Badanie układu RC - filtra dolnoprzepustowego / układu całkującego.

Rafał Kornel

Abstrakt

Celem niniejszego doświadczenia było zbadanie własności prostego układu całkującego - filtra dolnoprzepustowego. Zbadana została hipoteza głosząca, że układ szeregowy złożony z opornika i kondensatora będzie przepuszczał prąd o małej częstości drgań, oraz że tenże układ dla prądów o częstości znacznie większych od pewnej częstości granicznej na wyjściu będzie zwracał prąd, którego kształt jest zcałkowanym sygnałem wejściowym. Obie hipotezy zostały potwierdzone, ponadto została dopasowana częstość graniczna wynosząca

$$f_k = 1712.63 \pm 5.57 \text{ Hz}.$$

Dla zmierzonych wartości R oraz C policzono wartosć krytyczną częstotliwości, wynosi ona:

$$f_{zm} = 1660.08 \text{ Hz}.$$

Udało się również policzyć współczynnik RC, pojawiający się w modelu teoretycznym. Wynosi on

$$RC_\alpha = 92.93 \pm 0.19 \ \mu\text{s}.$$

Wstęp teoretyczny

Filtr dolnoprzepustowy jest to element obwodu elektryczny prądu zmiennego, który posiada pewne specjalne cechy. Filtr ten przyjmuje prąd wejściowy, U_{in}, oraz zwraca na wyjściu prąd U_{out}. W zależności od częstości prądu wejściowego ω, filtr ten może:

- Dla $\omega < \omega_k$, gdzie ω_k jest pewną wartością krytyczną, filtr przepuści prąd prawie niezmieniony, tzn $\frac{U_{out}}{U_{in}} \sim 1$.
- Dla $\omega >> \omega_k$ układ zwróci prąd o znacznie mniejszej amplitudzie (tzn $\frac{U_{out}}{U_{in}} << 1$), zaś kształt prądu wyjściowego U_{out} będzie wyglądał jak zróżniczkowany prąd wejściowy U_{in}.

Układ taki jest realizowany poprzez szeregowe połaczenie opornika R oraz kondensatora C w sposób pokazany na rys 1.

Do badania powyższego układu wprowadza się pojęcie transmitancji. Jest ona zdefiniowana następująco:

$$\alpha = |\frac{U_{out}}{U_{in}}|$$

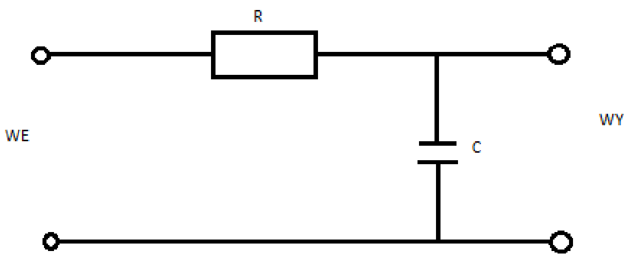
W ogólności, ułamek pod modułem będzie liczbą zespoloną. Wtedy jego moduł odpowiada transmitancji, a argument (faza) przesunięciu fazowemu prądu wyjściowego. Dla naszego układu transmitancja będzie dana wzorem:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}, \tag{1}$$

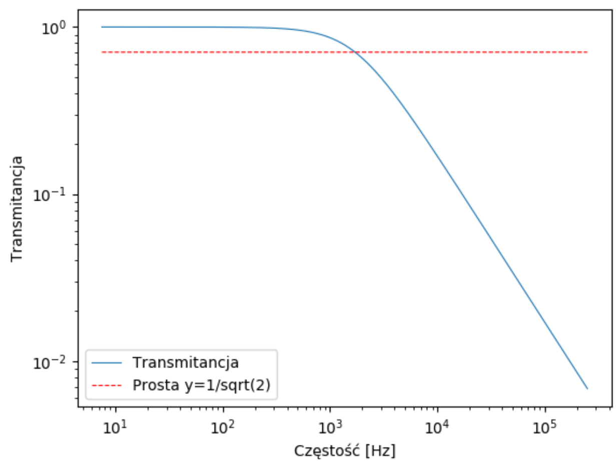
zaś przesuniecie fazowe:

$$\phi = arctg(-\omega RC). \tag{2}$$

Dla filtru dolnoprzepustowego wybiera się pewną graniczną częstość ω_k, dla której transmitancja przyjmuje wartość $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Obrazuje to Rys. 2. Widać na nim, że dla częstości mniejszych niż



Rys. 1: Schematyczny rysunek przedstawiający układ realizujący filtr dolnoprzepustowy.



