

# Efektywność Inwestycji i Systemów Transportowych - Wykład

## System popytu i podaży

dr inż. Rafał Kucharski<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Katedra Systemów Transportowych  
Politechnika Krakowska

Kraków, 2017



# Wstęp



# Popyt and Podaż

## Wstęp

### Popyt

chęć zakupu dobra bądź usługi o określonych cenach w danym miejscu i czasie

### Podaż

ilość dóbr bądź usług oferowanych przez producenta do sprzedaży po określonej cenie, danym miejscu i czasie.



# Popyt and Podaż

## System transportowy

Zwyczajowo w systemie transportowym możemy wyodrębnić:

Podaż

+

Popyt



# Plan

Wprowadzamy system Podaży i Popytu na przykładzie z życia

→

następnie pokazujemy analogię z systemem, transportowym.



## Studium przypadku



## Kazus głodnych studentów

Głodni studenci PK wyrażają **Popyt**, który może zaspokoić **Podaż** jedzenia w porze obiadowej.



# Kazus głodnych studentów

## Podaż

wszystkie podmioty  
oferujące jedzenie





# Kazus głodnych studentów

## Podaż

wszystkie podmioty  
oferujące jedzenie

## Popyt

głodni studenci PK  
chcący zasopoić głód  
w trakcie 20 minutowej przerwy.



# Kazus głodnych studentów

## Podaż

wszystkie podmioty  
oferujące jedzenie

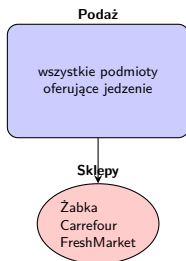
podział

## Popyt

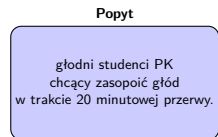
głodni studenci PK  
chcący zasopoić głód  
w trakcie 20 minutowej przerwy.



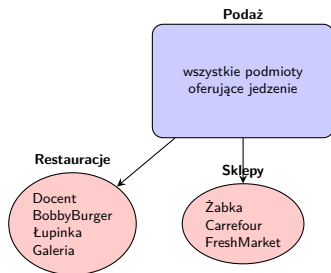
# Kazus głodnych studentów



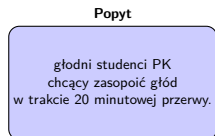
podział



# Kazus głodnych studentów

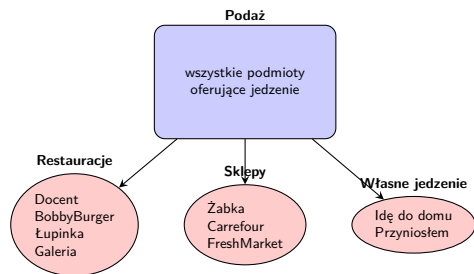


podział



# Kazus głodnych studentów

podział

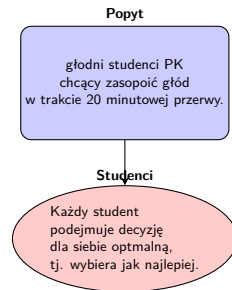
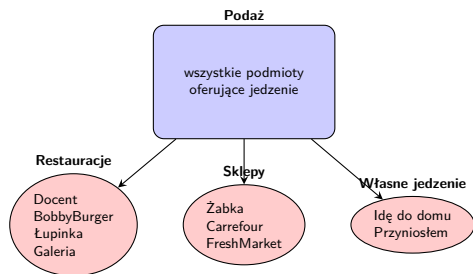
**Popyt**

głodni studenci PK  
chcący zasopoić głód  
w trakcie 20 minutowej przerwy.

