Università degli Studi di Padova

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica

Tesina di Ricerca Operativa 2

Travelling Salesman Problem

Autori

Raffaele Di Nardo Di Maio 1204879

Cristina Fabris 1205722

Anno Accademico 2019-2020

Indice

Capitolo 1

Introduzione

L'intera tesina verterà sul Travelling Salesman Problem. Quest'ultimo si pone l'obiettivo di trovare un tour ottimo,ovvero di costo minimo, all'intero di un grafo orientato.
In questa trattazione verranno analizzate soluzioni algoritmiche per una sua variante, detta simmetrica, che viene applicata a un grafo completo non orientato.
Di seguito viene riportata la formulazione matematica di tale versione:

$$\begin{cases} min \sum_{e \in E} c_e \, x_e & \\ \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & \forall \, v \in V \\ \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 & \forall \, S \underset{\neq}{\subset} V : |S| \geq 3 \end{cases}$$

Un'istanza di tale problema viene definita normalmente da un grafo, per cui ad ogni nodo viene associata un numero intero (Ex. $\Pi = \{1, 2, 3, .., n\}$).
I risolutori che verranno applicati al problema sono di due tipologie:

- **Risolutori esatti**
  basati sul Branch & Bound. I più conosciuti sono:
  - **IBM ILOG CPLEX**
    gratuito se utilizzato solo a livello accademico.
  - **XPRESS**
  - **Gurobi**

  - **CBC**
    l'unico Open-Source tra questi

- **Risolutori euristici (meta-euristici)**
  algoritmi che forniscono una soluzione approssimata.

Esempio di risolutori: Concorde [1]
William Cook [2]

Capitolo 2

Istanze e soluzioni del problema

2.1 Istanze

Le istanze del problema, analizzate durante il corso, sono punti dello spazio 2D, identificati quindi da due coordinate (x,y). Per generare istanza enormi del problema, si utilizza un approccio particolare in cui viene definito un insieme di punti a partire da un'immagine già esistente.
La vicinanza dei punti generati dipende dalla scala di grigi all'interno dell'immagine (es. generazione di punti a partire dal dipinto della Gioconda[3]).
Le istanze che vengono elaborate dai programmi, creati durante il corso, utilizzano il template **TSPlib**. Di seguito viene riportato il contenuto di un file di questa tipologia.

```
NAME : esempio
COMMENT : Grafo costituito da 5 nodi
TYPE : TSP
DIMENSION : 5
EDGE_WEIGHT_TYPE : ATT
NODE_COORD_SECTION
1 6734 1453
2 2233 10
3 5530 1424
4 401 841
5 3082 1644
EOF
```

Listing 2.1: esempio.tsp

Le parole chiave più importanti, contenute in questi file 2.1, sono:

- **NAME**
  seguito dal nome dell'istanza TSPlib

- **COMMENT**
  seguito da un commento associato all'istanza
- **TYPE**
  seguito dalla tipologia dell'istanza
- **DIMENSION**
  seguito dal numero di nodi nel grafo (*num_nodi*)
- **EDGE_WEIGHT_TYPE**
  seguito dalla specifica del tipo di calcolo che viene effettuato per ricavare il costo del tour
- **NODE_COORD_SECTION**
  inizio della sezione composta di *num_nodi* righe in cui vengono riportate le caratteriste di ciascun nodo, nella forma seguente:

```
indice_nodo  coordinata_x  coordinata_y
```

- **EOF**
  decreta la fine del file

2.2 Soluzioni

Una soluzione del problema è una sequenza di nodi che corrisponde ad una permutazione dell'istanza (es. $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ tale che $x_i = x_j \quad x_i \in \Pi \, \forall \, x_i \in S \, \wedge \, x_i! = x_j \, \forall \, i \neq j$). Poichè in questa variante non esiste alcuna origine, ogni tour può essere descritto da due versi di percorrenza e l'origine può essere un nodo qualsiasi del grafo.
La rappresentazione di tali istanze è stata svolta attraverso l'utilizzo del programma Gnuplot. Per avere dettagli riguardanti il suo utilizzo vedi Sezione A.1.

Capitolo 3

Risoluzione del problema tramite CPLEX

Per poter utilizzare gli algoritmi di risoluzione forniti da CPLEX è necessario costruire il modello matematico del problema, legato all'istanza precedentemente descritta.
CPLEX ha due meccanismi di acquisizione dell'istanza:

1. **modalità interattiva:**
   in cui il modello viene letto da un file precedentemente generato (*model.lp*)

2. **creazione nel programma:**
   il modello viene creato attraverso le API del linguaggio usato per la scrittura del programma

Le strutture utilizzate da CPLEX sono due (vedi Figura 3.1):

- **ENV (enviroment):** contiene i parametri necessari all'esecuzione e al salvataggio dei risultati

- **LP:** contiene il modello che viene analizzato da CPLEX durante la computazione del problema di ottimizzazione

Ad ogni ENV è possibile associare più LP, in modo da poter risolvere in parallelo più problemi di ottimizzazione, ma nel nostro caso ne sarà sufficiente solo uno.
Per convenzione è stato deciso di etichettare i rami (i, j) dell'istanza rispettando la proprietà $i < j$. In Figura 3.2 è riportato lo schema degli indici che vengono utilizzati per etichettare le variabili.
In questa figura le celle (i, j) bianche, sono quelle effettivamente utilizzate

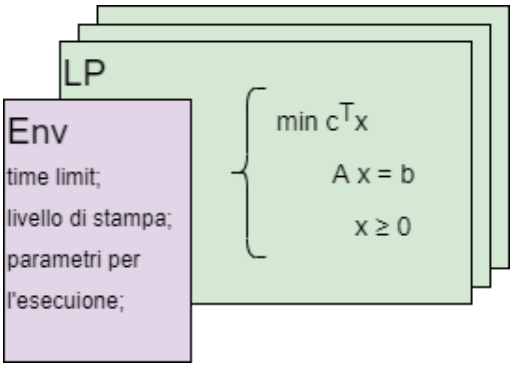


Figura 3.1: Strutture CPLEX

per indicare un arco secondo la convenzione. Il numero all'interno di queste caselle rappresenta invece l'ordine in cui queste variabili vengono inserite nel modello e quindi gli indici associati da CPLEX per accedere alla soluzione. Il modello così strutturato richiede però l'inserimento di un esponenziale numero di vincoli per l'eliminazione dei sub-tour, vengono quindi ora descritti altri modelli che ovvino a questo problema.

i \ j	0	1	2	3	4	5
0		0	1	2	3	4
1			5	6	7	8
2				9	10	11
3					12	13
4						14
5						

Figura 3.2: Indici della matrice

3.1 Modelli compatti

I modelli compatti del Travelling Salesman Problem, sono formulazioni il cui numero di variabili e di vincoli è polinomiale nella taglia dell'istanza. In

particolare, in quelle analizzate in seguito, sono entrambi $O(n^2)$, con n = *numero di nodi*.
I modelli compatti sono però applicabili solo a grafi orientati. Per poterli sfruttare per la risoluzione del TSP simmetrico, è necessario per ogni ramo dell'istanza (i, j), inserire nel modello i corrispondenti rami orientati in entrambe le direzioni (i, j) e (j, i). Questo comporta un significativo rallentamento nella computazione della soluzione, in quanto l'algoritmo, ogni volta che scarta un ramo (i, j) dalla soluzione ottima, verifica se il corrispondente (j, i) potrebbe invece appartenerle. Questo non può però essere possibile, essendo i due rami in realtà lo stesso nella nostra istanza iniziale.

3.1.1 Formulazione sequenziale

Miller, Tucker e Zemlin, nella loro formulazione del modello, hanno introdotto una nuova variabile u_i per ogni nodo i e imposto che, nella soluzione ottima, il suo valore rispettasse dei nuovi vincoli. Questi servivano a garantire che venisse seguito un ordine di percorrenza di tutti i nodi. In questo modo hanno eliminato la creazione di sub-tour, mantenendo il numero di vincoli e di variabili polinomiale. Nello specifico il loro modello è così strutturato:

$$min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{i,j}\, x_{i,j} \tag{3.1}$$

$$\sum_{i \in V} x_{ih} \;=\; 1 \qquad \forall\, h \in V \tag{3.2}$$

$$\sum_{j \in V} x_{hj} \;=\; 1 \qquad \forall\, h \in V \tag{3.3}$$

$$u_i - u_j + n\, x_{i,j} \;\leq\; n - 1 \qquad \forall\, i, j \in V - \{1\}, i \neq j \tag{3.4}$$

$$0 \leq u_i \;\leq\; n - 2 \qquad \forall\, i \in V - \{1\} \tag{3.5}$$

Esistono due diversi modi per implementare questo modello sfruttando le funzioni di CPLEX.
Nel primo i nuovi vincoli vengono aggiunti come visto in precedenza. In questo modo, durante la fase di preprocessamento, il programma è già a conoscenza di tutti i vincoli che dovrà rispettare la soluzione ottima. Ciò gli

permette di migliorare i coefficienti presenti, prima ancora di iniziare la computazione dell'ottimo.
Il secondo metodo, invece, sfrutta l'inserimento nel modello di vincoli detti "lazy constraints". Questi non sono noti al programma dall'inizio, ma vengono inseriti all'interno di un pool di vincoli. Nel momento in cui viene calcolata una soluzione, CPLEX verifica che vengano rispettati tutti i vincoli presenti nel pool. Se ne trova uno violato lo aggiunge al modello e ripete la computazione. Questo approccio permette, per risolvere lo stesso problema, di eseguire calcoli su un modello più piccolo, ma può aumentare i tempi di computazione non fornendo a CPLEX tutte le informazioni dall'inizio.

3.1.2 Formulazione basata sul flusso

Nella formulazione di Gavish e Graves, per impedire la formazione di subtour all'interno della soluzione ottima, viene introdotto un nuovo vincolo per ogni ramo del grafo. Questo permette di regolare il flusso $y_{i,j}$, con $i \neq j$, che lo attraversa.Inoltre è stato necessario aggiungere anche dei vincoli, detti "vincoli di accoppiamento", che collegassero i flussi alle variabili $x_{i,j}$. Il loro modello è quindi così strutturato:

$$min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{i,j}\ x_{i,j} \tag{3.6}$$

$$\sum_{i \in V} x_{ih} \ = \ 1 \qquad \forall\, h \in V \tag{3.7}$$

$$\sum_{j \in V} x_{hj} \ = \ 1 \qquad \forall\, h \in V \tag{3.8}$$

$$\sum_{j \in V} y_{1,j} \ = \ 1 \tag{3.9}$$

$$\sum_{j \in V} y_{h,j} \ = \ \sum_{i \in V} y_{i,h} \ - 1 \qquad \forall\, h \in V - \{1\} \tag{3.10}$$

$$y_{i,j} \leq \ (n-1)\ x_{i,j} \qquad \forall\, i,j \in V, i \neq j \tag{3.11}$$

La soluzione di questo modello risulta però essere lontana dalla convex hull. Per migliorarla è possibile sostituire il vincolo *(3.11)* con

$$y_{i,j} \leq (n-2)\, x_{i,j} \quad \forall\, i \neq j$$

mentre per gli altri valori di i e j è necessario lasciare i vincoli originali. Per evitare che la soluzione ottima contenga sia l'arco $x_{i,j}$ che $x_{j,i}$, che nella nostra istanza iniziale corrispondono allo stesso arco, viene anche aggiunto il seguente vincolo:

$$x_{i,j} + x_{j,i} \leq 1 \quad \forall i, j \in V \text{ con } i < j$$

3.2 Loop

3.2.1 Formulazione di Benders

Negli anni '60, Jacques F. Benders sviluppò un approccio generale, applicabile a qualsiasi problema di programmazione lineare, per ridurre il numero esponenziale di alcuni vincoli specifici inseriti nel modello.
Utilizzando questo metodo, il modello viene scritto senza quei vincoli e poi questi verranno aggiunti in seguito durante la risoluzione del problema. Nel caso in cui la soluzione ottima, calcolata a partire da questo modello, non rispetti un vincolo di quelli rimossi, questo viene aggiunto al modello.
Nella seguente parte, viene riportata l'applicazione specifica di loop al problema TSP. I vincoli di Subtour Elimination sono in numero esponenziale e sono:

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq \mid S \mid -1 \; \forall\, S \underset{\neq}{\subset} V \; : \mid S \mid \geq 2 \tag{3.12}$$

o equivalentemente:

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \; \forall\, S \underset{\neq}{\subset} V \; : \mid S \mid \geq 2 \tag{3.13}$$

Viene definito un nuovo modello per il problema del commesso viaggiatore simmetrico, in cui vengono rimossi tali vincoli, aggiungendo così la possibilità di avere dei subtour nella soluzione finale.
Viene risolto il problema e nel caso in cui ci sia più di una componente connessa, viene aggiunto al modello un vincolo di subtour elimination per

ogni ciclo generato.

Algorithm 1: LOOP

Input: `model`= Modello TSP simmetrico senza vincoli di Subtour Elimination

Output: `x`= soluzione intera senza subtour

```
1 x ← solve(model)
2 ncomps ← comps(x)
3 while ncomps ≥ 2 do
4 |   Aggiungi Σ_{e∈δ(S_k)} x_e ≤| S_k | −1 ∀ componente connessa S_k
5 |   if ncomps ≥ 2 then
6 |   |   x ← solve(model)
7 |   |   ncomps ← comps(x)
```

All'aumentare del numero di vincoli, il costo della soluzione ottenuta da CPLEX peggiora o resta identica a quella elaborata all'iterazione precedente del metodo loop.
Il numero di iterazioni che vengono effettuate dall'algoritmo non è conosciuto e potrebbe essere anche molto elevato. Nel caso peggiore vengono inseriti tutti i vincoli di Subtour elimination, ovvero un numero esponenziale di disequazioni, soprattutto con istanze clusterizzate.
Inoltre il problema principale di questo algoritmo è la generazione, ad ogni iterazione, di un albero completo di branching, eliminando quello precedentemente sviluppato.
In passato, con le versioni del MIP solver di CPLEX degli anni '60, questa operazione era molto onerosa mentre attualmente il metodo loop garantisce la risoluzione, anche di istanze molto grandi, in tempi ragionevoli. Questo non accade invece per il Branch & Bound in quanto vengono aggiunte nuove ramificazioni all'albero già esistente.
L'introduzione di nuovi vincoli di Subtour Elimination, solo nel momento in cui si presenta una loro violazione, permette di ridurre la dimensione del modello ma riduce l'attività di pre-processamento svolta da CPLEX prima di cominciare la risoluzione del problema. Nella fase di pre-processing infatti, vengono applicati algoritmi euristici e cambiamenti dei coefficienti nel modello, in base ai vincoli inseriti.
L'algoritmo può essere modificato svolgendo prima il metodo loop con l'aggiunta di parametri differenti da quelli utilizzati di default del risolutore CPLEX. In seguito viene effettuato nuovamente l'algoritmo di Benders ma

questa volta nella sua versione esatta, in modo da migliorare la soluzione meta-euristica trovata nella prima parte.
Quest'ottimizzazione è basata sul fatto che CPLEX salvi alcune soluzioni, ottenute in precedenza dal risolutore sullo stesso modello, e le sfrutti come bound nel nuovo modello. Per questo motivo, alcune delle soluzioni metaeuristiche ottenute nella prima fase vengono sfruttate come bound nella seconda.

