1. Niech Σ będzie σ-ciałem zbiorów.

(a) Sprawdzić, że $\emptyset \in \Sigma$.

(b) Załóżmy, że $A_k \in \Sigma$, dla $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \Sigma$.

a) Skoro $\Omega \in \Sigma$, to $\Omega^c \in \Sigma$

a $\Omega^c = \emptyset$ więc $\emptyset \in \Sigma$

b) $A_k \in \Sigma$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$, więc

$A_k^c \in \Sigma$ $(k = 1, 2, \ldots)$, więc

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c \in \Sigma$, więc $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)^c = B^c \in \Sigma$

$x \in B^c \Leftrightarrow x \notin B \Leftrightarrow \neg(x \in B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg(x \in A_1^c \vee x \in A_2^c \vee \ldots)$

$\Leftrightarrow \neg(x \notin A_1 \vee x \notin A_2 \vee \ldots) \overset{\text{de Morgan}}{\Leftrightarrow} \neg(x \notin A_1) \wedge \neg(x \notin A_2) \wedge \ldots$

$\Leftrightarrow x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \Leftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$

2. Niech $\Omega = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$.

(a) Opisać σ-ciała zbiorów tej przestrzeni zdarzeń.

(b) Podać przykład funkcji X, Y takich, że X jest zmienną losową, a Y nie jest zmienną losową.

a) $\Sigma_1 = \{\Omega, \emptyset\}$,

$\Sigma_2 = 2^\Omega$

$\Sigma_3 = \{\Omega, \emptyset, \{\zeta_1\}, \{\zeta_2, \zeta_3\}$

$\Sigma_4 = \{\Omega, \emptyset, \{\zeta_2\}, \{\zeta_1, \zeta_3\}$

$\Sigma_5 = \{\Omega, \emptyset, \{\zeta_3\}, \{\zeta_1, \zeta_2\}$

b)

$$X(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta = \zeta_1 \vee \beta = \zeta_2 \\ 1, & \beta = \zeta_3 \end{cases}$$

wtedy $X^{-1}(0) = \{\zeta_1, \zeta_2\}$, $X^{-1}(1) = \{\zeta_3\}$

Skoro zbiory z X^{-1} należą do Σ_5, to znaczy

że X jest zmienną losową

$$X(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta = \zeta_1 \\ 1, & \beta = \zeta_2 \vee \beta = \zeta_3 \end{cases}$$

$Y^{-1}(1) = \{\zeta_2, \zeta_3\}$, $Y^{-1}(0) = \{\zeta_1\}$

Skoro $Y^{-1}(1) \notin \Sigma_5$ oraz $Y^{-1}(0) \notin \Sigma_5$

to Y nie jest zmienną losową