



Proyecto I

Construcción y Análisis de la Frontera Eficiente y Validación del CAPM

Rafael Enrique García Sánchez

Resumen

Este proyecto aplica los conceptos fundamentales de la teoría de portafolios de Markowitz y el Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM) utilizando datos históricos reales. Se realiza un análisis de las diez acciones más relevantes del índice S&P 500, recolectando sus datos históricos de precios de los últimos cinco años para calcular sus rendimientos logarítmicos, estimar el vector de rendimientos esperados y la matriz de varianza-covarianza. Posteriormente, se construye la Frontera Eficiente de Markowitz y se identifica el Portafolio de Mínima Varianza Global (MVP). Asumiendo el bono del Tesoro de EE. UU. como proxy del activo libre de riesgo, se determina la Línea de Mercado de Capitales (CML) y el Portafolio de Tangencia. Se calculan los Betas (β) de cada acción respecto al índice S&P 500 (proxy del Portafolio de Mercado) para luego graficar la Línea de Mercado de Valores (SML) teórica. Por último, se comparan los rendimientos esperados históricos con los predichos por el CAPM (SML) y se calculan las Alfas de Jensen, con el fin de discutir si el CAPM se valida para estos activos.

Abstract

This project applies the fundamental concepts of Markowitz portfolio theory and the Capital Asset Pricing Model (CAPM) using real historical data. An analysis is conducted on the ten most influential stocks of the S&P 500 index, collecting their historical price data over the past five years to calculate their logarithmic returns, estimate the expected return vector, and the variance-covariance matrix. Subsequently, the Markowitz Efficient Frontier is constructed, and the Global Minimum Variance Portfolio (MVP) is identified. Assuming U.S. Treasury bonds as a proxy for the risk-free asset, the Capital Market Line (CML) and the Tangency Portfolio are determined. Betas (β) for each stock are calculated with respect to the S&P 500 index (as a proxy for the Market Portfolio), and the theoretical Security Market Line (SML) is then plotted. Finally, historical expected returns are compared with those predicted by the CAPM (SML), and Jensen's Alphas are calculated, in order to discuss whether the CAPM is validated for these assets.

1 Introducción

En el ámbito de las finanzas modernas, la optimización de portafolios y la evaluación de activos son pilares fundamentales para la toma de decisiones de inversión informadas. Este proyecto se enfoca en la aplicación práctica de dos modelos fundamentales en la teoría financiera: el modelo de **Markowitz** y el **Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM)**. Desarrollados por Harry Markowitz en la década de 1950 [1] y William Sharpe, John Lintner y Jan Mossin en la década de 1960 [2], respectivamente, estos marcos teóricos proporcionan

herramientas robustas para entender la relación entre riesgo y rendimiento en los mercados financieros.

El objetivo principal de este trabajo es aplicar estos conceptos teóricos a un conjunto de datos históricos reales. Para ello, se analizarán las diez acciones más influyentes del índice S&P 500, (Microsoft, Nvidia, Apple, Amazon, Meta Platforms, Broadcom Inc., Alphabet A, Tesla, Berkshire Hathaway B y Alphabet C), un referente clave del mercado de valores estadounidense, y se utilizará el bono del Tesoro de EE.UU. como proxy para el activo libre de riesgo. A través de este análisis empírico, el proyecto buscará

construir la **Frontera Eficiente de Markowitz** para un portafolio compuesto únicamente por activos riesgosos, identificando el **Portafolio de Mínima Varianza Global (MVP)**. Posteriormente, se incorporará la tasa libre de riesgo para determinar la **Línea de Mercado de Capitales (CML)** y el **Portafolio de Tangencia**, que representan las combinaciones óptimas de riesgo y rendimientos cuando se considera la posibilidad de invertir en un activo libre de riesgo.