Rys. 2: Wykres przedstawiający charakterystykę amplitudową oraz prostą y $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

częstość graniczna, współczynnik α jest blisko wartości 1.
Aby wyznaczyć wartość krytyczną częstości musimy odwrócić wzór (1), tzn wyznaczyć $\omega(\alpha)$. Zależność tak wygląda następująco:

$$\omega(\alpha) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha RC},$$

a następnie wstawiając $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ otrzymujemy:

$$\omega_k = \frac{1}{RC} \tag{3}$$

Nazwa filtr dolnoprzepustowy wynika właśnie z tego, iż prądy o częstościach "dolnych" - tj. mniejszych od częstości granicznej są dobrze przepuszczane, zaś te o częstościach wyższych są silnie tłumione. Z rozwiązania równań Kirkchoffa wynika również, iż napięcie wyjściowe dane będzie następującym wzorem:

$$U_{out}(t) = \frac{1}{RC}\int (U_{in}(t) - U_{out}(t))dt,$$

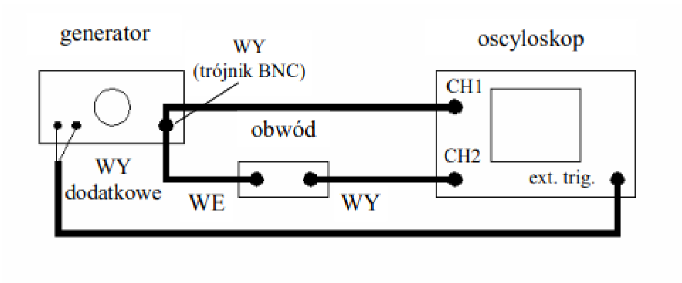
a zatem dla $U_{out} \ll 1$ otrzymujemy

$$U_{out}(t) \approx \frac{1}{RC}\int U_{in}(t)dt.$$

Aby powyższe przybliżenie można było stosować, częstość musi być znacznie większa niż częstość graniczna, co zapewni nam, że $\frac{U_{out}}{U_{in}} \ll 1$.

Przebieg doświadczenia

Obwód elektryczny, potrzebny do zbadania charakterystyki filtra został przygotowany na makiecie pomiarowej. Cały układ przedstawia schematyczny rys. 3.



Rys. 3: Schematyczny rysunek przedstawiający cały obwód służący do badania charakterystyk filtra dolnorzepustowego.

Na schemacie przez "obwód" został oznaczony element służący jako filtr. W doświadczeniu zostały wykorzystane następujące urządzenia pomiarowe:

- generator funkcji prądu zmiennego
- oscyloskop wielokanałowy
- płytka montażona, umożliwiająca lutowanie elementów
- opornik
- kondensator
- lutownica
- miernik uniwersalny marki Brymen
- przewody umożliwiające połączenie urządzeń

Przed doświadczeniem zostały zmierzone wartości oporu opornika oraz pojemności kondensatora. Wynoszą one:

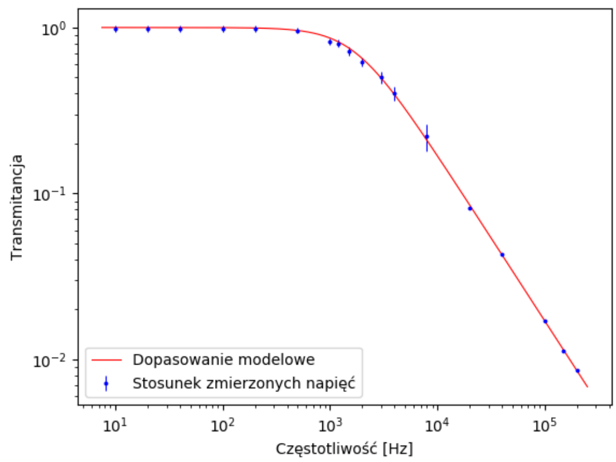
$$R_{zm} = 1,006k\Omega \qquad C_{zm} = 95,3nF.$$