3.2.2 Formulazione con callback

Un possibile miglioramento dell'algoritmo proposto da Benders, in termini di velocità della computazione, è il seguente.
Come precedentemente descritto, come prima cosa CPLEX effettua un preprocessamento in cui semplifica il modello, riducendo il termine noto e accorpando tra loro diverse variabili. Terminata questa operazione inizia ad eseguire la fase di Branch & Cut. Ogni volta che calcola una nuova soluzione x^*, prima di dichiarare se è l'ottimo o di scartarla e proseguire a sviluppare i successivi rami dell'albero decisionale, applica dei tagli e degli algoritmi euristici per aggiornarla(vedi Figura 3.3).

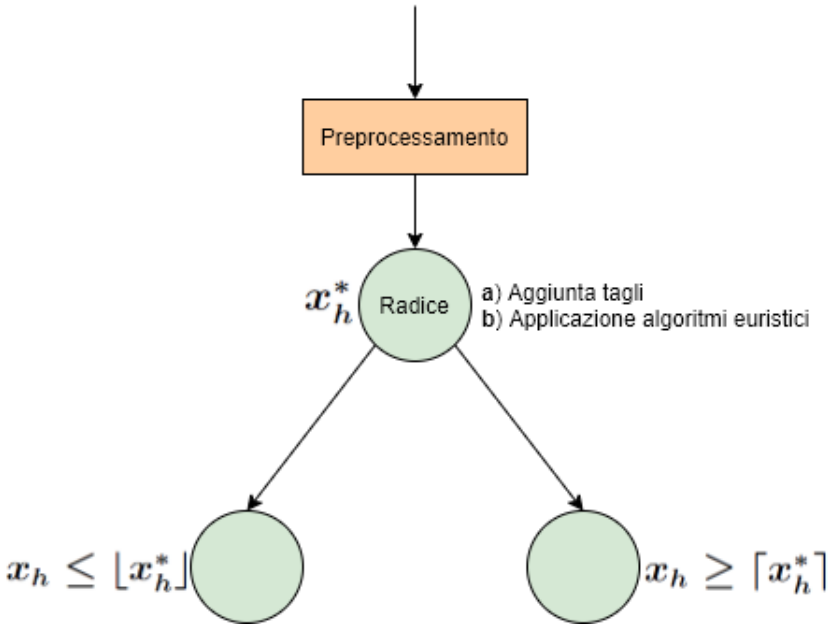


Figura 3.3: Albero decisionale del Branch and Cut

Nello sviluppo di ogni ramo l'upper bound sarà dato dagli algoritmi euristici

utilizzati, mentre il lower bound dal rilassamento del problema.
Per poter velocizzare l'approccio proposto da Benders, è possibile personalizzare questa fase e scegliere quali tagli far applicare a CPLEX. Nel nostro caso, questi vengono utilizzati per eliminare l'eventuale presenza di subtour nella soluzione calcolata. Per fare ciò vengono sfruttate particolari funzioni fornite da CPLEX, dette *callback*. Queste sono state lasciate volutamente vuote dai creatori della libreria, affinché l'utente possa implementarne all'interno il suo specifico codice. In particolare, le funzioni utilizzate sono callback necessarie ad aggiungere lazy constraints al modello e per questo dette *lazy constraints callback*. La callback implementata viene chiamata solo al momento di aggiornare l'incumbent e se necessario aggiunge al modello i vincoli violati. Verrà quindi invocata più frequentemente all'inizio del calcolo della soluzione del problema, e meno nelle iterazioni successive. Questo poichè essendoci in partenza meno vincoli, sarà più facile per la soluzione soddisfarli tutti. A differenza dei *lazy constraints*, con l'utilizzo delle *lazy callback* i vincoli non sono costantemente presenti in un pool, ma vengono generati "al volo" al momento necessario. Quest'operazione velocizza notevolmente il calcolo della soluzione ottima, in quanto permette a CPLEX di non dover calcolare nuovamente l'albero decisionale dalla radice, ma di proseguirne lo sviluppo aggiungendo nuovi rami. In particolari casi, però, CPLEX può ritenere più conveniente distruggere tutto l'albero decisionale fin'ora calcolato e ricominciare dalla radice. Questo può avvenire in qualunque punto dell'elaborazione della soluzione ottima.
Attraverso l'utilizzo delle callbacks è possibile accedere a molti dati interni all'elaborazione di CPLEX. Particolari procedure vengono quindi automaticamente disattivate, affinché l'utente non possa venirne a conoscenza. Per evitare questo è possibile installare le callbacks con una modalità leggermente diversa, attraverso funzioni dette *general*.

3.3 Algoritmi Math-Heuristic

Gli algoritmi euristici sono progettati per risolvere istanze del problema in tempi significativamente più brevi rispetto agli algoritmi esatti. Di conseguenza, però, al termine della computazione non garantiscono di ottenere una soluzione ottima, ma solo una sua buona approssimazione ammissibile. Gli algoritmi Math-Heuristic sfruttano l'approccio degli euristici, assieme all'utilizzo di un maggior numero di vincoli nel modello, vincoli basati su procedimenti matematici. L'algoritmo che maggiormente rappresenta questo metodo è il Soft Fixing (vedi sottosezione 3.3.2).
Durante la computazione della soluzione CPLEX utilizza diversi algoritmi

euristici, grazie alla variazione di alcuni parametri a loro associati è possibile variare la frequenza o il tempo a loro dedicato.

3.3.1 Hard Fixing

Un primo algoritmo euristico di semplice implementazione si basa sull'impostazione di una deadline da parte dell'utente ed è composto dalle seguenti fasi:

1. Impostazione di un time limit per la computazione della soluzione;
2. Calcolo della soluzione;
3. Selezione, in maniera randomica, di un sottoinsieme di rami appartenenti alla soluzione ottima (Figura 3.4). Il numero di questi sarà dato da una percentuale fissata del totale. I rami appartenenti alla selezione vengono fissati di modo tale che, in una successiva computazione del problema, appartengano alla soluzione restituita;

Questi passaggi vengono eseguiti in maniera ciclica per un numero fissato di iterazioni. In questo modo, ad ogni computazione della soluzione, CPLEX dovrà risolvere un problema più semplice di quello originale, essendo molte variabile del modello già selezionate nella **fase 3** dell'iterazione precedente.
Il time limit nominato nella **fase 1** è dato da una frazione della deadline complessiva e dipende dal numero di iterazioni totali che si desidera compiere. Ad ogni computazione la soluzione potrà essere solo migliore o uguale alla precedente (nel caso peggiore).
La percentuale scelta del numero di rami da fissare può variare ad ogni iterazione. Generalmente si cerca di avere una percentuale alta nelle prime iterazione, in cui la soluzione non è ancora stata raffinata, e di abbassarla man mano che si procede con l'algoritmo. In questo modo nelle ultime computazione CPLEX avrà un maggior numero di gradi di libertà per trovare la soluzione che più si avvicina all'ottimo. Poichè i rami selezionati nella **fase 3** sono scelti in maniera casuale, non si corre il rischio di entrare in un ciclo infinito, in cui viene risolto ogni volta la stessa istanza con le stesse variabili fissate. Particolare attenzione deve essere posta al fatto di lasciare nell'insieme dei rami scelti randomicamente solo quelli selezionate all'iterazione immediatamente precedente.
Nella nostra implementazione abbiamo scelto di iterare l'algoritmo per 6 volte, ognuna con una deadline di 10 minuti, e di utilizzare rispettivamente come percentuale i seguenti valori { 90, 75, 50, 25, 10, 0 }.
Di seguito viene inoltre riportato lo pseudocodice dell'algoritmo appena descritto.

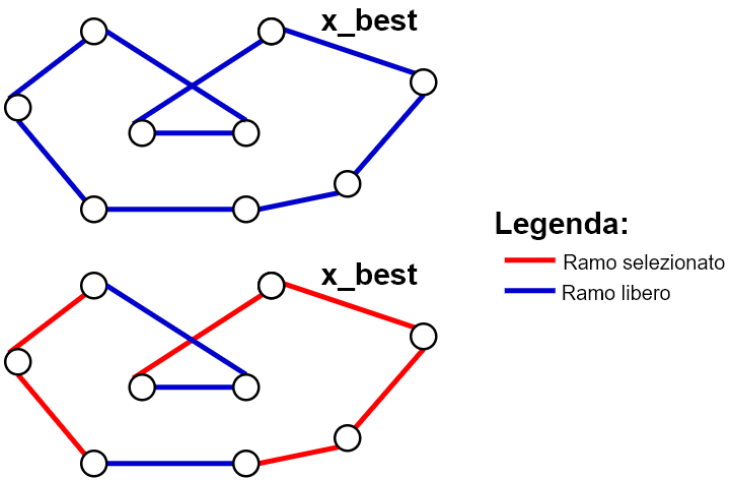


Figura 3.4: Selezione rami

Algorithm 2: Hard Fixing

Input: `model`= Modello TSP simmetrico senza vincoli di Subtour Elimination
`deadline`= time limit complessivo dell'algoritmo
`percentage`= array con i valori delle percentuali di fissagio degli archi
`num_nodi`= numero di nodi dell'istanza tsp

Output: `x`= soluzione intera senza subtour

```
1  n ←0
2  while expired_time < deadline do
3      setTimeLimit()
4      x ← solve(model)
5      for j ←0 to num_nodi − 1 do
6          k ← random(0, 1)
7          if 100 ∗ k ≤ percentage[n mod leght(percentage)] then
8              Aggiungi x_best[j] to S where S = {edges to fix}
9      forall x_{i,j} ∈ S do
10         x_{i,j} ←1
11     n ←n + 1
```

3.3.2 Soft Fixing

Il metodo seguente fa utilizzo di vincoli aggiuntivi, detti **Local Branching** e che ha dato il via alla sviluppo della **Math-Heuristic**, approccio di programmazione matematica (es. tramite CPLEX) unita all'algoritmica euristica[5]. L'approccio utilizzato è simile a quello dell'Hard Fixing, ma la scelta delle variabili da imporre a 1 non viene fatta in maniera randomica ma viene lasciata a CPLEX.
Partendo da una soluzione intera ammissibile del TSP x^H, viene aggiunto un vincolo sui lati con valore 1 in x^H:

$$\sum_{e \in E \,:\, x_e{}^H = 1} x_e \;\geq\; 0.9\, n$$

dove la sommatoria indica il numero di variabili che vengono preservate a 1 rispetto alla soluzione x^H e **n** indica il numero di archi selezionati, pari al numero di nodi + 1.
In questo caso, il vincolo permetterà a CPLEX di fissare il 90% dei rami scelti in x^H e avere il 10% di libertà. Per questo motivo, CPLEX riduce il numero di archi su cui lavorare, in quanto molti nodi hanno già un numero di archi selezionati pari a 2.
Un modo alternativo di scrivere lo stesso vincolo è il seguente:

$$\sum_{e \in E \,:\, x_e{}^H = 1} x_e \;\geq\; n - k$$

dove k=2,...,20 e rappresenta i gradi di libertà di CPLEX nel raggiungere la nuova soluzione.
Ad ogni iterazione viene aggiunto un nuovo local branching, basato sull'attuale soluzione restituita da CPLEX, e rimosso il vincolo aggiunto nell'iterazione precedente.
L'unico aspetto negativo di questo metodo riguarda un mancato miglioramento della soluzione da parte di CPLEX in seguito alla sua esecuzione con l'aggiunta del vincolo. Non scegliendo in maniera randomico i lati da selezionare della soluzione precedente, se non dovesse esserci alcun miglioramento del costo e quindi cambiamento della soluzione, i lati selezionati da CPLEX con il nuovo **local branching**, sarebbero gli stessi di prima. Per superare tale problema, k viene inizializzata a 2 e, nel caso in cui non dovesse migliorare la soluzione, viene incrementata.
Da dati sperimentali, si è appurato come questo metodo aiuti CPLEX a convergere più velocemente alla soluzione ottima e che valori di k superiori a 20 non aiutino a raggiungere risultati migliori.
L'aggiunta di un local-branching permette di analizzare in maniera più semplice e veloce lo spazio delle soluzioni. Normalmente per farlo, vengono enumerati gli elementi di questo spazio, generando un numero molto elevatp di possibli soluzioni, considerando che TSP è un problema NP-hard.
Definita una soluzione intera ammissibile x^H e utilizzando la distanza di Hamming, vengono definite soluzioni $k - opt$ rispetto ad x^H, quelle che hanno distanza k da x^H (vedi Figura 3.5).
Se, invece del local branching, venisse utilizzata l'enumerazione delle soluzioni, si dovrebbero generare per **k** generico circa n^k soluzioni a distanza k da x^H ed in seguito analizzarle tutte per trovare quella con costo minore e migliore di x^H.
L'utilizzo del local branching può essere adottato con anche problemi generici e non solo con TSP. Di seguito viene riportato l'aprroccio da adottare per generare tutte le soluzioni a distanza minore o uguale di R dalla soluzione

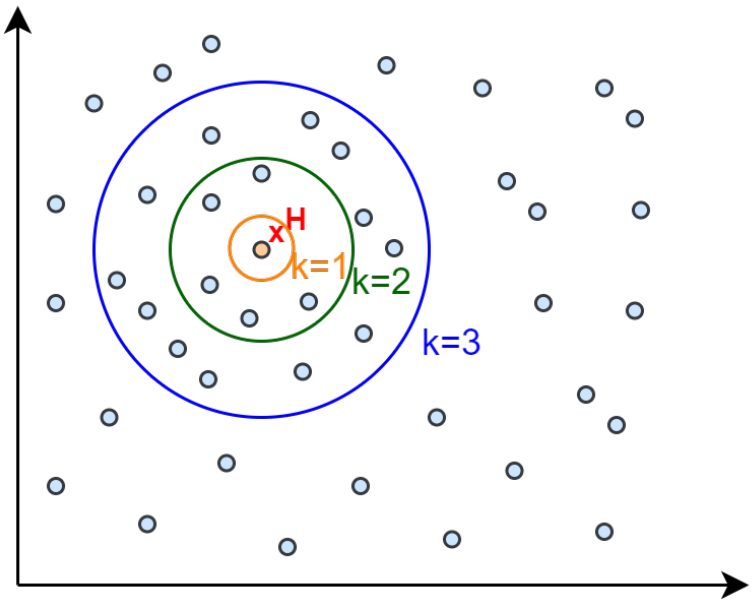


Figura 3.5: Spazio delle soluzioni e distanza di Hamming.

euristica di partenza x_H:

$$min\{c^T x: \quad Ax = b,\ x \in \{0,1\}^n\} \tag{3.14}$$

$$\sum_{j \in E: {x_j}^H = 0} x_j \ + \sum_{j \in E: {x_j}^H = 1} 1 - x_j = \leq R \tag{3.15}$$

dove **(3.15)** rappresenta la distanza di Hamming dalla nuova soluzione computata x da x_H. L'obiettivo del Soft-fixing è cercare di migliorare il costo della soluzione, guardando quelle più vicine possibili a quella attuale. Nella **Figura 3.6** seguito viene riportato un esmpio di una possibile evoluzione dell'algoritmo nella ricerca dell'ottimo, evindenziandone le soluzioni trovate di volta in volta.