Finalmente, se procederá a calcular los **Betas (β)** individuales de cada acción respecto al S&P 500, que actuará como proxy del portafolio de mercado. Esto permitirá la construcción y graficación de la **Línea de Mercado de Valores (SML)** teórica, una representación gráfica del CAPM. El proyecto culminará con una comparación crítica entre los rendimientos esperados históricos de las acciones y aquellos predichos por el CAPM, calculando las **Alfas de Jensen** para evaluar el desempeño de los activos y discutir la validez del modelo CAPM para este conjunto de acciones en particular. Este enfoque práctico no solo permitirá la comprensión y aplicación de los modelos, sino que también ofrecerá una perspectiva sobre su relevancia en el entorno financiero actual.

2 Problema

En el complejo y dinámico mundo de las finanzas, la gestión eficiente de portafolios de inversión y la valoración precisa de activos son desafíos constantes para inversores y analistas. La búsqueda de la combinación óptima entre riesgo y rendimiento ha impulsado el desarrollo de diversos modelos teóricos. Entre ellos, **Teoría Moderna de Portafolios (TMP)** de Markowitz y el **Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM)** se erigen como pilares fundamentales, proporcionando marcos conceptuales para entender cómo los inversores deben construir sus carteras y cómo se determina el rendimiento esperado de un activo en función de su riesgo sistemático.

2.1 Objetivos del proyecto

- Construir y analizar la Frontera Eficiente de Markowitz utilizando datos históricos reales de un conjunto específico de acciones
- Encontrar un Portafolio de Mínima Varianza (MVP) y un Portafolio de Tangencia que optimicen la relación riesgo - rendimiento bajo las condiciones del mercado actual.
- Comparar los rendimientos históricos observados de los activos con los rendimientos predichos por el CAPM, y ver las implicaciones de estos para la validación del modelo en el conjunto de activos estudiado.

Para ello se realizará un análisis detallado de las diez acciones más influyentes del índice S&P 500 durante los últimos cinco años, utilizando los bonos del Tesoro de EE. UU. como proxy del activo libre de riesgo y el propio S&P 500 como proxy del portafolio de mercado. El estudio empírico buscará proporcionar una comprensión práctica de la aplicación de la TMP y el CAPM, así como una evaluación de su relevancia y limitaciones en un escenario de inversión real.

3 Metodología

3.1 Descripción de los datos

Se seleccionan los 10 activos más relevantes del S&P 500 por su peso en el índice. Estos son:

- **Microsoft Corp - MSFT**
- **Nvidia Corp - NVDA**
- **Apple Inc. - AAPL**
- **Amazon.com Inc - AMZN**
- **Meta Platforms, Inc. Class A - META**
- **Broadcom Inc - AVGO**
- **Alphabet Inc A - GOOGL**
- **Tesla Inc - TSLA**
- **Berkshire Hathaway B - BRK-B**
- **Alphabet Inc C - GOOG**

Donde se recolecta los datos de estas acciones los últimos 5 años de *Yahoo Finance*, del 01/06/2020 al 31/05/2025 para la evaluación de sus rendimientos. El proxy del activo libre de Riesgo será los bonos del Tesoro de EE.UU, cuyo rendimiento se aproxima a 4.4%; el rendimiento del bono del Tesoro a 10 años fue de 4.21 % en 2024 y se sitúa en aproximadamente 4.38 % a mediados de 2025, según datos de MacroTrends y la Reserva Federal. Por último, el índice S&P500 será el índice de mercado de este proyecto.

3.2 Metodología de Cálculo

Se calcula los rendimientos logarítmicos de las acciones:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

donde ,

r_t : Es el Rendimiento logarítmico en el periodo t

P_t : Es el precio del activo al final del periodo t

P_{t-1} : Es el precio del activo al final del periodo t-1

Se decide utilizar los rendimientos logarítmicos en vez de los simples por las ventajas de ser aditivos en



el tiempo y sus distribuciones tienden a aproximarse mejor a la normalidad [1].

El vector de rendimientos esperados se obtiene de la media de los rendimientos logarítmicos previamente calculados multiplicado por los 252 días de un año financiero.