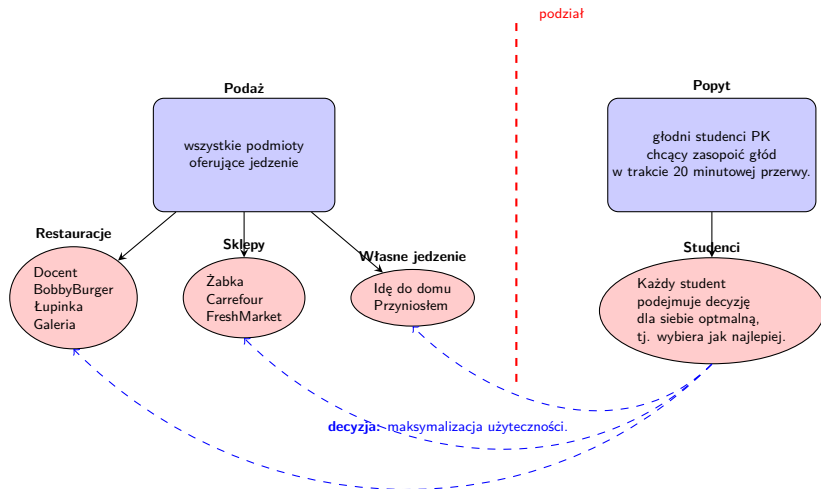


# Kazus głodnych studentów

podział



# Kazus głodnych studentów



# Opcje, decyzje i użyteczność

## Proces decyzyjny

Każdy student  $s$  spośród wszystkich studentów  $S$  podejmuje subiektywnie optymalną decyzję, t.j. wybiera opcję  $a$  ze zbioru dostępnych (**rozważanych**) opcji  $A$  dla której jego **odczuwalna** użyteczność  $U_a^s$  jest największa spośród wszystkich opcji:

$$\forall s \in S : s_a = \operatorname{argmax}_{a \in A} U_a^s$$

## Użyteczność

Atrakcyjność (użyteczność) opcji (decyzji) dla danego studenta.

W rzeczywistości złożona i trudna do opisu i formalizacji.

W uproszczeniu może być wyrażana jako funkcja kryteriów dla danej opcji  $k_i$  oraz ich wag  $w_i$  przypisanych przez każdego studenta niezależnie:

$$U_a^s = \sum_{k_i \in K} w_i^s \cdot k_i$$





## Opis opcji

Opisujemy każdą z opcji  $a \in A$  poprzez przypisanie (oszacowanie) wartości dla każdego z istotnych kryteriów wyboru. Załóżmy, że kryteria istotne dla studentów w tej sytuacji to:

- cena,
- jakość,
- możliwość wybór ,
- czas dojścia
- czas oczekiwania na obsługę.

Ta lista może być poszerzona. Wartości kryteriów powinny być znormalizowane (dla możliwości porównania) im większa wartość kryterium, tym większa użyteczność.

Przykład przypisania wartości krytriom dla 3 wybranych opcji:

| opcja            | Żabka | Galeria | Expo |
|------------------|-------|---------|------|
| cena             | 1     | 0.3     | 0.5  |
| jakość           | 0.3   | 0.7     | 0.7  |
| różnorodność     | 0.3   | 0.9     | 0.6  |
| odległość        | 0.3   | 0.1     | 0.9  |
| czas oczekiwania | 0.4   | 0.3     | 0.4  |



# Wagi kryteriów, ich subiektywność i losowość.

Przypisanie wartości jest obiektywne, ale ich ważenie w wyborze, już nie. Studenci mogą różnić się podejściem do czasu, pieniądza, itp.

Przykład wag nadanych przez różnych studentów kryteriom:

| $w_i^s$          | $a^1$ | $b^2$ | losowy student <sup>3</sup> | losowy zamożny student <sup>4</sup> |
|------------------|-------|-------|-----------------------------|-------------------------------------|
| cena             | 0.3   | 0.9   | $N(0.5, 0.1)$               | $N(0.3, 0.05)$                      |
| jakość           | 0.7   | 0.3   | $N(0.5, 0.1)$               | $N(0.7, 0.05)$                      |
| różnorodność     | 0.7   | 0.3   | $N(0.5, 0.1)$               | $N(0.7, 0.05)$                      |
| odległość        | 0.7   | 0.3   | $N(0.5, 0.1)$               | $N(0.7, 0.05)$                      |
| czas oczekiwania | 0.8   | 0.1   | $N(0.5, 0.1)$               | $N(0.8, 0.1)$                       |

Dwie ważne idee:

**różnorodność** studenci są różni i mają różne postawy.

**losowość** nie jesteśmy w stanie oszacować wag kryteriów dokładnie - są one traktowane jak zmienne losowe.

<sup>1</sup> dla tego studenta nie liczy się cena, ceni sobie bardziej jakość i czas.