3.3.3 Patching algorithm

Negli algoritmi analizzati nei precedenti capitoli può succedere che CPLEX, prima di restituire la soluzione ottima, computi soluzioni con più componenti connesse. Per evitare che vengano scartate senza essere sfruttate è possibile utilizzare questo semplice algoritmo euristico che si pone l'obbiettivo di convertirle in una soluzione ammissibile.

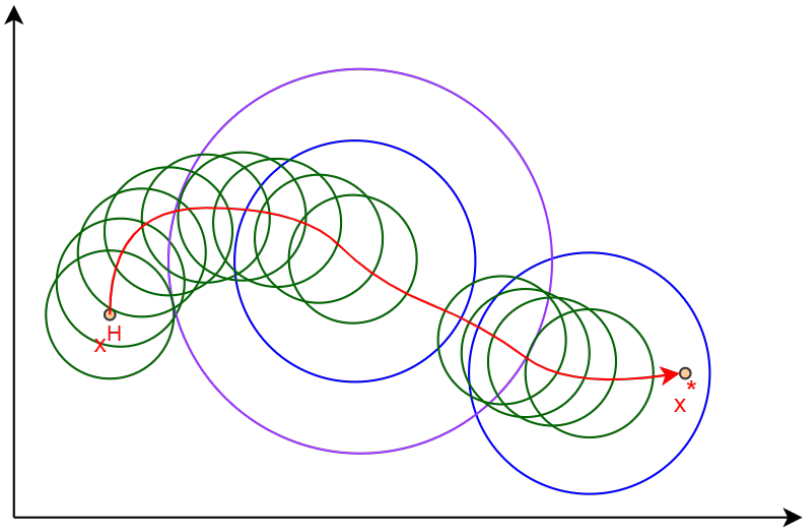


Figura 3.6: Esempio di esecuzione dell'algoritmo nello spazio delle soluzioni.

Date due componenti connesse all'interno della soluzione calcolata, queste vengono unite in una sola grazie all'eliminazione di un ramo ciascuna $\{a, a'\}$ e $\{b, b'\}$ e alla selezione di altri due rami che fungano da collegamento tra i quattro vertici selezionati ($\{a, b\}$ e $\{a', b'\}$ o $\{a, b'\}$ e $\{a', b\}$) (vedi figura 3.7). Per scegliere quale ramo per ogni componente connessa sia più conveniente eliminare e con quale sia più conveniente sostituirlo, è necessario minimizzare la variazione di costo che quest'operazione comporterebbe, cioè scegliere il minimo tra:

$$min \begin{cases} \Delta\ (a,b) & = c_{ab'} + c_{ba'} - c_{aa'} - c_{bb'} \\ \Delta'\ (a,b) & = c_{ab} + c_{b'a'} - c_{aa'} - c_{bb'} \end{cases} \quad \forall\ a, b \in V : comp(a) \neq comp(b)$$

L'operazione di fusione di due componenti connesse può essere ripetuta finché la soluzione non diventa ammissibile, approssimativamente dimezzando ad ogni iterazione il numero di componenti presenti. In questo modo, al termine, è possibile restituire una soluzione accettabile ma senza garanzie di essere ottima.
Complessivamente il costo di quest'algoritmo è $O(n^2)$, dove n è il numero di

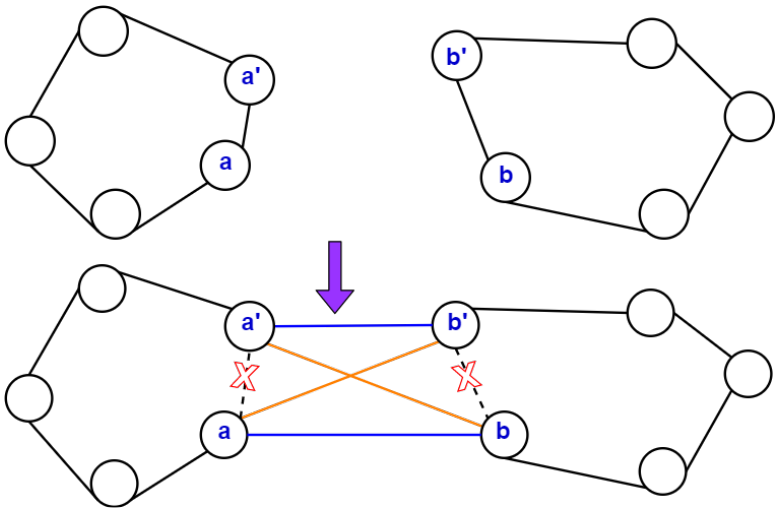


Figura 3.7: Esempio di patching

nodi.

Algorithm 3: Patching

Input: x= soluzione di un problema di TSP con più componenti connesse

Output: y= soluzione intera formata da un'unica componente connessa

```
1 n_comps ←numerocomponenticonnessedellasoluzione
2 c_1 ←{0, ..., 0}
3 while n_comps > 1 do
4     c_1 ← first_subtour(x)
5     c_2 ← nearest_subtour(c_1)
6     merge_component(c_1, c_2)
7     update(n_comps)
8 y ←c_1
```

Capitolo 4

Algoritmi euristici

In questo capitolo verranno trattati algoritmi euristici che non fanno uso di CPLEX. La necessità di non utilizzare CPLEX si ha per istanze con un numero elevato di nodi (10000-20000 nodi).
Per queste istanze la risoluzione del tableau attraverso CPLEX diventerebbe molto un'operazione molto onerosa per via dell'alto numero di variabili che verrano create e su cui verrà svolto il calcolo.
Attraverso gli algoritmi euristici, viene computata un'approssimazione della soluzione ottima e spesso però può essere sfruttata inizialmente dal risolutore CPLEX. Ad esempio questo può essere aggiunta prima della computazione, utilizzando la funzione *CPXaddmipstarts()*, o ,se già definita, può essere modificata tramite *CPXchgmipstarts()*.
Un algoritmo euristico, affinchè funzioni al meglio, deve essere composto da due fasi che si alternino:

- **Intensificazione o raffinamento**
  In questa fase la soluzione corrente viene migliorata fino al raggiungimento di un ottimo (locale o globale) nello spazio delle soluzioni.

- **Diversificazione**
  Fase in cui la soluzioni viene perturbata con una politica predefinita affinchè si allontani da un ottimo locale nello spazio delle soluzioni.

4.1 Euristici di costruzione

Questa prima tipologia di algoritmi euristici è necessaria per la computazione di una prima soluzione ammissibile del problema.

4.1.1 Nearest Neighborhood

Questo algoritmo è basato su un approccio di tipo greedy. L'algoritmo sceglie un nodo generico tra quelli che compongono il grafo. In seguito, iterativamente seleziona degli archi del grafo secondo il criterio enunciato nella seguente parte.
All'iterazione i-esima, vengono analizzati i costi degli archi che hanno un estremo pari al nodo selezionato all'iterazione i-1.
Viene selezionato l'arco che tra questi ha costo minore e il nuovo nodo raggiunto viene impostato come punto di partenza per analizzare i costi degli archi all'iterazione successiva (vedi Figura 4.1). All'ultima iterazione viene scelto l'arco che collega l'ultimo nodo visitato al nodo scelto inizialmente.
Il problema di questo algoritmo è che in ogni iterazione viene selezionato esclusivamente il vertice più vicino a quello scelto precedentemente, senza però prevedere la futura evoluzione del ciclo, creato dall'algoritmo.
Come in Figura 4.1, la scelta dell'arco di costo minimo non implica che in seguito venga generata la soluzione ottima. Scegliendo un nodo iniziale differente, viene generato un tour differente.
Definito **n** come il numero di nodi presenti nel grafo, si avranno quindi n soluzioni differenti, ottenute ciascuna attraverso n iterazioni dell'algoritmo. In seguito tra queste possibli soluzioni, verrà selezionata quella di costo minore.

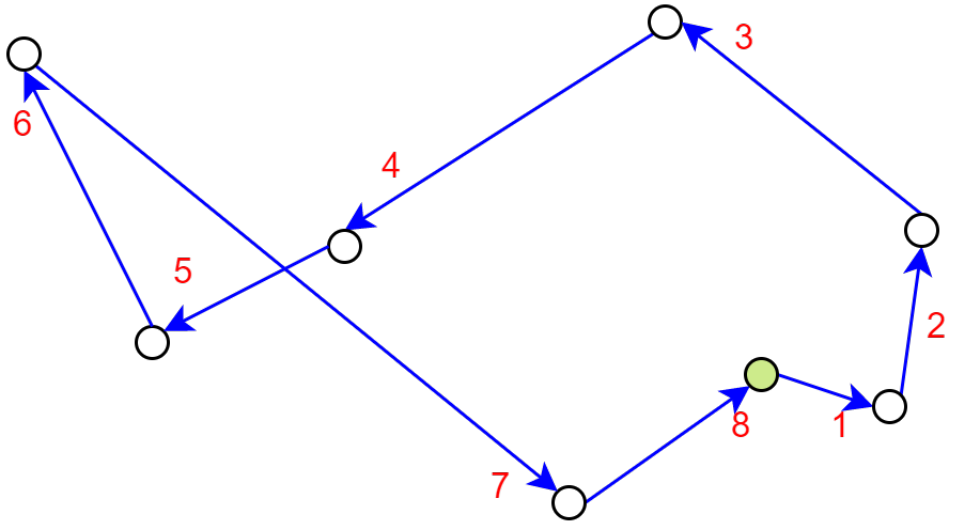


Figura 4.1: Esempio di esecuzione di Nearest Neighborhood.

Per migliorare l'algoritmo viene aggiunta una scelta aleatoria, utilizzando

il metodo Greedy Adaptive Search Procedure (GASP). Ad ogni iterazione, invece di selezionare l'arco di costo minimo, vengono messi in evidenza i tre archi con costo minore e ne viene selezionato casualmente uno tra questi.
Un'implementazione alternativa invece fa uso sia del metodo standard che del metodo GASP. In questo caso la scelta casuale non viene fatta su ogni iterazione ma con una certa periodicità fissata inizialmente.

4.1.2 Heuristic Insertion

L'algoritmo seguente usa un approcco simile al precedente ma prevede la selezione di un ciclo iniziale a cui apportare modifiche, per ottenere una soluzione iniziale ammissibile del problema. Per definire il ciclo di partenza vengono utilizzati diversi metodi. Di seguito sono riportati i due più utilizzati:

- **Selezione di due nodi**
  Vengono scelti i due nodi più lontani tra loro nel grafo o due nodi casuali e sono selezionati i due archi orientati che li collegano.

- **Inizializzazione geometrica**
  Nel caso in cui i nodi siano punti 2D, può essere calcolata la convex-hull e utilizzarla come ciclo iniziale.

In seguito a tale operazione, questa soluzione viene modificata iterativamente. Per ogni coppia di nodo non appartenente al ciclo **C**, restituito dall'iterazione precedente, viene calcolato l'extramileage Δ_h come segue:

$$\Delta_h = \min_{(a,b)\in C} c_{ah} + c_{hb} - c_{ay}$$

con c_ij costo dell'arco che collega i a j (vedi Figura 4.2).
Alla fine di ciascuna iterazione viene aggiunto nel grafo il nodo **k** che minimizza l'**extramileage** (vedi Figura 4.3):

$$k = \underset{h}{argmin}\Delta_h$$

Un modo per aggiungere aleatorietà a questo algoritmo può essere quello di sfruttare l'approccio GASP nella selezione del minimo extramileage. Il nodo da aggiungere in un'iterazione al grafo, viene selezionato in modo casuale tra i tre con Δ minore.

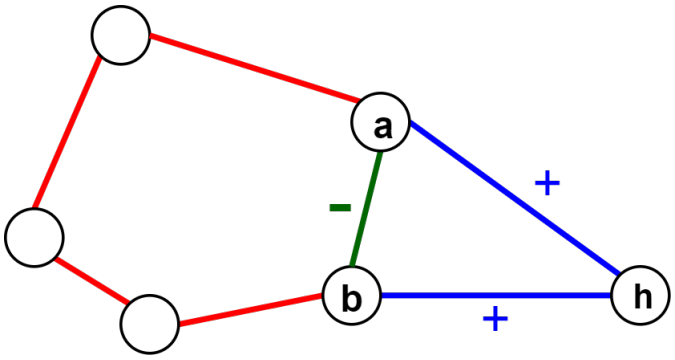


Figura 4.2: Parte del calcolo dell'extramileage del nodo **h**.