La matriz de Varianza-Covarianza se obtiene calculando la varianza muestral de los activos:

$$S_i^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{j=1}^T (r_{ij} - \bar{r}_i)^2$$

Y la covarianza muestral entre cada activo:

$$S_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{k=1}^T (r_{ik} - \bar{r}_i) (r_{jk} - \bar{r}_j)$$

donde, \bar{r}_i representa el rendimiento medio del activo i.

3.2.1 Optimización de Portafolios (Markowitz)

- **Frontera Eficiente de Markowitz:** Se computará mediante un proceso de optimización que identifica portafolios con la máxima rentabilidad esperada para un nivel de riesgo dado o el mínimo riesgo para una rentabilidad esperada dada. Esta optimización se centrará sólo en los activos riesgosos (por definición del modelo [1]). Los pesos de los activos en cada portafolio en la frontera eficiente se determinan utilizando el código de Python.
- **Portafolio de Mínima Varianza Global (MVP):** Dentro de la frontera eficiente, se identificará el MVP como el portafolio con la menor desviación estándar posible [1].

Se puede encontrar resolviendo el siguiente problema de Optimización:

$$\min_w \sigma_p^2 = W^T \Sigma W$$

s.a

1. $W^T \mathbf{1} = 1$
2. (Opcional) $w_i \geq 0$

Donde, W es el vector de pesos y Σ es la matriz Varianza-Covarianza.

La solución analítica para el GMVP (sin restricción de ventas en corto) es:

$$w_{GMVP} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$$

Donde Σ^{-1} es la inversa de la matriz VCV.

3.2.2 Integración del Activo Libre de Riesgo y el CAPM

Asumiendo al activo libre de riesgo como el rendimiento anual esperado de los bonos del Tesoro de EE.UU , se trazará la CML, la cual representa las combinaciones óptimas de portafolios que mezclan el activo libre de riesgo con portafolios riesgosos. El portafolio de Tangencia será el punto en la frontera eficiente donde la CML es tangente y con el índice de Sharpe más alto [2], representando el portafolio de activos riesgosos más eficiente en términos de la relación riesgo-rendimiento.

Se calcularán los Betas (β) de cada acción utilizando el hecho de que:

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$$

donde $i \in [MSFT, NVDA, APPL, \dots, GOOG]$

R_i representa el rendimiento de cada acción, R_M es el rendimiento del mercado y σ_M^2 la varianza de este.

Además, se graficará la SML teórica utilizando los Betas calculados y la ecuación del CAPM, mostrando la relación lineal esperada entre el rendimiento y el riesgo sistemático.

3.2.3 Validación del CAPM y Cálculo de los Alfas de Jensen

Por último, se comparan los rendimientos esperados históricos de cada acción con los rendimientos predichos por el CAPM para esas acciones. En dicho proceso, se calculan además los Alfas de Jensen, viendo la diferencia entre ellos o expresado matemáticamente:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= E[R_{i,obs}] - (R_f + \beta_i(E[R_M] - R_f)) \\ &= E[R_{i,obs}] - E[R_{i,CAPM}] \end{aligned}$$

3.3 Herramientas y Software

Se utilizará el lenguaje de programación Python para este proyecto gracias a su versatilidad y gran cantidad de librerías que posee para diferentes áreas. Para este análisis se utilizaron las librerías *numpy*, *pandas*, *matplotlib*, *sns*, *PyPortfolioOpt*, *yfinance*. La librería *PyPortfolioOpt* es una librería específica para la

optimización de portafolios e *yfinance* es una librería para descargar los datos directamente de *Yahoo Finance*.

4 Resultados

4.1 Descripción de los datos

Usando la librería *yfinance* descargamos el desempeño diario en el mercado de las 10 acciones establecidas en la sección 3.1 desde el 1 de junio del 2020 hasta el 31 de mayo del 2025. Siguiendo las instrucciones de la librería nos quedamos con los valores “Close” de las acciones.