Po podłączeniu wszystkich urządzeń i elementów zgodnie ze schematem, zebrano pomiary amplitud prądów wejściowego oraz wyjściowego, a także przesunięcia fazowego tychże prądów. W tym doświadczeniu użyto metody "graficznej", tzn. wartości amplitud były odczytywane dla minimów/maksimów prądu, na podziałce oscyloskopu. Taka metoda jest niestety obarczona dużym błędem, co omówiono szerzej następnych sekcjach. Zakres częstości, dla których wykonano pomiaru to [10kHz, 200kHz]. Po zebraniu niezbędnych pomiarów dokonano porównania kształtu napięć, dla częstości znacznie mniejszej niż częstość graniczna (tu ω=500Hz), oraz znacznie większej (tu ω=200kHz). Na podstawie kształtu napięć potwierdzono tezę, iż dla wysokich częstości filtr na wyjściu zwraca zcałkowany kształt prądu wejściowego. Tabela pomiarów została zawarta w dodatku A. Aby z pomiarów (δt) uzyskać przesunięcie fazowe, należy zastosować następujący wzór:

$$\phi = \frac{-2\pi dt}{T} = -2\pi dtf$$

Analiza danych

Przy każdym pomiarze dla ustalonej częstości ω zostały spisane trzy wartości liczbowe: napięcie wejściowe dostarczane przez generator funkcji (U_{in}), napięcie wyjściowe, czyli, tak jak według schematu na rys. 1, spadek napięcia na kondensatorze (U_{out}), oraz przesunięcie fazowe pomiędzy tymi dwoma prądami (ϕ). We wszystkich przypadkach błąd pomiarowy został przyjęty jako najmniejsza podziałka, przy której została odczytana wartość pomiaru. Wartość częstości uznajemy za dokładną. O ile przy pomiarach amplitud prądu nie było problemu z określeniem błędu, tak przy przesunięciu fazowym, szczególnie przy niskich częstościach było to problematyczne, ponieważ wartości pomiarów dla kilku pierwszych serii wynoszą 0. Aby poradzić sobie z problemem niepewności w analizie danych zostały przyjęte arbitralne wartości błędu pomiarowego, które odpowiadają możliwym wartościom najmniejszych podziałek podczas zbierania pomiarów.
Pierwszym krokiem analizy danych było naniesienie danych pomiarowych na wykres oraz znalezienie parametrów dopasowania. Dla pomiarów napięcia została najpierw policzona wartość transmitancji dla każdego pomiaru. Wartość ta, przewidywana przez model teoretyczny jest opisana równaniem (1). Taka funkcja zatem, została zminimalizowana, co w rezultacie dało wartość parametru RC. Poniższy wykres przedstawia dopasowaną zależność oraz punkty pomiarowe.



Rys. 4: Wykres przedstawiający obliczone na podstawie pomiarów wartości transmitancji, oraz dopasowaną zależność teoretyczną.

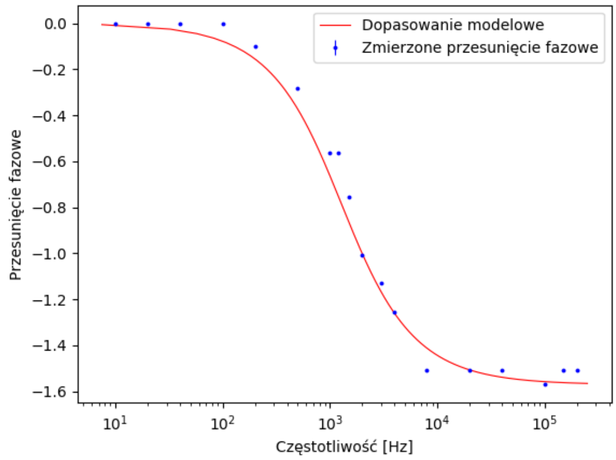
Jak widać na rys. 4, obliczony współczynnik RC dobrze dopasowuje zależność teoretyczną do pomiarów. Korzystając z charakterystyki napięciowej współczynnik został obliczony jako:

$$RC_{\alpha} = 92.93 \pm 0.19 \ \mu\text{s}$$

Możemy go porównać do rzeczywistego współczynnika, który policzyć można ze zmierzonych wartości oporu oraz pojemności:

$$RC_{zm} = 95.8718 \ \mu\text{s},$$

gdzie przyjęliśmy dla uproszczenia analizy, że opór oraz pojemność znamy dokładnie (co nie jest prawdą). Na podstawie takiego (jakościowego) porównania możemy uznać, że dopasowany współczynnik dosyć dobrze pasuje do tego wynikającego ze zmierzonych wartości oporu oraz pojemności, a rozbierzność zostanie przedyskutowana poniżej.
Tę samą procedurę możemy powtórzyć, dla pomiarów przesunięcia fazowego. Teoretyczną zależność wynikającą z modelu opisuje wzór (2). Poniżej znajduje się rysunek przedstawiający naniesione punkty pomiarowe oraz krzywą wynikającą z modelu teoretycznego, z dopasowanym współczynnikiem RC.



