1. Starannie i bez korzystania z notatek napisać wielkie i małe litery: deltę, sigmę w trzech wersjach (wielką, małą, małą na końcu wyrazu), oraz gęstości rozkładów N(μ, σ^2), Gamma(b, p).

delta Δ δ sigma Σ σ ς

$N(\mu, \sigma^2) \sim f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$

$Gamma(b, p) \sim f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{(-bx)}$

2. Zakładamy, że $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład, $f(x) > 0$ dla $x \in [0,1]$. Obliczamy gęstość zmiennej $Y_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Podać granice całkowania (układy nierówności) dla $Y_k = X_k,\ k = 2, \ldots, n$.

I Skoro granice $X_k \in [0, 1)$ to granie Y_k to też $[0, 1]$

II $Y_k = X_k + X_{k+1} + \cdots + X_n$

$$0 \leq X_i \leq 1$$

$$0 \leq \sum_{i=k}^{n} x_i \leq \sum_{i=k}^{n} 1$$

$$0 \leq Y_k \leq n-k \qquad Y_k \in [0, n-k]$$

3. Dane są ciągłe, niezależne zmienne losowe X, Y. Udowodnić, że $\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$.

$$f_x(x) f_y(y) = f(x, y)$$

$$E(X) \cdot E(Y) = \int x \cdot f_x(x) dx \cdot \int y f_y(y) dy =$$

$$= \iint x \cdot y \, f_x(x) \cdot f_y(y) dx dy = \iint x \cdot y \, f(x, y) \, dx dy =$$

$$= E(X, Y)$$

4. Niech $f(x), F(x)$ będą odpowiednio gęstością i dystrybuantą zmiennej losowej określonej na $\mathbb{R}$. Wykazać, że $\int_{-\infty}^{t} f(x)\, F(x)\, dx = \frac{1}{2}[F(t)]^2$.

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\, F(x)\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = F(x) \\ du = f(x)\, dx \end{matrix} \right\} = \int_{-\infty}^{t} u\, du$$

$$= \frac{u^2}{2} \Big|_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2} F(t)^2 - \frac{1}{2} \underbrace{F(-\infty)^2}_{=0} = \frac{1}{2} F(t)^2$$

5. Zakładamy, że zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ są niezależne i podlegają rozkładowi $N(0,1)$. W jaki sposób można utworzyć poniższe zmienne:

(a) $U \sim \chi^2(k)$,

(b) $T \sim \mathrm{t}(n)$,

a)

$$U = \sum_{i=1}^{k} Y_i^2 \qquad U \sim \text{Gamma}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{n}{2}\right) \equiv \chi^2(n)$$

b)

$$T = \frac{U}{\sqrt{Z}} \sqrt{n} \qquad U \to N(0,1)$$

$$\sqrt{Z} \to \chi^2(n)$$

$$T = \frac{Y_1}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} X_i^2}} \sqrt{n}$$

U i Z niezależne

6. Zmienna losowa X ma MGF o postaci $M_X(t)$. Zmienna losowa Y jest pewną funkcją zmiennej X. Co można powiedzieć o Y (założenia i od jakich **zmiennych** zależy Y) jeżeli:

(a) $M_Y(t) = M_X(3t) \cdot M_X(4t)$,
(b) $M_Y(t) = e^{3t} M_X(2t)$,
(c) $M_Y(t) = 4M_X(t)$.

1° $Y = aX + b \Rightarrow M_Y(t) = e^{tb} \cdot M_X(at)$
2° $Z = X + Y \Rightarrow M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

a) $M_Y(t) = M_X(3t) \cdot M_X(4t) \overset{1^\circ}{=} M_{3X}(t) \cdot M_{4X}(t) \overset{2^\circ}{=} M_{3X+4X}(t) \Rightarrow Y = 7X$

b) $M_Y(t) = e^{3t} M_X(2t) \overset{1^\circ}{=} M_{2X+3}(t) \Rightarrow Y = 2X+3$

c) $M_Y(t) = 4M_X(t)$

MGF dla $t=0$ musi być równy $1 = E[e^0]$

$M_Y(0) = 4 \cdot M_X(0) = 4 \cdot 1 = 4 \neq 1$

M_Y nie jest mgfem

10. Ciągłe zmienne losowe X, Y są niezależne. Funkcje $X = X(U)$, $Y = Y(W)$ są odwracalne. Wykazać, że zmienne U, W są niezależne.