<sup>2</sup> ten z kolei odwrotnie, liczy każdy grosz, nawet kosztem jakości.

<sup>3</sup> nie wiemy kim on jest, więc wartości kryteriów są losowe (rozkład normalny)

<sup>4</sup> również losowe wartości, ale jednak cena gra mniejszą rolę niż jakość.



# Szacowanie Użyteczności

Możemy w sposób matematyczny wyrazić to jak każdy student szacuje użyteczność poprzez następującą formułę:

$$U_a^s = \sum_{k_i \in K} w_i^s \cdot k_i$$

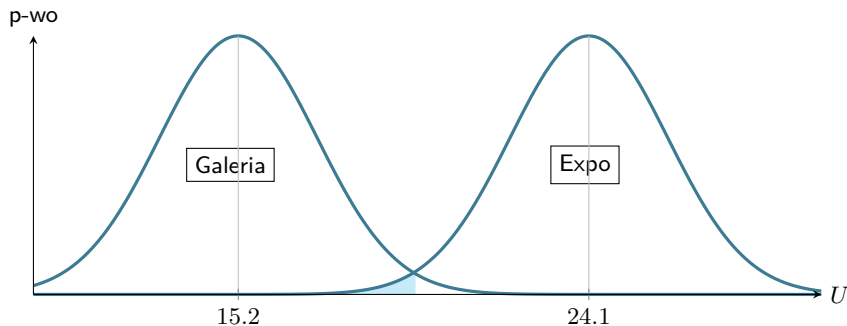
Szacowanie użyteczności 3 wybranych opcji przez studenta *a*:

| opcja              | Żabka | Galeria | Expo        | $w_i^s$ |
|--------------------|-------|---------|-------------|---------|
| cena               | 1     | 0.3     | 0.5         | 0.3     |
| jakość             | 0.3   | 0.7     | 0.7         | 0.7     |
| różnorodność       | 0.3   | 0.9     | 0.6         | 0.7     |
| odległość          | 0.3   | 0.1     | 0.9         | 0.7     |
| czas oczekiwania   | 0.4   | 0.3     | 0.4         | 0.8     |
| <b>Użyteczność</b> | 12.5  | 15.2    | <b>24.1</b> |         |

'Expo' jest **opcją** z **maksymalną** użytecznością dla **tego studenta** - on najpewniej pójdzie na obiad od Expo.