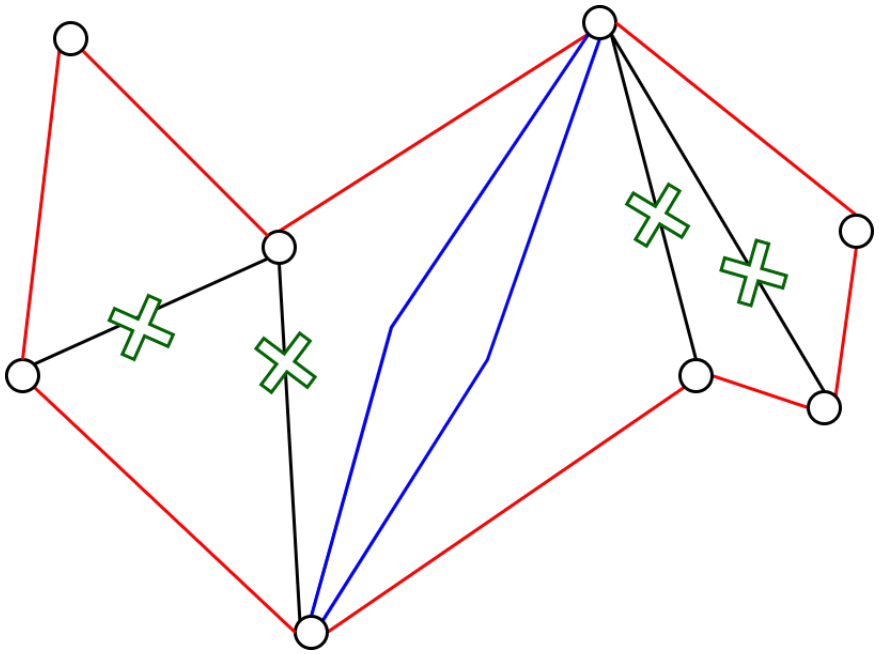


Figura 4.3: Esempio dell'applicatione di Heuristic insertion.

4.2 Algoritmi di raffinamento

Una volta ottenuto una prima soluzione è necessario migliorarla per avvicinarsi il più possibile all'ottimo. Gli algoritmi utilizzati con questo scopo sono detti *di raffinamento*. Nel capitolo precedente sono già stati descritti due procedimenti di questo tipo, l'Hard Fixing e il Soft Fixing (vedi sottose-

zioni 3.3.1 e 3.3.2). In questa sezione verranno invece analizzati algoritmi di raffinamento che non utilizzino funzioni messe a disposizione da CPLEX.

4.2.1 Algoritmo di 2 ottimalità

Nelle soluzioni restituite dagli algoritmi euristici di costruzione sono spesso presenti incroci tra rami che colleghino coppie di nodi appartenenti al circuito. La loro presenza implica sempre la non ottimalità della soluzione, in quanto per le proprietà dei triangoli esisterà sempre una soluzione che eviti l'incrocio e che sia di costo minore (vedi figura 4.4).

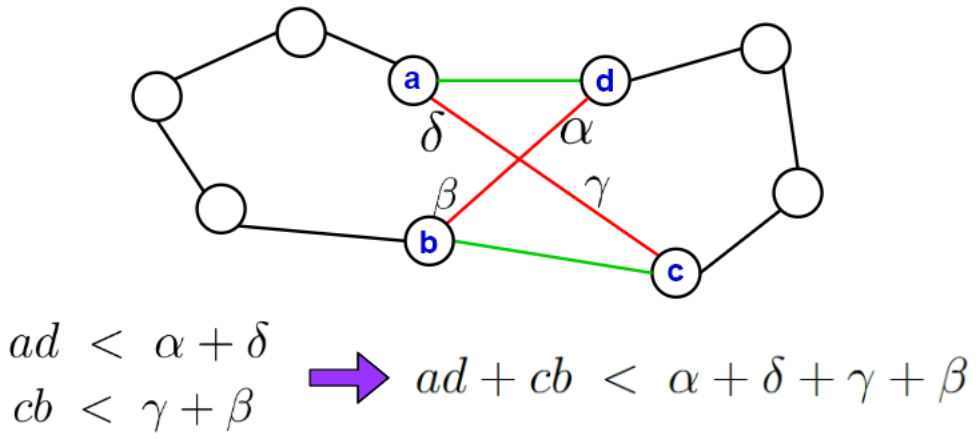


Figura 4.4: Non ottimalità di una soluzione con incroci.

Il procedimento qui descritto si pone l'obiettivo di trovare questa soluzione. Poichè la soluzione che trova si differenzia dalla precedente sempre solo per due rami (quelli che nella prima formavano l'incrocio) viene detto algoritmo di 2 ottimalità.
Nell'implementazione del procedimento non è necessario cercare tutti gli incroci della soluzioni per eliminarli, ma è sufficiente analizzare tutte le coppie di rami presenti e verificare se, scambiandole con un'altra coppia ammissibile, si verifica un miglioramento.

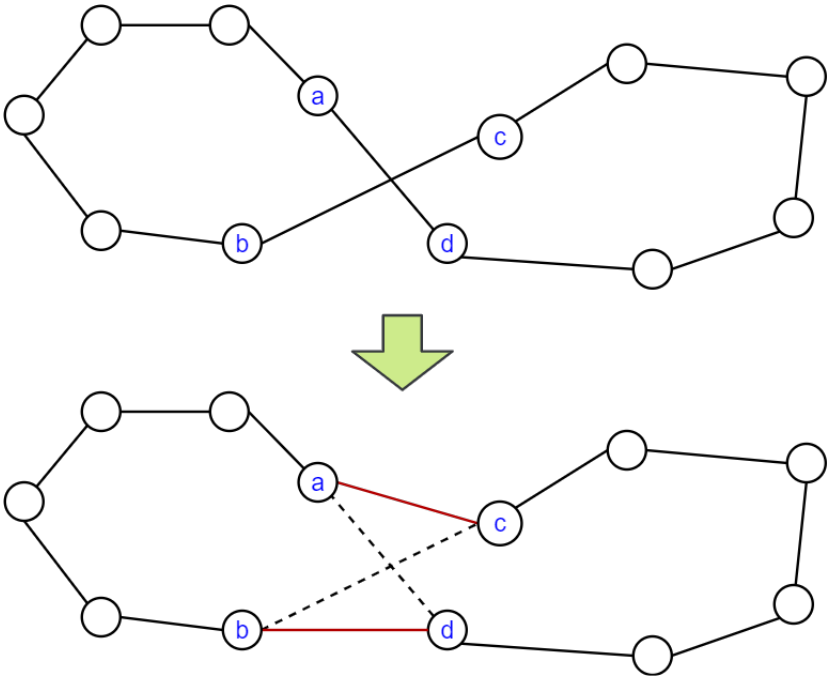


Figura 4.5: Esempio di eliminazione di un incrocio.

Riferendosi alla figura 4.5, questo viene così calcolato:

$$\Delta = (c_{ac} + c_{bd}) - (c_{ad} + c_{bc})$$

Solo nel caso in cui risulti $\Delta < 0$ la sostituzione viene memorizzata.
In questo modo ogni nuova soluzione appartiene all'intorno di 2 ottimalità, della soluzione precedente, nello spazio delle soluzioni. Aggiornando iterativamente la soluzione si raggiunge un ottimo locale, ovvero in cui non sono possibili miglioramenti nel costo della soluzione, modificando una sola coppia di rami. Questo spostamento è rappresentato in Figura 4.6.

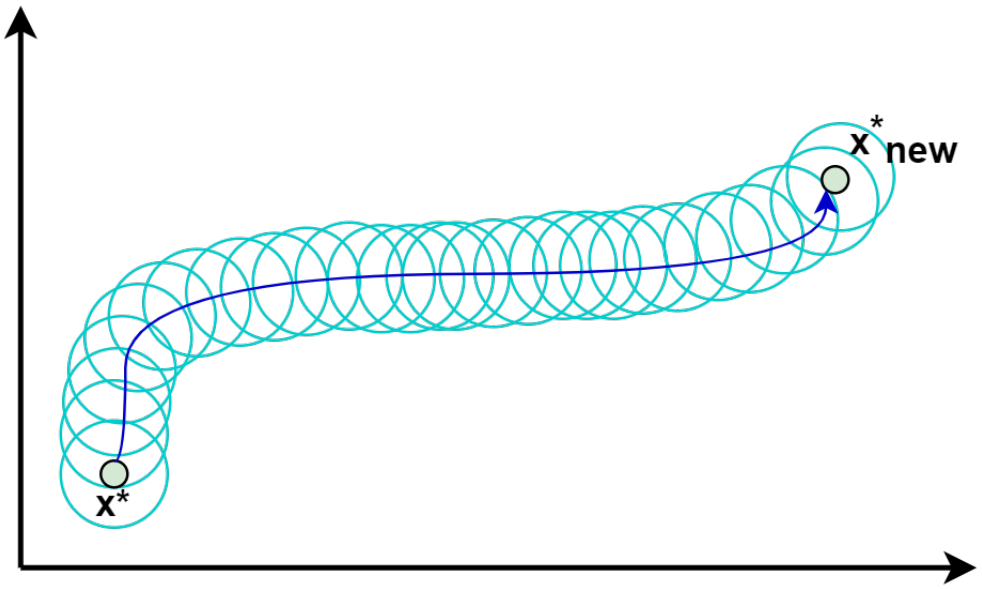


Figura 4.6: Aggiornamento della soluzione nell'intorno di 2 ottimalità.

Un analogo procedimento viene utilizzato anche nell'algoritmo Soft Fixing, in cui però la dimensione dell'intorno in cui cercare la nuova soluzione può variare (vedi Figura 3.6).
Poichè il calcolo del Δ avviene in tempo costante e deve essere fatto per ogni coppia di rami, il tempo complessivo per la computazione è $O(n^2)$, con n nodi nell'istanza del problema.

4.2.2 Algoritmo di 3 ottimalità

L'algoritmo di 3 ottimalità è analogo a quello analizzato nella sezione precedente, ma considera intorni di 3 ottimalità, nello spazio delle soluzioni, per aggiornare il circuito corrente. In questo caso, quindi, due soluzioni si differenziano per 3 rami, che devono essere scelti con particolare attenzione essendo in maggior numero le possibilità di scelta (vedi Figura 4.7).

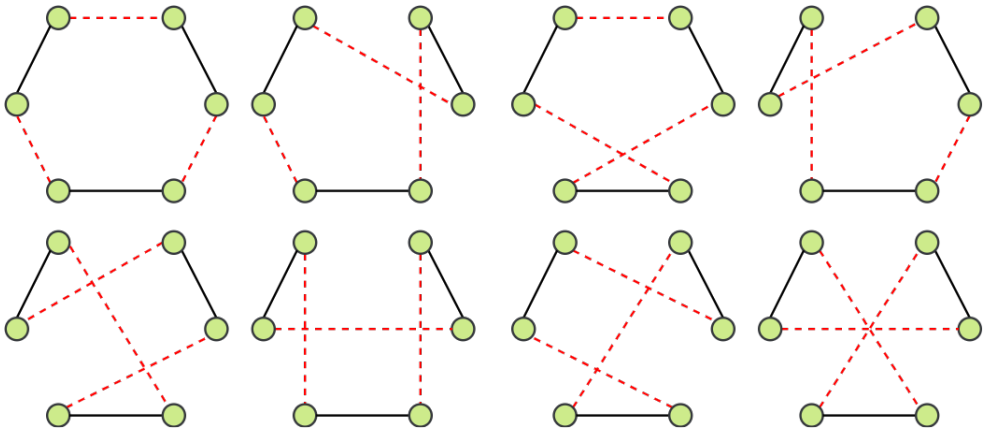


Figura 4.7: Tutte le possibili combinazioni di scambi di 3 ottimalità.

Rimanendo comunque in quantità costante, l'algoritmo impiega in tutto $O(n^3)$ (con n numero di nodi) per trovare un ottimo locale, essendo $O(n^3)$ il numero di terne di rami esistenti. Su istante con un alto numero di nodi, questo tempo computazione può essere troppo elevato per il calcolo di una soluzione.

4.3 Meta-euristici

Gli algoritmi di raffinamento appena visti si occupano di migliorare il più possibile una soluzione già calcolata attraverso meccanismi di local serch. In questo modo, dopo un determinato numero di iterazioni, viene raggiunto un ottimo locale. Le metodologie che vengono descritte in questa sezione cercano di aggiornare questa soluzione allontanandola dall'ottimo locale e convogliandola in un ottimo globale, se possibile. Possono quindi essere descritti come algoritmi euristici per progettare altri euristici, per definizione non sono quindi in grado di garantire il raggiungimento dell'ottimo globale. Questi procedimenti sono più generali di quelli descritti fin'ora, applicabili anche ad istanze di problemi diversi e non solo del commesso viaggiatore.

4.3.1 Multi-start

Un primo e intuitivo approccio per allontanarsi da un ottimo locale è quello descritto dalla politica multi-starting: applicare l'algoritmo di raffinamento scelto a diverse soluzioni iniziali. In questo modo si raggiungono ottimi locali diversi (come mostrato in Figura 4.8)e viene restituita la soluzione corrispondente al costo minore.

