

# Zadanie nr 3

Rafał Leja

340879

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

20 maja 2025

**Dane:**

$$X_{30}, X_{150}, X_{600} \sim B(n, p), \text{ gdzie } p = 1/3, n = 30, 150, 600$$

## Prawdopodobieństwo wprost:

Prawdopodobieństwo rozkładu Bernoulliego dla  $X \sim B(n, p)$  jest dane wzorem:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n$$

Więc, dla  $X_n$  mamy:

$$\begin{aligned} P(a \leq X_n \leq b) &= \sum_{k=a}^b P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=a}^b \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Co nam daje:

$$P(8 \leq X_{30} \leq 12) = \sum_{k=8}^{12} \binom{30}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{30-k} \approx 0,66720608$$

$$P(40 \leq X_{150} \leq 60) = \sum_{k=40}^{60} \binom{150}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{150-k} \approx 0,93151283$$

$$P(160 \leq X_{600} \leq 240) = \sum_{k=160}^{240} \binom{600}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{600-k} \approx 0,99955211$$

## Przybliżenia Czebyszewa:

Wariancja rozkładu Bernoulliego jest dana wzorem:

$$\sigma^2 = np(1-p)$$

a wartość oczekiwana:

$$\mu = np$$

zatem, nierówność Czebyszewa dla rozkładu Bernoulliego jest następująca:

$$P(|X_n - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \implies P(|X_n - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Dla  $X_{30}$  mamy:

$$\mu_{30} = 30 \cdot \frac{1}{3} = 10$$

$$\sigma_{30} = \sqrt{30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 2,58$$

$$8 \leq X_{30} \leq 12 \implies |X_{30} - 10| < 2 \implies k = \frac{2}{2,58} \approx 0,775$$

$$P(|X_{30} - 10| < 2) \geq 1 - \frac{1}{(0,775)^2} \approx 1 - 1,65 = -0,65 \text{ (co jest niemożliwe)}$$

Dla  $X_{150}$  mamy analogicznie:

$$\mu_{150} = 150 \cdot \frac{1}{3} = 50$$

$$\sigma_{150} = \sqrt{150 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 6,12$$

$$40 \leq X_{150} \leq 60 \implies |X_{150} - 50| < 10 \implies k = \frac{10}{6,12} \approx 1,63$$

$$P(|X_{150} - 50| < 10) \geq 1 - \frac{1}{(1,63)^2} \approx 1 - 0,375 = 0,625$$

Dla  $X_{600}$  mamy:

$$\mu_{600} = 600 \cdot \frac{1}{3} = 200$$

$$\sigma_{600} = \sqrt{600 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 12,65$$

$$160 \leq X_{600} \leq 240 \implies |X_{600} - 200| < 40 \implies k = \frac{40}{12,65} \approx 3,16$$

$$P(|X_{600} - 200| < 40) \geq 1 - \frac{1}{(3,16)^2} \approx 1 - 0,099 = 0,901$$

## Przybliżenie normalne:

Zgodnie z twierdzeniem De Moivre'a-Laplace'a, dla dużych  $n$  rozkład  $B(n, p)$  można przybliżyć rozkładem normalnym  $N(\mu, \sigma^2)$ , gdzie:

$$\begin{aligned}\mu &= np \\ \sigma^2 &= np(1-p)\end{aligned}$$

Zamieniając na rozkład standardowy, mamy:

$$\begin{aligned}Z &= \frac{X_n - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1), \text{ wtedy} \\ P(X_n \leq a) &= P(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{a - \mu}{\sigma})\end{aligned}$$

jeśli  $a$  jest liczbą całkowitą, to musimy dodać 0,5 do  $a$  (przybliżenie ciągłe):

$$P(X_n \leq a) = P(Z \leq \frac{a + 0,5 - \mu}{\sigma})$$

Zatem, dla  $X_{30}$  mamy:

$$\begin{aligned}\mu_{30} &= 30 \cdot \frac{1}{3} = 10 \\ \sigma_{30} &= \sqrt{30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 2,58 \\ Z &= \frac{X_{30} - 10}{2,58} \sim N(0, 1) \\ P(8 \leq X_{30} \leq 12) &= P(X_{30} \leq 12) - P(X_{30} \leq 8) \\ &= P(Z \leq \frac{12 + 0,5 - 10}{2,58}) - P(Z \leq \frac{8 - 0,5 - 10}{2,58}) \\ &= \Phi(\frac{2,5}{2,58}) - \Phi(\frac{-2,5}{2,58}) \\ &= \Phi(0,97) - \Phi(-0,97) \\ &= 0,834 - 0,165 \\ &= 0,669\end{aligned}$$

Dla  $X_{150}$  mamy:

$$\begin{aligned}\mu_{150} &= 150 \cdot \frac{1}{3} = 50 \\ \sigma_{150} &= \sqrt{150 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 6,12 \\ Z &= \frac{X_{150} - 50}{6,12} \sim N(0, 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(40 \leq X_{150} \leq 60) &= P(X_{150} \leq 60) - P(X_{150} \leq 40) \\
&= P\left(Z \leq \frac{60 + 0,5 - 50}{6,12}\right) - P\left(Z \leq \frac{40 - 0,5 - 50}{6,12}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{10,5}{6,12}\right) - \Phi\left(\frac{-10,5}{6,12}\right) \\
&= \Phi(1,71) - \Phi(-1,71) \\
&= 0,912
\end{aligned}$$

Dla  $X_{600}$  mamy:

$$\begin{aligned}
\mu_{600} &= 600 \cdot \frac{1}{3} = 200 \\
\sigma_{600} &= \sqrt{600 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} \approx 12,65 \\
Z &= \frac{X_{600} - 200}{12,65} \sim N(0,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(160 \leq X_{600} \leq 240) &= P(X_{600} \leq 240) - P(X_{600} \leq 160) \\
&= P\left(Z \leq \frac{240 + 0,5 - 200}{12,65}\right) - P\left(Z \leq \frac{160 - 0,5 - 200}{12,65}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{40,5}{12,65}\right) - \Phi\left(\frac{-40,5}{12,65}\right) \\
&= \Phi(3,20) - \Phi(-3,20) \\
&= 0,999
\end{aligned}$$

## Nierówności Chernoffa:

Nierówności Chernoffa dla rozkładu Bernoulliego są następujące:

$$\begin{aligned}
P(X_n \geq a) &\leq e^{-ta} M(t) = e^{-ta} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{np} \\
P(X_n \leq a) &\leq e^{-\frac{(np-a)^2}{2n}}
\end{aligned}$$