1. Dana jest funkcja $f(x,y) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \ \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 7y^2)\right\}$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wyznaczyć rozkłady brzegowe $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy =$$

2. Czy można tak dobrać stałą C, aby funkcja $f_{XY}(x,y) = Cxy + x + 2y$, dla $0 \leqslant x \leqslant 3$, $1 \leqslant y \leqslant 2$, była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej?

$$\int_0^3\int_1^2 Cxy + x + 2y \, dy dx = \int_0^3 \left(x\left(\int_1^2 cy + 1 \, dy\right) + 2\cdot\int_1^2 y \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(x\cdot\left(\frac{cy^2}{2}\Big|_1^2 + y\Big|_1^2 \right) + 2\left(\frac{1}{2}y^2\Big|_1^2\right)\right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(x\cdot\left(\frac{c}{2}(4-1) + 1\right) + 2\cdot\frac{3}{2}\right) dx =$$

$$\int_0^3 x\left(\frac{3C}{2} + 1\right) + 3 \, dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}C + 1\right)\cdot\int_0^3 x \, dx + 3\cdot\int_0^3 1 \, dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}C + 1\right)\cdot\frac{9}{2} + 3 = \frac{27}{4}C + \frac{9}{2} + 9$$

$$\frac{27}{4}C + \frac{9}{2} + 9 = 1 \Rightarrow \frac{27}{4}C = -\frac{25}{2} \Rightarrow C = \frac{-50}{27}$$

$$f(3,2) = -\frac{50}{27}\cdot 6 + 3 + 4 \approx -12 + 7 < 0$$

Odp. nie

3. Dana jest funkcja $f_{XY}(x,y)=\frac{4}{9}(-xy+x)$ dla $0\leqslant x\leqslant 3$, $0\leqslant y\leqslant 1$. Sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne oraz obliczyć ppb $P(1\leqslant X\leqslant 4,\ 0.5\leqslant Y\leqslant 2)$.

$$f_1(x)=\int_0^1 \frac{4}{9}(-xy+x)\,dy=-\frac{4}{9}x\int_0^1 y\,dy+\frac{4}{9}x\int_0^1 1\,dy=$$

$$=-\frac{4}{9}x\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{9}x=\frac{2}{9}x$$

$$f_2(y)=\int_0^3 \frac{4}{9}(-xy+x)\,dx=-\frac{4}{9}y\int_0^3 x\,dx+\frac{4}{9}\int_0^3 x\,dx=$$

$$=\frac{4}{9}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^3\right)(-y+1)=\frac{\cancel{4}^{2}}{9}\cdot\frac{9}{\cancel{2}_{1}}\cdot(-y+1)=2\cdot(-y+1)$$

$$f_1(x)\cdot f_2(y)=\frac{4}{18}x\cdot 2(-y+1)=\frac{4}{9}(-xy+x)=$$

Zmienne są niezależne.

4. (a) Załóżmy, że $X \sim U[0,1]$ i niech $Y = X^n$. Udowodnić, że $f_Y(y) = \frac{y^{1/n-1}}{n}$, dla $0 \leqslant y \leqslant 1$.
(b) Niech $X \sim U[a;b]$. Obliczyć wartości $\mathrm{E}(X), \mathrm{V}(X)$.

a) $f_X(t) = 1 \quad F_X(t) = \int_0^t f(x)\,dx = t$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^n \leq y) = P(X \leq \sqrt[n]{y}) = F_X(\sqrt[n]{y}) = \sqrt[n]{y}$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = (\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n} y^{n-1}$

b) $X \sim U[a,b] \iff f(x) = \frac{1}{b-a}$

$E(X) = \int_a^b f(x) \cdot x\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot x\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b =$

$= (b^2 - a^2) \cdot \frac{1}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$

$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2\,dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\Big|_a^b - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} =$

$= \frac{\cancel{1}}{\cancel{b-a}} \cdot \frac{\cancel{(b-a)}(b^2 + ab + a^2)}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} =$

$= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$

5. Niech X będzie ciągłą zmienną losową i niech $Y = F_X(X)$. Udowodnić, że $Y \sim U[0;1]$.

$F_X(x) \in [0,1] \Rightarrow Y \in [0,1]$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y)$ Dystrybuanta jest rosnąca,

$= P(X \leq F_X^{-1}(y)) =$ z Def $F_X(x)$ więc jest bijekcja

$= F_X(F_X^{-1}(y)) = y$

Skoro $F_Y(y) = y$ to $F_Y'(t) = f_Y(t) = 1$

$Y \sim U[0,1]$

6. Niech $Y = X^2$ (X określona na $\mathbb{R}$). Wykazać, że

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, \quad \text{dla } y > 0.$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) =$$

$$= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(\sqrt{y}) - F_X'(-\sqrt{y}) = \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

7. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość $f(x,y) = \frac{1}{6\pi}$ dla $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leqslant 1$. Obliczyć wartości $\mathrm{E}X$, $\mathrm{E}Y$, $\mathrm{E}(X \cdot Y)$. Czy zmienne X, Y są niezależne?

$$\frac{x^2}{9} \leq 1 - \frac{y^2}{4} \quad / \cdot 9 \qquad \frac{y^2}{4} \leq 1 - \frac{x^2}{9} \quad / \cdot 4$$

$$x^2 \leq 9 - \frac{9y^2}{4} \quad / \sqrt{\ } \qquad y^2 \leq 4 - \frac{4x^2}{9} \quad / \sqrt{\ }$$

$$-\sqrt{9 - \frac{9y^2}{4}} \leq x \leq \sqrt{9 - \frac{9y^2}{4}} \qquad -\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}} \leq y \leq \sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}$$

$$f_X(x) = \int f(x,y)\,dy = \int \frac{1}{6\pi}\,dy = \frac{1}{6\pi} \cdot \left(\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}} + \sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}}{3\pi} \Rightarrow x \in [-3, 3]$$

$$f_Y(y) = \int f(x,y)\,dx = \int \frac{1}{6\pi}\,dx = \frac{\sqrt{9 - \frac{9y^2}{4}}}{3\pi} \Rightarrow y \in [-2, 2]$$

$$\mathrm{E}X = \int f_X(x) \cdot x\,dx = \int_{-3}^{3} \frac{1}{3\pi} \cdot \sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}\, x\,dx = \frac{1}{3\pi} \int_{-3}^{3} \sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}}\, x\,dx$$

$$= \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{2}{3} \cdot \int_{-3}^{3} x\sqrt{9 - x^2}\,dx = 0$$

$$\mathrm{E}Y = \int f_Y(y)\, y\,dy = \int_{-2}^{2} \frac{1}{3\pi} \cdot \sqrt{9 - \frac{9y^2}{4}}\, y\,dy = 0$$

$$\mathrm{E}(XY) = \iint xy\, f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3} xy \frac{1}{6\pi}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} y \frac{1}{6\pi} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-3}^{3} = \int_{-2}^{2} y \frac{1}{6\pi}\, 0 = 0$$

$$f_X(0) \cdot f_Y(0) = \frac{\sqrt{4}}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{9}}{3\pi} = \frac{2}{3\pi^2} \neq \frac{1}{6\pi} = f_{XY}(0,0)$$

8. Niech X podlega standardowemu rozkładowi Cauchy'ego, $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że $Y = \dfrac{1}{X}$ ma również standardowy rozkład Cauchy'ego.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(\frac{1}{X} \le y\right) = P\left(\frac{1}{y} \le X\right) =$$

$$1 - P\left(X < \frac{1}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{1}{y}} f_X(x)dx =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\frac{1}{y}} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = 1 - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx + \int_{0}^{\frac{1}{y}} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(-\infty) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y}\right) + \operatorname{arctg}(0)\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y}\right)}{\pi}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y}\right)}{\pi}\right)' = 0 - \left(-\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{y^2+1}\right) = \frac{1}{\pi(y^2+1)}$$

Rozkład Cauchego