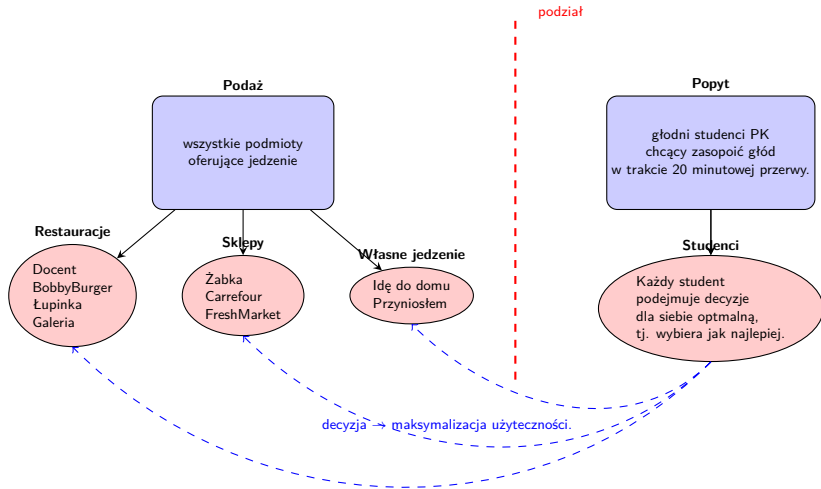


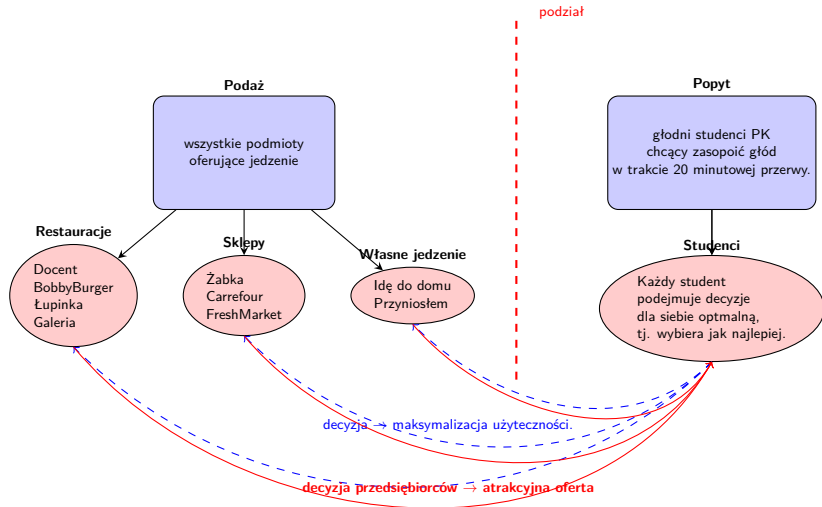
# Losowość i zmienność użyteczności.



## Decyzje przedsiębiorców (oferta)







# Decyzje przedsiębiorców (oferentów)

## Dostawca

Przygotowuje ofertę, t.j.

- określa cenę ,
- dba (albo nie) o różnorodność,
- dba (albo nie) o jakość, itp.

Jego celem jest przyciągnięcie jak największej liczby studentów maksymalizować do swojej oferty. Spójnie z poprzednimi formułami, możemy to wyrazić w ten sposób, że każdy dostawca przygotowuje ofertę która maksymalizuje liczbę studentów którzy ją wybiorą (przy pewnych warunkach granicznych - np. zysk):

$$k^a = \operatorname{argmax}_{s \in S} \left( U_a^s = \sum_{k_i^a \in K} w_i^s \cdot k_i \right)$$

Kryteria dla studentów i dla dostawców są w gruncie rzeczy podobne:

- Studenci szukają oferty która ma dla nich największą użyteczność,
- Dostawcy przygotowują ofertę tak, żeby była wybrana przez jak największą liczbę studentów.





## Efektywność systemu



## Całkowita użyteczność systemu

### Total welfare

System jako całość możemy opisać poprzez sumę użyteczności wszystkich klientów:

$$W = \sum_{s \in S} U_{a^*}^s$$

, gdzie  $a^*$  to wybrana opcja przez studenta  $s$ , t.j. ta o największej użyteczności.

### Usprawnienie systemu

Czy omawiany system usprawni otwarcie nowej restauracji "U Babci Maliny" nieopodal? Jeśli ktoś ze studentów wybierze to znaczy, że ma ona dla niego największą użyteczność, a więc  $W$  się zwiększy, usprawniając tym samym system.



## Ograniczona pojemność (przepustowość)

W rzeczywistości pewne elementy formuły na użyteczność mogą być zmienne, np:

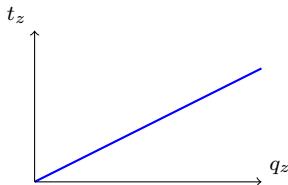
### Czas oczekiwania

Jaki jest czas oczekiwania na jedzenie w Żabce?

$$t_z = f(q_z)$$

$t_z$  czas oczekiwania w Żabce.

$q_z$  liczba klientów (studentów) w Żabce.



czas oczekiwania jest rosnącą funkcją liczby studentów (liczby studentów dla których Żabka ma największą użyteczność.