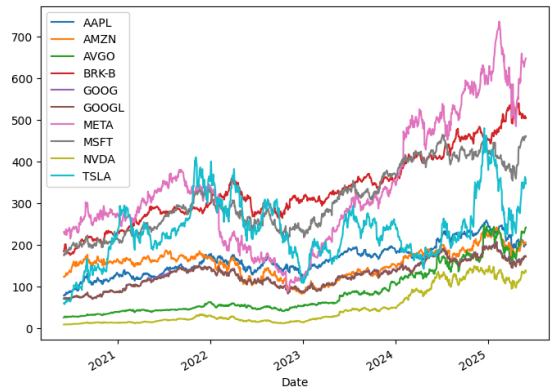


Fig 4.1 Desempeño diario de los activos 01/06/2020 a 31/05/2025

4.2 Procesamiento de los datos

Se calcula el rendimiento logarítmico de cada activo usando la fórmula establecida en la sección anterior.

Con estos se calcula el rendimiento anual esperado de cada activo.

Activo	Rend. Esperado Anual
AAPL	0.189220
AMZN	0.101602
AVGO	0.451352
BRK-B	0.202329
GOOG	0.177800
GOOGL	0.176090
META	0.206948
MSFT	0.193869
NVDA	0.548632
TSLA	0.352225

Se calculan a su vez usando la librería *PyPortfolioOpt* especificando que deseamos los rendimientos logarítmicos y media aritmética, y llegamos a los mismos resultados.

Se procede a calcular la matriz de Varianza - Covarianza, y evaluamos el riesgo anual de cada acción.

Activo	Riesgo Anual
AAPL	0.299609
AMZN	0.357168
AVGO	0.403000
BRK-B	0.182963
GOOG	0.310662
GOOGL	0.311347
META	0.445435
MSFT	0.271241
NVDA	0.526478
TSLA	0.638103

Tabla 4.2 Riesgo Anual de los Activos

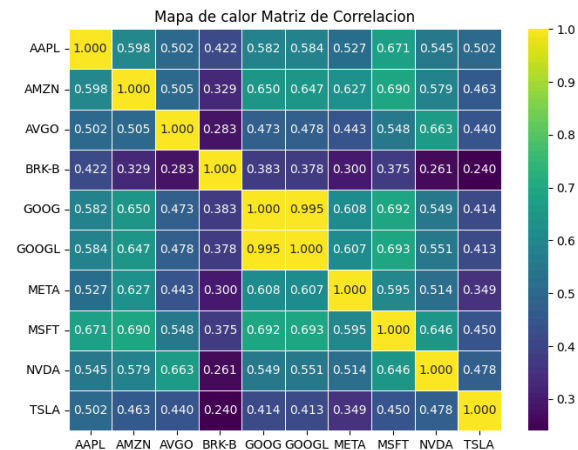


Fig 4.2 Mapa de Calor Matriz de Correlación

Se puede apreciar que BRK-B es el activo con el menor riesgo y TSLA el de mayor riesgo, de aproximadamente 64%. Se procede a calcular la matriz de correlaciones y hacer un gráfico de esta. En el que se puede apreciar que GOOG y GOOGL posee una correlación de 0.995, lo cual tiene sentido dado que estas acciones son de la misma empresa pero la diferencia es que GOOGL (Clase A) posee derecho de voto y GOOG (Clase C) no. El activo BRK-B es el que menos se correlaciona con los demás, lo cual se debe a ser un activo de un sector diferente (Finanzas)

al de los otros evaluados, (Tecnología y Servicios de Comunicación).

Por recomendación de la documentación de *PyPortfolioOpt* se utiliza el “encogimiento” de la covarianza para obtener una mejor estimación de la matriz.

4.3 Optimización de Portafolio

A continuación se realiza el análisis de la Frontera Eficiente con solo activos riesgosos. Se hace tanto para el caso sin ventas en corto, donde los pesos $w_i \geq 0$, y el caso donde sí se permite ventas en corto.

