



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica

TESINA DI RICERCA OPERATIVA 2

**TRAVELLING SALESMAN
PROBLEM**

Autori

Raffaele Di Nardo Di Maio 1204879

Cristina Fabris 1205722

Indice

1	Introduzione	1
2	Risoluzione del problema tramite CPLEX	3
2.1	Modelli compatti	3
2.1.1	Formulazione sequenziale	3
2.1.2	Formulazione basata sul flusso	4
2.2	Loop	4
2.2.1	Formulazione di Benders	4
2.2.2	Formulazione con callback	6
2.3	Algoritmi Math-Heuristic	7
2.3.1	Hard Fixing	7
2.3.2	Soft Fixing	8
2.3.3	Patching algorithm	10
3	Algoritmi euristici	13
3.1	Algoritmi di costruzione	13
3.1.1	Nearest Neighborhood	13
3.1.2	Heuristic Insertion	14
3.1.3	GRASP	15
3.2	Algoritmi di raffinamento	16
3.2.1	Algoritmo di 2-ottimalità	16
3.2.2	Algoritmo di 3 ottimalità	18
3.3	Meta-euristici	18
3.3.1	Multi-start	18
3.3.2	Variable Neighborhood Search	19
3.3.3	Tabu search	21
3.3.4	Simulated annealing	22
3.4	Algoritmo genetico	23
4	Performance	27
4.1	Performance variabilty	27
4.2	Analisi tabulare	28
4.3	Performance profiling	28
4.4	Analisi degli algoritmi sviluppati	29
4.4.1	Algoritmi esatti	29
4.4.1.1	Modelli simmetrici	29
4.4.1.2	Modelli compatti	30
4.4.2	Algoritmi math-euristici	30
4.4.3	Algoritmi euristici	30
4.4.3.1	Multi-start	30
4.4.3.2	Algoritmi meta-euristici	31
A	TSPlib	33

B ILOG CPLEX	35
B.1 Funzionamento	35
B.2 Funzioni	36
B.2.1 Costruzione e modifica del modello	36
B.2.2 Calcolo della soluzione	39
B.2.3 Lazy constraints	40
B.2.4 Lazy Constraint Callback	41
B.2.5 Heuristic Callback	43
B.2.6 Lazy Constraint Callback General	43
B.2.7 Algoritmi Euristici	45
B.3 Parametri	45
B.4 Costanti utili	45
C Gnuplot	51
D Performance profile in python	53
Bibliografia	54

Capitolo 1

Introduzione

La seguente trattazione analizza il Problema del Commesso Viaggiatore (Travelling Salesman Problem, TSP), che consiste nell'individuare un circuito hamiltoniano di costo minimo in un assegnato grafo orientato $G=(V,A)$ [4]. La formulazione matematica di tale problema è la seguente:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'arco } (i, j) \in A \text{ viene scelto nel circuito ottimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (1.1)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V \quad (1.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \quad (1.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta^+(S)} x_{ij} \geq 1 \quad S \subset V : 1 \in S \quad (1.4)$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ intero} \quad (i, j) \in A. \quad (1.5)$$

Tuttavia le soluzioni algoritmiche presentate risolvono una sua variante, detta simmetrica, che viene applicata ad un grafo completo non orientato $G=(V,E)$.

Di seguito viene riportata la formulazione matematica di tale versione:

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e \quad (1.6)$$

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 \quad \forall v \in V \quad (1.7)$$

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset V : |S| \geq 3. \quad (1.8)$$

A livello commerciale esistono diverse tipologie di risolutori di problemi di programmazione lineare intera, basati sul Branch & Bound. I più conosciuti in circolazione sono i seguenti:

- **Risolutori esatti**

sono basati sul Branch & Bound ed i più conosciuti sono:

- **IBM ILOG CPLEX Optimization Studio**
è un soluzione analitica, sviluppato dall'IBM, e gratuita a livello accademico.
- **FICO® Xpress Optimization**
è stato prodotto dalla Fair Isaac Corporation(FICO) ed è costituito da 4 componenti principali: FICO Xpress Insight, FICO Xpress Executor, FICO Xpress Solver e FICO Xpress Workbench. Questa soluzione è disponibile gratuitamente solo nella versione Community, in cui però vengono applicate restrizioni sul numero di righe e colonne del tableau, di token non lineari e di funzioni dell'utente.
- **Gurobi**
è una soluzione, sviluppata dalla Gurobi Optimization, che viene rilasciata anche con una versione accademica.
- **COIN Branch and Cut solver (CBC)**
è un risolutore MIP(mixed-integer program) open-source scritto in C++ e sviluppato dalla Computational Infrastructure for Operations Research (COIN).

Nel Capitolo 2 vengono riportate diverse soluzioni math-euristiche e non per il problema del Commesso Viaggiatore, che fanno uso di ILOG CPLEX.

In commercio, il più noto ed efficiente software per la risoluzione del TSP è Concorde, sviluppato in ANSI C e disponibile per l'uso in ambito accademico[1].

Nel Capitolo 3 vengono analizzati gli algoritmi euristici, sviluppati senza far uso di ILOG CPLEX. Nel Capitolo 4 vengono invece riportati confronti, a livello temporale e di costo, delle soluzioni ottenute con i differenti algoritmi enuncati.

Nell' Appendice ??, C, D vengono descritti rispettivamente la documentazione utilizzata ed il funzionamento di CPLEX, il programma GNUPLOT utilizzato nella stampa delle soluzioni e il programma perfprof.py usato per creare i performance profile del Capitolo 4.

Tutte le soluzioni descritte sono state implementate in linguaggio C ed i sorgenti sono disponibili online¹.

¹<https://github.com/RaffaDNDM/Operational-Research-2>

Capitolo 2

Risoluzione del problema tramite CPLEX

2.1 Modelli compatti

I modelli compatti del Travelling Salesman Problem, sono formulazioni il cui numero di variabili e di vincoli è polinomiale nella taglia dell'istanza. In particolare, in quelle analizzate in seguito, sono entrambi $O(n^2)$, con $n = \text{numero di nodi}$.

I modelli compatti sono però applicabili solo a grafi orientati. Per poterli sfruttare per la risoluzione del TSP simmetrico, è necessario per ogni ramo dell'istanza (i, j) , inserire nel modello i corrispondenti rami orientati in entrambe le direzioni (i, j) e (j, i) . Questo comporta un significativo rallentamento nella computazione della soluzione, in quanto l'algoritmo, ogni volta che scarta un ramo (i, j) dalla soluzione ottima, verifica se il corrispondente (j, i) potrebbe invece appartenere. Questo non può però essere possibile, essendo i due rami in realtà lo stesso nella nostra istanza iniziale.

2.1.1 Formulazione sequenziale

Miller, Tucker e Zemlin, nella loro formulazione del modello, hanno introdotto una nuova variabile u_i per ogni nodo i e imposto che, nella soluzione ottima, il suo valore rispettasse dei nuovi vincoli. Questi servivano a garantire che venisse seguito un ordine di percorrenza di tutti i nodi. In questo modo hanno eliminato la creazione di sub-tour, mantenendo il numero di vincoli e di variabili polinomiale. Nello specifico il loro modello è così strutturato:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{i,j} x_{i,j} \quad (2.1)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ih} = 1 \quad \forall h \in V \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{hj} = 1 \quad \forall h \in V \quad (2.3)$$

$$u_i - u_j + n x_{i,j} \leq n - 1 \quad \forall i, j \in V - \{1\}, i \neq j \quad (2.4)$$

$$0 \leq u_i \leq n - 2 \quad \forall i \in V - \{1\} \quad (2.5)$$

Esistono due diversi modi per implementare questo modello sfruttando le funzioni di CPLEX. Nel primo i nuovi vincoli vengono aggiunti come visto in precedenza. In questo modo, durante la

fase di preprocessamento, il programma è già a conoscenza di tutti i vincoli che dovrà rispettare la soluzione ottima. Ciò gli permette di migliorare i coefficienti presenti, prima ancora di iniziare la computazione dell'ottimo.

Il secondo metodo, invece, sfrutta l'inserimento nel modello di vincoli detti "lazy constraints". Questi non sono noti al programma dall'inizio, ma vengono inseriti all'interno di un pool di vincoli. Nel momento in cui viene calcolata una soluzione, CPLEX verifica che vengano rispettati tutti i vincoli presenti nel pool. Se ne trova uno violato lo aggiunge al modello e ripete la computazione. Questo approccio permette, per risolvere lo stesso problema, di eseguire calcoli su un modello più piccolo, ma può aumentare i tempi di computazione non fornendo a CPLEX tutte le informazioni dall'inizio.

2.1.2 Formulazione basata sul flusso

Nella formulazione di Gavish e Graves, per impedire la formazione di sub-tour all'interno della soluzione ottima, viene introdotto un nuovo vincolo per ogni ramo del grafo. Questo permette di regolare il flusso $y_{i,j}$, con $i \neq j$, che lo attraversa. Inoltre è stato necessario aggiungere anche dei vincoli, detti "vincoli di accoppiamento", che collegassero i flussi alle variabili $x_{i,j}$. Il loro modello è quindi così strutturato:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{i,j} x_{i,j} \quad (2.6)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ih} = 1 \quad \forall h \in V \quad (2.7)$$

$$\sum_{j \in V} x_{hj} = 1 \quad \forall h \in V \quad (2.8)$$

$$\sum_{j \in V} y_{1,j} = 1 \quad (2.9)$$

$$\sum_{j \in V} y_{h,j} = \sum_{i \in V} y_{i,h} - 1 \quad \forall h \in V - \{1\} \quad (2.10)$$

$$y_{i,j} \leq (n-1) x_{i,j} \quad \forall i, j \in V, i \neq j \quad (2.11)$$

La soluzione di questo modello risulta però essere lontana dalla convex hull. Per migliorarla è possibile sostituire il vincolo (3.11) con

$$y_{i,j} \leq (n-2) x_{i,j} \quad \forall i \neq j$$

mentre per gli altri valori di i e j è necessario lasciare i vincoli originali. Per evitare che la soluzione ottima contenga sia l'arco $x_{i,j}$ che $x_{j,i}$, che nella nostra istanza iniziale corrispondono allo stesso arco, viene anche aggiunto il seguente vincolo:

$$x_{i,j} + x_{j,i} \leq 1 \quad \forall i, j \in V \text{ con } i < j$$

2.2 Loop

2.2.1 Formulazione di Benders

Negli anni '60, Jacques F. Benders sviluppò un approccio generale, applicabile a qualsiasi problema di programmazione lineare, per ridurre il numero esponenziale di alcuni vincoli specifici inseriti nel

modello.

