

Zadanie nr 2

Rafał Leja

340879

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

29 kwietnia 2025

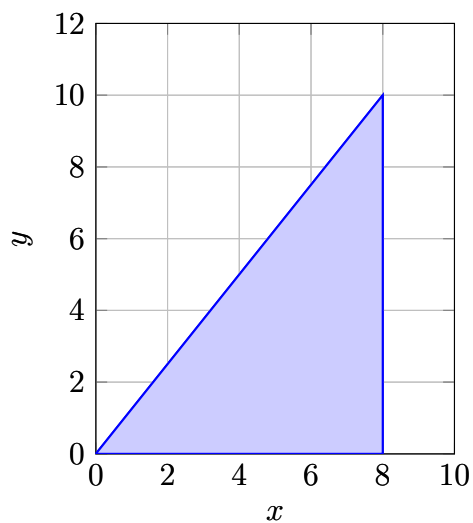
Dane:

$$n = 8$$

$$m = 10$$

Trójkąt:

Rozpatrujemy następujący trójkąt:



Trójkąt jest ograniczony prostymi:

1. $x = 0$,

2. $y = 0$,

3. $y = ax + b$

$$\begin{cases} 0 = a * 0 + b \\ 10 = a * 8 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Zakresy zmiennych to:

$$0 \leq X \leq 8$$

$$0 \leq Y \leq \frac{5}{4}x$$

Funkcja gęstości (X,Y):

$f(x, y) = C$ na obszarze trójkąta, gdzie C jest stałą.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy dx &= 1 \\ \int_0^8 \int_0^{\frac{5}{4}x} C dy dx &= 1 \\ \int_0^8 C \cdot \frac{5}{4}x dx &= 1 \\ C \cdot \frac{5}{8}x^2 \Big|_0^8 &= 1 \\ C \cdot \frac{5}{8} \cdot 64 &= 1 \\ C &= \frac{1}{40} = f(x, y)\end{aligned}$$

Zamiana zmiennych:

Zamieniamy zmienne:

$$\begin{cases} T = X + 2Y \\ U = X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = U \\ Y = \frac{T-U}{2} \end{cases}$$

Obliczamy jacobian:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial T} & \frac{\partial X}{\partial U} \\ \frac{\partial Y}{\partial T} & \frac{\partial Y}{\partial U} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Nowy zakres zmiennych:

Zakresy oryginalnych zmiennych:

$$\begin{aligned}0 &\leq X \leq 8 \\ 0 &\leq Y \leq \frac{5}{4}x\end{aligned}$$

Zakresy nowych zmiennych:

$$\begin{aligned}0 &\leq U \leq 8 \\ 0 &\leq \frac{T-U}{2} \leq \frac{5}{4}U\end{aligned}$$

Inaczej:

$$0 \leq \frac{T-U}{2} \leq \frac{5}{4}U$$

$$0 \leq T-U \leq \frac{5}{2}U$$

$$U \leq T \leq U + \frac{5}{2}U$$

$$U \leq T \leq \frac{7}{2}U$$

$$0 \leq T \leq 28$$

Zatem:

$$U \in [0, 8] \cap [\frac{2}{7}T, T]$$

Przedziały całkowania:

Z powyższych ograniczeń dzielimy obszar na 2 podobszary:

1. Dla $T \in [0, 8]$:

$$U \in [\frac{2}{7}t, T]$$

więc:

$$f_T(t) = \int f_{X,Y}(x, y) \cdot |J| dy dx$$

$$f_T(t) = \int_{\frac{2}{7}t}^t \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2} du$$

$$= \int_{\frac{2}{7}t}^t \frac{1}{80} du$$

$$= \frac{1}{80} \cdot (t - \frac{2}{7}t)$$

$$= \frac{1}{80} \cdot \frac{5}{7}t$$

$$= \frac{1}{112}t$$

2. Dla $T \in [8, 28]$:

$$U \in [\frac{2}{7}T, 8]$$

więc:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int f_{X,Y}(x, y) \cdot |J| dy dx \\ f_T(t) &= \int_{\frac{2}{7}t}^8 \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \int_{\frac{2}{7}t}^8 \frac{1}{80} du \\ &= \frac{1}{80} \cdot (8 - \frac{2}{7}t) \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{280}t \end{aligned}$$

Ostateczna funkcja gęstości:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{112}t & \text{dla } 0 \leq t < 8 \\ \frac{1}{10} - \frac{1}{280}t & \text{dla } 8 \leq t < 28 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \text{ lub } t > 28 \end{cases}$$