1. Zmienna losowa (X,Y) ma gęstość określoną wzorem $f(x,y) = xy$ na $[0,1] \times [0,2]$. Wyznaczyć dystrybuantę $F(s,t)$ tej zmiennej.

$$F(s,t) = \int_0^s \int_0^t f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^s \int_0^t xy\,dy\,dx = \int_0^s x \tfrac{1}{2} y^2 \Big|_0^t dx =$$

$$= \int_0^s x \tfrac{1}{2} t^2\,dx = \tfrac{1}{2} x^2 \tfrac{1}{2} t^2 \Big|_0^s = \tfrac{1}{4} s^2 t^2$$

2. Niezależne zmienne losowe $X_1, \ldots, X_{10}$ podlegają rozkładowi Poissona z parametrem $\lambda = 2$. Znaleźć oszacowanie dla $\mathrm{P}\left(\sum X_i \geqslant 40\right)$. Proszę użyć nierówności Markova i Chebysheva. Porównać z wynikiem dokładnym.

$$S = \sum_{i=1}^{10} X_i \qquad S \sim \mathrm{Poisson}(2 \cdot 10)$$

$E(S) = 20$

$V(S) = 20$

Markov:

$$P(S \geqslant a) \leqslant \frac{E(S)}{a} = 0{,}5$$

Czebyszew:

$$P(|S - E(S)| \geqslant k) \leqslant \frac{V(S)}{k^2}$$

$$P(|S - 20| \geqslant 20) \leqslant \frac{20}{400} = 0{,}05$$

Dokładny

$$P(S \geqslant 40) = 0.00005$$

[**Z. 3–5**] Zakładamy, że $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $a \geqslant 3$.

3. (Markov) Podać oszacowanie dla $P(X \geqslant a\lambda)$. (Chebyshev) Wykazać, że zachodzi nierówność $P(X \geqslant a\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda(a-1)^2}$.

M

$$P(X \geq a\lambda) \leq \frac{\lambda}{a\lambda} = \frac{1}{a} = \frac{1}{3}$$

Ch

$$P(X \geq a\lambda) \leq P(|X| \geq a\lambda) = P(|X-\lambda| \geq a\lambda - \lambda) = P(|X-\lambda| \geq \lambda(a-1)) =$$

$$= P(|X-\lambda| \leq \sqrt{\lambda}\underbrace{\sqrt{\lambda}(a-1)}_{k}) \leq \frac{1}{\underbrace{\lambda(a-1)^2}_{k^2}}$$

4. (Chernoff) Wykazać, że $P(X \geqslant a\lambda) \leqslant \left(\frac{1}{a}\right)^{a\lambda} \exp\left[\lambda(a-1)\right]$.

$$P(X \geq a\lambda) = P(X-\lambda \geq \lambda(a-1)) = P(\exp(X-\lambda) \geq \exp(\lambda(a-1))) \leq$$

$$\leq M(1)\exp(-\lambda(a-1)) = \exp(\lambda(e-1) - \lambda(a-1)) =$$

$$= \exp(\lambda(e-1) - 2\lambda(a-1) + \lambda(a-1)) =$$

$$= \exp(\lambda e - \lambda - 2\lambda a + 2\lambda) \cdot \exp(\lambda(a-1)) =$$

$$= \exp(\lambda(e - 2a + 1))$$

5. **(2p).** Niech $\lambda = 10$, $a \in \{2, 4, 6\}$. Podać wartość dokładną $\mathrm{P}(X \geqslant a\lambda)$ oraz oszacowania Markova, Chebysheva i Chernoffa.

$M = \frac{1}{a}$ $\quad$ $Cheb = P(X - \lambda \geqslant \lambda(a-1)) \leq \frac{1}{10(a-1)^2}$

$Cher = \left(\frac{1}{a}\right)^{a\lambda} \exp(\lambda(a-1))$

a	M	Cheb	Cher
2	$1/2$	$1/10$	$e^{10}/2^{20}$
4	$1/4$	$1/90$	$e^{30}/4^{40}$
6	$1/6$	$1/250$	$e^{50}/6^{60}$

6. **(2p).** Znaleźć oszacowanie Chernoffa dla $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Jak w poprzednich zadaniach, pytamy o $\mathrm{P}(X \geqslant a\mu)$.

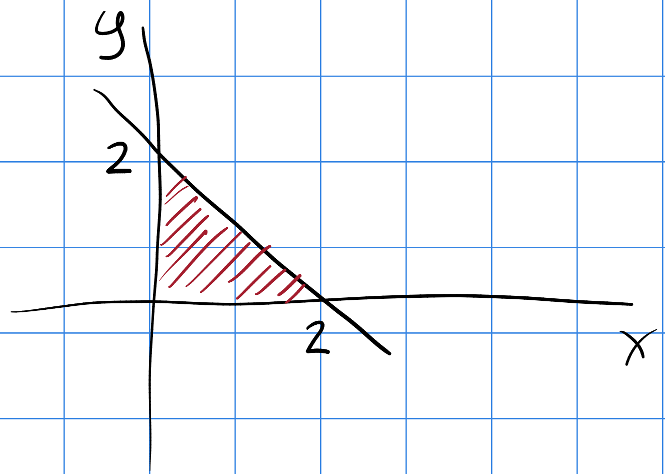
$$P(X \geq a\mu) \leq e^{ta\mu} M(t) = e^{-ta\mu} e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = f(t)$$

$$f'(t) = \underbrace{e^{\left(-ta\mu + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}}_{\neq 0} (-a\mu + \mu + \sigma^2 t) = 0$$

$$-a\mu + \mu + \sigma^2 t = 0$$

$$t = \frac{a\mu - \mu}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}(a-1)\mu$$

7. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość określoną wzorem $f(x, y) = 3/2 \cdot xy$ na obszarze ograniczonym przez osie współrzędnych i prostą $y = 2 - x$. Wyznaczyć dystrybuantę $F(s, t)$ tej zmiennej.



Zmienne są zależne

$(s,t) \to (x,y)$

$$x \in [0, \min(2,s)]$$

$$y \in [0, \min(2-x,t)]$$

$$F(s,t) = \int_0^{\min(2,s)} \int_0^{\min(2-x,t)} \frac{3}{2} xy \, dy \, dx = \frac{3}{4} \int_0^{\min(2,s)} x \cdot y^2 \Big|_0^{\min(2-x,t)} dx$$

Przypadki:

1) $t < 2-x$: $\frac{3}{4} \int_0^{\min(2,s)} x t^2 dx = \frac{3}{8} t^2 \min(2,s)^2$

a) $s < 2 \Rightarrow \frac{3}{8} t^2 s^2$

b) $s \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{8} t^2 2^2 = \frac{3}{2} t^2$

2) $t \geq 2-x$: $\frac{3}{4} \int_0^{\min(2,s)} x(2-x)^2 dx =$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{\min(2,s)} x(4-4x+x^2) dx = \int_0^{\min(2,s)} 3x - 3x^2 + \frac{3}{4} x^3 dx =$$

$$= \frac{3}{2} \min(2,s)^2 - \min(2,s)^3 + \frac{3}{16} \min(2,s)^4$$

a) $s < 2 \Rightarrow \frac{3}{2} s^2 - s^3 + \frac{3}{16} s^2$

b) $s \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{2} s^2 - 2^3 + \frac{3}{16} s^4 = 1$