Utilizzando questo metodo, il modello viene scritto senza quei vincoli e poi questi verranno aggiunti in seguito durante la risoluzione del problema. Nel caso in cui la soluzione ottima, calcolata a partire da questo modello, non rispetti un vincolo di quelli rimossi, questo viene aggiunto al modello.

Nella seguente parte, viene riportata l'applicazione specifica di loop al problema TSP. I vincoli di Subtour Elimination sono in numero esponenziale e sono:

$$\sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall S \subsetneq V : |S| \geq 2 \quad (2.12)$$

o equivalentemente:

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \quad \forall S \subsetneq V : |S| \geq 2 \quad (2.13)$$

Viene definito un nuovo modello per il problema del commesso viaggiatore simmetrico, in cui vengono rimossi tali vincoli, aggiungendo così la possibilità di avere dei subtour nella soluzione finale.

Viene risolto il problema e nel caso in cui ci sia più di una componente connessa, viene aggiunto al modello un vincolo di subtour elimination per ogni ciclo generato.

Algorithm 1: LOOP

Input: model = Modello TSP simmetrico senza vincoli di Subtour Elimination

Output: x = soluzione intera senza subtour

```

1 x ← solve(model)
2 ncomps ← comps(x)
3 while ncomps ≥ 2 do
4   Aggiungi  $\sum_{e \in \delta(S_k)} x_e \leq |S_k| - 1$   $\forall$  componente connessa  $S_k$ 
5   if ncomps ≥ 2 then
6     x ← solve(model)
7     ncomps ← comps(x)
```

All'aumentare del numero di vincoli, il costo della soluzione ottenuta da CPLEX peggiora o resta identica a quella elaborata all'iterazione precedente del metodo loop.

Il numero di iterazioni che vengono effettuate dall'algoritmo non è conosciuto e potrebbe essere anche molto elevato. Nel caso peggiore vengono inseriti tutti i vincoli di Subtour elimination, ovvero un numero esponenziale di disequazioni, soprattutto con istanze clusterizzate.

Inoltre il problema principale di questo algoritmo è la generazione, ad ogni iterazione, di un albero completo di branching, eliminando quello precedentemente sviluppato.

In passato, con le versioni del MIP solver di CPLEX degli anni '60, questa operazione era molto onerosa mentre attualmente il metodo loop garantisce la risoluzione, anche di istanze molto grandi, in tempi ragionevoli. Questo non accade invece per il Branch & Bound in quanto vengono aggiunte nuove ramificazioni all'albero già esistente.

L'introduzione di nuovi vincoli di Subtour Elimination, solo nel momento in cui si presenta una loro violazione, permette di ridurre la dimensione del modello ma riduce l'attività di pre-processamento svolta da CPLEX prima di cominciare la risoluzione del problema. Nella fase di pre-processing infatti, vengono applicati algoritmi euristici e cambiamenti dei coefficienti nel modello, in base ai vincoli inseriti.

L'algoritmo può essere modificato svolgendo prima il metodo loop con l'aggiunta di parametri differenti da quelli utilizzati di default del risolutore CPLEX. In seguito viene effettuato nuovamente l'algoritmo di Benders ma questa volta nella sua versione esatta, in modo da migliorare la soluzione meta-euristica trovata nella prima parte.

Quest'ottimizzazione è basata sul fatto che CPLEX salvi alcune soluzioni, ottenute in precedenza

dal risolutore sullo stesso modello, e le sfrutti come bound nel nuovo modello. Per questo motivo, alcune delle soluzioni metaeuristiche ottenute nella prima fase vengono sfruttate come bound nella seconda.

2.2.2 Formulazione con callback

Un possibile miglioramento dell'algoritmo proposto da Benders, in termini di velocità della computazione, è il seguente.

Come precedentemente descritto, come prima cosa CPLEX effettua un preprocessamento in cui semplifica il modello, riducendo il termine noto e accorpare tra loro diverse variabili. Terminata questa operazione inizia ad eseguire la fase di Branch & Cut. Ogni volta che calcola una nuova soluzione x^* , prima di dichiarare se è l'ottimo o di scartarla e proseguire a sviluppare i successivi rami dell'albero decisionale, applica dei tagli e degli algoritmi euristici per aggiornarla (vedi Figura 2.1).

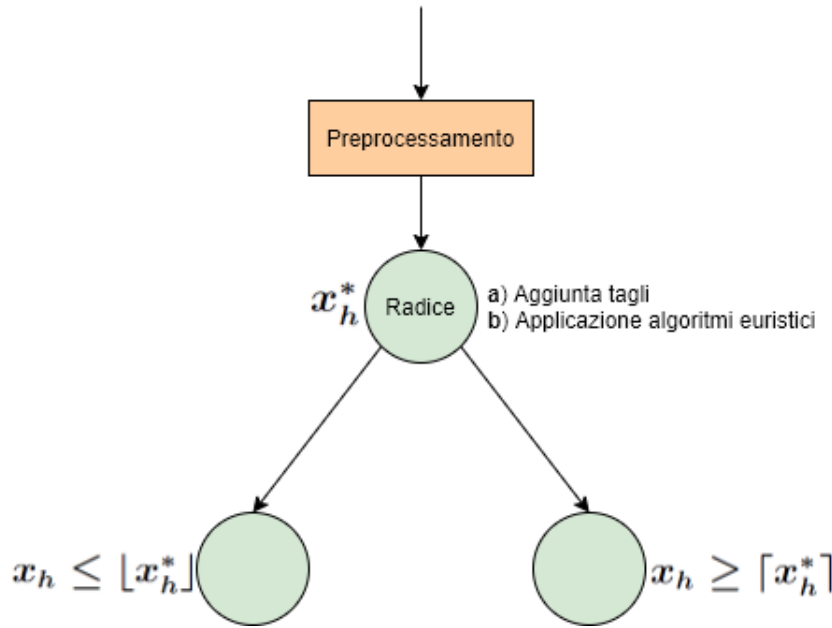


Figura 2.1: Albero decisionale del Branch and Cut

Nello sviluppo di ogni ramo l'upper bound sarà dato dagli algoritmi euristici utilizzati, mentre il lower bound dal rilassamento del problema.

Per poter velocizzare l'approccio proposto da Benders, è possibile personalizzare questa fase e scegliere quali tagli far applicare a CPLEX. Nel nostro caso, questi vengono utilizzati per eliminare l'eventuale presenza di subtour nella soluzione calcolata. Per fare ciò vengono sfruttate particolari funzioni fornite da CPLEX, dette *callback*. Queste sono state lasciate volutamente vuote dai creatori della libreria, affinché l'utente possa implementarne all'interno il suo specifico codice. In particolare, le funzioni utilizzate sono callback necessarie ad aggiungere lazy constraints al modello e per questo dette *lazy constraints callback*. La callback implementata viene chiamata solo al momento di aggiornare l'incumbent e se necessario aggiunge al modello i vincoli violati. Verrà quindi invocata più frequentemente all'inizio del calcolo della soluzione del problema, e meno nelle iterazioni successive. Questo poiché essendoci in partenza meno vincoli, sarà più facile per la soluzione soddisfarli tutti. A differenza dei *lazy constraints*, con l'utilizzo delle *lazy callback* i vincoli non sono costantemente presenti in un pool, ma vengono generati "al volo" al momento necessario. Quest'operazione velocizza notevolmente il calcolo della soluzione ottima, in quanto permette a CPLEX di non dover calcolare nuovamente l'albero decisionale dalla radice, ma di proseguirne lo sviluppo aggiungendo nuovi rami. In particolari casi, però, CPLEX può ritenere più conveniente distruggere tutto l'albero decisionale fin'ora calcolato e ricominciare dalla radice. Questo può av-

venire in qualunque punto dell'elaborazione della soluzione ottima. Attraverso l'utilizzo delle callbacks è possibile accedere a molti dati interni all'elaborazione di CPLEX. Particolari procedure vengono quindi automaticamente disattivate, affinché l'utente non possa venirne a conoscenza. Per evitare questo è possibile installare le callbacks con una modalità leggermente diversa, attraverso funzioni dette *general*.

2.3 Algoritmi Math-Heuristic

Gli algoritmi euristici sono progettati per risolvere istanze del problema in tempi significativamente più brevi rispetto agli algoritmi esatti. Di conseguenza, però, al termine della computazione non garantiscono di ottenere una soluzione ottima, ma solo una sua buona approssimazione ammissibile. Gli algoritmi Math-Heuristic sfruttano l'approccio degli euristici, assieme all'utilizzo di un maggior numero di vincoli nel modello, vincoli basati su procedimenti matematici. L'algoritmo che maggiormente rappresenta questo metodo è il Soft Fixing (vedi sottosezione 2.3.2).

Durante la computazione della soluzione CPLEX utilizza diversi algoritmi euristici, grazie alla variazione di alcuni parametri a loro associati è possibile variare la frequenza o il tempo a loro dedicato.

2.3.1 Hard Fixing

Un primo algoritmo euristico di semplice implementazione si basa sull'impostazione di una deadline da parte dell'utente ed è composto dalle seguenti fasi:

1. Impostazione di un time limit per la computazione della soluzione;
2. Calcolo della soluzione;
3. Selezione, in maniera randomica, di un sottoinsieme di rami appartenenti alla soluzione ottima (Figura 2.2). Il numero di questi sarà dato da una percentuale fissata del totale. I rami appartenenti alla selezione vengono fissati di modo tale che, in una successiva computazione del problema, appartengano alla soluzione restituita;

Questi passaggi vengono eseguiti in maniera ciclica per un numero fissato di iterazioni. In questo modo, ad ogni computazione della soluzione, CPLEX dovrà risolvere un problema più semplice di quello originale, essendo molte variabile del modello già selezionate nella **fase 3** dell'iterazione precedente.

Il time limit nominato nella **fase 1** è dato da una frazione della deadline complessiva e dipende dal numero di iterazioni totali che si desidera compiere. Ad ogni computazione la soluzione potrà essere solo migliore o uguale alla precedente (nel caso peggiore).

La percentuale scelta del numero di rami da fissare può variare ad ogni iterazione. Generalmente si cerca di avere una percentuale alta nelle prime iterazione, in cui la soluzione non è ancora stata raffinata, e di abbassarla man mano che si procede con l'algoritmo. In questo modo nelle ultime computazione CPLEX avrà un maggior numero di gradi di libertà per trovare la soluzione che più si avvicina all'ottimo. Poichè i rami selezionati nella **fase 3** sono scelti in maniera casuale, non si corre il rischio di entrare in un ciclo infinito, in cui viene risolto ogni volta la stessa istanza con le stesse variabili fissate. Particolare attenzione deve essere posta al fatto di lasciare nell'insieme dei rami scelti randomicamente solo quelli selezionate all'iterazione immediatamente precedente.

