1. Niech $X \sim \text{Poisson}(8)$. $P(X \geqslant k)$ – podajemy wartość dokładną, CLT – przybliżenie z twierdzenia granicznego. Uzupełnić tabelę:

k	$P(X \geqslant k)$	CLT
11	0.18411	0.18838
14	0.03418	0,01725
17	0,00073	0.00133
20	0,00006	0,00009

$$P(X \geq k) \simeq 1 - P\left(Z < \frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$

4. Niech $X \sim \mathrm{B}(10, 0.5)$. $P(X \geqslant k)$ – podajemy wartość dokładną, CLT – przybliżenie z twierdzenia granicznego. Uzupełnić tabelę:

k	$P(X \geqslant k)$	CLT
6	0.37695	0.37591
8	0.05469	0,11507
9	0,01075	0.01343

$$Z = \frac{8 - 10 \cdot 0{,}5}{10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = \frac{8-5}{2{,}5} = 1{,}2$$

7. Niech $X_1 \sim N(2,4)$, $X_2 \sim N(3,9)$, $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 1$. Niech dalej $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = 2X_1 - X_2$. Korzystając z zadania 8 z listy nr 1 obliczyć wartości oczekiwane, wariancje i kowariancję zmiennych Y_1, Y_2.

$$X = [X_1, X_2]^T, \quad Y = [Y_1, Y_2]^T, \quad \mu = [2, 3]^T, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$Y = AX \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ 2X_1 - X_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Wtedy:

$$Y \sim N(A\mu, A\Sigma A^T)$$

$$A\mu = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow EY_1 \\ \leftarrow EY_2 \end{array}$$

$$A\Sigma A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow VY_1 \\ \leftarrow VY_2 \end{array}$$

8. Niech $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Używając nierówności Chernoffa oszacować prawdopodobieństwo $P(0.5\lambda < X < 1.5\lambda)$.

$$P(0{,}5\lambda < X < 1{,}5\lambda) = 1 - (P(X \le 0{,}5\lambda) + P(X \ge 1{,}5\lambda))$$

$$P(X \le \tfrac{\lambda}{2}) \le M(t)e^{-t\frac{\lambda}{2}} = e^{-t\frac{\lambda}{2}} e^{\lambda(e^t-1)} = f(t)$$

$$f'(t) = e^{\lambda(e^t - 1 - \frac{t}{2})} \lambda(e^t - \tfrac{1}{2}) = 0 \Rightarrow e^t = \tfrac{1}{2}$$

$$t = \ln\tfrac{1}{2} < 0$$

$$P(X \le \tfrac{\lambda}{2}) \le f(\ln\tfrac{1}{2}) = e^{-\frac{\lambda}{2}(\ln\frac{1}{2}+1)}$$

$$P(X \ge \tfrac{3\lambda}{2}) \le e^{\lambda(e^t - \frac{3t}{2} - 1)} = f(t)$$

$$f'(t) = e^{\lambda(e^t - \frac{3t}{2} - 1)} \lambda(e^t - \tfrac{3}{2}) = 0$$

$$e^t = \tfrac{3}{2} \Rightarrow t = \ln\tfrac{3}{2}$$

$$P(X \ge \tfrac{3\lambda}{2}) \le e^{-\frac{\lambda}{2}(3\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2})}$$

$$P(0{,}5\lambda < X < 1{,}5\lambda) = 1 -$$

9. Niech $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Wykorzystać twierdzenie graniczne do oszacowania ppb jak w zadaniu 8.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$P\left(X < \frac{\lambda}{2}\right) = P\left(Z < \frac{\frac{\lambda}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) = P\left(Z < \frac{-\sqrt{\lambda}}{2}\right)$$

$$P\left(X < \frac{3\lambda}{2}\right) = P\left(Z < \frac{\frac{3\lambda}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) = P\left(Z < \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{\lambda}{2} < X < \frac{3\lambda}{2}\right) = \phi\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) - \phi\left(\frac{-\sqrt{\lambda}}{2}\right)$$

10. Porównać wynik dokładny oraz oszacowania z zadań 8, 9 dla $\lambda = 10$.

8: $\geq 0,7565$ 9: $\leq 0,886$ Dokładny: $0,8841$