1. (a) Zmienna losowa X ma gęstość $f(x) = 2x$ dla $x \in [0,1]$. Obliczyć gęstość zmiennej $Y = X^2$.
(b) Zmienna losowa X ma gęstość $f(x) = 1.5 \cdot \sqrt{x}$ dla $x \in [0,1]$. Wyznaczyć gęstość zmiennej $Y = X^2$.
(c) Niech $X \sim U[-2,2]$. Znaleźć rozkład (gęstość) zmiennej $Y = |X|$.
(d) Dla $X \sim U[-1,1]$ wyznaczyć rozkłady zmiennych $Y = X^3$, $Z = X^2$.

a) $Y \in [0,1]$

$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t) \overset{[0,1]}{=} P(X \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t})$

$F_Y(t) = \int_0^t f_Y(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{t}} f_X(x)\,dx = F_X(\sqrt{t})$

$f_Y(t) = F_Y'(t) = F_X'(\sqrt{t}) = f_X(\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = 1$

b) $Y \in [0,1]$

$f_Y(t) = F_Y'(t) = F_X'(\sqrt{t}) = f_X(\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{3 \cdot t^{\frac{1}{4}}}{2} \cdot \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}} =$

$= \frac{3}{4} \cdot t^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt{\sqrt{t}}}$

c) $f_X = 1/4 \; : x \in [-2,2]$

$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(|X| \leq t) = P(-t \leq X \leq t)$

$F_Y(t) = P(X \leq t) - P(X \leq -t) = F_X(t) - F_X(-t)$

$Y \in [0,2]$

$f_Y(t) = F_Y'(t) = (F_X(t) - F_X(-t))' = F_X'(t) - F_X'(-t) \cdot (-1) =$

$= F_X'(t) + F_X'(-t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

d) $f_X(t) = \frac{1}{2} \; : \; x \in [-1,1]$

i° $F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X^3 \leq t) = P(X \leq \sqrt[3]{t}) = F_X(\sqrt[3]{t})$

$$f_y(t) = F_y'(t) = F_x'(\sqrt[3]{t}) = f_x(\sqrt[3]{t})\cdot\left(t^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{6\sqrt[3]{t}}$$

2° $$F_Z(t) = P(Z \le t) = P(X^2 \le t) = P(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) =$$

$$= P(X \le \sqrt{t}) - P(X \le -\sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$$

$$f_y(t) = F_y'(t) = \left(F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})\right)' = f_X(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}} + f_X(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{t} + \frac{1}{4}\sqrt{t} = \frac{1}{2}\sqrt{t}$$

3. Zmienna X ma rozkład $B(n_1, p)$ a zmienna Y rozkład $B(n_2, p)$. Zmienne są niezależne. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład $B(n_1 + n_2, p)$.

Skoro zmienne są niezależne to $P(X=K \wedge Y=L) =$

$= P(X=k) \cdot P(Y=L)$. Skoro $Z = X + Y$ oraz $\begin{matrix} X>0 \\ Y>0 \end{matrix}$

$$P(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i \wedge Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) \cdot P(Y=k-i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \cdot \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2-k-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i}\binom{n_2}{k-i} p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} = B(n_1+n_2, p)$$

4. Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład Poissona z parametrami λ_1 i λ_2. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$.

$$P = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$P(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) \cdot P(Y=k-i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^i}{i!} \cdot e^{-\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i \cdot \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} \cdot \frac{k!}{k!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

5. $\Omega = (0,5)$. $\mathcal{F}$ (σ-ciało zdarzeń) jest takie, że $(1,3) \in \mathcal{F}, (2,4) \in \mathcal{F}$. Wymienić (wyznaczyć) wszystkie elementy rodziny $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{0,4,5\}, \{0,1,5\},$

