1. Nieujemne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład. Znaleźć wartość oczekiwaną zmiennej $Y_k = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} X_j}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$.

$$E(Y_k) = \frac{E(\sum_{i=1}^{k} X_i)}{E(\sum_{i=1}^{n} X_i)} = \frac{\sum E(X_j)}{\sum E(X_i)} = \frac{\sum^{k} \mu}{\sum^{n} \mu} = \frac{k \cdot \mu}{n \cdot \mu} = \frac{k}{n}$$

2. **(2p.)** Wykazać, że założenie o niezależności zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z poprzedniego zadania jest istotne, tzn. podać (kontr)przykład.

$X_1 \sim Bern(1)$ $\quad X_2 = 1 - X_1 = X_3$

$E(X_1) = \frac{1}{2}$ $\quad E(X_2) = \frac{1}{2} = E(X_3)$

$$E(Y_2) = \frac{\sum^{2} E(X_i)}{\sum^{3} E(X_i)} = \frac{E(X_1) + E(X_2)}{E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$P(Y_2 = 1) = \frac{1}{2}$

$P(Y_2 = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$E(Y_2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$$\frac{2}{3} \neq \frac{3}{4}$$

3. Dane są niezależne zmienne losowe $X, Y$ o rozkładzie $U[0,1]$. Niech $x, y$ będą wylosowanymi wartościami zmiennych $X, Y$. Odcinek $[0,1]$ podzielony jest zatem na trzy części (być może jedna część ma długość 0). Jakie jest prawdopodobieństwo, że z tych trzech części można utworzyć trójkąt?

Prawo trójkąta

$$a+b > c \quad : \quad a < b < c$$

Gdy $|c| > \frac{1}{2}$ to z reguły że $a+b+c=1$, $a+b < \frac{1}{2}$, więc trójkąt nie może powstać.

Zatem aby powstał trójkąt $|a|, |b|, |c| < \frac{1}{2}$

BSO. zał. że $X \leq Y$, wtedy mamy odcinki

$X, Y-X, 1-Y$

$1^\circ \quad x + (y-x) > 1-y \Rightarrow y > \frac{1}{2}$

$2^\circ \quad x + 1 - y > y - x \Rightarrow x + \frac{1}{2} > y$

$3^\circ \quad y - x + 1 - y > x \Rightarrow \frac{1}{2} > x$

Stąd $P = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \underbrace{f(x,y)}_{=1} dy\, dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} y \Big|_{\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} dx =$

$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x\, dx = 2 \left( \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} - 0 \right) = \frac{1}{4}$

4. Dana jest $n$-wymiarowa zmienna losowa $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$. Zmienną $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ określamy następująco:

$$Y_1 = \bar{\mathbf{X}}, \quad Y_k = X_k - \bar{\mathbf{X}} \ \text{ dla } k = 2, \ldots, n.$$

Znaleźć wartość Jacobianu

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{cases} Y_1 = \bar{X} \\ Y_k = X_k - \bar{X} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_1 = \sum^n \frac{X_i}{n} \\ Y_k = X_k - \sum^n \frac{X_i}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ X_k = Y_k - \sum \frac{X_i}{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum X_k = Y_1 n \\ X_k = Y_k + Y_1 \end{cases} \Rightarrow \quad X_1 = Y_1 n - \sum_2 X_k = Y_1 n - \sum_2 Y_k - Y_1 =$$

$$= Y_1 n - Y_1(n-1) - \sum_2 Y_k = Y_1 - \sum Y_k$$

$$X_1 = Y_1 - \sum Y_k$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial y_1} = 1 \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_k} = 1$$

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & & 1 & & & \\ 1 & & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & 1 \end{vmatrix} \; w_1 - \sum_2^n w_k \; = \begin{vmatrix} -n+1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & & & & \ddots \\ 1 & & & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -n+1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = -n+1$$

5. Zmienna $(X_1, X_2)$ ma gęstość postaci $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}$, gdzie $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$. Niech $X_1 = Y_1 \cos Y_2$, $X_2 = Y_1 \sin Y_2$, gdzie $0 < Y_1 < 1$, $0 \leqslant Y_2 \leqslant 2\pi$. Znaleźć gęstość $g(y_1, y_2)$ zmiennej $(Y_1, Y_2)$. Sprawdzić czy zmienne $Y_1, Y_2$ są niezależne.