# Kazus głodnych studentów

Ograniczona pojemność (przepustowość)

- 1 Liczba studentów w Żabce:  $q_z = f(U_z)$  jest funkcją jej Użyteczności;



# Kazus głodnych studentów

Ograniczona pojemność (przepustowość)

- 1 Liczba studentów w Żabce:  $q_z = f(U_z)$  jest funkcją jej Użyteczności;
- 2 Użyteczność Żabki:  $U_z = f(\dots, t_z)$  jest funkcją czasu oczekiwania w Żabce;



# Kazus głodnych studentów

## Ograniczona pojemność (przepustowość)

- 1 Liczba studentów w Żabce:  $q_z = f(U_z)$  jest funkcją jej Użyteczności;
- 2 Użyteczność Żabki:  $U_z = f(\dots, t_z)$  jest funkcją czasu oczekiwania w Żabce;
- 3 Czas oczekiwania w Żabce:  $t_z = f(q_z)$  jest funkcją liczby studentów wybierających Żabkę;



# Kazus głodnych studentów

## Ograniczona pojemność (przepustowość)

- ❶ Liczba studentów w Żabce:  $q_z = f(U_z)$  jest funkcją jej Użyteczności;
- ❷ Użyteczność Żabki:  $U_z = f(\dots, t_z)$  jest funkcją czasu oczekiwania w Żabce;
- ❸ Czas oczekiwania w Żabce:  $t_z = f(q_z)$  jest funkcją liczby studentów wybierających Żabkę;
- ❹ Liczba studentów w Żabce:  $q_z = f(U_z)$  jest funkcją jej Użyteczności;



# Kazus głodnych studentów

## Ograniczona pojemność (przepustowość)

- ❶ Liczba studentów w Żabce:  $q_z = f(U_z)$  jest funkcją jej Użyteczności;
- ❷ Użyteczność Żabki:  $U_z = f(\dots, t_z)$  jest funkcją czasu oczekiwania w Żabce;
- ❸ Czas oczekiwania w Żabce:  $t_z = f(q_z)$  jest funkcją liczby studentów wybierających Żabkę;
- ❹ Liczba studentów w Żabce:  $q_z = f(U_z)$  jest funkcją jej Użyteczności;
- ❺ ...

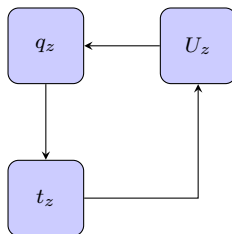




# Kazus głodnych studentów

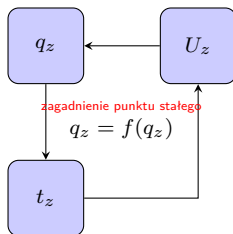
## Ograniczona pojemność (przepustowość)

- 1 Liczba studentów w Żabce:  $q_z = f(U_z)$  jest funkcją jej Użyteczności;
- 2 Użyteczność Żabki:  $U_z = f(\dots, t_z)$  jest funkcją czasu oczekiwania w Żabce;
- 3 Czas oczekiwania w Żabce:  $t_z = f(q_z)$  jest funkcją liczby studentów wybierających Żabkę;
- 4 Liczba studentów w Żabce:  $q_z = f(U_z)$  jest funkcją jej Użyteczności;
- 5 ...



### Ograniczona pojemność (przepustowość)

- 1 Liczba studentów w Żabce:  $q_z = f(U_z)$  jest funkcją jej Użyteczności;
- 2 Użyteczność Żabki:  $U_z = f(\dots, t_z)$  jest funkcją czasu oczekiwania w Żabce;
- 3 Czas oczekiwania w Żabce:  $t_z = f(q_z)$  jest funkcją liczby studentów wybierających Żabkę;
- 4 Liczba studentów w Żabce:  $q_z = f(U_z)$  jest funkcją jej Użyteczności;
- 5 ...



## Zagadnienie punktu stałego<sup>5</sup>

$$q_z^n = f(q_z^{n-1})$$

- ❶ ilu Studentów wybierze dziś Żabkę (dzień  $n$ )?
- ❷ to zależy od tego jak zadowoleni byli ze swojej wczorajszej decyzji (dzień  $n - 1$ ).
- ❸ w momencie gdy liczba studentów wybierających Żabkę dziś jest taka sama jak wczoraj, wówczas proces zbiegł do punktu stałego (ustaliblizował się - **equilibrium**).
- ❹ to również oznacza, że czas oczekiwania w Żabce jest dziś taki sam jak wczoraj, oraz: faktyczny czas oczekiwania jest taki sam, jak spodziewany.