4.3.1 Frontera Eficiente sin ventas en corto

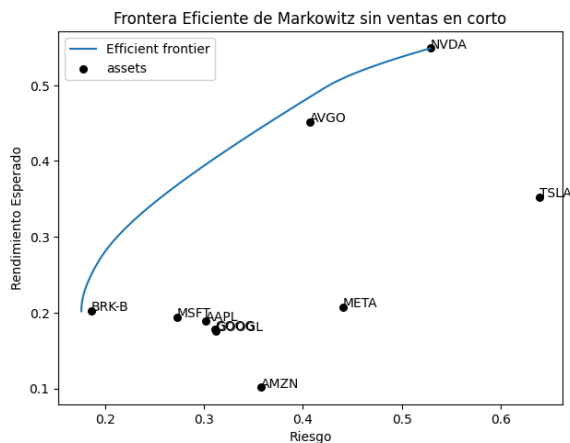


Fig 4.3 Gráfico Frontera Eficiente sin ventas en corto

Donde los pesos para el caso de riesgo mínimo, el GMVP, se distribuyen como se expresa en la gráfica de la Fig 4.4

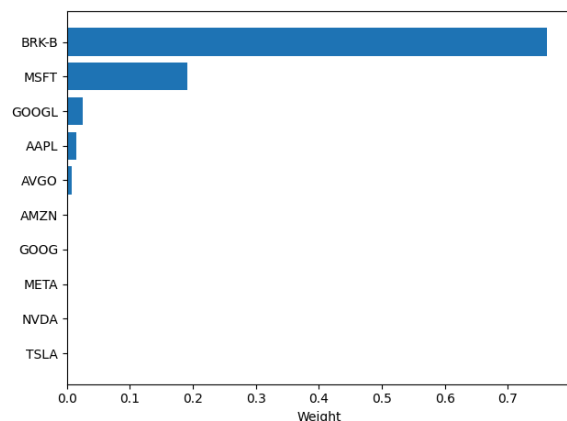


Fig 4.4 Pesos para el riesgo mínimo (GMVP)

Se recomienda que aproximadamente 76% del capital vaya a las acciones de BRK-B, 19% a MSFT y el 6%

restante se divide entre GOOGL (2.5%), AAPL(1.5%) y AVGO (0.75%).

Los pesos para el punto donde se alcanza el índice de Sharpe más alto y donde pasa la recta tangente, la CML, a la Frontera Eficiente se distribuyen como se muestra en la Fig 4.5, donde se recomienda invertir el 59% del capital en el activo BRK-B, 25% en AVGO y aproximadamente 16% en NVDA.

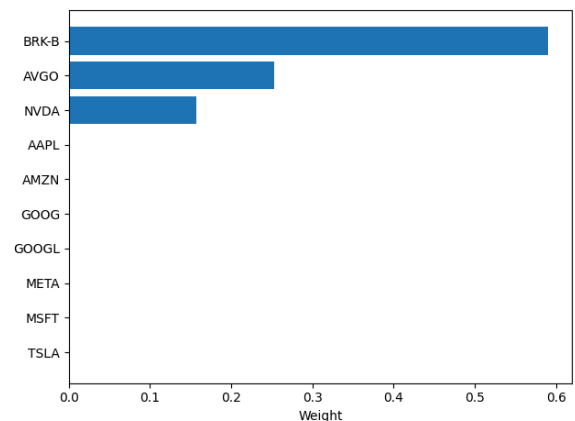


Fig 4.5 Pesos para el Portafolio de Tangencia

Se procede a usar simulación de Monte Carlo para la optimización del Portafolio y conseguir el GMVP (o Mínima Volatilidad/riesgo) y el MSRP (o Portafolio de Tangencia). El GMVP posee un riesgo anual del 17.6% y un rendimiento esperado del 20.2%. Mientras que para el MSRP, el riesgo anual es del 22.7% y un rendimiento esperado del 32%. Se grafica además la Línea de Mercado de Capitales, usando la tasa del proxy del activo libre de riesgo.