Nella nostra implementazione abbiamo scelto di iterare l'algoritmo per 6 volte, ognuna con una deadline di 10 minuti, e di utilizzare rispettivamente come percentuale i seguenti valori { 90, 75, 50, 25, 10, 0 }.

Di seguito viene inoltre riportato lo pseudocodice dell'algoritmo appena descritto.

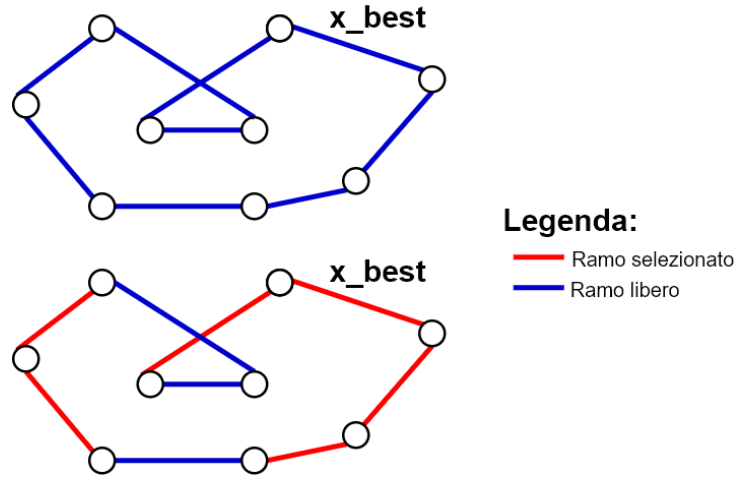


Figura 2.2: Selezione rami

Algorithm 2: Hard Fixing

Input: *model* = Modello TSP simmetrico senza vincoli di Subtour Elimination
deadline = time limit complessivo dell'algoritmo
percentage = array con i valori delle percentuali di fissaggio degli archi
num_nodi = numero di nodi dell'istanza tsp

Output: *x* = soluzione intera senza subtour

```

1  n ← 0
2  while expired_time < deadline do
3      setTimeLimit()
4      x ← solve(model)
5      for j ← 0 to num_nodi - 1 do
6          k ← random(0,1)
7          if  $100 * k \leq \text{percentage}[n \bmod \text{length}(\text{percentage})]$  then
8              Aggiungi x_best[j] to S where S = {edges to fix}
9          forall  $x_{i,j} \in S$  do
10              $x_{i,j} \leftarrow 1$ 
11     n ← n + 1

```

2.3.2 Soft Fixing

Il metodo seguente fa utilizzo di vincoli aggiuntivi, detti **Local Branching** e che ha dato il via alla sviluppo della **Math-Heuristic**, approccio di programmazione matematica (es. tramite CPLEX) unita all'algoritmica euristica[6].

L'approccio utilizzato è simile a quello dell'Hard Fixing, ma la scelta delle variabili da imporre a 1 non viene fatta in maniera randomica ma viene lasciata a CPLEX.

Partendo da una soluzione intera ammissibile del TSP x^H , viene aggiunto un vincolo sui lati con valore 1 in x^H :

$$\sum_{e \in E : x_e^H = 1} x_e \geq 0.9 n$$

dove la sommatoria indica il numero di variabili che vengono preservate a 1 rispetto alla soluzione x^H e n indica il numero di archi selezionati, pari al numero di nodi $+ 1$.

In questo caso, il vincolo permetterà a CPLEX di fissare il 90% dei rami scelti in x^H e avere il 10% di libertà. Per questo motivo, CPLEX riduce il numero di archi su cui lavorare, in quanto molti nodi hanno già un numero di archi selezionati pari a 2.

Un modo alternativo di scrivere lo stesso vincolo è il seguente:

$$\sum_{e \in E : x_e^H = 1} x_e \geq n - k$$

dove $k=2, \dots, 20$ e rappresenta i gradi di libertà di CPLEX nel raggiungere la nuova soluzione.

Ad ogni iterazione viene aggiunto un nuovo local branching, basato sull'attuale soluzione restituita da CPLEX, e rimosso il vincolo aggiunto nell'iterazione precedente.

L'unico aspetto negativo di questo metodo riguarda un mancato miglioramento della soluzione da parte di CPLEX in seguito alla sua esecuzione con l'aggiunta del vincolo. Non scegliendo in maniera randomica i lati da selezionare della soluzione precedente, se non dovesse esserci alcun miglioramento del costo e quindi cambiamento della soluzione, i lati selezionati da CPLEX con il nuovo **local branching**, sarebbero gli stessi di prima. Per superare tale problema, k viene inizializzata a 2 e, nel caso in cui non dovesse migliorare la soluzione, viene incrementata.

Da dati sperimentali, si è appurato come questo metodo aiuti CPLEX a convergere più velocemente alla soluzione ottima e che valori di k superiori a 20 non aiutino a raggiungere risultati migliori.

L'aggiunta di un local-branching permette di analizzare in maniera più semplice e veloce lo spazio delle soluzioni. Normalmente per farlo, vengono enumerati gli elementi di questo spazio, generando un numero molto elevato di possibili soluzioni, considerando che TSP è un problema NP-hard.

Definita una soluzione intera ammissibile x^H e utilizzando la distanza di Hamming, vengono definite soluzioni $k - opt$ rispetto ad x^H , quelle che hanno distanza k da x^H (vedi Figura 2.3).

Se, invece del local branching, venisse utilizzata l'enumerazione delle soluzioni, si dovrebbero

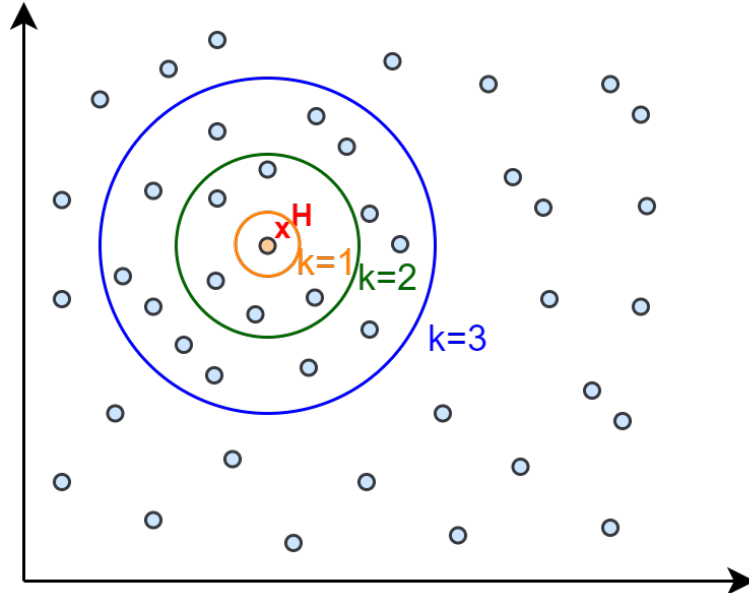


Figura 2.3: Spazio delle soluzioni e distanza di Hamming.

generare per k generico circa n^k soluzioni a distanza k da x^H ed in seguito analizzarle tutte per trovare quella con costo minore e migliore di x^H .

L'utilizzo del local branching può essere adottato con anche problemi generici e non solo con TSP. Di seguito viene riportato l'approccio da adottare per generare tutte le soluzioni a distanza minore o uguale di R dalla soluzione euristica di partenza x_H :

$$\min\{c^T x : Ax = b, x \in \{0, 1\}^n\} \quad (2.14)$$

$$\sum_{j \in E: x_j^H = 0} x_j + \sum_{j \in E: x_j^H = 1} 1 - x_j \leq R \quad (2.15)$$

dove (3.15) rappresenta la distanza di Hamming dalla nuova soluzione computata x da x_H . L'obiettivo del Soft-fixing è cercare di migliorare il costo della soluzione, guardando quelle più vicine possibili a quella attuale. Nella **Figura 2.4** seguito viene riportato un esempio di una possibile evoluzione dell'algoritmo nella ricerca dell'ottimo, evidenziandone le soluzioni trovate di volta in volta.

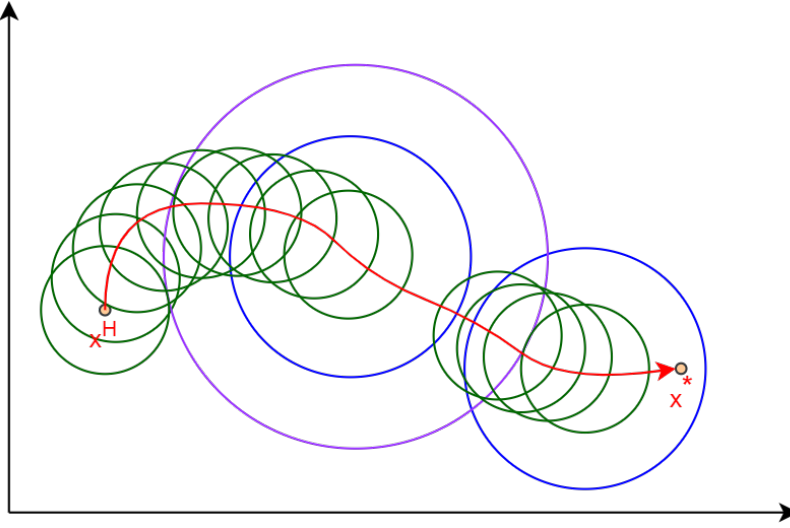


Figura 2.4: Esempio di esecuzione dell'algoritmo nello spazio delle soluzioni.

2.3.3 Patching algorithm

Negli algoritmi analizzati nei precedenti capitoli può succedere che CPLEX, prima di restituire la soluzione ottima, computi soluzioni con più componenti connesse. Per evitare che vengano scartate senza essere sfruttate è possibile utilizzare questo semplice algoritmo euristico che si pone l'obiettivo di convertirle in una soluzione ammissibile.