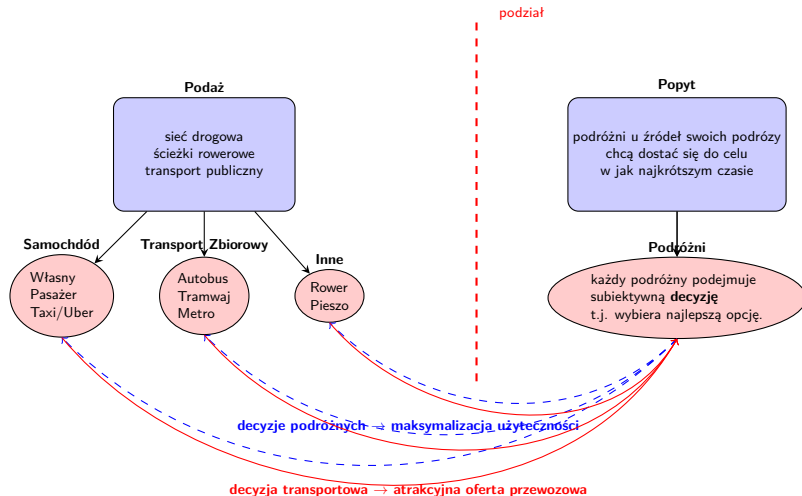
Koniec przykładu głodnych studentów



Przenieśmy to na system transportowy



# Podaż i Popyt w inżynierii systemów transportowych



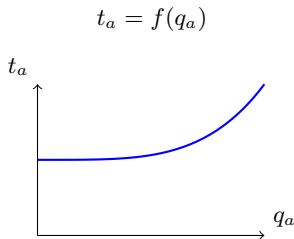
# Zagadnienie punktu stałego w transporcie

## Ograniczona przepustowość

Czas przejazdu jest zmienny i ściśle zależy od popytu.

### Czas przejazdu

Ile czasu zajmie przejazd przez Aleje?



Czas przejazdu **nieliniowo** rośnie wraz ze wzrostem liczby pojazdów w Alejach.



## Zagadnienie punktu stałego w transporcie

$$q_z^n = f(q_z^{n-1})$$

- ❶ ilu pasażerów wybierze dzisiaj przejazd samochodem przez Aleję (dzień  $n$ )?
- ❷ to zależy od tego jak zadowoleni byli ze swojej wczorajszej decyzji (dzień  $n - 1$ ).
- ❸ jeśli liczba pojazdów w Alejach w kolejnych dniach jest stała, wówczas system jest ustabilizowany, w punkcie stałym **equilibrated**.
- ❹ oznacza to, że faktyczny czas przejazdu jest taki jak oczekiwany.





## Podsumowanie



# System transportowy jako system podaży i podróży.

- Popyt jest zaspokojony.
- Klienci systemu maksymalizują subiektywną użyteczność i podejmują racjonalne decyzje.
- Dostawcy oferują swoje usługi tak, by wybrało je jak najwięcej klientów.
- Jeśli efekty naszych decyzji wpływają na ich użyteczność, wówczas mamy do czynienia z zagadnieniem punktu stałego, rozwiązywanym iteracyjnie.
- System taki równoważy się (**equilibrium**) gdy każdy kolejny dzień jest taki jak poprzedni, a klienci nie zmieniają swoich decyzji.



# System transportowy jako system podaży i podróży.

W transporcie:

- Popyt to potrzeba przemieszczenia ze źródła do celu  $q_{od}$ .
- Podaż to sieć drogowa, rowerowa, piesza, oraz oferta komunikacji zbiorowej.
- Decyzje dotyczą środka transportu, trasy, godziny rozpoczęcia podróży itp.
- Czas przejazdu przez sieć drogową, zatłoczenie w autobusie to funkcje decyzji podjętych przez innych użytkowników systemu.
- User Equilibrium to stan gdy żaden z użytkowników nie może podjąć lepszej decyzji (o większej użyteczności) a jego faktyczna użyteczność jest taka jak się spodziewał.



# Dziękuję za uwagę

Rafał Kucharski, rkucharski(at)pk.edu.pl, ©2018