$\{1,2,3,4\}, \{0,5\}, \{0,1,4,5\}, \{2,3\}, \{0,2,3,5\}, \{1,4\},$

$\{0,2,3,4,5\}, \{1\}, \{0,1,2,3,5\}, \{4\},$

C

C

6. $\Omega, \mathcal{F}$ - jak w zadaniu 5. Podać przykład funkcji $X : \Omega \to \mathbf{R}$, która nie jest zmienną losową.

$$X(t) = \begin{cases} 1 & : t = S \\ 0 & : \text{w.p.p.} \end{cases}$$

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \{S\} & : B = 1 \\ \{0, 1, 2, 3, 4\} & : B = 0 \end{cases}$$

7. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość postaci $f(x, y) = 15\,x^2 y$ na obszarze ograniczonym prostymi $y = 0$, $x = 0$, $y = 2 - 2x$. Wyznaczyć gęstość brzegową $f_1(x)$ oraz wartość oczekiwaną EX.

$$f_1(x) = \int_0^{2-2x} 15x^2 y\,dy = 15x^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{2-2x} = 15x^2 \cdot \frac{(2-2x)^2}{2} =$$

$$= 15x^2 \cdot \frac{4 - 8x + 4x^2}{2} = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 \quad \text{dla } x \in [0, 1]$$

$$EX = \int_0^1 x \cdot f_1(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot (30x^4 - 60x^3 + 30x^2)\,dx = \frac{1}{2}$$

8. Dwuwymiarowa gęstość zmiennej (X,Y) to $f(x,y) = 6xy$, dla $0 < x < 2$, $0 < y < 1 - \frac{1}{2}x$. Znaleźć gęstości brzegowe $f_1(x)$, $f_2(y)$ zmiennych X, Y.

$$f_1(x) = \int_0^{1-\frac{1}{2}x} 6xy\,dy = 6x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-\frac{1}{2}x} = 6x \cdot \frac{(1-\frac{1}{2}x)^2}{2} = 3x\left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}x^3 - 3x^2 - 3$$

$$f_2(x) = \int_0^{2-2y} 6xy\,dx = 6y \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{2-2y} = 3y \cdot (4 - 8y + 4y^2) =$$

$$= 12y^3 - 8y^2 + 12y$$

9. Czytelnie i starannie - bez korzystania z notatek - napisać wielkie i małe greckie litery: alfę α, betę β, (d)zetę ζ, etę η, lambdę λ, chi χ, ksi ξ, fi ϕ, rho ρ, sigmę σ.

ALPHA - α A

BETA - β B

ZETA - ζ Z

ETA - η H

LAMBDA - λ Λ

CHI - χ X

KSI - ξ Ξ

FI - ϕ Φ

RHO - ρ P

SIGMA - σ Σ

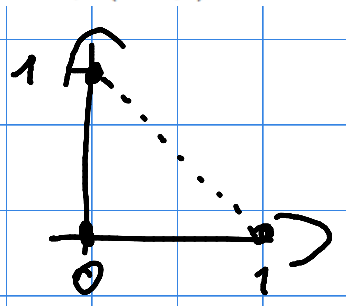
11. Na obszarze $[0, 2] \times [0, 1]$ określona jest zmienna losowa o gęstości $f(x, y) = x\,y$. Czy zmienne brzegowe X, Y są niezależne?

$$f_1(x) = \int_0^1 xy\,dy = x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}x$$

$$f_2(y) = \int_0^2 xy\,dx = y \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2y$$

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{2}x \cdot 2y = xy = f(x, y) \checkmark$$

12. Na obszarze ograniczonym punktami $(0,0),(0,1),(1,0)$ określona jest zmienna losowa o gęstości $f(x,y) = 24\,xy$. Czy zmienne brzegowe X, Y są niezależne?



$$f_1(x) = \int_0^1 24xy\,dy = 24x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 12x$$

$$f_2(y) = \int_0^1 24xy\,dx = 24y \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 12y$$

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = 12x \cdot 12y = 144xy \neq f(x,y) \quad X$$