Date due componenti connesse all'interno della soluzione calcolata, queste vengono unite in una sola grazie all'eliminazione di un ramo ciascuna $\{a, a'\}$ e $\{b, b'\}$ e alla selezione di altri due rami che fungano da collegamento tra i quattro vertici selezionati ($\{a, b\}$ e $\{a', b'\}$ o $\{a, b'\}$ e $\{a', b\}$) (vedi figura 2.5). Per scegliere quale ramo per ogni componente connessa sia più conveniente eliminare e con quale sia più conveniente sostituirlo, è necessario minimizzare la variazione di costo che quest'operazione comporterebbe, cioè scegliere il minimo tra:

$$\min \begin{cases} \Delta(a, b) = c_{ab'} + c_{ba'} - c_{aa'} - c_{bb'} \\ \Delta'(a, b) = c_{ab} + c_{b'a'} - c_{aa'} - c_{bb'} \end{cases} \quad \forall a, b \in V : \text{comp}(a) \neq \text{comp}(b)$$

L'operazione di fusione di due componenti connesse può essere ripetuta finché la soluzione non diventa ammissibile, approssimativamente dimezzando ad ogni iterazione il numero di componenti presenti. In questo modo, al termine, è possibile restituire una soluzione accettabile ma senza

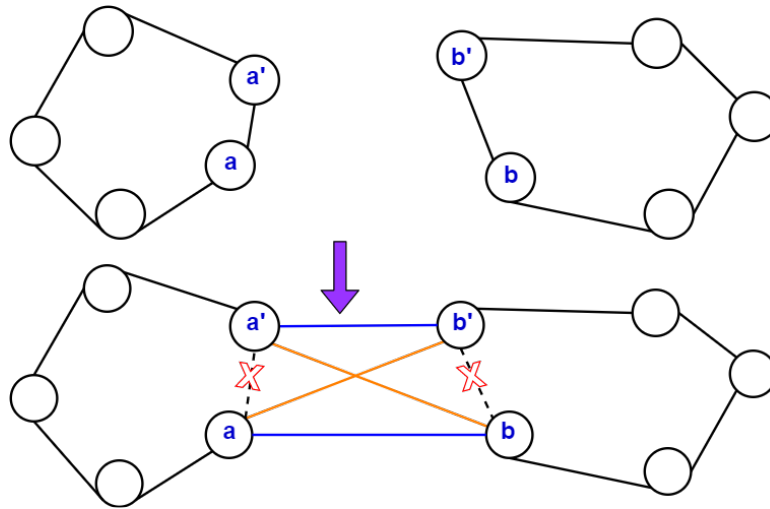


Figura 2.5: Esempio di patching

garanzie di essere ottima.

Complessivamente il costo di quest'algoritmo è $O(n^2)$, dove n è il numero di nodi.

Algorithm 3: Patching

Input: x = soluzione di un problema di TSP con più componenti connesse

Output: y = soluzione intera formata da un'unica componente connessa

```

1  $n\_comps \leftarrow \text{numerocomponenticonnesse della soluzione}$ 
2  $c_1 \leftarrow \{0, \dots, 0\}$ 
3 while  $n\_comps > 1$  do
4    $c_1 \leftarrow \text{first\_subtour}(x)$ 
5    $c_2 \leftarrow \text{nearest\_subtour}(c_1)$ 
6    $\text{merge\_component}(c_1, c_2)$ 
7    $\text{update}(n\_comps)$ 
8  $y \leftarrow c_1$ 
```

Capitolo 3

Algoritmi euristici

In questo capitolo verranno trattati algoritmi euristici che non fanno uso di CPLEX. La necessità di non utilizzare CPLEX si ha per istanze con un elevato numero di nodi.

Per queste istanze la risoluzione del tableau attraverso CPLEX diventerebbe molto un'operazione molto onerosa per via dell'alto numero di variabili che verranno create e su cui verrà svolto il calcolo.

Attraverso gli algoritmi euristici, viene computata un'approssimazione della soluzione ottima e spesso però può essere sfruttata inizialmente dal risolutore CPLEX. Ad esempio questo può essere aggiunta prima della computazione, utilizzando la funzione *CPXaddmipstarts()*, o, se già definita, può essere modificata tramite *CPXchgipstarts()*.

Un algoritmo euristico, affinché funzioni al meglio, deve essere composto da due fasi che si alternino:

- **Intensificazione o raffinamento**

In questa fase la soluzione corrente viene migliorata fino al raggiungimento di un ottimo (locale o globale) nello spazio delle soluzioni.

- **Diversificazione**

Fase in cui la soluzione viene perturbata con una politica predefinita affinché si allontanano da un ottimo locale nello spazio delle soluzioni.

3.1 Algoritmi di costruzione

Questa tipologia di algoritmi euristici è fondamentale per la computazione di una prima soluzione ammissibile del problema.

3.1.1 Nearest Neighborhood

Questo algoritmo è basato su un approccio di tipo greedy. L'algoritmo sceglie inizialmente un nodo generico tra quelli che compongono il grafo ed in seguito seleziona iterativamente degli archi del grafo, secondo il criterio enunciato nella seguente sezione.

In ciascuna iterazione vengono analizzati gli archi uscenti dal nodo selezionato all'iterazione precedente e viene aggiunto il ramo collega l'estremo più vicino. Il nuovo nodo raggiunto verrà impostato come punto di partenza nell'analisi dei costi dell'iterazione successiva (vedi Figura 3.1). All'ultima iterazione viene selezionato invece l'arco che collega l'ultimo nodo visitato al nodo scelto randomicamente all'inizio dell'algoritmo.

Il problema di questo algoritmo è che in ogni iterazione viene selezionato esclusivamente il vertice più vicino a quello scelto precedentemente, senza però cercare di prevedere e migliorare la futura evoluzione del costo del tour, creato dall'algoritmo.

Come in Figura 3.1, la scelta dell'arco di costo minimo non implica che in seguito venga generata la soluzione ottima. La scelta del nodo iniziale è fondamentale in quanto una perturbazione della partenza genera un tour differente.

Definito n come il numero di nodi presenti nel grafo, si avranno quindi n soluzioni differenti, ottenute ciascuna attraverso l'applicazione dell'algoritmo partendo da una diversa scelta iniziale. In

seguito tra queste possibili soluzioni, verrà selezionata quella di costo minore.

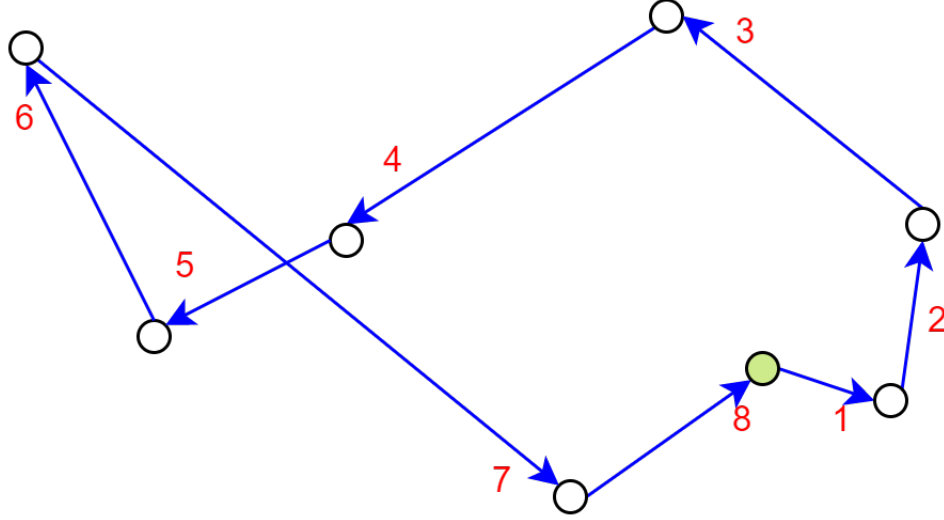


Figura 3.1: Esempio di esecuzione di Nearest Neighborhood.

3.1.2 Heuristic Insertion

L'algoritmo seguente usa un approccio simile al precedente ma prevede inizialmente la selezione di un ciclo a cui apportare modifiche, per ottenere una soluzione iniziale ammissibile del problema. Per definire il ciclo di partenza vengono utilizzati diversi metodi. Di seguito sono riportati i due più utilizzati:

- **Selezione di due nodi**

Vengono scelti i due nodi più lontani tra loro nel grafo, o due nodi casuali, e vengono collegati mediante i due possibili archi orientati.

- **Inizializzazione geometrica**

Nel caso in cui i nodi del grafo appartengano ad uno spazio bidimensionale, ne viene calcolata la convex-hull e questa viene utilizzata come ciclo di partenza.

Questa prima soluzione viene modificata iterativamente e per ogni coppia di nodi non appartenenti al ciclo C , restituito dall'iterazione precedente, viene calcolato l'extramileage Δ_h come segue:

$$\Delta_h = \min_{(a,b) \in C} c_{ah} + c_{hb} - c_{ab}$$

con c_{ij} = costo dell'arco che collega i a j (vedi Figura 3.2).

Alla fine di ciascuna iterazione viene aggiunto nel grafo il nodo k che minimizza l'**extra-mileage** (vedi Figura 3.3):

$$k = \underset{h}{\operatorname{argmin}} \Delta_h$$

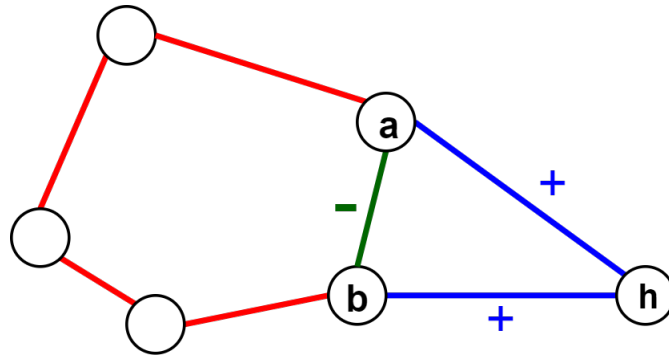
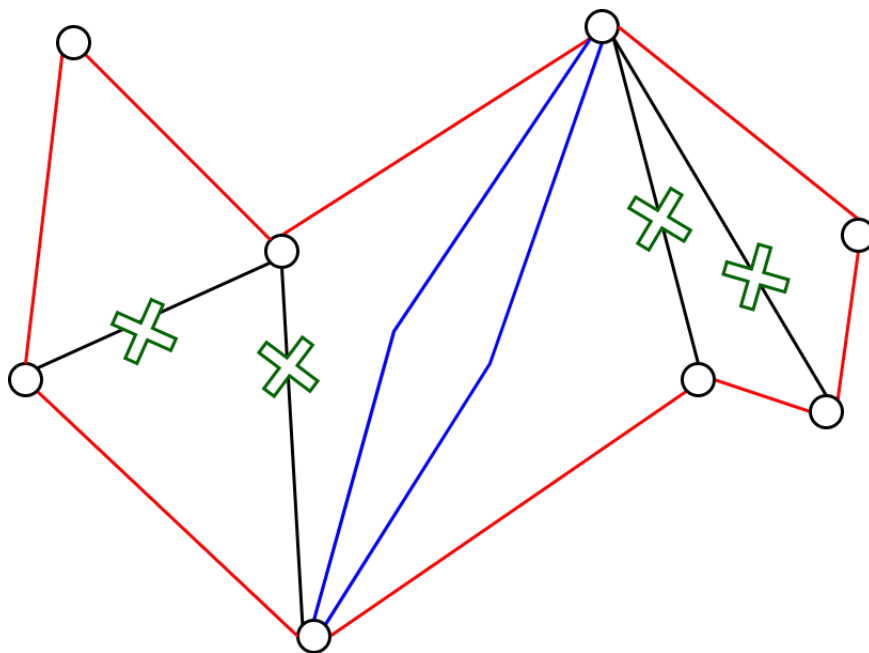
Figura 3.2: Parte del calcolo dell'extramileage del nodo **h**.

