Zadanie nr 3

Rafał Leja
340879
Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

20 maja 2025

Dane:

$$X_{30}, X_{150}, X_{600} \sim B(n,p), \text{gdzie } p = 1/3, n = 30, 150, 600$$

Prawdopodobieństwo wprost:

Prawdopodobieństwo rozkładu Bernoulliego dla $X \sim B(n,p)$ jest dane wzorem:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, n$$

Więc, dla X_n mamy:

$$\begin{aligned} P(a \leq X_n \leq b) &= \sum_{k=a}^{b} P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=a}^{b} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Co nam daje:

$$P(8 \leq X_{30} \leq 12) = \sum_{k=8}^{12} \binom{30}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{30-k} \approx 0,66720608$$

$$P(40 \leq X_{150} \leq 60) = \sum_{k=40}^{60} \binom{150}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{150-k} \approx 0,93151283$$

$$P(160 \leq X_{600} \leq 240) = \sum_{k=160}^{240} \binom{600}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{600-k} \approx 0,99955211$$

Przybliżenia Czebyszewa:

Wariancja rozkładu Bernoulliego jest dana wzorem:

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

a wartość oczekiwana:

$$\mu = np$$

zatem, nierówność Czebyszewa dla rozkładu Bernoulliego jest następująca:

$$P(|X_n - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \implies P(|X_n - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Dla X_{30} mamy:

$$\mu_{30} = 30 \cdot \frac{1}{3} = 10$$

$$\sigma_{30} = \sqrt{30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 2,58$$

$$8 \leq X_{30} \leq 12 \implies |X_{30} - 10| < 2 \implies k = \frac{2}{2,58} \approx 0,775$$

$$P(|X_{30} - 10| < 2) \geq 1 - \frac{1}{(0,775)^2} \approx 1 - 1,65 = -0,65 \text{ (co jest niemożliwe)}$$

Dla X_{150} mamy analogicznie:

$$\mu_{150} = 150 \cdot \frac{1}{3} = 50$$

$$\sigma_{150} = \sqrt{150 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 6,12$$

$$40 \leq X_{150} \leq 60 \implies |X_{150} - 50| < 10 \implies k = \frac{10}{6,12} \approx 1,63$$

$$P(|X_{150} - 50| < 10) \geq 1 - \frac{1}{(1,63)^2} \approx 1 - 0,375 = 0,625$$

Dla X_{600} mamy:

$$\mu_{600} = 600 \cdot \frac{1}{3} = 200$$

$$\sigma_{600} = \sqrt{600 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 12,65$$

$$160 \leq X_{600} \leq 240 \implies |X_{600} - 200| < 40 \implies k = \frac{40}{12,65} \approx 3,16$$

$$P(|X_{600} - 200| < 40) \geq 1 - \frac{1}{(3,16)^2} \approx 1 - 0,099 = 0,901$$

Przybliżenie normalne:

Zgodnie z twierdzeniem De Moivre'a-Laplace'a, dla dużych n rozkład $B(n, p)$ można przybliżyć rozkładem normalnym $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie:

$$\begin{aligned} \mu &= np \\ \sigma^2 &= np(1-p) \end{aligned}$$

Zamieniając na rozkład standardowy, mamy:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X_n - \mu}{\sigma} \sim N(0,1), \text{wtedy} \\ P(X_n \leq a) &= P(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}) \end{aligned}$$

jeśli a jest liczbą całkowitą, to musimy dodać 0,5 do a (przybliżenie ciągłe):

$$P(X_n \leq a) = P(Z \leq \frac{a + 0,5 - \mu}{\sigma})$$

Zatem, dla X_{30} mamy:

$$\begin{aligned} \mu_{30} &= 30 \cdot \frac{1}{3} = 10 \\ \sigma_{30} &= \sqrt{30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 2,58 \\ Z &= \frac{X_{30} - 10}{2,58} \sim N(0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(8 \leq X_{30} \leq 12) &= P(X_{30} \leq 12) - P(X_{30} \leq 8) \\ &= P(Z \leq \frac{12 + 0,5 - 10}{2,58}) - P(Z \leq \frac{8 + 0,5 - 10}{2,58}) \\ &= \Phi(\frac{2,5}{2,58}) - \Phi(\frac{-1,5}{2,58}) \\ &= \Phi(0,968) - \Phi(-0,581) \\ &= 0,833 - 0,281 \\ &= 0,552 \end{aligned}$$