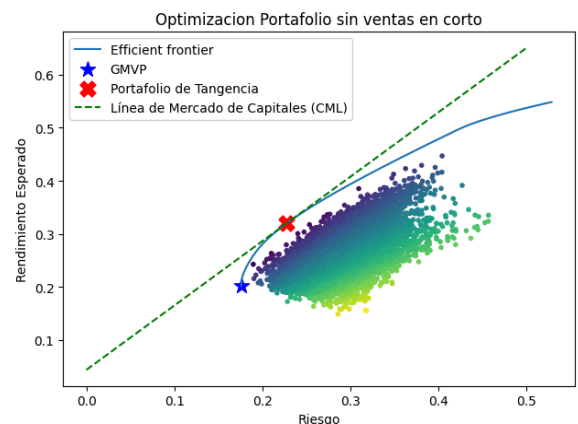


Fig 4.6 Gráfico Simulación Monte Carlo para Optimización de Portafolio sin ventas en corto.

4.3.2 Frontera Eficiente con ventas en corto

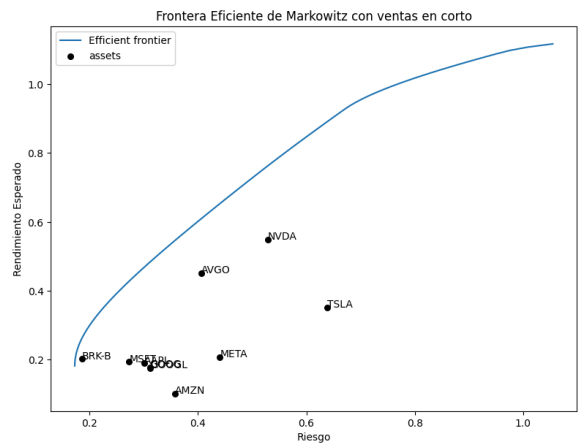


Fig 4.7 Gráfico Frontera Eficiente con ventas en corto

Por la Fig 4.7 se puede apreciar como el uso de ventas en corto cambia la Frontera Eficiente, llegando a extenderse mucho más.

Al igual que para el caso sin ventas en cortos, el principal activo a invertir es BRK-B con 72.5%, seguido de Microsoft con 23.6%, pero ahora tenemos recomendaciones de vender 7.25% de NVDA y 3.33% de META.

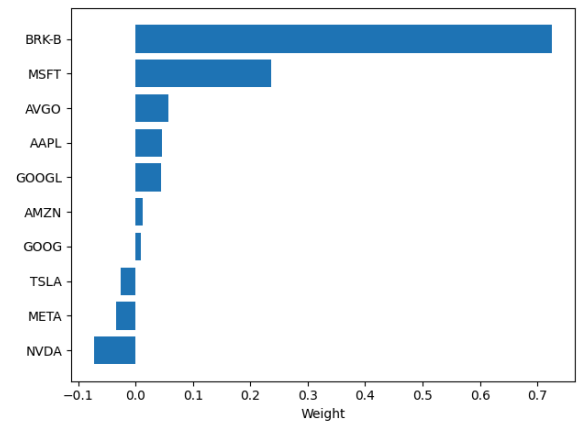


Fig. 4.8 Pesos para el riesgo mínimo (GMVP)

Para el portafolio de Tangencia se recomienda invertir el 89.3% en BRK-B, 38.6% en AVGO, 34% en Nvidia y vender 51.26% de acciones de AMZN, cerca del 19% de GOOGL y 12% de AAPL.

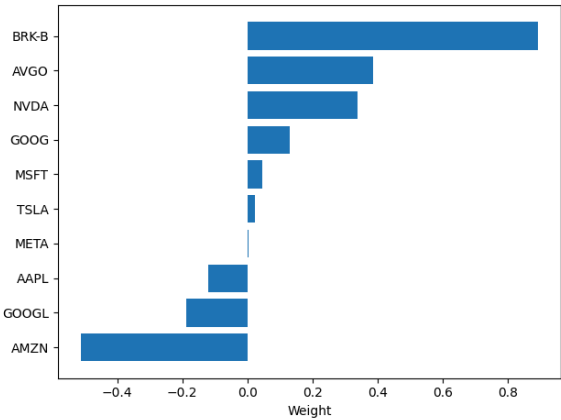


Fig. 4.9 Pesos para el Portafolio de Tangencia

Los resultados de la evaluación de los portafolios es:

Para el portafolio de riesgo mínimo se tiene un riesgo anual de 17.3% y un rendimiento esperado de 18.2%. Mientras que para el Portafolio de Tangencia se espera un riesgo de 30.5% y un rendimiento esperado de 47.4%, además se tiene un ratio de Sharpe de 1.41. Se puede ver que el permitir las ventas en corto puede hacer que se llegue a un portafolio con mayor rendimiento pero con un mayor riesgo también.

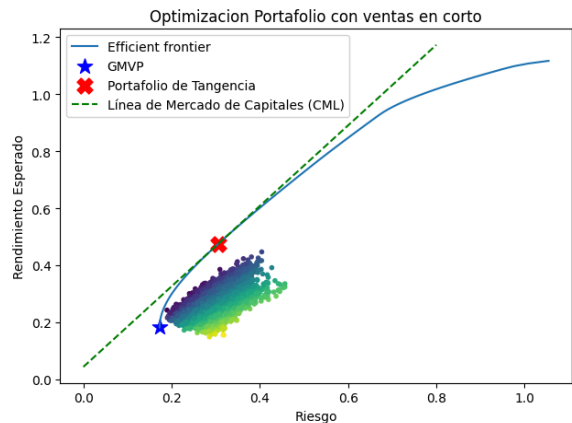
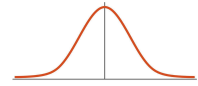


Fig 4.10 Gráfico Simulación Monte Carlo para Optimización de Portafolio con ventas en corto.

4.4 Evaluación del CAPM

Se descarga la información del índice S&P 500 en el mismo periodo de tiempo que el usado para los activos, para así calcular el rendimiento esperado, varianza y desviación estándar anual del mercado.

Índice S&P 500 (M)	Valor (Anual)
Rend. Esperado	0.132403
Varianza	0.031655
Desv. Estándar	0.177919



Se procede a calcular los rendimientos según el CAPM

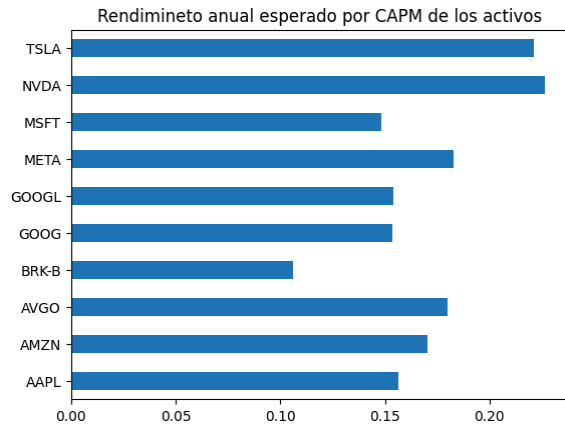


Fig 4. 11 Rendimiento anual esperado de cada activo según el CAPM

Luego, utilizando estos datos se calculan los Betas (β) de los activos.

Activo	Beta (β)
AAPL	1.271196
AMZN	1.431613
AVGO	1.536423
BRK-B	0.702718
GOOG	1.242004
GOOGL	1.243884
META	1.568493
MSFT	1.177536
NVDA	2.064227
TSLA	2.002545

Se puede observar que a excepción de BRK-B todos los β son mayores a 1, es decir son activos más volátiles que el mercado, poseen un mayor riesgo sistemático que el mercado. Activos como NVDA y TSLA son altamente volátiles con betas mayores a 2. Mientras que BRK-B es un activo defensivo que posee un menor riesgo sistemático.