Figura 3.3: Esempio dell'applicazione di Heuristic insertion.

3.1.3 GRASP

Il metodo Greedy Adaptive Search Procedure (GASP) è un approccio algoritmico che permette di aggiungere una componente aleatoria alla computazione deterministica del minimo di un insieme di valori.

Ad ogni iterazione dei due precedenti algoritmi di costruzione, invece di selezionare l'arco di costo minimo o l'extra-mileage minimo, vengono memorizzati i rami di costo minore e le scelte con extra-mileage minore.

Tra le possibili mosse salvate, ne viene scelta randomicamente una. Nel programma sviluppato, oltre ai precedenti algoritmi di costruzione, ne sono state implementate anche delle varianti che fanno uso del GRASP. In questo caso sono state memorizzate le tre scelte migliori in ogni iterazione. Tali varianti permettono di modificare aleatoriamente l'evoluzione del tour, in modo da evitare che, nelle ultime iterazioni dell'algoritmo, le scelte possibili siano legate esclusivamente ad elevati incrementi della funzione obiettivo.

Ciò evita ad esempio che nel Nearest Neighborhood possano esserci numerose scelte come l'ultima effettuata in Figura 3.1.

Nella Sezione ??, vengono confrontati tramite performance profile, gli algoritmi precedentemente nominati.

3.2 Algoritmi di raffinamento

Una volta ottenuta una prima soluzione è necessario migliorarla per avvicinarsi il più possibile all'ottimo. Gli algoritmi utilizzati con questo scopo sono detti *algoritmi di raffinamento*. Nel capitolo precedente sono già stati descritti due procedimenti di questo tipo, l'Hard Fixing e il Soft Fixing (vedi sottosezioni 2.3.1 e 2.3.2). In questa sezione verranno invece analizzati algoritmi di raffinamento che non utilizzino funzioni messe a disposizione da CPLEX.

3.2.1 Algoritmo di 2-ottimalità

Nelle soluzioni restituite dagli algoritmi euristici di costruzione sono spesso presenti incroci tra coppie di rami. La loro presenza implica che la soluzione non è ottima, in quanto per le proprietà dei triangoli esisterà sempre una tour che eviti l'incrocio e che sia di costo minore (vedi Figura 3.4).

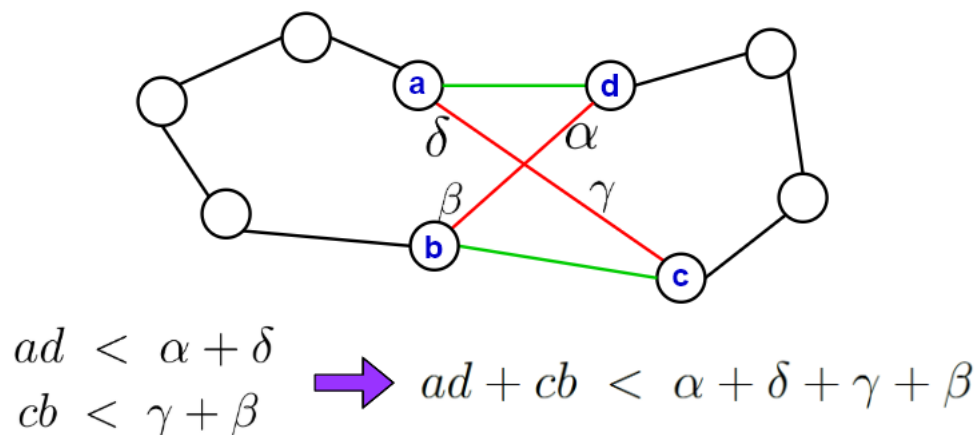


Figura 3.4: Non ottimalità di una soluzione con incroci.

L'algoritmo di 2-ottimalità prende il nome dalla modalità utilizzata iterativamente per modificare la soluzione ricevuta in ingresso. In ogni iterazione viene individuato un incrocio tra due rami, appartenenti al tour. Gli estremi di tali archi vengono collegati in maniera differente. Complessivamente per ogni incrocio, viene effettuato uno scambio tra coppie di rami (2-opt move) in modo da ridurre ulteriormente il costo della soluzione restituita.

Nell'implementare tale algoritmo non è necessario individuare ciascun incrocio della soluzione di partenza ma è sufficiente analizzare tutte le coppie di rami presenti e verificare se, scambiandole con un'altra coppia ammissibile, si verifichi un miglioramento della funzione obiettivo.

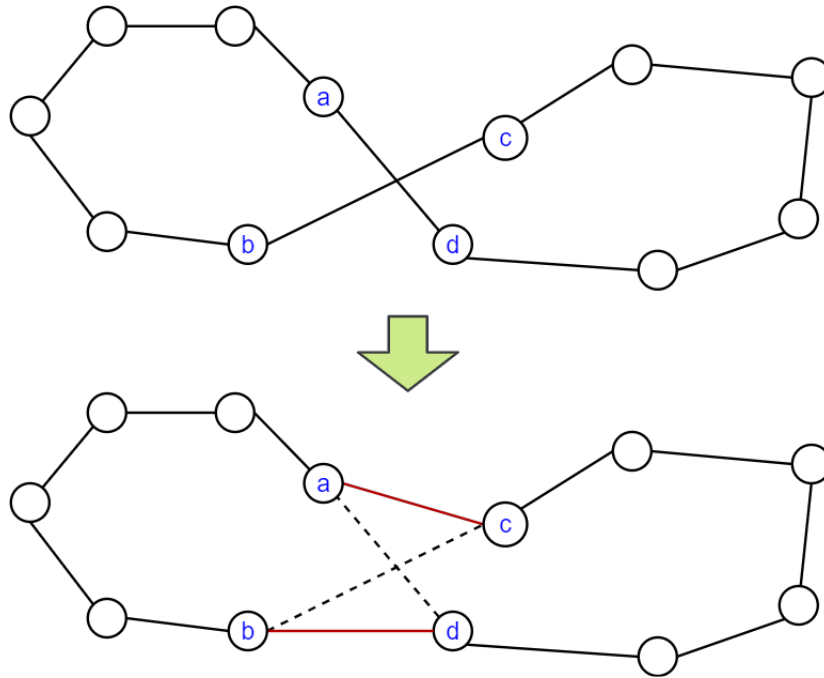


Figura 3.5: Esempio di eliminazione di un incrocio.

Riferendosi alla figura 3.5, un possibile miglioramento viene calcolato come segue:

$$\Delta = (c_{ac} + c_{bd}) - (c_{ad} + c_{bc})$$

e solo nel caso in cui Δ sia negativo, la sostituzione viene effettuata.

Applicando una 2-opt move al circuito attuale, viene generato un tour appartenente all'intorno di 2-ottimalità della precedente soluzione. Ripetendo iterativamente tale procedimento si raggiunge un ottimo locale, in cui non esistono più possibili miglioramenti della funzione obiettivo. Questo processo è rappresentato in Figura 3.6.

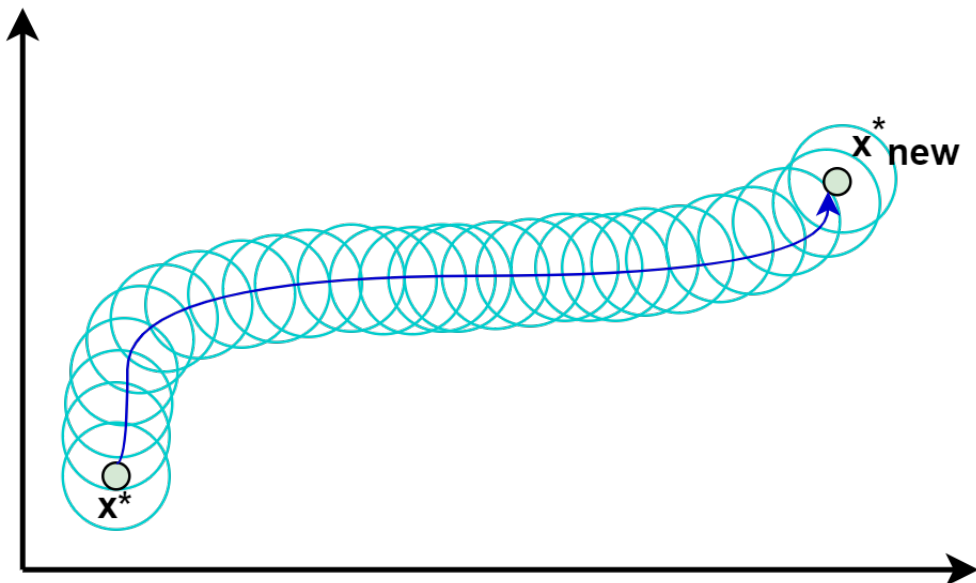


Figura 3.6: Aggiornamento della soluzione nell'intorno di 2 ottimalità.

Poichè il calcolo del Δ avviene in tempo costante e deve essere fatto per ogni coppia di rami, il tempo complessivo per la computazione è $O(n^2)$, con n nodi dell'istanza del problema. Un procedimento analogo a tale algoritmo viene utilizzato anche nel Soft Fixing, in cui però la dimensione dell'intorno in cui cercare la nuova soluzione varia (vedi Figura 2.4). Nel programma sviluppato, è stata utilizzata questo algoritmo per rimuovere gli incroci all'interno del tour.

3.2.2 Algoritmo di 3 ottimalità

L'algoritmo di 3 ottimalità è analogo a quello analizzato nella sezione precedente, ma considera intorno di grandezza maggiore. In questo caso, quindi, due soluzioni nell'intorno differiscono per 3 rami. In Figura 3.7 viene riportata la rappresentazione delle possibili 3-opt move.

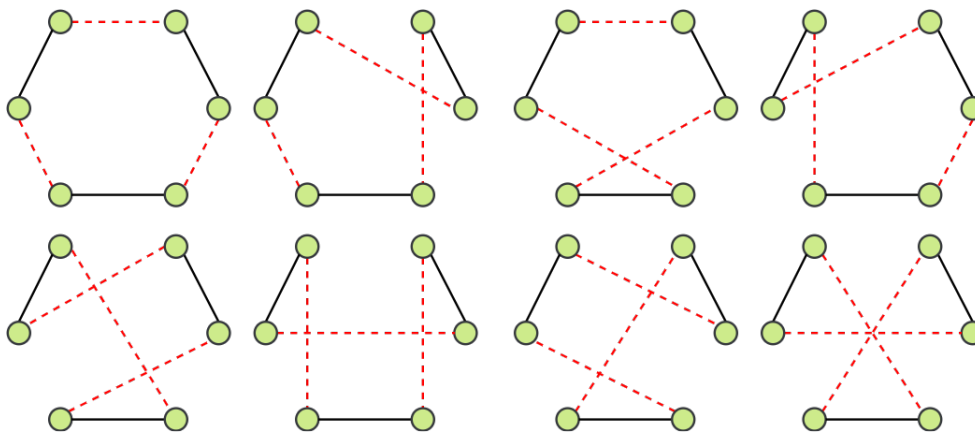


Figura 3.7: Tutte le possibili combinazioni di scambi di 3 ottimalità.