Rys. 5: Wykres przedstawiający obliczone na podstawie pomiarów wartości przesunięcia fazowego, oraz dopasowaną zależność teoretyczną.

Dopasowanie modelu teoretycznego do danych pomiarowych nie jest tak eleganckie jak w przypadku transmitancji. Obliczony współczynnik wynosi:

$$RC_\phi = 124 \pm 21\mu\text{s}.$$

Porównując go znowu do wartości wynikającej ze zmnierzonych wartości R oraz C, możemy określić jak dobrze mu odpowiada. Tym razem współczynnik RC jest dosyć mocno oddalony od faktycznego współczynnika. Można to wytłumaczyć słabą jakością pomiarów przesunięcia fazowego, wynikającą ze stosowanej metody, oraz faktu, iż przy bardzo niskich częstościach wręcz niemożliwe było zauważenie przesunięcia fazowego, mimo że takowe mogło wystąpić. Warto wspomnieć też, że miejscami ciężko było zlokalizować gdzie dokładnie znajduje się minimum albo maksimum prądu, co mogło wpłynąć na pomiary.

Podsumowując powyższą rozmowę, współczynnik RC dopasowania modelowego możemy uznać za wiarygodny jedynie w przypadku pomiarów napięć / transmitancji. Pomiary przesunięcia fazowego faktycznie odtwarzają przewidywany kształt zależności, jednak liczbowo, z uwagi na błędy pomiarowe, nie możemy się na nich opierać. Zatem za najlepsze wyznaczenie paramteru RC dopasowania do modelu teoretycznego przyjmujemy wartość $RC_\alpha = 92.93 \pm 0.19$ μs. Błędy pomiarowe przesunięcia fazowego, zostały (jak już wyżej omówiono), wybrane arbitralnie na przedziale gdzie nie dało się odczytać przesunięcia, a w pozostałym zakresie przyjęto jako najmniejszą podziałkę częstości na oscyloskopie. Przy transmitancji zaś, zastosowano metodę propagacji małych błędów, która uwzględnia zależność funkcyjną transmitancji od mierzonych wielkości, oraz błędy tychże wielkości. Ma ona następującą postać:

$$s_{\alpha i} = \sqrt{(\frac{s_{out_i}}{U_{in_i}})^2 + (\frac{s_{in_i}}{U_{in_i}}\alpha_i)^2},$$

gdzie $s_{\alpha i}$ to niepewność i-tej wartości transmitancji α, s_{out_i} to niepewność i-tego pomiaru napięcia wejściowego, s_{in_i} to niepewność i-tego pomiaru napięcia wejściowego (ta niepewność była taka sama dla wszystkich pomiarów, ponieważ napięcie wejściowe się nie zmieniało), U_{in_i} to i-ty pomiar napięcia wejściowego, zaś α_i to i-ta obliczona wartość transmitancji.

W celu wyznaczenia częstotliwości krytycznej odwołamy się do wzoru (3).

$$f_k = \frac{1}{2\pi RC},$$

skąd po podstawieniu RC_α otrzymujemy:

$$f_k = 1712.63 \pm 5.57 \text{ Hz}.$$

Odpowiada to dosyć dobrze miejscu, w którym wykres z rys. 4 zaczyna "zaginać" się w dół. Niepewność częstotliwości krytycznej została policzona korzystając z metody propagacji małych błędów, skąd wynika wzór:

$$s_f = \frac{s_{RC}}{(2\pi RC)^2}$$

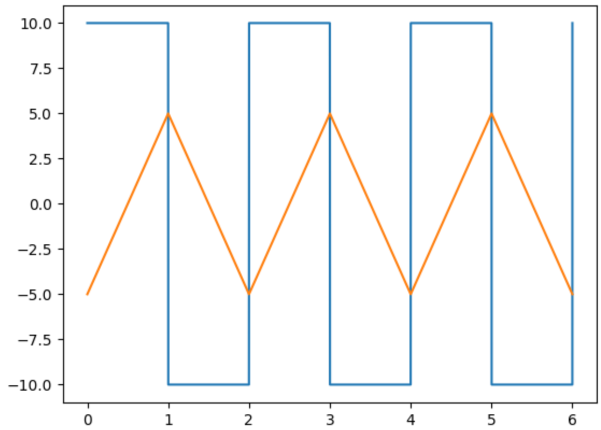
Można porównać otrzymaną częstotliwość graniczną dla wyznaczonej na podstawie zmierzonych wartości oporu oraz pojemności.

$$f_{zm} = 1660.08 \text{ Hz}$$

.

