

1. Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma gęstość określoną wzorem  $f(x, y) = xy$  na  $[0, 1] \times [0, 2]$ .  
Wyznaczyć dystrybuantę  $F(s, t)$  tej zmiennej.

2. Niezależne zmienne losowe  $X_1, \dots, X_{10}$  podlegają rozkładowi Poissona z parametrem  $\lambda = 2$ . Znaleźć oszacowanie dla  $P(\sum X_i \geq 40)$ . Proszę użyć nierówności Markowa i Chebysheva. Porównać z wynikiem dokładnym.

$$S = \sum_{i=1}^{10} X_i \quad S \sim \text{Poisson}(2 \cdot 10)$$

$$E(S) = 20$$

$$V(S) = 20$$

Markov:

$$P(S \geq a) \leq \frac{E(S)}{a} = 0,5$$

Chebyshev:

$$P(|S - E(S)| \geq k) \leq \frac{V(S)}{k^2}$$

$$P(|S - 20| \geq 20) \leq \frac{20}{400} = 0,05$$

Dokładny

$$P(S \geq 40) = 0.00005$$

[Z. 3–5] Zakładamy, że  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $a \geq 3$ .

3. (Markov) Podać oszacowanie dla  $P(X \geq a\lambda)$ . (Chebyshev) Wykazać, że zachodzi nierówność  $P(X \geq a\lambda) \leq \frac{1}{\lambda(a-1)^2}$ .

$$M \quad P(X \geq a\lambda) \leq \frac{\lambda}{a\lambda} = \frac{1}{a} = \frac{1}{3}$$

$$Ch \quad P(X \geq a\lambda) \leq P(|X| \geq a\lambda) = P(|X - \lambda| \geq a\lambda - \lambda) = P(|X - \lambda| \geq \lambda(a-1)) = \\ = P(|X - \lambda| \leq \underbrace{\lambda(a-1)}_k) \leq \underbrace{\frac{1}{\lambda(a-1)^2}}_{k^2}$$

4. (Chernoff) Wykazać, że  $P(X \geq a\lambda) \leq \left(\frac{1}{a}\right)^{a\lambda} \exp[\lambda(a-1)]$ .

$$\begin{aligned} P(X \geq a\lambda) &= P(X - \lambda \geq \lambda(a-1)) = P(\exp(X - \lambda) \geq \exp(\lambda(a-1))) \leq \\ &\leq M(1) \exp(-\lambda(a-1)) = \exp(\lambda(e-1) - \lambda(a-1)) = \\ &= \exp(\lambda(e-1) - 2\lambda(a-1) + \lambda(a-1)) = \\ &= \exp(\lambda e - \lambda - 2\lambda a + 2\lambda) \cdot \exp(\lambda(a-1)) = \\ &= \exp(\lambda(e - 2a + 1)) \end{aligned}$$

5. (2p). Niech  $\lambda = 10$ ,  $a \in \{2, 4, 6\}$ . Podać wartość dokładną  $P(X \geq a\lambda)$  oraz oszacowania Markova, Chebysheva i Chernoffa.

$$M = \frac{1}{a} \quad \text{Cheb} = P(X - \lambda \geq \lambda(a-1)) \leq \frac{1}{10(a-1)^2}$$

$$\text{Cher} = \left(\frac{1}{a}\right)^{a\lambda} \exp(\lambda(a-1))$$

a	M	Cheb	Cher
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$e^{10} / 2^{20}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{90}$	$e^{30} / 4^{40}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{250}$	$e^{50} / 6^{60}$