L'algoritmo impiega in tutto $O(n^3)$ (con n numero di nodi) per trovare un ottimo locale, essendo $O(n^3)$ il numero di terne di rami esistenti e poichè il numero di possibili scambi di 3 ottimalità è costante. Su istanze con un elevato numero di nodi, il tempo di calcolo risulterebbe essere troppo lungo per il calcolo di una soluzione.

All'interno del programma sviluppato, non è stata implementato tale algoritmo.

3.3 Meta-euristici

Gli algoritmi di raffinamento appena visti si occupano di migliorare il più possibile una soluzione già calcolata attraverso meccanismi di local search. In questo modo, dopo un determinato numero di iterazioni, viene raggiunto un ottimo locale.

Gli algoritmi descritti in questa sezione perturbano la soluzione allontanandola dall'attuale ottimo locale e cercando di avvicinarsi il più possibile all'ottimo globale.

Questi metodi rappresentano approcci più generali di quelli descritti precedentemente e sono plasmabili e applicabili anche a problemi differenti rispetto al TSP. Tali tecniche infatti permettono essenzialmente di espandere lo spazio delle soluzioni, evitando di stazionare in minimi o massimi locali con valori della funzione obiettivo molto lontani dall'ottimo globale.

3.3.1 Multi-start

Un primo e intuitivo approccio per allontanarsi da un ottimo locale è quello descritto dalla politica multi-start. Questa consiste nel definire diverse soluzioni attraverso un algoritmo di costruzione tra quelli descritti, ad esempio, nella Sezione 3.1. A ciascuno di esse viene poi applicato un algoritmo di raffinazione e viene scelta solo quella con costo migliore tra tutte le soluzioni generate. In questo modo vengono analizzati diversi ottimi locali nello spazio delle soluzioni (vedi Figura 3.8).

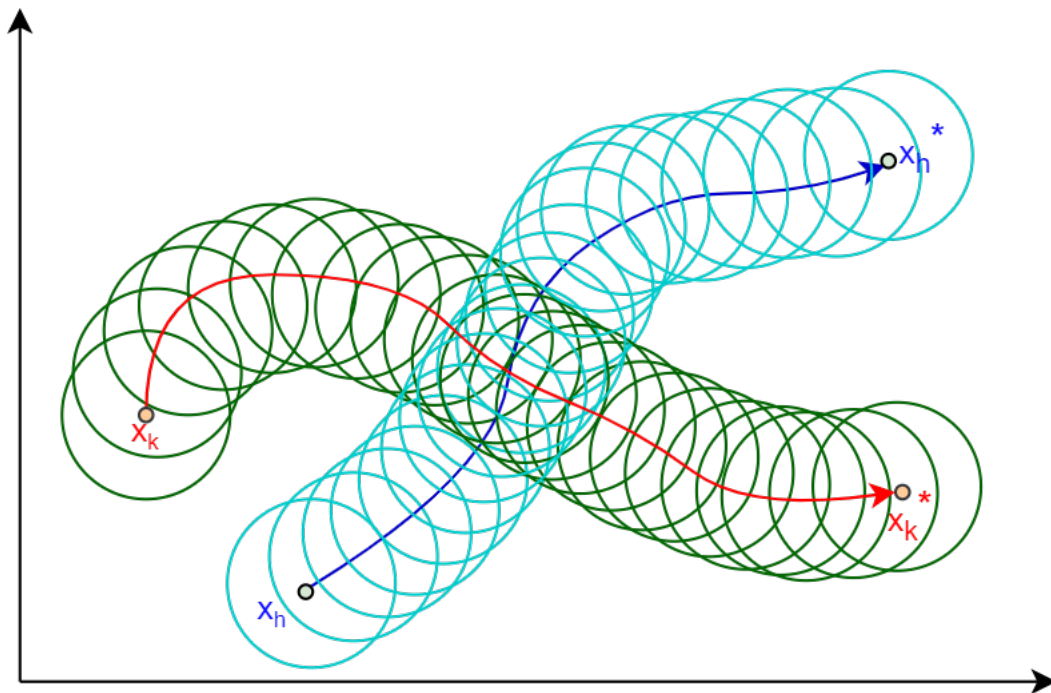


Figura 3.8: Due possibile esecuzioni di un algoritmo di raffinamento con partenze da due soluzioni diverse.

Un lato negativo di tale approccio consiste nel fatto che ogni volta che viene scelta una nuova soluzione di partenza, vengono perse le informazioni relative alla sequenza ottenuta utilizzando un altro tour iniziale.

La soluzione implementata all'interno del programma è basata sul multithreading. Infatti viene generato un numero di soluzioni pari al numero di thread specificati.

Ciascun thread genera parallelamente agli altri una nuova soluzione e solo al termine della computazione, la confronta con la migliore. Nel caso in cui il costo della soluzione trovata sia inferiore a questa, la aggiorna.

Nella Sezione 4.4.3.1 viene analizzato il costo ottenuto dalla nostra implementazione, utilizzando 12 thread e modificando l'algoritmo di costruzione utilizzato.

3.3.2 Variable Neighborhood Search

Una volta ottenuta una soluzione corrispondente ad un ottimo locale nella funzione di costo si può cercare di migliorarla analizzando i suoi intorni di ottimalità di raggio crescente. Questo però non garantisce un effettivo cambiamento della soluzione. Il Variable Neighborhood Search (VNS) è un algoritmo che sfrutta questa ricerca. Nel caso non si verifichi un aggiornamento della soluzione prevede che vengano scelti un certo numero di rami randomici da sostituire con altri non appartenenti alla soluzione, in maniera casuale [5]. In questo modo si impone un aggiornamento con una crescita del costo, nella speranza che nel nuovo intorno selezionato sia possibile trovare una soluzione che si allontani dall'iniziale ottimo locale (Figura 3.9).

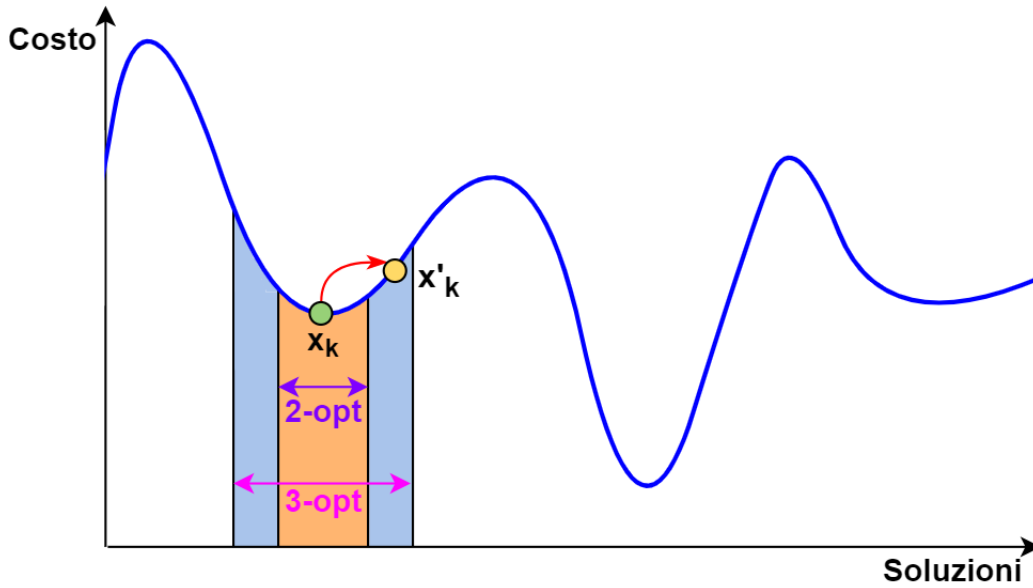


Figura 3.9: Aggiornamento di una soluzione in un minimo locale.

L'algoritmo termina allo scadere del tempo a disposizione o dopo un determinato numero di iterazione, restituendo la miglior soluzione trovata fino a quel momento. Utilizzando questo approccio gran parte della soluzione di partenza viene conservata evitando di perdere le informazioni elaborate precedentemente all'utilizzo di VNS.

Per generare nuove istanze che appartengano all'intorno di k -ottimalità di una data soluzione, quest'ultima è stata codificata con un vettore di lunghezza pari al numero di nodi. Ogni cella di tale array contiene l'identificativo di un nodo e leggendo in ordine crescente di indice tale lista, si ottiene la sequenza di percorrenza dei nodi per tale soluzione. La generazione della nuova soluzione k -opt viene creata, scegliendo un indice t casuale dell'array, e permutando iterativamente due nodi nella sequenza, secondo il seguente algoritmo[7] e la Figura 3.10.

Algorithm 4: Generazione di una soluzione randomica k -opt

Input: $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ = soluzione di partenza

k = numero di archi da variare nella soluzione di partenza

Output: y = nuova soluzione appartenente all'intorno di k -ottimalità di x

```

1  $y = x$ 
2  $t \leftarrow \text{RANDOM}(\{1, \dots, n\})$ 
3 for  $j \leftarrow 1$  to  $k - 1$  do
4    $\text{swap}(y_t, y_{t+j});$ 

```

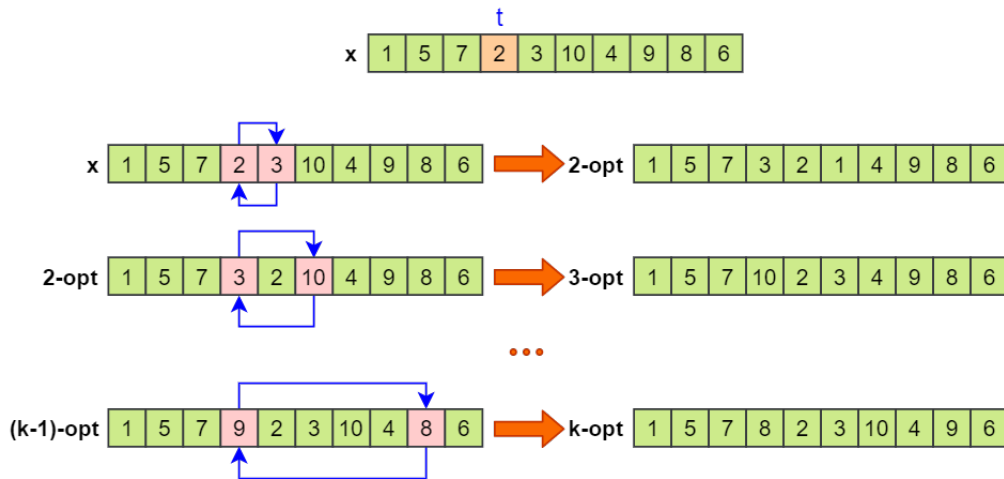


Figura 3.10: Generazione di una soluzione randomica k-opt.

