Zadanie 6 Lista 1

Rafał Leja

6 października 2025

Funkcje wykładniczą możemy zapisać za pomocą szeregu Maclaurena:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$$

wtedy dla $x = \frac{1}{n}$, mamy:

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Resztę szeregu możemy ograniczyć w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \sum_{1=2}^{\infty} n^i i! \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^i} \\ \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} (\text{z szeregu geometrycznego}) \\ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Zatem:

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$