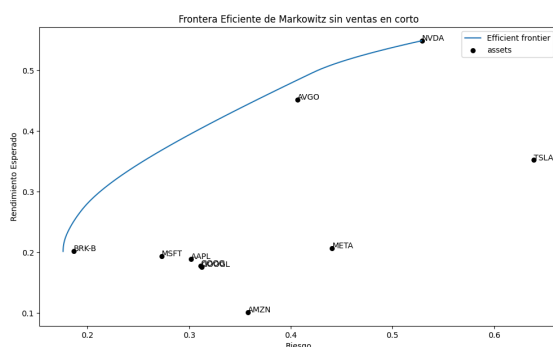


Fig 4.3 Gráfico Frontera Eficiente con activos

Luego, buscamos cuales serian el GMVP y el Portafolio de Tangencia

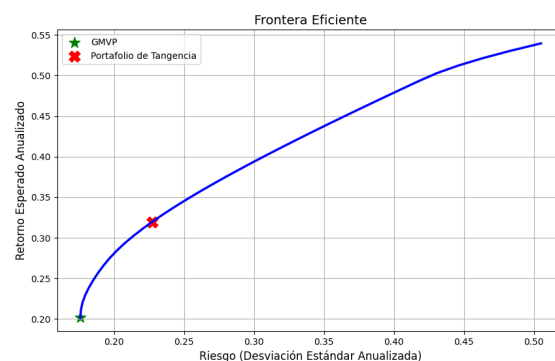


Fig 4.4 Grafico Frontera Eficiente con GMVP y MRSP.

4.4. Funciones de Utilidad y Optimización por perfil

Encontrando el portafolio óptimo para cada perfil, llegamos a los siguientes resultados:

	Perfil	Retorno	Riesgo
Cuadratic	$A = 6$	0.311	0.220
Log	$\gamma = 5$	0.403	0.310
Exp	$\gamma = 1$	0.521	0.463

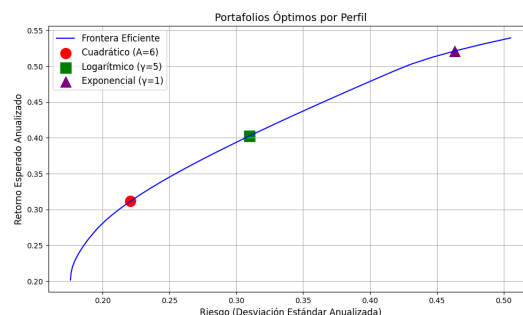


Fig 4.5 Frontera Eficiente con Portafolios Óptimos

Podemos ver que los portafolios se ajustan a lo que esperamos de cada utilidad: conservador, moderado y agresivo, respectivamente.

Luego, los pesos asociados a cada perfil son los siguientes:

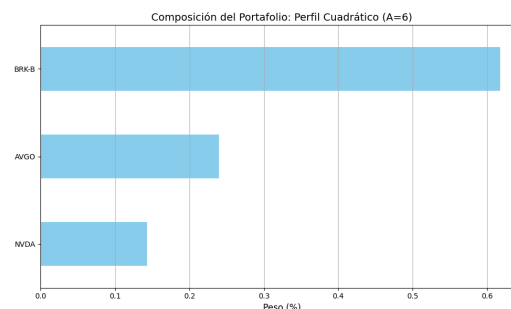


Fig 4.6 Pesos Portafolio Perfil Cuadrático.

Tenemos que para nuestro perfil Cuadrático con un coeficiente de aversión al riesgo igual a 6 para que



sea del tipo conservador, se recomienda invertir un poco más del 60% en el activo BRK-B, que es el activo más “seguro”, dado que posee el menor riesgo y la menor correlación con el resto de los activos, cerca del 25% en AVGO y cerca de un 15% en NVDA.

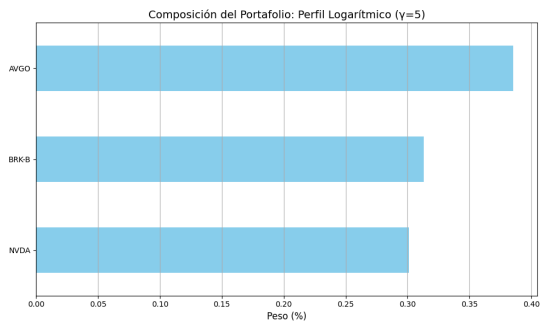


Fig 4.7 Pesos Portafolio Perfil Logarítmico.

Para nuestro perfil Logarítmico se tiene que se recomienda invertir un 30% en NVDA, aprox. 32% en BRK-B y aprox. 38% en AVGO. Esto es para un inversor moderado.

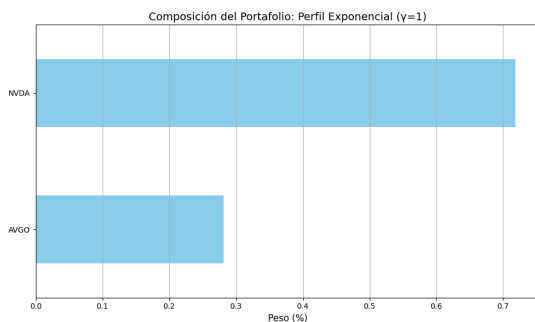


Fig 4.8 Pesos Portafolio Perfil Exponencial.

