2. Zakładamy, że znamy wartość parametru σ: $\sigma^2 = 9$. Stawiamy hipotezę $H_0 : \mu = 1.5$. Wyznaczyć wartość dystrybuanty $\Phi(z)$. Powtórzyć to postępowanie dla hipotezy $H_0 : \mu = 1.75$.

Z test:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

1° $\mu = 1{,}5 \quad \sigma = 3 \quad \bar{X} = 2.08$

$$\frac{2{,}08 - 1{,}5}{3} = \frac{0{,}58}{3} = 0{,}19(3) = z$$

$$\Phi(z) = \Phi(0{,}19) = 0{,}57535$$

2° $\mu = 1{,}75 \quad \sigma = 3 \quad \bar{X} = 2{,}08$

$$\frac{2{,}08 - 1{,}75}{3} = \frac{0{,}33}{3} = 0{,}11$$

$$\Phi(0{,}11) = 0{,}54380$$

3. Nie znamy wartości parametru σ. Stawiamy hipotezę $H_0 : \mu = 1.5$. Wyznaczyć wartość dystrybuanty $t(49)$. Powtórzyć to postępowanie dla hipotezy $H_0 : \mu = 1.75$.

Statystyka testowa t:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$$

1° $\mu = 1,5$

$$\frac{2,08 - 1,5}{3}\sqrt{50} = 0,19 \cdot 7,07 = 1,3433 = t$$

$$\Phi(1,34) = 0,90988$$

2° $\mu = 1,75$

$$0,11 \cdot 7,07 = 0,77$$

$$\Phi(0,77) = 0,77935$$

4. Znaleźć estymator największej wiarygodności $\hat{\lambda}$ parametru λ dla obserwacji $x_1, \ldots, x_n$ rozkładu zmiennej $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

$$P(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=0}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \frac{\lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=0}^{n} x_i!}$$

$$\log L(\lambda) = \underset{=S}{\left(\sum^{n} x_i\right)} \log \lambda - n\lambda - \underset{=C}{\sum^{n} \log(x_i!)}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \log L(\lambda) = \frac{S}{\lambda} - n = 0 \implies \lambda = \frac{S}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} x_i$$

6. Obserwacje $x_1, \ldots, x_n$ pochodzą z rozkładu $U[\theta - d/2, \theta + d/2]$.

(a) Znaleźć estymator MLE $\hat{d}$ parametru d przy założeniu, że znamy wartość parametru θ.

(b) Nie znamy wartości tych parametrów. Znaleźć ich estymatory $\hat{d}, \hat{\theta}$.

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\theta + \frac{d}{2} - \theta + \frac{d}{2}} = \frac{1}{d} & : x \in [\theta - \frac{d}{2}, \theta + \frac{d}{2}] \\ 0 & : \text{wpp} \end{cases}$$

$$L(d) = \frac{1}{d^n} \cdot \mathbb{I}\left\{\max_i |x_i - \theta| \le \frac{d}{2}\right\}$$

$$\hat{d} = 2 \cdot \max_i |x_i - \theta|$$

b)

$$\min x_i = \theta - \frac{d}{2}$$
$$\max x_i = \theta + \frac{d}{2}$$

$$\hat{d} = \max x_i - \min x_i \qquad \theta \, \frac{\min x_i + \max x_i}{2}$$

7. Niezależne zmienne losowe $X_1, \dots, X_n$ mają rozkład $N(\mu, \sigma^2)$ każda. Wyznaczyć $\mathrm{E}(S^2)$ oraz $\mathrm{V}(S^2)$.