Zadanie nr 2

Rafał Leja
340879
Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

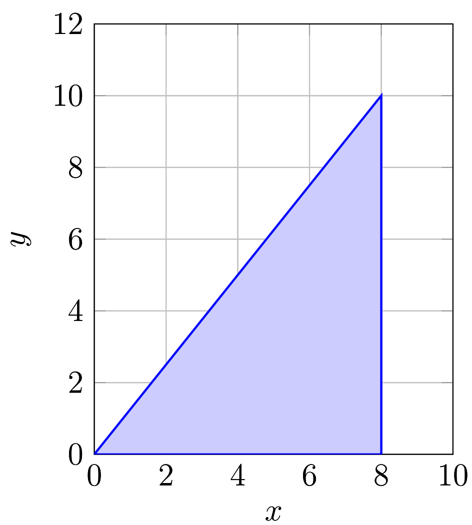
29 kwietnia 2025

Dane:

$$n = 8$$
$$m = 10$$

Trójkąt:

Rozpatrujemy następujący trójkąt:



Trójkąt jest ograniczony prostymi:

1. $x = 0$,
2, $y = 0$,
3, $y = ax + b$

$$\begin{cases} 0 = a * 0 + b \\ 10 = a * 8 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Zakresy zmiennych to:

$$0 \leq X \leq 8$$
$$0 \leq Y \leq \frac{5}{4}x$$

Funkcja gęstości (X,Y):

$f(x, y) = C$ na obszarze trójkąta, gdzie C jest stałą.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy\, dx &= 1 \\
\int_0^8 \int_0^{\frac{5}{4}x} C\, dy\, dx &= 1 \\
\int_0^8 C \cdot \frac{5}{4} x\, dx &= 1 \\
C \cdot \frac{5}{8} x^2 \Big|_0^8 &= 1 \\
C \cdot \frac{5}{8} \cdot 64 &= 1 \\
C &= \frac{1}{40} = f(x, y)
\end{aligned}$$

Zamiana zmiennych:

Zamieniamy zmienne:

$$\begin{cases} T = X + 2Y \\ U = X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = U \\ Y = \frac{T-U}{2} \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik Jacobiego:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial X}{\partial U} \\ \frac{\partial Y}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial U} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Nowy obszar zmiennych:

Zakresy oryginalnych zmiennych:

$$\begin{aligned} 0 \leq X \leq 8 \\ 0 \leq Y \leq \frac{5}{4} x \end{aligned}$$

Zakresy nowych zmiennych:

$$\begin{aligned} 0 \leq U \leq 8 \\ 0 \leq \frac{T-U}{2} \leq \frac{5}{4} U \end{aligned}$$

Inaczej:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{T-U}{2} \leq \frac{5}{4}U \\
0 &\leq T-U \leq \frac{5}{2}U \\
U &\leq T \leq U + \frac{5}{2}U \\
U &\leq T \leq \frac{7}{2}U \\
0 &\leq T \leq 28
\end{aligned}
$$

Zatem:

$$U \in [0,8] \cap [\frac{2}{7}T, T]$$

Przedziały całkowania:

Z powyższych ograniczeń dzielimy obszar na 2 podobszary:

1. Dla $T \in [0,8]$:

$$U \in [\frac{2}{7}t, T]$$

więc:

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \int f_{X,Y}(x,y) \cdot |J| \, dy \, dx \\
f_T(t) &= \int_{\frac{2}{7}t}^{t} \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2} \, du \\
&= \int_{\frac{2}{7}t}^{t} \frac{1}{80} \, du \\
&= \frac{1}{80} \cdot (t - \frac{2}{7}t) \\
&= \frac{1}{80} \cdot \frac{5}{7}t \\
&= \frac{1}{112}t
\end{aligned}
$$

2. Dla $T \in [8, 28]$:

$$U \in [\frac{2}{7}T, 8]$$

więc:

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \int f_{X,Y}(x,y) \cdot |J| \, dy \, dx \\
f_T(t) &= \int_{\frac{2}{7}t}^{8} \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2} \, du \\
&= \int_{\frac{2}{7}t}^{8} \frac{1}{80} \, du \\
&= \frac{1}{80} \cdot (8 - \frac{2}{7}t) \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{280}t
\end{aligned}
$$

Ostateczna funkcja gęstości:

$$
f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{112}t & \text{dla } 0 \leq t < 8 \\ \frac{1}{10} - \frac{1}{280}t & \text{dla } 8 \leq t < 28 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \text{ lub } t > 28 \end{cases}
$$