1. Zmienne losowe X, Y są niezależne. Udowodnić, że $\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$.

$V(X) = E(X^2) - (EX)^2$ oraz $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 =$

$E(X^2 + 2XY + Y^2) - (EX + EY)^2 =$

$E(X^2) + E(Y)^2 + 2E(XY) - (EX)^2 + 2E(X)E(Y) - (EY)^2 =$

$= E(X^2) + (EX)^2 + E(Y^2) - (EY)^2 + \underbrace{2(E(XY) - (EX)(EY))}_{A} =$

$= V(X) + V(Y) = V(X) + V(Y)$

$(EX)(EY) = \int x f_x(x)dx \int y f_y(y)dy =$

$= \int\int xy \underbrace{f_x(x) f_y(y)}_{f(x,y)} dxdy = E(XY)$

2. Zmienna losowa podlega standardowemu rozkładowi normalnemu, tzn. gęstość określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. (Skrótowo: $X \sim N(0,1)$). Znaleźć gęstość $f_Y(y)$ zmiennej $Y = X^2$.

$$F_Y(y) = P(Y \le t) = P(X^2 \le t) = P(-\sqrt{t} \le x \le \sqrt{t}) =$$

$$= P(X \le \sqrt{t}) - P(X \le -\sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$$

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = (F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}))' = \frac{1}{2\sqrt{t}}(f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t})) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

3. Wykazać, że $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. (Wsk.: Podstawienie $t = x^2/2$)

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \left| \begin{matrix} t = \frac{x^2}{2} & dx = \frac{1}{\sqrt{2t}} dt \\ x = \sqrt{2t} & dt = \sqrt{2t}\, dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} x\, dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} x\, dx =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \xrightarrow{u = \frac{x}{\sqrt{2}} \dots} \sqrt{2} \cdot \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

4. Mówimy, że zmienna losowa X podlega rozkładowi Gamma z parametrami $b, p > 0$ jedynie wtedy gdy $f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \exp(-bx)$, dla $x \in (0, \infty)$. (Krótko: $X \sim \text{Gamma}(b, p)$). Czy Y z zadania 2. ma rozkład Gamma? Jeżeli tak, podać wartości parametrów b, p.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}$$

$$-\frac{x}{2} = -bx \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} = \frac{\frac{1}{2}^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} = \frac{1}{2^p \Gamma(p)} x^{p-1}$$

jeśli $p = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{x}}$

Czyli $p = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$: $X^2 \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

5. **2p.** Niech $X \sim \mathrm{N}(0,1)$.

(a) Wyznaczyć funkcję tworzącą momenty $M_X(t)$.

(b) Obliczyć $M_Y(t)$, gdzie $Y = \sigma \cdot X + \mu$.

(c) Znaleźć wartości $\mathrm{E}(X), \mathrm{V}(X)$.

6. **2p.** Zmienna (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x, y) = xy$, na obszarze $[0, 1] \times [0, 2]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Z = X/Y$. Obliczyć wartość oczekiwaną $\mathrm{E}(Z)$.

7. $X \sim \text{Gamma}(b, p)$. Wykazać, że $M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{-p}$