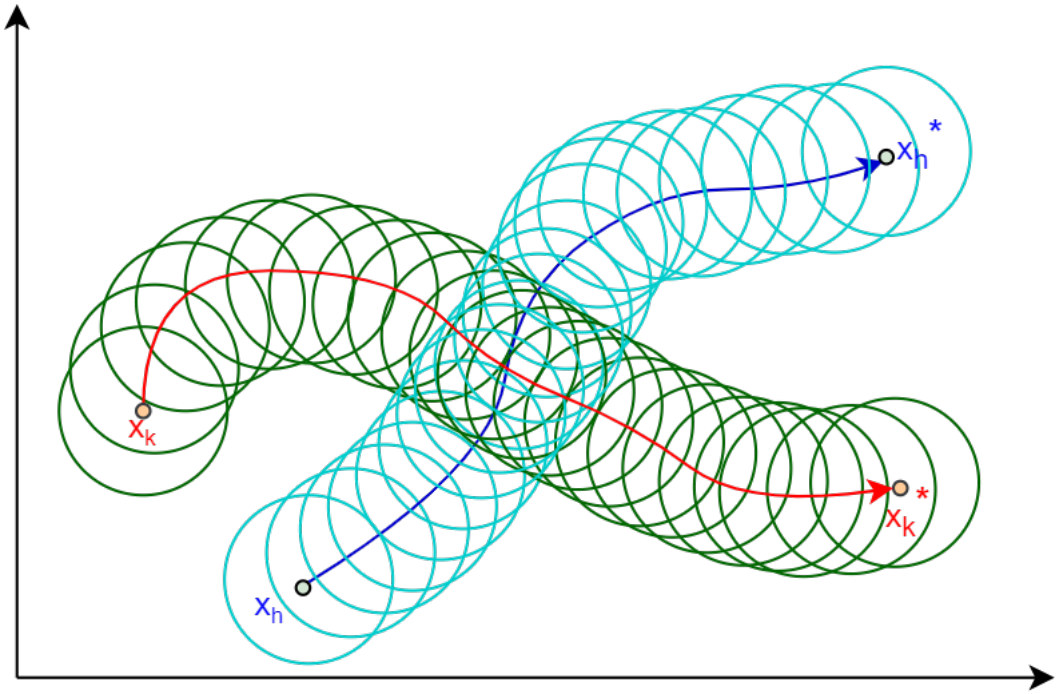


Figura 4.8: Due possibile esecuzioni di un algoritmo di raffinamento con partenze da due soluzioni diverse.

Un aspetto negativo di questo approccio, però, è il fatto che ogni volta che viene selezionata una soluzione di partenza diversa si perdono le informazioni ottenute dalla computazione precedente che ha già raggiunto un ottimo locale.

4.3.2 Variable Neighborhood Search

Una volta ottenuta una soluzione corrispondente ad un ottimo locale nella funzione di costo si può cercare di migliorarla analizzando i suoi intorni di ottimalità di raggio crescente. Questo però non garantisce un effettivo cambiamento della soluzione. Il Variable Neighborhood Search (VNS) è un algoritmo che sfrutta questa ricerca. Nel caso non si verifichi un aggiornamento della soluzione prevede che vengano scelti un certi numero di rami randomici da sostituire con altri non appartenenti alla soluzione, in maniera casuale [6]. In questo modo si impone un aggiornamento con una crescita del costo, nella speranza che nel nuovo intorno selezionato sia possibile trovare una soluzione che si allontani dall'iniziale ottimo locale (Figura 4.9).

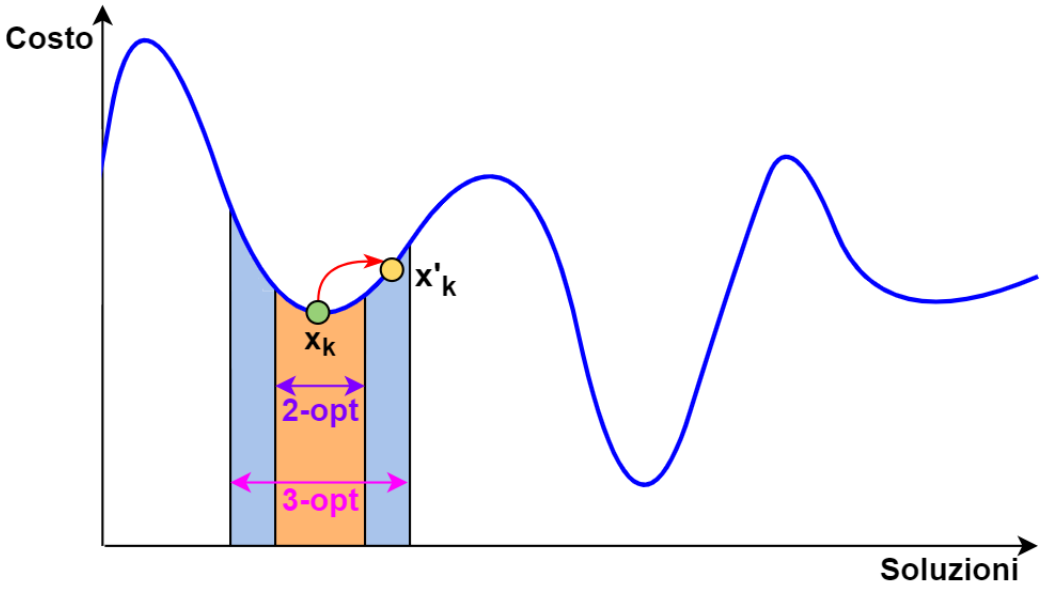


Figura 4.9: Aggiornamento di una soluzione in un minimo locale.

L'algoritmo termina allo scadere del tempo a disposizione o dopo un determinato numero di iterazione, restituendo la miglior soluzione trovata fino a quel momento. Utilizzando questo approccio gran parte della soluzione di partenza viene conservata evitando di perdere le informazioni elaborate precedentemente all'utilizzo di VNS.
Per generare nuove istanze che appartengano all'intorno di k-ottimalità di una data soluzione, quest'ultima è stata codificata con un vettore di lunghezza pari al numero di nodi. Ogni cella di tale array contiene l'identificativo di un nodo e leggendo in ordine crescente di indice tale lista, si ottiene la sequenza di percorrenza dei nodi per tale soluzione. La generazione della nuova soluzione k-opt viene creata, scegliendo un indice **t** casuale dell'array, e permutando iterativamente due nodi nella sequenza, secondo il seguente algoritmo[**?**] e la Figura 4.10.

Algorithm 4: Generazione di una soluzione randomica k-opt

Input: $\mathtt{x} = \{\mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, ..., \mathtt{x}_n\}$= soluzione di partenza
$\mathtt{k}$= numero di archi da variare nella soluzione di partenza
Output: $\mathtt{y}$= nuova soluzione appertenente all'intorno di k-ottimalità di x

```
1 y = x
2 t ← RANDOM({1, ..., n})
3 for j ← 1 to k − 1 do
4     swap(y_t, y_{t+j});
```

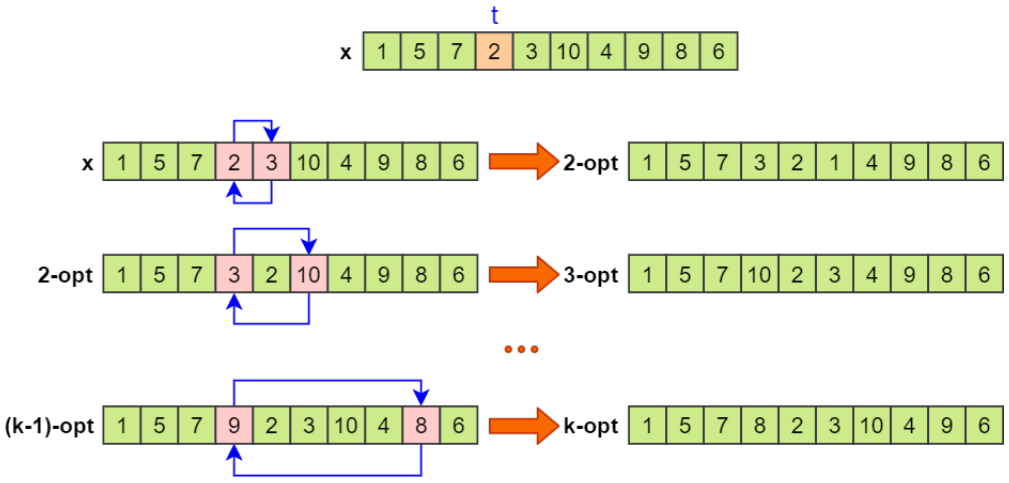


Figura 4.10: Generazione di una soluzione randomica k-opt.

4.3.3 Tabu search

L'approccio Tabu search fu ideato da Fred W. Glover [7]. Data una soluzione in un ottimo locale dello spazio delle soluzioni, l'idea di Glover permette di aggiornarla anche con una di costo più elevato (generalmente si cerca di minimizzare questo peggioramento). Per evitare che all'iterazione successiva si ritorni nella soluzione di partenza, viene creata una lista di "mosse vietate" , detta Tabu list, che impedisca di raggiungere nuovamente l'ottimo locale. In questo modo la soluzione aumenta di costo per un certo numero di iterazioni, finchè non ricomincia a diminuire per raggiungere un nuovo minimo locale o globale. Nel caso in cui si incontri una soluzione che migliori l'incumbent senza rispettare tutti i vincoli presenti nella Tabu list, l'algoritmo aggiorna

ugualmente la soluzione corrente. Questo meccanismo viene detto *Aspiration criterion*.
Aumentando costantemente di dimensione la lista Tabu si rischia, ad un certo punto, che non sia più possibile aggiornare la soluzione. Per evitare ciò generalmente viene scelta una capienza massima (detta *tenure*) della lista, una volta raggiunta la lista viene aggiornata rispettando la politica FIFO (first in first out). Per far si che l'algoritmo oscilli tra la fase di diversificazione e quella di intensificazione, la tenure viene fatta variare durante le diverse iterazioni tra due valori (massimo e minimo) (vedi Figura 4.11). Nelle iterazioni in cui è massima si verifica la diversificazione, in quelle in cui è minima l'intensificazione. Se viene applicata questa scelta implementativa l'algoritmo è chiamato *Reactive Tabu Search*.

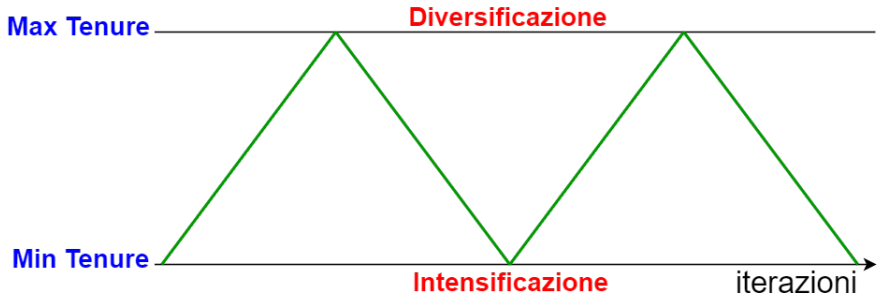


Figura 4.11: Variazione della tenure.

Come per l'algoritmo precedente, il criterio di terminazione è dato dallo scadere del tempo a disposizione o dal raggiungimento del numero massimo di iterazioni scelto, restituendo la miglior soluzione trovata fino a quel momento.

Algorithm 5: Tabu Search

Input: `x`= soluzione di un'istanza di TSP corrispondente ad un ottimo locale
`tenure`= dimensione massima della Tabu List
`deadline`= time limit complessivo dell'algoritmo
`num_iterations`= numero massimo di iterazioni
`num_nodi`= numero di nodi dell'istanza tsp

Output: `y`= miglior soluzione trovata

```
1  n = 0
2  while n < num_iterations ∧ 'deadline not expired' do
3      x' ← move_random_2opt(x)
4      while (check_tabu_list(x') == 'valid move') do
5          x' ← move_random_2opt(x)
6      x ← x'
7      add_tabu_list(edges_removed, tenure)
8      if cost(x') < cost(x) then
9          x ← greedy_refinement(x, tabu_list)
10     n ←n + 1
11 y = best_solution()
```

4.3.4 Simulated annealing

L'algoritmo simulated annealign, come dice il nome, è ispirato dal processo di temperamento dei metalli, in cui il materiale viene raffreddato molto lentamente e in maniera controllata, affinchè raggiunga la configurazione di minima energia. Analogamente, in questo algoritmo viene scelta una funzione (generalmente esponenziale) che descriva la variazione della "temperatura" T. Ad ogni iterazione la soluzione corrente può essere aggiornata con una qualsiasi altra interna all'intorno di 2 ottimalità, di costo minore o maggiore, con una probabilità funzione della variazioni di costo e della temperatura attuale, $f(\Delta costo, T)$. Questo implica che non sia necessario scandire tutto l'intorno, ma che sia sufficiente scegliere in maniera randomica 2 rami da sostituire nella soluzione (Figura 4.12).

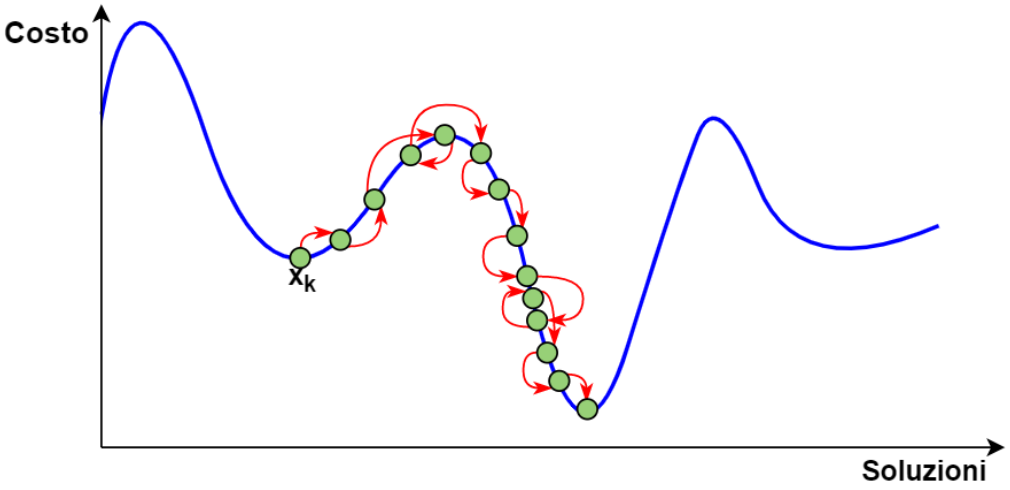


Figura 4.12: Esempio di esecuzione dell'algoritmo Simulated Annealing.

Con il procedere delle iterazioni, l'aggiornamento ad un costo peggiore avviene sempre meno frequentemente, fino ad ottenere solo aggiornamenti con soluzioni più vantaggiose. Esiste un teorema secondo il quale se la temperatura varia in maniera estremamente lenta ed è consentito effettuare un numero di iterazioni estremamente elevato, questo algoritmo garantisce di trovare l'ottimo globale. Concretamente queste ipotesi sono molto difficili da realizzare, ma è statisticamente comunque possibile dichiarare che l'approccio del simulated annealing restituisce una buona soluzione.