Warto nadmienić, iż dopasowania zależności wyznaczonych teoretycznie zostały przeprowadzone w języku Python (wersja 3.7), przy użyciu funkcji curve_fit z pakietu scipy.optimize. Zastosowano metodę najmniejszych kwadratów, jako fukncję minimalizującą.

Po przeprowadzeniu wszystkich pomiarów zostało również sprawdzone, czy filtr działa "całkująco" dla częstości większych niż krytyczna. W tym celu porównano kształt funkcji wejściowej oraz wyjściowej dla częstości $\omega = 200$ kHz, który schematycznie pokazuje rys. 5, oraz dla $\omega = 500$ Hz, gdzie w tym przypadku nie można było zauważyć żadnej zależności różniczkująco - całkującej.



Rys. 6: Schematyczny wykres przedstawiający uzyskany kształt funkcji wyjściowej (kolor pomarańczowy) dla $\omega = 200$kHz, oraz funkcji wejściowej (kolor niebieski). Skala niezachowana.

Potwierdziło to zatem hipotezę głoszącą, iż dla częstości znacznie większych od częstości granicznej, filtr zadziała jako układ całkujący kształt funkcji.

Podsumowanie

Celem doświadczenia było sprawdzenie charakterystyki napięciowej filtru dolnoprzepustowego, zadanie to zostało pomyślnie wykonane. Na podstawie pomiarów udało się potwierdzić, iż badany układ posiada cechy filtra dolnoprzepustowego, tj. nie tłumi wartości poniżej krytycznej częstości. Ponadto udało się zmierzyć współczynnik RC, wykorzystany przy teoretycznym dopasowaniu modelu, wynosi on

$$RC_\alpha = 92.93 \pm 0.19 \ \mu\text{s}.$$

Charakterystyka fazowa również potwierdziła zależność modelową, lecz nie udało się z zadowalającą dokładnością wyciągać ilościowych wniosków z jej analizy. Wynika to z metody wykorzystanej do zbierania pomiarów. W tym miejscu warto zaznaczyć, iż o wiele lepsze rezultaty udałoby się osiągnąć wykorzystując wbudowane funkcje oscyloskopu, m. in. odczytywanie odległośći pomiędzy wskazanymi punktami (wskaźniki). Na podstawie charakterystyki napięciowej udało się również wyznaczyć graniczną częstotliwość przenoszenia, wynosi ona:

$$f_k = 1712.63 \pm 5.57 \text{ Hz}.$$

Odbiega ona nieznacznie od częstości wyznaczonej na podstawie zmierzonych wielkości R oraz C, może to być spowodowane nieuwględnieniem impedancji generatora funkcji w rachunkach. Częstość krytyczna dla zmierzonych wielkości wynosi:

$$f_{zm} = 1660.08 \text{ Hz}.$$

Na koniec doświadczenia udało się potwierdzić hipotezę głoszącą, iż dla częstości znacznie większych od granicznej, układ będzie "całkował" sygnał, który dostanie na wejściu. Zostało to zrobione w sposób jakościowy, porównując kształt prądu wejściowego i wyjściowego dla dużej częstości.

Dodatek A

ω [Hz]	U_{in} [V]	U_{out} [V]	s_{out} [V]	δt [μs]	$s_{\delta t}$ [μs]
10.0	5.1	5.0	0.2	0.0	1000.0
20.0	5.1	5.0	0.2	0.0	750.0
40.0	5.1	5.0	0.2	0.0	500.0
100.0	5.1	5.0	0.2	0.0	250.0
200.0	5.1	5.0	0.2	80.0	40.0
500.0	5.1	4.9	0.2	90.0	20.0
1000.0	5.1	4.2	0.2	90.0	20.0
1200.0	5.0	4.0	0.2	75.0	10.0
1500.0	5.0	3.6	0.2	80.0	40.0
2000.0	5.0	3.1	0.2	80.0	40.0
3000.0	5.0	2.5	0.2	60.0	20.0
4000.0	5.0	2.0	0.2	50.0	20.0
8000.0	5.0	1.1	0.2	30.0	10.0
20000.0	5.0	0.41	0.02	12.0	4.0
40000.0	4.9	0.21	0.01	6.0	2.0
100000.0	4.9	0.084	0.004	2.5	1.0
150000.0	4.85	0.055	0.002	1.6	0.4
200000.0	4.85	0.042	0.002	1.2	0.2

Tab. 1: Tabela zmierzonych wartości.