1. Dana jest funkcja $f(x,y) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 7y^2)\right\}$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wyznaczyć rozkłady brzegowe $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy =$$

2. Czy można tak dobrać stałą C, aby funkcja $f_{XY}(x, y) = Cxy + x + 2y$, dla $0 \leqslant x \leqslant 3$, $1 \leqslant y \leqslant 2$, była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej?

$$\int_0^3 \int_1^2 Cxy + x + 2y \, dy dx = \int_0^3 \left(x\left(\int_1^2 cy + 1\, dy\right) + 2 \cdot \int_1^2 y\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(x \cdot \left(\frac{cy^2}{2}\Big|_1^2 + y\Big|_1^2 \right) + 2\left(\frac{1}{2}y^2 \Big|_1^2\right)\right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(x \cdot \left(\frac{C}{2}(4-1) + 1 \right) + 2 \cdot \frac{3}{2} \right) dx =$$

$$\int_0^3 x\left(\frac{3C}{2} + 1\right) + 3 \; dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}C + 1\right) \cdot \int_0^3 x\, dx + 3 \cdot \int_0^3 1\, dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}C + 1\right) \cdot \frac{9}{2} + 3 = \frac{27}{4}C + \frac{9}{2} + 9$$

$$\frac{27}{4}C + \frac{9}{2} + 9 = 1 \Rightarrow \frac{27}{4}C = -\frac{25}{2} \Rightarrow C = \frac{-50}{27}$$

$$f(3,2) = -\frac{50}{27} \cdot 6 + 3 + 4 \approx -12 + 7 < 0$$

Odp. nie

3. Dana jest funkcja $f_{XY}(x,y) = \frac{4}{9}(-xy+x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant 3$, $\quad 0 \leqslant y \leqslant 1$. Sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne oraz obliczyć ppb $P(1 \leqslant X \leqslant 4,\ \ 0.5 \leqslant Y \leqslant 2)$.

$$f_1(x) = \int_0^1 \frac{4}{9}(-xy+x)\,dy = -\frac{4}{9}x\int_0^1 y\,dy + \frac{4}{9}x\int_0^1 1\,dy =$$

$$= -\frac{4}{9}x\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{9}x = \frac{2}{9}x$$

$$f_2(y) = \int_0^3 \frac{4}{9}(-xy+x)\,dx = -\frac{4}{9}y\int_0^3 x\,dx + \frac{4}{9}\int_0^3 x\,dx =$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^3\right)(-y+1) = \frac{\cancel{4}^{2}}{9}\cdot\frac{9}{\cancel{2}_{1}}\cdot(-y+1) = 2\cdot(-y+1)$$

$$f_1(x)\cdot f_2(y) = \frac{4}{18}x\cdot 2(-y+1) = \frac{4}{9}(-xy+x) =$$

Zmienne są niezależne.