Por último, para el perfil exponencial que representa un inversor agresivo por el coeficiente elegido, se tiene que recomienda invertir aprox. 72% en NVDA y 28% en AVGO, recordemos que NVDA es uno de los activos con el riesgo más alto (0.526) pero con el mayor rendimiento esperado (0.549).

4.5 Curvas de Indiferencia

Procedemos a encontrar las curvas de indiferencia para cada perfil. Notemos que para el Perfil Cuadrático la curva en la que se encuentra el portafolio óptimo, es la curva $U = 0.165$

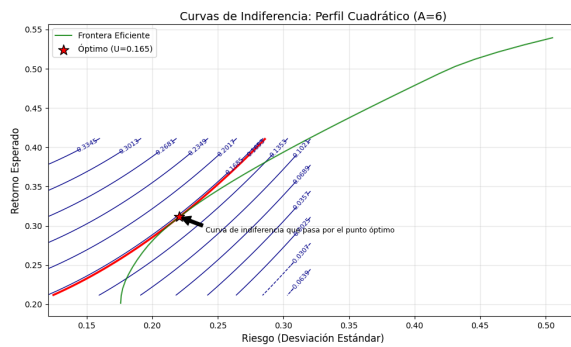


Fig 4.9 Gráfico Curvas de Indiferencia Perfil Cuadrático

Para el perfil Logarítmico, se tiene que el portafolio óptimo está en la curva $U=0.216$

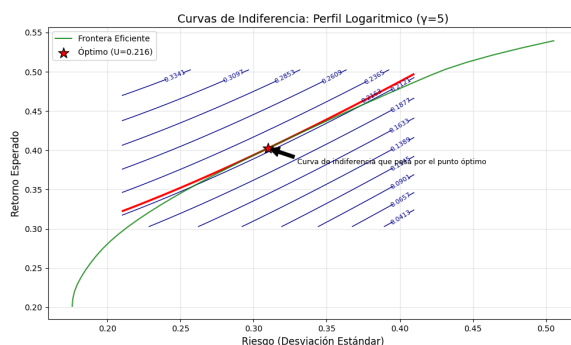


Fig 4.10 Gráfico Curvas de Indiferencia Perfil Logarítmico

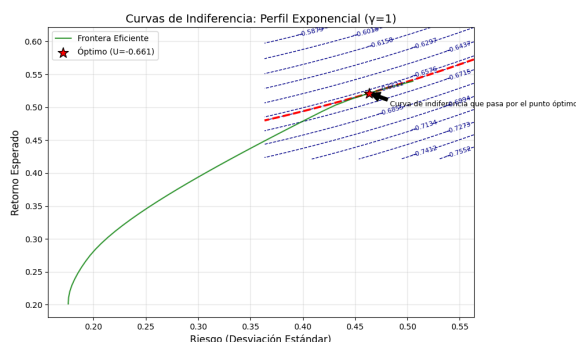


Fig 4.11 Gráfico Curvas de Indiferencia Perfil Exponencial

Por último, la curva de indiferencia para el perfil 3 (exponencial) es $U = -0.661$

Las curvas de indiferencia muestran convexidad creciente con el riesgo, consistente con aversión al riesgo. Los portafolios óptimos se ubican en puntos de tangencia entre curvas de indiferencia y frontera eficiente. Además, la secuencia conservador-moderado-agresivo muestra desplazamiento noreste en el espacio riesgo-retorno

5 Conclusiones

Este proyecto ha demostrado como la integración de la teoría de utilidad con la optimización de portafolios permite construir carteras personalizadas

que reflejan las preferencias de riesgo de diferentes tipos de inversores. Los principales hallazgos son:

1. Personalización efectiva de portafolios

- Perfil conservador (Cuadrático): 60% BRK-B + 25% AVGO + 15% NVDA
- Perfil moderado (logarítmico): 30% NVDA + 32% BRK-B + 38% AVGO
- Perfil agresivo (exponencial): 72% NVDA + 28% AVGO

2. Validación teórico-práctica

- Las curvas de indiferencia mostraron convexidad creciente con el riesgo.
- Los puntos óptimos se ubicaron en tangencias con la frontera eficiente.
- La secuencia conservador → moderado → agresivo mostró desplazamiento noreste en el espacio riesgo-retorno

3. Patrón de asignación consistente

- BRK-B aparece en portafolios conservadores y moderados por su baja correlación (0.2-0.4)
- NVDA domina en perfiles agresivos por su alto retorno (54.8%) aunque con elevada volatilidad (52.6%)

En conclusión, la metodología presentada provee un marco robusto para personalizar portafolios según preferencias de riesgo. Los resultados validan que:

- Inversores conservadores le dan prioridad a la preservación de capital (BRK-B).
- Inversores moderados buscan equilibrio (combinación BRK-B + NVDA).
- Inversores agresivos maximizan crecimiento (NVDA + AVGO).

Apéndice

Notebook del código en Python en Google Colab:

[Proyecto2_CO5516_Rafael_Garcia.ipynb](#)

Referencias

- [1] Gonzalez, T. Teoría de Portafolios: Un Enfoque Cuantitativo para la Gestión de Inversiones
- [2] Gonzalez, T. Modelos de Evaluación de Activos de Capital.
- [3] PyPortfolioOpt Documentation - <https://pyportfolioopt.readthedocs.io/en/latest/>
- [4] Bono de Estados Unidos a 10 años - <https://datosmacro.expansion.com/bono/usa>
- [5] Gonzalez, T. Función de Utilidad y su uso en la Selección de Portafolios Óptimos.