3.3.3 Tabu search

L'approccio Tabu search fu ideato da Fred W. Glover [8]. Data una soluzione in un ottimo locale dello spazio delle soluzioni, l'idea di Glover permette di aggiornarla anche con una di costo più elevato (generalmente si cerca di minimizzare questo peggioramento). Per evitare che all'iterazione successiva si ritorni nella soluzione di partenza, viene creata una lista di "mosse vietate", detta Tabu list, che impedisca di raggiungere nuovamente l'ottimo locale. In questo modo la soluzione aumenta di costo per un certo numero di iterazioni, finché non ricomincia a diminuire per raggiungere un nuovo minimo locale o globale. Nel caso in cui si incontri una soluzione che migliori l'incumbent senza rispettare tutti i vincoli presenti nella Tabu list, l'algoritmo aggiorna ugualmente la soluzione corrente. Questo meccanismo viene detto *Aspiration criterion*.

Aumentando costantemente di dimensione la lista Tabu si rischia, ad un certo punto, che non sia più possibile aggiornare la soluzione. Per evitare ciò generalmente viene scelta una capienza massima (detta *tenure*) della lista, una volta raggiunta la lista viene aggiornata rispettando la politica FIFO (first in first out). Per far sì che l'algoritmo oscilli tra la fase di diversificazione e quella di intensificazione, la *tenure* viene fatta variare durante le diverse iterazioni tra due valori (massimo e minimo) (vedi Figura 3.11). Nelle iterazioni in cui è massima si verifica la diversificazione, in quelle in cui è minima l'intensificazione. Se viene applicata questa scelta implementativa l'algoritmo è chiamato *Reactive Tabu Search*.

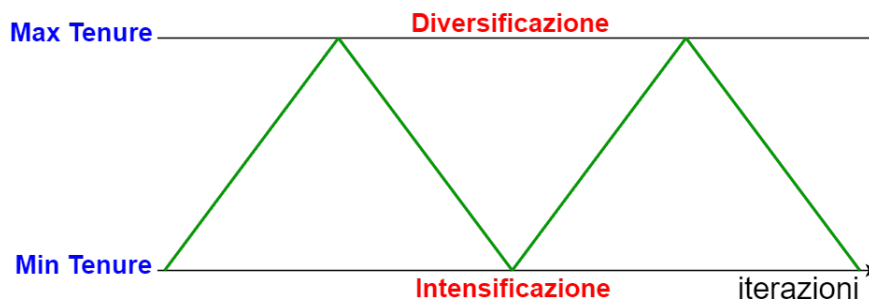


Figura 3.11: Variazione della tenure.

Come per l'algoritmo precedente, il criterio di terminazione è dato dallo scadere del tempo a disposizione o dal raggiungimento del numero massimo di iterazioni scelto, restituendo la miglior soluzione trovata fino a quel momento.

Algorithm 5: Tabu Search

Input: x = soluzione di un'istanza di TSP corrispondente ad un ottimo locale
 $tenure$ = dimensione massima della Tabu List
 $deadline$ = time limit complessivo dell'algoritmo
 $num_iterations$ = numero massimo di iterazioni
 num_nodi = numero di nodi dell'istanza tsp

Output: y = miglior soluzione trovata

```

1   $n = 0$ 
2  while  $n < num\_iterations \wedge 'deadline\ not\ expired'$  do
3       $x' \leftarrow move\_random\_2opt(x)$ 
4      while  $(check\_tabu\_list(x') == 'valid\ move')$  do
5           $x' \leftarrow move\_random\_2opt(x)$ 
6       $x \leftarrow x'$ 
7       $add\_tabu\_list(edges\_removed, tenure)$ 
8      if  $cost(x') < cost(x)$  then
9           $x \leftarrow greedy\_refinement(x, tabu\_list)$ 
10      $n \leftarrow n + 1$ 
11  $y = best\_solution()$ 

```

3.3.4 Simulated annealing

L'algoritmo simulated annealing, come dice il nome, è ispirato dal processo di temperamento dei metalli, in cui il materiale viene raffreddato molto lentamente e in maniera controllata, affinché raggiunga la configurazione di minima energia. Analogamente, in questo algoritmo viene scelta una funzione (generalmente esponenziale) che descriva la variazione della "temperatura" T . Ad ogni iterazione la soluzione corrente può essere aggiornata con una qualsiasi altra interna all'intorno di 2 ottimalità, di costo minore o maggiore, con una probabilità funzione delle variazioni di costo e della temperatura attuale, $f(\Delta cost, T)$. Questo implica che non sia necessario scandire tutto l'intorno, ma che sia sufficiente scegliere in maniera randomica 2 rami da sostituire nella soluzione (Figura 3.12).

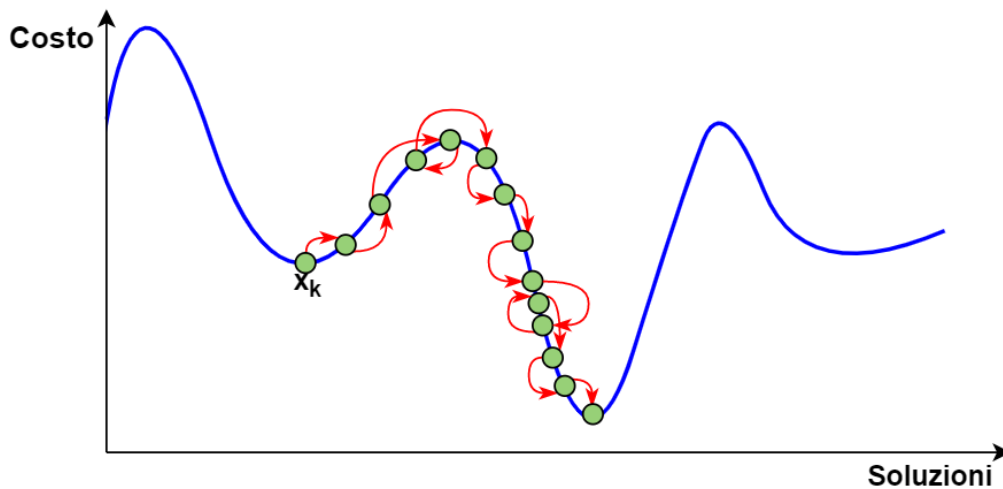


Figura 3.12: Esempio di esecuzione dell'algoritmo Simulated Annealing.

Con il procedere delle iterazioni, l'aggiornamento ad un costo peggiore avviene sempre meno frequentemente, fino ad ottenere solo aggiornamenti con soluzioni più vantaggiose. Esiste un teorema secondo il quale se la temperatura varia in maniera estremamente lenta ed è consentito effettuare un numero di iterazioni estremamente elevato, questo algoritmo garantisce di trovare l'ottimo globale. Concretamente queste ipotesi sono molto difficili da realizzare, ma è statisticamente comunque possibile dichiarare che l'approccio del simulated annealing restituisce una buona soluzione.

3.4 Algoritmo genetico

L'algoritmo genetico è legato alla teoria dell'evoluzione di Darwin, con cui condivide numerosi concetti. Da un punto di vista teorico, l'algoritmo definisce in prima battuta una serie di individui, che costituiscono una popolazione.

In seguito, attraverso mutazioni dei singoli soggetti e la riproduzione di questi, si crea una nuova popolazione. Il concetto fondamentale alla base di tale algoritmo è che associando ad un individuo uno score, lo si possa utilizzare per far progredire la specie.

Ad ogni individuo viene associata una fitness, che rappresenta quanto sia forte ed efficiente. Applicando tale concetto al Travelling Salesman Problem, ad ogni individuo i è stata associata una fitness pari a:

$$fitness_i = \frac{1}{costo_i}$$

dove $costo_i$ rappresenta il valore della funzione obiettivo per l'istanza i .

La popolazione iniziale nell'algoritmo sviluppato, è stata generata utilizzando l'algoritmo nearest neighbour ma utilizzando un diverso nodo di partenza per ciascuno di essi. Ogni individuo della popolazione è stato rappresentato come la sequenza dei nodi, in ordine di visita.

In seguito vengono generati nuovi individui a partire dalla popolazione attuale, utilizzando due tecniche differenti:

- **Crossover**

in questa operazione vengono selezionati randomicamente due individui della popolazione e partendo da questi, vengono creati nuovi tour che ereditano dai genitori delle caratteristiche. Nel nostro caso ciascun individuo eredita parte della sequenza di visita di uno dei suoi genitori, e la restante parte viene ereditata dall'altro genitore.

- **Mutazione**

in questa fase un certo numero di individui viene selezionato in maniera casuale e da ciascuno

di questi, viene generato un nuovo tour attraverso una permutazione casuale della sequenza di partenza.

L'utilizzo di tali tecniche iterativamente insieme alla rimozione della popolazione degli individui di costo peggiore, permette di ridurre complessivamente il costo medio delle istanze nella popolazione. Riducendo tale valore medio della funzione obiettivo, si riesce ad ottenere una migliore soluzione con numerose iterazioni. All'interno del programma sviluppato, le precedenti tecniche non sono state applicate contemporaneamente in ogni iterazione ma in istanti differenti, secondo quanto descritto nel seguente algoritmo.

Algorithm 6: Evoluzione

Input: *population* = popolazione di numerosi tour generati mediante un algoritmo di costruzione

Output: *y* = sequenza di visita dei nodi nel tour ottenuto di costo minore

```

1 num_epochs  $\leftarrow$  0
2 best_cost  $\leftarrow$  0
3 while num_epochs < MAX_NUM_EPOCHS do
4   if num_epochs mod 3 == 0 then
5     crossover(population, best_cost)
6   else
7     mutation(population, best_cost)
8   remove_worst_members(population)
9 y  $\leftarrow$  best_member(population)

```

La fase di crossover viene applicata più di rado, poichè la generazione di nuovi figli a partire dai genitori richiede molto più tempo della creazione dello stesso numero di individui mediante mutazione.

Gli algoritmi di crossover e mutazione, utilizzati nel programma sviluppato, sono spiegati nella seguente sezione, con le relative illustrazioni.