4.4 Algoritmo genetico

L'algoritmo genetico è legato alla teoria dell'evoluzione di Darwin, con cui condivide numerosi concetti. Da un punto di vista teorico, l'algoritmo definisce in prima battuta una serie di individui, che costituiscono una popolazione. In seguito, attraverso mutazioni dei singoli soggetti e la riproduzione di questi, si crea una nuova popolazione. Il concetto fondamentale alla base di tale algoritmo è che associando ad un individuo uno score, lo si possa utilizzare per far progredire la specie.
Ad ogni individuo viene associata una fitness, che rappresenta quanto sia forte ed efficiente. Applicando tale concetto al Travelling Salesman Problem, ad ogni individuo i è stata associata una fitness pari a:

$$fitness_i = \frac{1}{costo_i}$$

dove $costo_i$ rappresenta il valore della funzione obiettivo per l'istanza i.
La popolazione iniaziale nell'algoritmo sviluppato, è stata generata utilizzando l'algoritmo nearest neighbour ma utilizzando un diverso nodo di partenza per ciascuno di essi. Ogni individuo della popolazione è stato rappresentato come la sequenza dei nodi, in ordine di visita.
In seguito vengono generati nuovi individui a partire dalla popolazione attuale, utilizzando due tecniche differenti:

- **Crossover**
  in questa operazione vengono selezionati randomicamente due individui della popolazione e partire da questi, vengono creati nuovi tour che ereditano dai genitori delle caratteristiche. Nel nostro caso ciascun individuo eredita parte della sequenza di visita di uno dei suoi genitori, e la restante parte viene ereditata dall'altro genitore.

- **Mutazione**
  in questa fase un certo numero di individui viene selezionato in maniera casuale e da ciascuno di questi, viene generato un nuovo tour attraverso una permutazione casuale della sequenza di partenza.

L'utilizzo di tali tecniche iterativamente insieme alla rimozione dellla popolazione degli individui di costo peggiore, permette di ridurre complessivamente il costo medio delle istanze nella popolazione.
Riducendo tale valore medio della funzione obiettivo, si riesce ad ottenere una migliore soluzione con numerose iterazioni. All'interno del programma sviluppato, le precedenti tecniche non sono state applicate contemporaneamente in ogni iterazione ma in istanti differenti, secondo quanto descritto nel seguente algoritmo.

Algorithm 6: Evoluzione

Input: `population`= popolazione di numerosi tour generati mediante un algoritmo di costruzione

Output: `y`= sequenza di visita dei nodi nel tour ottenuto di costo minore

```
1 num_epochs ← 0
2 best_cost ← 0
3 while num_epochs < MAX_NUM_EPOCHS do
4     if num_epochs mod 3 == 0 then
5         crossover(population, best_cost)
6     else
7         mutation(population, best_cost)
8     remove_worst_members(population)
9 y ← best_member(population)
```

La fase di crossover viene applicata più di rado, poichè la generazione di nuovi figli a partire dai genitori richiede molto più tempo della creazione dello stesso numero di individui mediante mutazione.
Gli algoritmi di crossover e mutazione, utilizzati nel programma sviluppato, sono spiegati nella seguente sezione, con le relative illustrazioni.

Algorithm 7: Crossover

Input: `population`= popolazione di numerosi tour generati mediante un algoritmo di costruzione
`sum_fitnesses`= somma delle fitness di tutti gli individui della popolazione
`best_cost`= costo della migliore soluzione attuale

Output: $\texttt{offspring}_1, \texttt{offspring}_2$= nuovi individui generati nella popolazione

1 `n`= numero di nodi dell'istanza tsp
2 $\texttt{x} = \{\texttt{x}_1, ..., \texttt{x}_\texttt{n}\} \leftarrow \texttt{RANDOM}(population, p = \frac{fitness_x}{sum\_fitnesses})$
3 $\texttt{y} = \{\texttt{y}_1, ..., \texttt{y}_\texttt{n}\} \leftarrow \texttt{RANDOM}(population, p = \frac{fitness_y}{sum\_fitnesses})$
4 $\texttt{offspring}_1[1, ...\texttt{n}/2] = x[1, ..., n/2]$
5 $\texttt{offspring}_2[\texttt{n}/2 + 1, ..., \texttt{n}] = y[n/2 + 1, ..., n]$
6 $\texttt{offspring}_1[\texttt{n}/2 + 1, ..., \texttt{n}] = \{y_i \in y \ : \ y_i \notin \{x_1, ..., x_{n/2}\}\}$
7 $\texttt{offspring}_2[\texttt{n}/2 + 1, ..., \texttt{n}] = \{x_i \in x \ : \ x_i \notin \{y_{n/2+1}, ..., y_n\}\}$
8 $\texttt{sum\_fitnesses} \leftarrow \texttt{update}(sum\_fitness, offspring_1, offspring_2)$
9 $\texttt{min\_cost} \leftarrow \texttt{min}(cost(offspring_1), cost(offspring_2))$
10 **if** $cost(offspring1) < best\_cost$ **then**
11 $\quad \texttt{best\_cost} \leftarrow min\_cost$

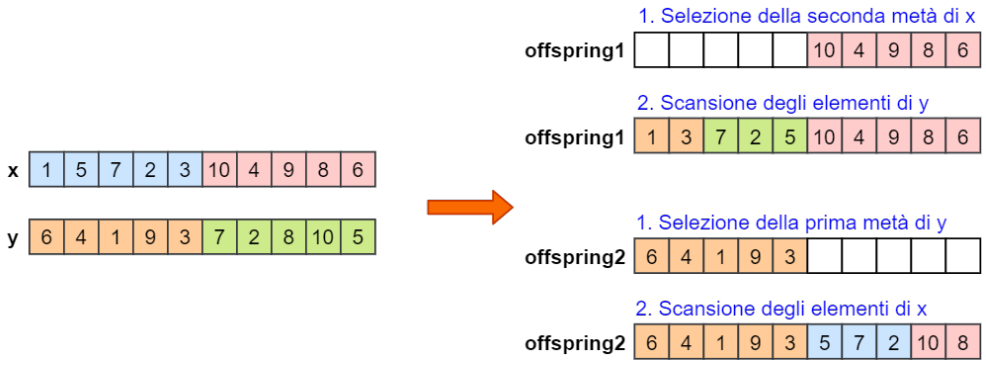


Figura 4.13: Esempio di applicazione del crossover su due istanze x e y.

Algorithm 8: Mutazione

Input: `population`= popolazione di numerosi tour generati mediante un algoritmo di costruzione
`sum_fitnesses`= somma delle fitness di tutti gli individui della popolazione
`best_cost`= costo della migliore soluzione attuale

Output: `offspring1`, `offspring2`= nuovo individuo generato nella popolazione

1 `n` ← numero di nodi dell'istanza tsp
2 `x` = $\{x_1, ..., x_n\}$ ←$RANDOM(population)$
3 `begin` ← $RANDOM(\{1, ..., n/2\})$
4 `end` ← $RANDOM(\{n/2 + 1, ..., n\})$
5 **for** `i` ← *begin* **to** *end* **do**
6 `offspring`$[i] \leftarrow x[end - i + begin]$
7 **if** $cost(offspring) < best\_cost$ **then**
8 `best_cost` ← $cost(offspring)$

Figura 4.14: Esempio di applicazione della mutazione su un'istanza x.

Capitolo 5

Performance

La metrica di confronto, utilizzata nell'analisi degli algoritmi, è il tempo complessivo di creazione e risoluzione del modello. Ciascuna modalità di risoluzione viene applicata a diverse istanze di TSPlib, con un numero differente di nodi.

5.1 Performance variabilty

Nel corso degli anni '90, gli ingegneri di CPLEX scoprirono che il tempo di risoluzione variasse significativamente in diversi sistemi operativi. Con alcune istanze, le performance migliori si avevano su UNIX mentre con altre su Windows.
Il motivo di tale comportamento venne in seguito studiato ed attribuito alla diversa scelta effettuata dai sistemi operativi nel decretare l'ordine delle variabili su cui viene svolto l'albero decisionale.
Le scelte svolte inizialmente, nella definizione dei primi nodi dell'albero, si ripercuotono sulla sua successiva evoluzione.
Proprio per questo motivo, su alcune istanze, UNIX riusciva a risolvere il problema in tempo minore rispetto a Windows, mentre su altre accadeva l'opposto.
Da questi studi, evinse che il Branch and Cut è un sistema caotico e che quindi piccole variazioni delle condizioni iniziali generano grandi differenze nei risultati finali.
Per questo motivo, alcuni algoritmi prensentati in questo report, sono stati studiati al variare di alcune condizioni iniziali:

- **Random Seed**
  definisce il seme da cui CPLEX genera una sequenza di numeri pseudocasuali (vedi Sezione A.0.2).

Nel momento in cui CPLEX nota che diverse variabili frazionarie hanno lo stesso valore, il risolutore sceglie casualmente su quale di queste applicare il Branch.

- **Gap**
  intervallo massimo, tra il valore della migliore funzione obiettivo intera e il valore della funzione di costo del miglior nodo rimanente, che permette di decretare il raggiungimento dell'ottimo secondo CPLEX (vedi Sezione A.0.2).

- **Node limit**
  massimo numero di nodi risolti prima che l'algoritmo termini senza raggiungere l'ottimalità (vedi Sezione A.0.2).

- **Populate limit**
  massimo numero di soluzioni MIP generate per il pool di soluzioni durante ogni chiamata della procedura di popolazione (vedi Sezione A.0.2).

La variazione del primo di questi parametri permette di apportare significative modifiche al tempo di risoluzione, non modficando la reale ottimalità della soluzione.
La variazione degli altri parametri permette invece di ottenere una soluzione meta-euristica, ovvero un'approssimazione più lasca di quella ottima.

5.2 Analisi tabulare

Un metodo non molto efficiente per lo studio delle performance degli algoritmi, utilizza una struttura tabulare in cui viene inserita una riga per ogni istanza del problema.
Inoltre vengono riportati i tempi di esecuzione degli algoritmi su ognuno dei grafi analizzati. Nell'ultima riga per ciascun algoritmo viene riportata la media geometrica dei suoi tempi di esecuzione (vedi esempio in Tabella 5.1).
Solitamente viene impostato un TIME LIMIT uguale per tutti gli algoritmi. Questo rappresenta nella tabella il valore del tempo di esecuzione per un algoritmo che ha impiegato un ammontare di tempo, maggiore o uguale a TIME LIMIT. Spesso viene dato più peso al TIME LIMIT, inserendolo nella tabella con, ad esempio, peso 10 (ovvero TIME LIMIT*10).
La debolezza di tale calcolo delle performance risiede nel fatto che non sempre la media descrive l'efficienza di un soluzione. Infatti non influisce unicamente il tempo di risoluzione del modello ma anche quello necessario alla sua creazione.

Istanza	Sequential	Flow	Loop
att48	212.3	12.5	4.3
...	...	...	...
a280	3200	2500.8	1300.5
	2120.3	1800.3	1000.4

Tabella 5.1: Tabella di performance con **TIME LIMIT=3200**.

5.3 Performance profiling

Questo metodo prevede la classificazione dei tempi di esecuzione degli algoritmi in base al numero percentuale di successi, rispetto a un fattore moltiplicativo (ratio) del tempo di esecuzione (vedi Figura 5.1).
L'andamento del performance profile di un algoritmo è monotono crescente. Il valore assunto per ogni ratio dagli algoritmi all'interno del grafico è la percentuale del numero di istanze che l'algoritmo risolve con quel fattore rispetto all'ottimo di quel caso.
Spesso questi grafici vengono rappresentati in scala logaritmica per notare al meglio le differenze ed avere una migliore raffigurazione, più semplice da essere analizzata visivamente.

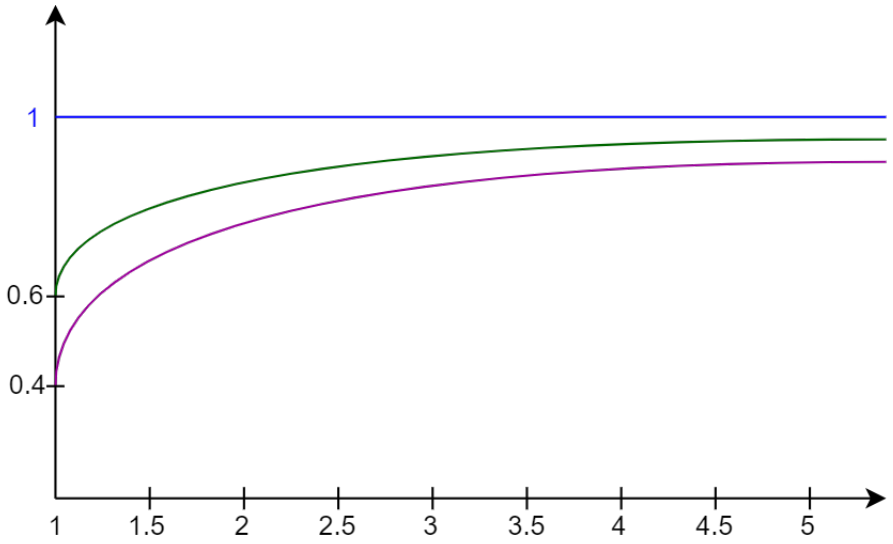


Figura 5.1: Performance profile di due algoritmi.

Per creare il performance profile degli algoritmi implementati, è stato utilizzato il programma python riportato nella Sezione A.2.

5.4 Analisi degli algoritmi sviluppati

Appendice A

CPLEX

In questa sezione verranno approfondite alcune funzioni di CPLEX necessarie ad implementare gli algoritmi descritti nei capitoli precedenti.

