1. Zmienne losowe X, Y są niezależne. Udowodnić, że $\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$.

$V(X) = E(X^2) - (EX)^2$ oraz $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 =$

$E(X^2 + 2XY + Y^2) - (EX + EY)^2 =$

$E(X^2) + E(Y)^2 + 2E(XY) - (EX)^2 + 2E(X)E(Y) - (EY)^2 =$

$= E(X^2) + (EX)^2 + E(Y^2) - (EY)^2 + \underbrace{2(E(XY) - (EX)(EY))}_{A} =$

$= V(X) + V(Y) = V(X) + V(Y)$

$(EX)(EY) = \int x f_x(x)\,dx \int y f_y(y)\,dy =$

$= \int\int xy \underbrace{f_x(x) f_y(y)}_{f(x,y)}\,dx\,dy = E(XY)$

2. Zmienna losowa podlega standardowemu rozkładowi normalnemu, tzn. gęstość określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. (Skrótowo: $X \sim N(0,1)$). Znaleźć gęstość $f_Y(y)$ zmiennej $Y = X^2$.

$$F_S(y) = P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq x \leq \sqrt{t}) =$$

$$= P(X \leq \sqrt{t}) - P(X \leq -\sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$$

$$f_S(t) = F_S'(t) = (F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}))' = \frac{1}{2\sqrt{t}}(f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t})) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

3. Wykazać, że $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. (WSK.: Podstawienie $t = x^2/2$)

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \left| \begin{matrix} t = \frac{x^2}{2} & dx = \frac{1}{\sqrt{2t}} dt \\ x = \sqrt{2t} & dt = \sqrt{2t}\, dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} x\, dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} x\, dx =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \xrightarrow{u = \frac{x}{\sqrt{2}} \dots} \sqrt{2} \cdot \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

4. Mówimy, że zmienna losowa X podlega rozkładowi Gamma z parametrami $b, p > 0$ jedynie wtedy gdy $f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \exp(-bx)$, dla $x \in (0, \infty)$. (Krótko: $X \sim \text{Gamma}(b, p)$). Czy Y z zadania 2. ma rozkład Gamma? Jeżeli tak, podać wartości parametrów b, p.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}$$

$$-\frac{x}{2} = -bx \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} = \frac{\frac{1}{2}^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} = \frac{1}{2^p \Gamma(p)} x^{p-1}$$

jeśli: $p = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{x}}$

Czyli: $p = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$; $X^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

5. **2p.** Niech $X \sim \mathrm{N}(0,1)$.

(a) Wyznaczyć funkcję tworzącą momenty $M_X(t)$.

(b) Obliczyć $M_Y(t)$, gdzie $Y = \sigma \cdot X + \mu$.

(c) Znaleźć wartości $\mathrm{E}(X), \mathrm{V}(X)$.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

a) $$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{tx}\, dx = \int_R \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{tx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}+tx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}+tx-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{\frac{t^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

b) $$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t\sigma X} e^{t\mu} = e^{t\mu} E(e^{t\sigma X}) =$$

$$= e^{t\mu} M_X(\sigma X) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

c)

$$E(X) = M_X'(0) = (e^{\frac{t^2}{2}})' = t \cdot e^{\frac{t^2}{2}} = 0$$

$$V(X) = M_X''(0) - (M_X'(0))^2 =$$

$$= (e^{\frac{t^2}{2}} t)' - 0 = e^{\frac{t^2}{2}}(t^2+1) = 1$$

6. **2p.** Zmienna (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x, y) = xy$, na obszarze $[0, 1] \times [0, 2]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Z = X/Y$. Obliczyć wartość oczekiwaną $\mathrm{E}(Z)$.

$$X = Z \cdot Y = z \cdot s, \quad Y = s$$

$$|J| = \begin{vmatrix} s & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = s \qquad g(z,s) = f(x(z,s), y(z,s))|J| =$$

$$= zs^3 \qquad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le s \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le zs \le 1 \\ 0 \le s \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le s \le \frac{1}{z} \\ 0 \le s \le 2 \end{cases}$$

$$(z,s): \quad z \in [0, \tfrac{1}{2}], \quad s \in [0, 2]$$

$$z \in [\tfrac{1}{2}, +\infty), \quad s \in [0, \tfrac{1}{z}]$$

$$\int g(z,s)\,ds = \int zs^3\,ds = z \cdot \frac{1}{4} \cdot s^4$$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{4} z s^4 \Big|_0^2 = 4z, & z \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{4} z s^4 \Big|_0^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{4z^3}, & z \in [\frac{1}{2}, +\infty) \end{cases}$$

$$E(Z) = \int_0^{\frac{1}{2}} g(z) z\,dz + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} g(z) z\,dz =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} z \cdot 4z\,dz + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{4z^3} \cdot z\,dz = \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{4z}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{6} + \left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{-4z} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$$

7. $X \sim \mathrm{Gamma}(b, p)$. Wykazać, że $M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-p}$

$$f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}$$

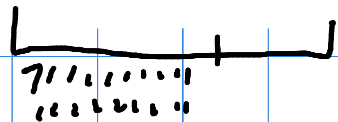
$$M(x) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{tx} \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}\,dx =$$

$$= \frac{b^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{1}{(b-t)^p} \int_0^\infty u^{p-1} e^{-u}\,du = \frac{b^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{1}{(b-t)^p} \cdot \Gamma(p) = \left(\frac{b}{b-t}\right)^p = \left(\frac{b-t}{b}\right)^{-p} =$$

$$= \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-p}$$

8. $X_i \sim \mathrm{Gamma}(b, p_i)$, zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne, $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Wykazać, że zachodzi $S \sim \mathrm{Gamma}(b, \sum p_i)$. Jaki jest rozkład zmiennej $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$, gdzie $Y_i \sim \mathrm{N}(0, 1)$?

9. Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład U$[0,1]$ każda. Wyznaczyć gęstość zmiennych $S = \min(X,Y)$, $T = \max(X,Y)$.



$$F_S(s) = P(S \le s) = P(\min(X,Y) \le s) =$$

$$= P(X \le s) + P(Y \le s) - P(X \le s, Y \le s) =$$

$$= s + s - s^2 = -s^2 + 2s \implies f_S(s) = -2s + 2$$

$$-s^2 + 2s \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1 \checkmark$$

$$F_T(t) = P(T \le t) = P(\max(X,Y) \le t) = P(X \le t, Y \le t)$$

$$= t^2 \implies f_T(t) = 2t \qquad t^2 \Big|_0^1 = 1 - 0 \checkmark$$

10. Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Znaleźć rozkład zmiennej $S = X + Y$.

Λακεδαιμων ≡ This is Sparta

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \in [0, \infty]$$

$$f_S(s) = \int_0^s f_X(t) f_Y(s-t)\, dt = \int_0^s \lambda e^{-\lambda t} \lambda \cdot e^{-\lambda(s-t)}\, dt =$$

$$= \lambda^2 \int_0^s e^{-\lambda(t+s-t)}\, dt = \lambda^2 \int_0^s e^{-\lambda s}\, dt = \lambda^2 e^{-\lambda s} \int_0^s 1\, dt =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda s} \cdot s$$