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\delta x_1}{\delta y_1} & \frac{\delta x_1}{\delta y_2} \\ \frac{\delta x_2}{\delta y_1} & \frac{\delta x_2}{\delta y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos Y_2 & -Y_1 \sin Y_2 \\ \sin Y_2 & Y_1 \cos Y_2 \end{vmatrix} = Y_1 \cos^2 Y_2 + Y_1 \sin^2 Y_2 =$$

$$= y_1 (\sin^2 Y_2 + \cos^2 Y_2) = y_1$$

$$g(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \cdot y_1 = \frac{1}{\pi} \cdot y_1 = \frac{y_1}{\pi}$$

$$g(y_1) = \int_0^{2\pi} g(y_1, y_2) dy_2 = 2\pi \cdot \frac{y_1}{\pi} = 2y_1$$

$$g(y_2) = \int_0^1 \frac{1}{\pi} y_1 dy_1 = \frac{y_1^2}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \Big|_0^1 = \frac{1}{2\pi}$$

$$g(y_1) \cdot g(y_2) = \frac{1}{\pi} \cdot y_1 = g(y_1, y_2)$$

6. **(2p.)** Zmienna losowa $X_1$ ma gęstość określoną funkcjami $f_1(x), f_2(x). \ldots, f_k(x)$ na przedziałach $[0,1], [1,2], \ldots, [k-1, k]$ odpowiednio. **Niezależna** zmienna $X_2$ ma gęstość $g(x)$ na przedziale $[0,1]$. Podać nieformalny algorytm/sposób wyznaczania gęstości sumy zmiennych $X_1, X_2$: $S = X_1 + X_2$.

7. Niech $(X,Y)$ oznacza wybrany losowo punkt na płaszczyźnie. Załóżmy, że współrzędne $X$ i $Y$ są niezależne i podlegają rozkładowi $N(0,1)$. Od zmiennej $(X,Y)$ przechodzimy do zmiennej $(R,\Theta)$, gdzie $R$ i $\Theta$ są współrzędnymi biegunowymi punktu $(X,Y)$. Wykazać, że gęstość zmiennej $(R,\Theta)$ określona jest wzorem

$$g(r,\Theta) = \frac{1}{2\pi} r \cdot \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \quad \text{gdzie } 0 < \Theta < 2\pi,\ 0 < r < \infty.$$

$$f(x,y) = f(x)\cdot f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\Theta \\ y = r\sin\Theta \end{cases}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\Theta & -r\sin\Theta \\ \sin\Theta & r\cos\Theta \end{vmatrix} = r$$

$$g(r,\Theta) = f(r\cos\Theta, r\sin\Theta)\cdot|J| = \frac{r}{2\pi}\cdot e^{\frac{-(r^2\overbrace{\cos^2\Theta + r^2\sin^2\Theta}^{1})}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot r\cdot\exp\left\{\frac{-r^2}{2}\right\}$$

[Do zadań 8–9] Boki prostokąta są niezależnymi zmiennymi losowymi $X_1$ i $X_2$ o rozkładzie $U[1,2]$. $Y_1 = 2X_1 + 2X_2$ jest obwodem tego prostokąta, $Y_2 = X_1X_2$ oznacza pole tego prostokąta.

8. Znaleźć wartości oczekiwane i wariancje zmiennych $Y_1, Y_2$. (Odp.: 6, $2/3$ dla $Y_1$, $9/4$, $55/144$ dla $Y_2$).

9. Obliczyć wartość współczynnika korelacji $\rho$ zmiennych $Y_1, Y_2$. (Odp.: $3\sqrt{330}/55$).

$$f(x) = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{3}{2}$$

$$E(Y_1) = 2\cdot E(X_1) + 2\cdot E(X_2) = 6$$

$$E(Y_2) = E(X_1)\cdot E(X_2) = \frac{9}{4}$$

$$V(X_1) = V(X_2) = \int_1^2 (x-\tfrac{3}{2})^2 \cdot f(x)\,dx = \left\{\begin{matrix} t = x-\frac{3}{2} \\ dt = dx \end{matrix}\right\} = \int_1^2 t^2 dt =$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{(x-\frac{3}{2})^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{3} = \frac{1}{12}$$

$$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + ab\,Cov(X,Y)$$

$$V(Y_1) = V(2\cdot X + 2\cdot Y) = 4\frac{1}{12} + 4\cdot\frac{1}{12} + 0 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$V(Y_2) = E(Y_2^2) - E(Y_2)^2 = E((X_1X_2)^2) - \left(\frac{9}{4}\right)^2 =$$

$$= E(X_1^2X_2^2) - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = E(X_1^2)\cdot E(X_2^2) - \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$X_1^2 \in [1,4]$$

$$F_{X^2}(t) = P(X^2 \le t) = P(X \le \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t})$$

$$f_{X^2}(t) = F'_{X^2}(t) = f'_X(\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$E(X^2) = \int_1^4 x \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{7}{3}$$

---

$$V(Y_2) = \frac{49}{9} - \frac{81}{16} = \frac{55}{144}$$

9

$$\rho(Y_1,Y_2) = \frac{\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)}{\sqrt{V(Y_1)V(Y_2)}} =$$

---

$$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Cov}(2X_1 + 2X_2, X_1X_2) =$$

$$= 2\cdot\mathrm{Cov}(X_1, X_1X_2) + 2\,\mathrm{Cov}(X_2, X_1X_2)$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_1X_2) = E(X_1^2X_2) - E(X_1)E(X_1X_2) =$$

$$= E(X_1^2)E(X_2) - E(Y_1)E(Y_2) = \frac{1}{8}$$

- - - - - - - -

$$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2}$$

---

$$\rho = \frac{3\sqrt{330}}{55}$$