Zadanie nr 3

Rafał Leja
340879
Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

21 maja 2025

Dane:

$$X_{30}, X_{150}, X_{600} \sim B(n,p), \text{gdzie } p = 1/3, n = 30, 150, 600$$

Prawdopodobieństwo wprost:

Prawdopodobieństwo rozkładu Bernoulliego dla $X \sim B(n,p)$ jest dane wzorem:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, n$$

Więc, dla X_n mamy:

$$\begin{aligned} P(a \leq X_n \leq b) &= \sum_{k=a}^{b} P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Co nam daje:

$$P(8 \leq X_{30} \leq 12) = \sum_{k=8}^{12} \binom{30}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{30-k} \approx 0,66720608$$

$$P(40 \leq X_{150} \leq 60) = \sum_{k=40}^{60} \binom{150}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{150-k} \approx 0,93151283$$

$$P(160 \leq X_{600} \leq 240) = \sum_{k=160}^{240} \binom{600}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{600-k} \approx 0,99955211$$

Przybliżenia Czebyszewa:

Wariancja rozkładu Bernoulliego jest dana wzorem:

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

a wartość oczekiwana:

$$\mu = np$$

zatem, nierówność Czebyszewa dla rozkładu Bernoulliego jest następująca:

$$P(|X_n - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \implies P(|X_n - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Dla X_{30} mamy:

$$\mu_{30} = 30 \cdot \frac{1}{3} = 10$$

$$\sigma_{30} = \sqrt{30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 2,58$$

$$8 \leq X_{30} \leq 12 \implies |X_{30} - 10| < 2 \implies k = \frac{2}{2,58} \approx 0,775$$

$$P(|X_{30} - 10| < 2) \geq 1 - \frac{1}{(0,775)^2} \approx 1 - 1,65 = -0,65 \text{ (co jest niemożliwe)}$$

Dla X_{150} mamy analogicznie:

$$\mu_{150} = 150 \cdot \frac{1}{3} = 50$$

$$\sigma_{150} = \sqrt{150 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 6,12$$

$$40 \leq X_{150} \leq 60 \implies |X_{150} - 50| < 10 \implies k = \frac{10}{6,12} \approx 1,63$$

$$P(|X_{150} - 50| < 10) \geq 1 - \frac{1}{(1,63)^2} \approx 1 - 0,375 = 0,625$$

Dla X_{600} mamy:

$$\mu_{600} = 600 \cdot \frac{1}{3} = 200$$

$$\sigma_{600} = \sqrt{600 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 12,65$$

$$160 \leq X_{600} \leq 240 \implies |X_{600} - 200| < 40 \implies k = \frac{40}{12,65} \approx 3,16$$

$$P(|X_{600} - 200| < 40) \geq 1 - \frac{1}{(3,16)^2} \approx 1 - 0,099 = 0,901$$

Przybliżenie normalne:

Zgodnie z twierdzeniem De Moivre'a-Laplace'a, dla dużych n rozkład $B(n,p)$ można przybliżyć rozkładem normalnym $N(\mu,\sigma^2)$, gdzie:

$$\mu = np$$
$$\sigma^2 = np(1-p)$$

Zamieniając na rozkład standardowy, mamy:

$$Z = \frac{X_n - \mu}{\sigma} \sim N(0,1), \text{wtedy}$$
$$P(X_n \leq a) = P(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

jeśli a jest liczbą całkowitą, to musimy dodać 0,5 do a (przybliżenie ciągłe):

$$P(X_n \leq a) = P(Z \leq \frac{a+0,5-\mu}{\sigma})$$

Zatem, dla X_{30} mamy:

$$\mu_{30} = 30 \cdot \frac{1}{3} = 10$$
$$\sigma_{30} = \sqrt{30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 2,58$$
$$Z = \frac{X_{30} - 10}{2,58} \sim N(0,1)$$
$$\begin{aligned} P(8 \leq X_{30} \leq 12) &= P(X_{30} \leq 12) - P(X_{30} \leq 8) \\ &= P(Z \leq \frac{12+0,5-10}{2,58}) - P(Z \leq \frac{8-0,5-10}{2,58}) \\ &= \Phi(\frac{2,5}{2,58}) - \Phi(\frac{-2,5}{2,58}) \\ &= \Phi(0,97) - \Phi(-0,97) \\ &= 0,834 - 0,165 \\ &= 0,669 \end{aligned}$$