La Línea de Mercado de Valores (SML)

$$E[R_i] = R_f + B_i(E[R_m] - R_f)$$

se puede apreciar en la Fig 4.12

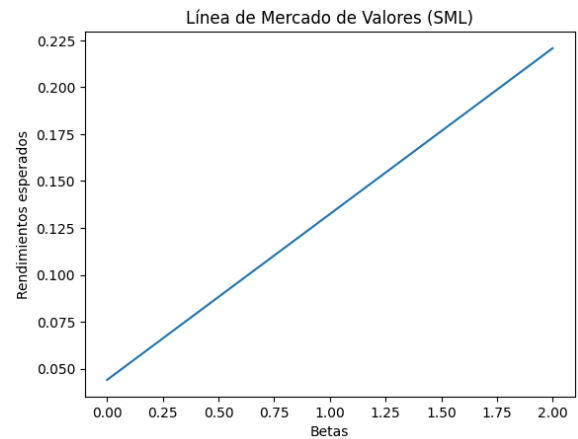


Fig 4.12 Gráfica de la SML

Por último, se busca los Alfas de Jensen calculando la diferencia entre los rendimientos calculados en la sección 4.2 y los obtenidos según el CAPM. Se obtiene que:

Activo	Alfas (α)
AAPL	0.032842
AMZN	-0.068957
AVGO	0.271528
BRK-B	0.096206
GOOG	0.024004
GOOGL	0.022127
META	0.024289
MSFT	0.045772
NVDA	0.322149

TSLA	0.131194
------	----------

Se tiene que todos los activos con a excepción de AMZN están infravalorados, con un rendimiento promedio superior al predicho por el CAPM, en donde destacan NVDA, AVGO y TSLA con 0.32, 0.27 y 0.13 respectivamente, por encima de lo predicho. De manera que no podemos decir que CAPM se valida para estos activos.

5 Conclusiones

En este proyecto se aplicaron de forma práctica los modelos de Markowitz y CAPM al análisis de un portafolio compuesto por las diez acciones más influyentes del índice S&P 500. Se construyó la Frontera Eficiente considerando escenarios con y sin ventas en corto, identificando los portafolios de mínima varianza y de tangencia en ambos casos. Donde en todos los casos se recomendó invertir principalmente en BRK-B, dado que al ser el activo que menos se correlaciona con los demás, es el ideal para nuestra diversificación de portafolios. Se observó que permitir ventas en corto puede mejorar el rendimiento esperado, aunque a costa de asumir mayores riesgos.

Al evaluar el CAPM, se encontró que la mayoría de los activos son volátiles, con la excepción de BRK-B. Además, presentan alfas de Jensen positivos, lo cual indica que sus rendimientos históricos superaron las predicciones del modelo. Este resultado sugiere que, para este conjunto de activos y período analizado, el CAPM **no se valida completamente**, especialmente en el caso de acciones como NVDA y AVGO.

En general, el análisis realizado demuestra la utilidad de la teoría de portafolios de Markowitz como una herramienta fundamental para la construcción y optimización de portafolios, permitiendo a los inversores identificar combinaciones óptimas de riesgo y rendimiento. Sin embargo, también resalta la **necesidad de considerar las limitaciones inherentes del modelo CAPM** al aplicarlo en contextos reales, ya que sus supuestos pueden no reflejar fielmente las complejidades y anomalías del mercado. Este estudio subraya la importancia de un análisis continuo y crítico de los modelos financieros en la toma de decisiones de inversión.

Apéndice

Notebook del código en Python en Google Colab:

https://colab.research.google.com/drive/1BFc7j9gZV-zKWULYx3CkC2g8_fQc6l1L?usp=sharing

Referencias

[1] Gonzalez, T. Teoría de Portafolios: Un Enfoque Cuantitativo para la Gestión de Inversiones

[2] Gonzalez, T. Modelos de Evaluación de Activos de Capital.

[3] PyPortfolioOpt Documentation - <https://pyportfolioopt.readthedocs.io/en/latest/>

[4] Bono de Estados Unidos a 10 años - <https://datosmacro.expansion.com/bono/usa>

[5] Rendimiento del Bono del Tesoro a 10 años de EE.UU <https://es.tradingeconomics.com/united-states/government-bond-yield>