A.0.1 Funzioni

A.0.1.1 Costruzione e modifica del modello

Per poter costruire il modello da analizzare, come prima cosa, è necessario creare un puntatore alle due strutture dati utilizzate da CPLEX.

```
1  int error;
2  CPXENVptr env = CPXopenCPLEX(&error);
3  CPXLPptr lp = CPXcreateprob(env, &error, "TSP");
```

Listing A.1: modelTSP.txt

La funzione alla riga 2 alloca la memoria necessaria e riempie la struttura con valori di default. Nel caso in cui non termini con successo memorizza un codice d'errore in *&error*.
La funziona invocata nella riga successiva, invece, associa la struttura LP all'ENV che gli viene fornito. Il terzo parametro passato, nell'esempio "TSP", sarà il nome del modello creato. Al termine di queste operazioni verrà quindi creato un modello vuoto. All'interno del nostro programma per inizializzarlo è stata costruita la seguente funzione:

```
void cplex_build_model(istanza_problema, env , lv);
```

All'interno di **cplex_build_model()** viene aggiunta una colonna alla volta al modello, definendo quindi anche la funzione obiettivo. Le variabili aggiunte

istanza_problema: puntatore alla struttura che contiene l'istanza del problema (letta dal file TSPlib)

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata

corrispondono agli archi del grafo e per ciascuno di questi viene calcolato il costo come distanza euclidea. La funzione necessaria ad inserire colonne e definire la funzione di costo è la seguente:

```
CPXnewcols(env, lp, num_colonne, costi, lower_bound,
           upper_bound, tipi_variabili, nomi_variabili);
```

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

lp: di tipo CPXLPptr, è un puntatore alla struttura LP precedentemente creata

num_colonne: numero di colonne da inserire

costi: vettore dei costi relativi agli archi da inserire

lower_bound: vettore contenente i lower bound dei valori assumibili dalle variabili da inserire

upper_bound: vettore contenente gli upper bound dei valori assumibili dalle variabili da inserire

tipi_variabili: vettore contenente la tipologia delle variabili da inserire

nomi_variabili: vettore di stringhe contenenti i nomi delle variabili da inserire

La generica colonna **i**, aggiunta dalla funzione, sarà definita dalle informazioni contenute all'interno della posizione **i** degli array, ricevuti come parametri.

Nel programma elaborato durante il corso, viene aggiunta una colonna alla volta all'interno del modello. Per far ciò, è necessario comunque utilizzare riferimenti alle informazioni da inserire, in modo da ovviare il problema riguardante la tipologia di argomenti richiesti, che sono array. Ad esempio, nel nostro caso, la tipologia di una nuova variabile inserita sarà un riferimento al carattere **'B'**, che la identifica come binaria.
Per poter inserire il primo insieme di vincoli del problema

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 \qquad \forall\, v \in V$$

viene invece sfruttata la seguente funzione:

```
CPXnewrows(env, lp, numero_righe,termini_noti,
           tipi_vincoli, range_valori, nomi_vincoli);
```

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata

numero_righe: numero di righe (vincoli) da inserire

termini_noti: vettore dei termini noti dei vincoli

tipi_vincoli: vettore di caratteri che specifica il tipo di vincoli da inserire. Ogni carattere può assumere:
'L' per vincolo $\leq$
'E' per vincolo $=$
'G' per vincolo $\geq$
'R' per vincolo definito in un intervallo

range_valori: vettore di range per i valori di ogni vincolo (nel nostro caso è NULL)

nomi_vincoli vettore di stringhe contenenti i nomi

In modo analogo all'inserimento delle colonne, nel nostro programma viene aggiunta una riga alla volta nel modello. L'**i**-esima riga aggiunta corrisponderà al vincolo imposto sul nodo **i**-esimo, imponendo a 1 il coefficiente della

delle variabili da inserire

variabile $x_{k,j}$ se $k = i$ $j = i$ per ogni variabile del modello. In questo modo però viene aggiunto un vincolo in cui è necessario cambiare i coefficienti delle variabili che ne prendono parte. Per fare ciò è necessaria la funzione:

```
CPXchgcoef(env, lp, i, j, new_value);
```

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata

i: intero che specifica l'indice della riga in cui modificare il coefficiente

j: intero che specifica la colonna in cui si trova la variabile di cui modificare il coefficiente

new_value: nuovo valore del coefficiente

L'utilizzo di questa metodo per inserire nuovi vincoli è però considerato inefficiente. Al suo posto è consigliato l'utilizzo di una funzione che inserisca il vincolo con già i coefficienti delle variabili impostati al valore corretto:

```
CPXaddrows(env, lp, num_nc, num_nr, nnz, const_term, type_costr,
           rmatbeg, rmatind, rmatval, col_name, row_name);
```

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata

num_nc: numero di nuove colonne che devono essere aggiunte

num_nr: numero di nuove righe che devono essere aggiunte

nnz: numero di coefficienti non nulli nel vincolo aggiunto

const_term: vettore con i termini noti per ogni vincolo da aggiungere

type_costr: vettore con il tipo di vincoli da aggiungere, scelto tra:
'L' per vincolo $\leq$
'E' per vincolo $=$
'G' per vincolo $\geq$
'R' per vincolo definito in un intervallo

rmatbeg: vettore per definire le righe da aggiungere

rmatind: vettore per definire le righe da aggiungere

rmatval: vettore per definire le righe da aggiungere

col_name: vettore contenente i nomi delle nuove colonne

row_name: vettore contenente i nomi dei nuovi vincoli

Per rimuovere invece delle righe, viene utilizzata la seguente funzione:

```
CPXdelrows( CPXCENVptr env, CPXLPptr lp, int begin, int end );
```

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata

begin: indice numerico della prima riga da cancellare

end: indice numerico dell'ultima riga da cancellare

A.0.1.2 Calcolo della soluzione

Per ottenere la soluzione ottima del problema di ottimizzazione del problema correlato al modello definito in cplex, vengono utilizzate due fasi:

- **Risoluzione del problema di ottimizzazione**

```
CPXmipopt(env, lp);
```

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata

- **Ottenimento della soluzione**

```
CPXgetmipx(env, lp, x, inizio, fine);
```

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata

x: puntatore a un vettore di double in cui verranno salvati i valori delle variabili ottenuti dalla soluzione ottima

inizio: primo indice della variabile di cui si vuole memorizzare ed analizzare il valore

fine: indice dell'ultima variabile di cui si vuole memorizzare ed analizzare il valore

Questa funzione salva in x tutte le variabili che hanno indice $i \in [inizio, fine]$ e quindi x deve essere un vettore di almeno $fine - inizio + 1$ valori. Nel nostro programma, vengono analizzati i valori di tutte le variabili in gioco.
Per questo motivo **inizio=0** e **fine=num_colonne - 1**[12]. In seguito il nostro programma analizza la correttezza della soluzione svolgendo la verifica su:

- *valori assunti dalle variabili*
  ciascun $x_{i,j}$ assume valore 0 o 1 con una tolleranza di $\epsilon = 10^{-5}$
- *grado di ciascun nodo*
  il tour è composto al massimo da due archi che toccano lo stesso nodo

- **Gap relativo**
  La seguente funzione permette di ottenere il gap relativo della funzione obiettivo per un'ottimizzazione MIP.

```
CPXgetmiprelgap( CPXCENVptr env, CPXCLPptr lp, double * gap_p);
```

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata

[1]numero di variabili=CPXgetnumcols(env,lp);
[2]numero di vincoli=CPXgetnumrows(env,lp);

gap_p: puntatore a un double in cui verrà salvato il gap

Per un problema di minimizzazione il gap relativo viene calcolato come:

$$\frac{bestinteger - bestobjective}{10^{-10} + |bestinteger|}$$

dove **bestinteger** è il valore restituito dalla funzione **CPXgetobjval()** mentre **bestobjective** da **CPXgetbestobjval()**.

A.0.1.3 Lazy constraints

Nel caso in cui si voglia sfruttare la possibilità di verificare se è stato rispettato un vincolo, solo al termine della computazione della soluzione, è necessario inserire un "lazy constraint". Per fare ciò viene utilizzata la seguente funzione:

```
CPXaddlazyconstraints(env, lp, num_vincoli, nnz,
          termine_costante, tipo_vincolo, posizione_iniziale,
          indici, valori, nome_vincolo);
```

In modo analogo alle due funzioni precedentemente descritte per l'aggiunta di righe e colonne, nel nostro modello viene inserito un vincolo per volta. Per impostare correttamente i coefficienti delle variabili presenti nel vincolo, vengono sfruttati i due array *indici* e *valori*. Come rappresentato in Figura A.1, all'interno della posizione i-esima del vettore di indici è presente la posizione dell'i-esima variabile del vincolo da inserire (nell'esempio in figura $indici[i] = j$). Mentre l'i-esima posizione del vettore di valori contiene il corrispondente coefficiente (in questo caso c_j).

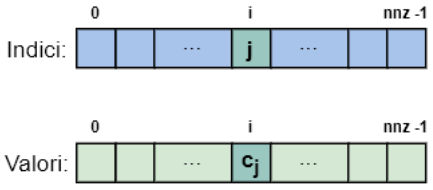


Figura A.1: Array lazy constraints

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata

num_vincoli: numero di vincoli da inserire

nnz: vettore con il numeri di variabili per ogni vincolo

termine_costante: vettore dei termini noti dei vincoli

tipi_vincoli: vettore di caratteri che specifica il tipo di vincoli da inserire. Ogni carattere può assumere:
'L' per vincolo $\leq$
'E' per vincolo $=$
'G' per vincolo $\geq$
'R' per vincolo definito in un intervallo

posizione_iniziale: vettore con le posizione iniziali dei coefficienti nei vincoli

indici: vettore di vettori contenenti gli indici delle variabili appartenenti al vincolo

valori: vettore di vettori con i coefficienti delle variabili del vincolo

nome_vincolo: vettore con i nomi dei vincoli

A.0.1.4 Lazy Constraint Callback

Per poter utilizzare una lazy constraint callback, precedentemente implementata, all'interno del programma, prima di tutto è necessario installarla. Questo viene fatto attraverso la seguente funzione:

```
CPXsetlazyconstraintcallbackfunc(env, mylazycallback, tsp_in);
```

Una volta installata la callback è necessario cambiare l'impostazione del numero di thread utilizzati dal programma. Infatti CPLEX, non sapendo se la funzione implementata dall'utente è thread safe, impedisce lo svolgimento di elaborazioni in parallelo con le callback. A meno che questo non venga

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV
mylazycallback: puntatore di tipo CPXPUBLIC * alla callback chiamata
tsp_in: puntatore di tipo void* ad una struttura dati contenente le informazioni da passare alla callback

esplicitamente dichiarato dall'utente con l'impostazione del corrispondente parametro. Per questo può tornare utile la seguente funzione, che restituisce il numero di core presenti nel computer:

```
CPXgetnumcores(env, ncores);
```

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV
ncores: puntatore alla variabile in cui viene scritto il numero di core

Come descritto nella sezione dedicata, le callback sono funzioni lasciate appositamente vuote da CPLEX, affinché l'utente possa implementarle in maniera personalizzata. Hanno però una dichiarazione standard, qui riportata:

```
static int CPXPUBLIC name_function(CPXCENVptr env, void* cbdata,
                                   int wherefrom, void* cbhandle,
                                   int* useraction_p)
```

Nell'implementarla bisogna fare particolare attenzione a renderla thread safe, se si vuole utilizzarla su più processi in parallelo. Infatti, nel caso in cui il programma lavorasse contemporaneamente con più processori, non si devono verificare interferenze di accesso agli stessi dati da parte di invocazioni diverse della callback. Quest'aspetto è lasciato a completa gestione dell'utente.
Per avere accesso alle variabili utilizzate dal nodo che invoca la callback è possibile chiamare la seguente funzione:

```
CPXgetcallbacknodex(env, cbdata, wherefrom, x_star, start, end);
```

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV

cbdata: puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback

wherefrom: contiene dove è stata invocata la callback durante l'ottimizzazione

cbhandle: puntatore a dati privati dell'utente

useraction_p: specifica le azioni da eseguire al termine della callback:
CPX_CALLBACK_DEFAULT: usa il nodo di CPLEX selezionato
CPX_CALLBACK_FAIL: esci dell'ottimizzazione
CPX_CALLBACK_SET: usa il nodo selezionato come definito nel valore di ritorno

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV

cbdata: puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback

wherefrom: contiene in che punto dell'ottimizzazione è stata invocata la callback

x_star: vettore in cui memorizzare le variabili

begin indice della prima variabile che si vuole venga restituita

end indice dell'ultima variabile che si vuole venga restituita

Invece, per ottenere informazioni riguardanti il problema di ottimizzazione che si sta risolvendo all'interno di una callback implementata dall'utente, è possibile utilizzare:

```
CPXgetcallbackinfo(env, cbdata, wherefrom, which_info, result);
```

Macro utili da utilizzare come parametro *which_info* possono essere:
Per conoscere il valore della funzione obiettivo del problema legato al nodo corrente che invoca la callback:

```
CPXgetcallbacknodeobjval(env, cbdata, wherefrom, objval);
```

All'interno della lazy callback è necessario aggiungere il taglio voluto al nodo corrente che la invoca. Questo può essere fatto in due diverse modalità:

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV

cbdata: puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback

wherefrom: contiene in che punto dell'ottimizzazione è stata invocata la callback

which_info: macro che specifica l'informazione che si desidera conoscere

result: puntatore di tipo void in cui verrà memorizzata l'informazione richiesta

CPX_CALLBACK_INFO_MY_THREAD_NUM:	identifica il thread che ha eseguito la chiamata
CPX_CALLBACK_INFO_BEST_INTEGER:	valore della miglior soluzione intera

globale o locale.
Nel primo caso il vincolo aggiunto sarà visibile da tutti i nodi. Inoltre, in caso non lo ritenga più necessario, CPLEX potrà eliminarlo dal modello. Quest'operazione viene detta *purge* e si verifica, ad esempio, quando un taglio non viene applicato per molte iterazioni consecutive. Per un vincolo globale viene chiamata la seguente funzione, che ne aggiunge uno alla volta:

```
CPXcutcallbackadd(env, cbdata, wherefrom, nnz, const_term,
                  type_constraint, indices, values,
                  purgeable);
```

Nella seconda modalità, locale, il taglio aggiunto sarà visibile solo ai nodi discendenti di quello che invoca la callback. Viene implementata con la seguente chiamata:

```
CPXcutcallbackaddlocal(env, cbdata, wherefrom, nnz, const_term,
                       type_constraint, indices, values);
```