Dla X_{150} mamy:

$$\mu_{150} = 150 \cdot \frac{1}{3} = 50$$
$$\sigma_{150} = \sqrt{150 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 6,12$$
$$Z = \frac{X_{150} - 50}{6,12} \sim N(0,1)$$

$$\begin{aligned} P(40 \le X_{150} \le 60) &= P(X_{150} \le 60) - P(X_{150} \le 40) \\ &= P(Z \le \frac{60+0,5-50}{6,12}) - P(Z \le \frac{40-0,5-50}{6,12}) \\ &= \Phi(\frac{10,5}{6,12}) - \Phi(\frac{-10,5}{6,12}) \\ &= \Phi(1,71) - \Phi(-1,71) \\ &= 0,912 \end{aligned}$$

Dla X_{600} mamy:

$$\mu_{600} = 600 \cdot \frac{1}{3} = 200$$

$$\sigma_{600} = \sqrt{600 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 12,65$$

$$Z = \frac{X_{600} - 200}{12,65} \sim N(0,1)$$

$$\begin{aligned} P(160 \le X_{600} \le 240) &= P(X_{600} \le 240) - P(X_{600} \le 160) \\ &= P(Z \le \frac{240+0,5-200}{12,65}) - P(Z \le \frac{160-0,5-200}{12,65}) \\ &= \Phi(\frac{40,5}{12,65}) - \Phi(\frac{-40,5}{12,65}) \\ &= \Phi(3,20) - \Phi(-3,20) \\ &= 0,999 \end{aligned}$$

Nierówności Chernoffa:

Nierówności Chernoffa dla rozkładu Bernoulliego są następujące:

$$P(X_n \ge a) \le e^{-ta}M(t) = e^{-ta}(1-p+pe^t)n$$

chcemy znaleźć t takie, że $e^{-ta}M(t)$ jest minimalne. Zatem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{-ta}M(t) &= e^{-ta}(M'(t) - aM(t)) \\ &= e^{-ta}(1-p+pe^t)^{n-1}(npe^t - a(1-p+pe^t)) \end{aligned}$$

przyrównując do zera, mamy:

$$\begin{aligned} npe^t &= a(1-p+pe^t) \\ npe^t - ape^t &= a - ap \\ e^t &= \frac{a-ap}{p(n-a)} \end{aligned}$$

wiemy że $p \neq 0$ oraz $n \neq a$ więc:

$$t = \ln\left(\frac{a(1-p)}{p(n-a)}\right)$$

żeby to rozwiązanie miało sens, musimy mieć $a(1-p) > 0$ oraz $p(n-a) > 0$, co daje nam:

$$a > 0 \text{ oraz } n - a > 0 \implies 0 < a < n$$

Zatem, dla X_{30} mamy:

$$\begin{aligned}
&a = 8, b = 12, n = 30, p = \frac{1}{3}\\
&t_a = \ln\left(\frac{8(1-\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}(30-8)}\right) \approx -0,3184\\
&t_b = \ln\left(\frac{12(1-\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}(30-12)}\right) \approx 0,2876
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(8 \leq X_{30} \leq 12) &\leq e^{-t_a a}M(t_a) - e^{-t_b b}M(t_b)\\
&= e^{-(-0,3184)\cdot 8}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-0,3184}\right)^{30} - e^{-(0,2876)\cdot 12}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{0,2876}\right)^{30}\\
&\approx -0.01502055\\
&< 0 \text{ (co jest niemożliwe)}
\end{aligned}$$

Dla X_{150} mamy:

$$\begin{aligned}
&a = 40, b = 60, n = 150, p = \frac{1}{3}\\
&t_a = \ln\left(\frac{40(1-\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}(150-40)}\right) \approx -0,3184\\
&t_b = \ln\left(\frac{60(1-\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}(150-60)}\right) \approx 0,2876
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(40 \leq X_{150} \leq 60) &\leq e^{-t_a a}M(t_a) - e^{-t_b b}M(t_b)\\
&= e^{-(-0,3184)\cdot 40}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-0,3184}\right)^{150} - e^{-(0,2876)\cdot 60}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{0,2876}\right)^{150}\\
&\approx -0.02249244\\
&< 0 \text{ (co jest niemożliwe)}
\end{aligned}$$

Dla X_{600} mamy:

$$a = 160, b = 240, n = 600, p = \frac{1}{3}$$
$$t_a = \ln\left(\frac{160(1-\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}(600-160)}\right) \approx -0,3184$$
$$t_b = \ln\left(\frac{240(1-\frac{1}{3})}{\frac{1}{3}(600-240)}\right) \approx 0,2876$$

$$\begin{aligned} P(160 \le X_{600} \le 240) &\le e^{-t_a a}M(t_a) - e^{-t_b b}M(t_b) \\ &= e^{-(-0,3184)\cdot 160}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{-0,3184}\right)^{600} - e^{-(0,2876)\cdot 240}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{0,2876}\right)^{600} \\ &\approx -0.00098321 \\ &< 0 \text{ (co jest niemożliwe)} \end{aligned}$$