A.0.1.5 Lazy Constraint Callback General

Per evitare che alcune procedure interne a CPLEX vengano disattivate non momento dell'istallazione di una callback, è possibile utilizzarla con una diversa modalità rispetto a quella descritta nella sezione precedente, detta *general*. Per quest'operazione viene invocata la seguente funzione, che si occupa anche di specificare il contesto in cui invocare la callback:

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV

cbdata: puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback

wherefrom: contiene in che punto dell'ottimizzazione è stata invocata la callback

objval: puntatore ad una variabile *double* in cui memorizzare il costo

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV

cbdata: puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback

wherefrom: contiene in che punto dell'ottimizzazione è stata invocata la callback

nnz: numero di coefficienti non nulli

const_term: valore del termine noto

type_constraint: tipologia del taglio da aggiungere, a scelta tra
'L' per vincolo $\leq$
'E' per vincolo $=$
'G' per vincolo $\geq$

indices: vettore contente gli indici dei coefficienti del taglio

values: vettore contenente i coefficienti delle variabili nel

```
CPXcallbacksetfunc (env, lp, contextmask, callback, userhandle);
```

In questo caso come **contextmask** è necessario passare la macro **CPX_CALLBACKCONTEXT_CANDIDATE**, che specifica di invocare la callback nel momento in cui viene trovata una nuova soluzione intera possibile.
La callback deve avere questa dichiarazione:

```
static int CPXPUBLIC name_general_callback(CPXCALLBACKCONTEXTptr
                    context, CPXLONG contextid, void* cbhandle)
```

in cui

taglio

purgeable: intero che specifica in che modo CPLEX deve trattare il taglio, consigliato 0

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV

cbdata: puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback

wherefrom: contiene in che punto dell'ottimizzazione è stata invocata la callback

nnz: numero di coefficienti non nulli

const_term: valore del termine noto

type_constraint: tipologia del taglio da aggiungere, a scelta tra
'L' per vincolo $\leq$
'E' per vincolo $=$
'G' per vincolo $\geq$

indices: vettore contente gli indici dei coefficienti del taglio

values: vettore contenente i coefficienti delle variabili nel taglio

Al suo interno, per poter accedere alla soluzione candidata e al suo costo, deve essere presente la seguente chiamata, che è specifica per questo contesto:

```
CPXcallbackgetcandidatepoint(context, x_star, begin, end, obj_p);
```

Per poter scartare una soluzione, nel caso in cui violi alcuni tagli specificati nella chiamata stessa, viene utilizzata la seguente funzione. Anche questa è specifica per il contesto **CPX_CALLBACKCONTEXT_CANDIDATE**.

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP

contextmask: specifica in quali contesti deve essere invocata la callback, è possibile metterne in or anche più di uno e gestire poi i singoli casi dall'interno della funzione

callback: puntatore alla callback scritta dall'utente

userhandle: puntatore ad una struttura che contiene i dati da passare alla callback

contex: puntatore ad una struttura di contesto della callback

contextid: intero che specifica il contesto in cui invocare la callback

cbhandle: argomento passato alla callback nell'istallazione

```
CPXcallbackrejectcandidate(context, rcnt, nnz, const_term,
                           type_constraint, rmatbeg, rmatind,
                           rmatval);
```

A.0.1.6 Algoritmi Euristici

Per poter impostare una variabile $x_{i,j}$ ad una valore fissato è necessario rendere i suoi lower e upper bound alla quantità voluta. Per cambiare questi parametri viene utilizzata la seguente funzione:

```
CPXchgbds(env, lp, num_bouds, indices, which_bound, values);
```

A.0.2 Parametri

Con le seguenti funzioni è possibile modificare i parametri di impostazione di CPLEX, altrimenti impostati ai valori di default. Nel caso in cui si tratti di parametri di tipo INT è necessario invocare:

```
CPXsetintparam(env, numero_parametro, nuovo_valore);
```

mentre se di tipo DOUBLE:

contex: contesto, come passato alla callback scritta dall'utente
x_star: vettore dove memorizzare i valori richiesti
begin: indice prima colonna richiesta
end: indice dell'ultima colonna richiesta
obi_p: buffer in cui memorizzare il costo della soluzione candidata, può essere NULL

contex: contesto, come passato alla callback scritta dall'utente
rcnt: numero di vincoli che tagliano la soluzione
nnz: numero di coefficienti non nulli nel vincolo
const_term: vettore di termini noti
type_constraint: vettore con la tipologia dei vincoli specificati
rmatbeg: vettore di indici che specifica dove inizia ogni vincolo
rmatind: vettore di indici delle colonne con coefficienti non nulli
rmatval: coefficienti non nulli delle colonne specificate

```
CPXsetdblparam(env, numero_parametro, nuovo_valore);
```

In entrambe le funzioni:

A.0.3 Costanti utili

Di seguito sono riportate alcune macro utili di CPLEX, insieme ai loro corrispondenti valori:

A.1 Gnuplot

Una volta ottenuta la soluzione del problema di ottimizzazione, viene disegnato il grafo per facilitare all'utente la comprensione della sua correttezza.

env:	puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV
lp:	puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP
num_bounds:	numero totale di bound da cambiare
indices:	vettore con gli indice delle colonne corrispondenti alle variabili di cui cambiare il bound
which_bound:	array di caratteri che specificano il bound da modificare, a scelta tra: *'U'* per upper bound *'L'* per lower bound *'B'* per entrambi
values:	vettore con i nuovi valori

env:	puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV di cui si vogliono cambiare i parametri
numero_parametro:	intero corrispondente al parametro da modificare (vedi Tabella A.1)
nuovo_valore:	nuovo valore (rispettivamente intero o double) del parametro

Per fare ciò viene utilizzato Gnuplot, un programma di tipo command-driven. Per poterlo utilizzare all'interno del proprio programma esistono due metodi:

- Collegare la libreria ed invocare le sue funzioni all'interno del nostro programma
- Collegare l'eseguibile interattivo al proprio programma. In questo caso i comandi deve essere passati all'eseguibile attraverso un file di testo e l'utilizzo di un pipe.

In questa trattazione è stato scelto il secondo metodo. All'interno del file è possibile specificare a Gnuplot le caratteristiche grafiche che deve aver il grafo. Di seguito viene riportato un esempio di tale file.

```
1 set style line 1 \
```

CPX_PARAM_EPGAP	tolleranza dell'intervalo tra la migliore funzione obiettivo intera e la funzione obiettivo del miglior nodo rimanente.
CPX_PARAM_NODELIM	massimo numero di nodi da risolvere prima che l'algoritmo termini senza aver aggiunto l'ottimalità (0 impone di fermarsi alla radice).
CPX_PARAM_POPULATELIM	limita il numero di soluzioni MIP generate per il pool di soluzioni durante ogni chiamata alla procedura populate.
CPX_PARAM_SCRIND	visione o meno dei messaggi di log di CPLEX
CPX_PARAM_MIPCBREDLP	permette, dalla callback chiamata, di accedere al modello originale del problema e non a quello ridotto .
CPX_PARAM_THREADS	imposta il numero massimo di thread utilizzabili.
CPX_PARAM_RINSHEUR	imposta la frequenza (ogni quanti nodi) con cui deve essere invocato da CPLEX l'algoritmo euristico Rins.
CPX_PARAM_POLISHTIME	imposta quanto tempo in secondi deve dedicare CPLEX a fare il polish della soluzione.

Tabella A.1: Parametri.

```
2     linecolor rgb '#0000ff' \
3     linetype 1 linewidth 1 \
4     pointtype 7 pointsize 0.5
5
6  plot 'solution.dat' with linespoints linestyle 1 title "Solution"
7       ,'' using 1:2:(sprintf("%d", $3)) notitle with labels center
8       offset 1
9
10 set term png
11 set output "solution.png"
12 replot
```

Listing A.2: style.txt

Nell'esempio sopra riportato, nella prima parte viene definito lo stile, il colore delle linee e la tipologia di punti, che verrano in seguito visualizzati all'interno del grafico prodotto.
In seguito viene effettuato il plot del grafo in una finestra, utilizzando il primo e secondo valore di ciascuna riga del file **solution.dat** come coordinate mentre il terzo valore viene utilizzato come etichetta.

CPX_ON	**1** valore da assegnare ad alcuni parametri per abilitarli
CPX_OFF	0 valore da assegnare ad alcuni parametri per disabilitarli
CPX_INFBOUND	$+\infty$ massimo valore intero utilizzabile in CPLEX

Il file **solution.dat** contiene le informazioni relative alla soluzione del grafico in cui ciascuna riga ha la seguente forma:

```
coordinata_x    coordinata_y    posizione_in_tour
```

coordinata_x rappresenta la coordinata x del nodo;
posizione_in_tour rappresenta la coordinata y del nodo;
posizione_in_tour rappresenta l'ordine del nodo all'interno del tour, assunto come nodo di origine il nodo 1.

Il grafico viene generato dal comando **plot**, leggendo tutte le righe non vuote e disegnando un punto nella posizione **(coordinata_x,coordinata_y)** del grafico 2D. In seguito viene tracciata una linea solo tra coppie di punti, legati a righe consecutive non vuote all'interno di **solution.dat**.

Attraverso le istruzioni riportate nelle righe 10-12 di **style.txt**, viene invece salvato il grafico appena generato nell'immagine **solution.png**.

Di seguito vengono riportate le varie fasi necessarie alla definizione di un pipe e al passaggio di questo al programma GNUplot:

- **Definizione del pipe**

```
1 FILE* pipe = _popen(GNUPLOT_EXE, "w");
```

  dove **GNUPLOT_EXE** è una stringa composta dal percorso completo dell'eseguibile di GNUplot, seguita dall'argomento **-persistent** (es. *"D:/Programs/GNUplot/bin/gnuplot -persistent"*).

- **Passaggio delle istruzioni a GNUplot**

```
2 f = fopen("style.txt", "r");
3
4 char line[180];
5 while (fgets(line, 180, f) != NULL)
6 {
```

```
7       fprintf(pipe, "%s ", line);
8   }
9
10  fclose(f);
```

viene passata una riga alla volta, del file **style.txt**, a GNUplot mediante il pipe precedentemente creato.

- **Chiusura del pipe**

```
11  _pclose(pipe);
```

A.2 perprof.py

Il programma utilizzato per la creazione del performance profile dei diversi algoritmo è perprof.py[4]. Di seuito vengono riportati i principali argomenti da linea di comando che possono essere utilizzati:

-D delimiter	spefica che delimiter verrà usato come separatore tra le parole in una riga
-M value	imposta value come il massimo valore di ratio (asse x)
-S value	value rappresenta la quantità che viene sommata a ciascun tempo di esecuzione prima del confronto. Questo parametro è utile per non enfatizzare troppo le differenze di pochi ms tra gli algoritmi.
-L	stampa in scala logaritmica
-T value	nel file passato al programma, il TIME LIMIT=value
-P "title"	title è il titolo del plot
-X value	nome dell'asse x (default='Time Ratio')
-B	plot in bianco e nero

Di seguito viene riportato un esempio dell'esecuzione del programma, del suo input e del suo output:

- **comando**

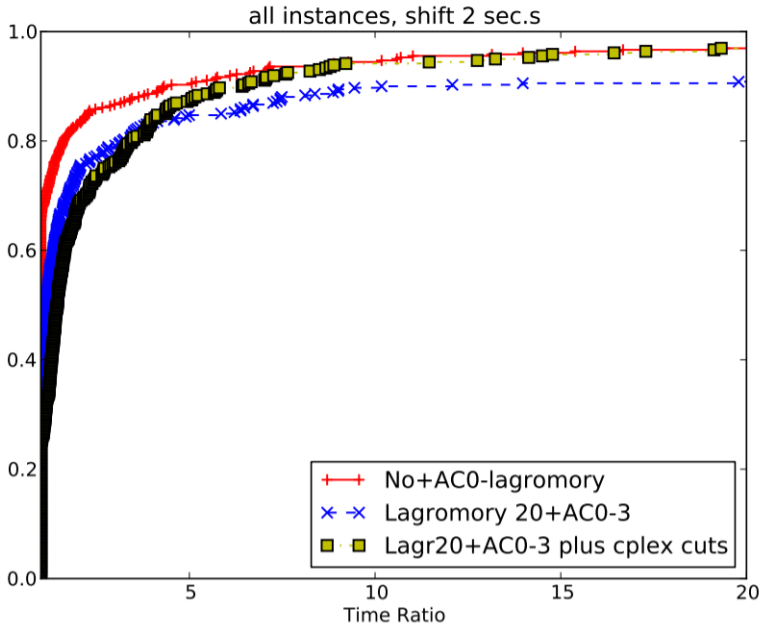
```
python perfprof.py -D , -T 3600 -S 2 -M 20 esempio.csv
                out.pdf -P "all instances, shift 2 sec.s"
```

- **file di input con i dati**
  Viene riportato parte del contenuto di esempio.csv .

```
3, Alg1, Alg2, Alg3
model_1.lp, 2.696693, 3.272468, 2.434147
model_2.lp, 0.407689, 1.631921, 1.198957
model_3.lp, 0.333669, 0.432553, 0.966638
```

  La prima riga deve necessariamente contenere in ordine il numero di algoritmi analizzati e i loro nomi. Nelle righe seguenti viene riportato invece il nome del file lp e i tempi di esecuzione elencati secondo la sequenza di algoritmi specificata all'inizio. Ogni campo di ciascuna riga deve essere separato dal delimitatore specificato all'avvio del programma attraverso l'opzione -D.

- **immagine di output**
  Il grafico viene restituito nel file out.pdf specificato da line di comando chiamando il programma.



Bibliografia

[1] http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde/index.html.

[2] http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/.

[3] http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/data/ml/monalisa.html.

[4] E. D. Dolan and J.J. Moré. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91(2):201–213, 2002.

[5] Lodi Fischetti, M. A. local branching. math. program. *Ser. B*, 98:23–47, 2003.

[6] P. Hansen, N. Mladenovic, J. Brimberg, J. A. Moreno Pèrez, M. Gendreau, and J. Potvin. Variable neighborhood search. In *Handbook of Metaheuristics*, pages 61–86, Londra, 2010. Springer.

[7] E. Taillard, A. Hertz, and D. de Werra. A tutorial on tabu search.