Algorithm 7: Crossover

Input: *population* = popolazione di numerosi tour generati mediante un algoritmo di costruzione
sum_fitnesses = somma delle fitness di tutti gli individui della popolazione
best_cost = costo della migliore soluzione attuale

Output: *offspring₁*, *offspring₂* = nuovi individui generati nella popolazione

```

1 n = numero di nodi dell'istanza tsp
2  $x = \{x_1, \dots, x_n\} \leftarrow \text{RANDOM}(population, p = \frac{fitness_x}{sum\_fitnesses})$ 
3  $y = \{y_1, \dots, y_n\} \leftarrow \text{RANDOM}(population, p = \frac{fitness_y}{sum\_fitnesses})$ 

4  $offspring_1[1, \dots, n/2] = x[1, \dots, n/2]$ 
5  $offspring_2[n/2 + 1, \dots, n] = y[n/2 + 1, \dots, n]$ 
6  $offspring_1[n/2 + 1, \dots, n] = \{y_i \in y : y_i \notin \{x_1, \dots, x_{n/2}\}\}$ 
7  $offspring_2[1, \dots, n/2] = \{x_i \in x : x_i \notin \{y_{n/2+1}, \dots, y_n\}\}$ 
8 sum_fitnesses  $\leftarrow \text{update}(sum\_fitness, offspring_1, offspring_2)$ 
9 min_cost  $\leftarrow \min(cost(offspring_1), cost(offspring_2))$ 
10 if  $cost(offspring_1) < best\_cost$  then
11   best_cost  $\leftarrow min\_cost$ 

```

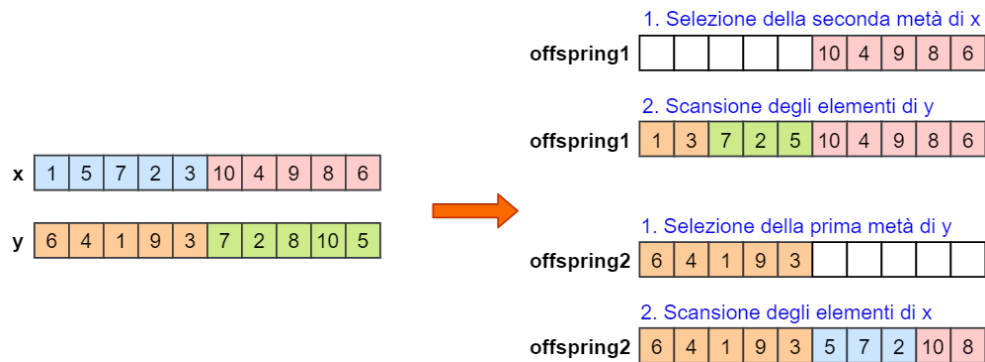


Figura 3.13: Esempio di applicazione del crossover su due istanze *x* e *y*.

Algorithm 8: Mutazione

Input: *population* = popolazione di numerosi tour generati mediante un algoritmo di costruzione
sum_fitnesses = somma delle fitness di tutti gli individui della popolazione
best_cost = costo della migliore soluzione attuale

Output: *offspring1*, *offspring2* = nuovo individuo generato nella popolazione

```

1  $n \leftarrow$  numero di nodi dell'istanza tsp
2  $x = \{x_1, \dots, x_n\} \leftarrow \text{RANDOM}(\text{population})$ 
3  $\text{begin} \leftarrow \text{RANDOM}(\{1, \dots, n/2\})$ 
4  $\text{end} \leftarrow \text{RANDOM}(\{n/2 + 1, \dots, n\})$ 
5 for  $i \leftarrow \text{begin}$  to  $\text{end}$  do
6    $\text{offspring}[i] \leftarrow x[\text{end} - i + \text{begin}]$ 
7 if  $\text{cost}(\text{offspring}) < \text{best\_cost}$  then
8    $\text{best\_cost} \leftarrow \text{cost}(\text{offspring})$ 

```



Figura 3.14: Esempio di applicazione della mutazione su un'istanza x .

Capitolo 4

Performance

La metrica di confronto, utilizzata nell'analisi degli algoritmi, è il tempo complessivo di creazione e risoluzione del modello. Ciascuna modalità di risoluzione viene applicata a diverse istanze di TSPlib, con un numero differente di nodi.

4.1 Performance variability

Nel corso degli anni '90, gli ingegneri di CPLEX scoprirono che il tempo di risoluzione variasse significativamente in diversi sistemi operativi. Con alcune istanze, le performance migliori si avevano su UNIX mentre con altre su Windows.

Il motivo di tale comportamento venne in seguito studiato ed attribuito alla diversa scelta effettuata dai sistemi operativi nel decretare l'ordine delle variabili su cui viene svolto l'albero decisionale. Le scelte svolte inizialmente, nella definizione dei primi nodi dell'albero, si ripercuotono sulla sua successiva evoluzione.

Proprio per questo motivo, su alcune istanze, UNIX riusciva a risolvere il problema in tempo minore rispetto a Windows, mentre su altre accadeva l'opposto.

Da questi studi, evinse che il Branch and Cut è un sistema caotico e che quindi piccole variazioni delle condizioni iniziali generano grandi differenze nei risultati finali.

Per questo motivo, alcuni algoritmi presentati in questo report, sono stati studiati al variare di alcune condizioni iniziali:

- **Random Seed**
definisce il seme da cui CPLEX genera una sequenza di numeri pseudo-casuali (vedi Sezione B.3).
Nel momento in cui CPLEX nota che diverse variabili frazionarie hanno lo stesso valore, il risolutore sceglie casualmente su quale di queste applicare il Branch.
- **Gap**
intervallo massimo, tra il valore della migliore funzione obiettivo intera e il valore della funzione di costo del miglior nodo rimanente, che permette di decretare il raggiungimento dell'ottimo secondo CPLEX (vedi Sezione B.3).
- **Node limit**
massimo numero di nodi risolti prima che l'algoritmo termini senza raggiungere l'ottimalità (vedi Sezione B.3).
- **Populate limit**
massimo numero di soluzioni MIP generate per il pool di soluzioni durante ogni chiamata della procedura di popolazione (vedi Sezione B.3).

La variazione del primo di questi parametri permette di apportare significative modifiche al tempo di risoluzione, non modificando la reale ottimalità della soluzione.

La variazione degli altri parametri permette invece di ottenere una soluzione meta-euristica, ovvero un'approssimazione più lasca di quella ottima.

4.2 Analisi tabulare

Un metodo non molto efficiente per lo studio delle performance degli algoritmi, utilizza una struttura tabulare in cui viene inserita una riga per ogni istanza del problema.

Inoltre vengono riportati i tempi di esecuzione degli algoritmi su ognuno dei grafi analizzati. Nell'ultima riga per ciascun algoritmo viene riportata la media geometrica dei suoi tempi di esecuzione (vedi esempio in Tabella 4.1).

Solitamente viene impostato un **TIME LIMIT** uguale per tutti gli algoritmi. Questo rappresenta nella tabella il valore del tempo di esecuzione per un algoritmo che ha impiegato un ammontare di tempo, maggiore o uguale a **TIME LIMIT**. Spesso viene dato più peso al **TIME LIMIT**, inserendolo nella tabella con, ad esempio, peso 10 (ovvero **TIME LIMIT***10).

La debolezza di tale calcolo delle performance risiede nel fatto che non sempre la media descrive l'efficienza di un soluzione. Infatti non influisce unicamente il tempo di risoluzione del modello ma anche quello necessario alla sua creazione.

Istanza	Sequential	Flow	Loop
att48	212.3	12.5	4.3
...
a280	3200	2500.8	1300.5
	2120.3	1800.3	1000.4

Tabella 4.1: Tabella di performance con **TIME LIMIT=3200**.

4.3 Performance profiling

Questo metodo prevede la classificazione dei tempi di esecuzione degli algoritmi in base al numero percentuale di successi, rispetto a un fattore moltiplicativo (ratio) del tempo di esecuzione (vedi Figura 4.5).

L'andamento del performance profile di un algoritmo è monotono crescente. Il valore assunto per ogni ratio dagli algoritmi all'interno del grafico è la percentuale del numero di istanze che l'algoritmo risolve con quel fattore rispetto all'ottimo di quel caso.

Spesso questi grafici vengono rappresentati in scala logaritmica per notare al meglio le differenze ed avere una migliore raffigurazione, più semplice da essere analizzata visivamente.

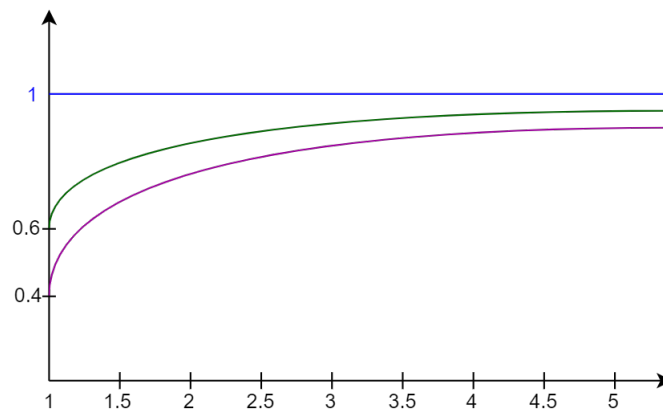


Figura 4.1: Performance profile di due algoritmi.

Per creare il performance profile degli algoritmi implementati, è stato utilizzato il programma python riportato nella Sezione D.

4.4 Analisi degli algoritmi sviluppati

4.4.1 Algoritmi esatti

4.4.1.1 Modelli simmetrici

- | | | | |
|----------------|---------------|---------------|--------------|
| • a280.tsp | • eil101.tsp | • kroB200.tsp | • pr226.tsp |
| • ali535.tsp | • fl417.tsp | • kroC100.tsp | • pr264.tsp |
| • att48.tsp | • gil262.tsp | • kroD100.tsp | • pr299.tsp |
| • att532.tsp | • gr96.tsp | • kroE100.tsp | • pr439.tsp |
| • berlin52.tsp | • gr137.tsp | • lin105.tsp | • rat99.tsp |
| • bier127.tsp | • gr202.tsp | • lin318.tsp | • rat195.tsp |
| • burma14.tsp | • gr229.tsp | • p654.tsp | • rat575.tsp |
| • ch130.tsp | • gr431.tsp | • pcb442.tsp | • rat783.tsp |
| • ch150.tsp | • gr666.tsp | • pr76.tsp | • rd100.tsp |
| • d198.tsp | • kroA100.tsp | • pr107.tsp | • rd400.tsp |
| • d493.tsp | • kroA150.tsp | • pr124.tsp | • st70.tsp |
| • d657.tsp | • kroA200.tsp | • pr136.tsp | |
| • eil51.tsp | • kroB100.tsp | • pr144.tsp | |
| • eil76.tsp | • kroB150.tsp | • pr152.tsp | |

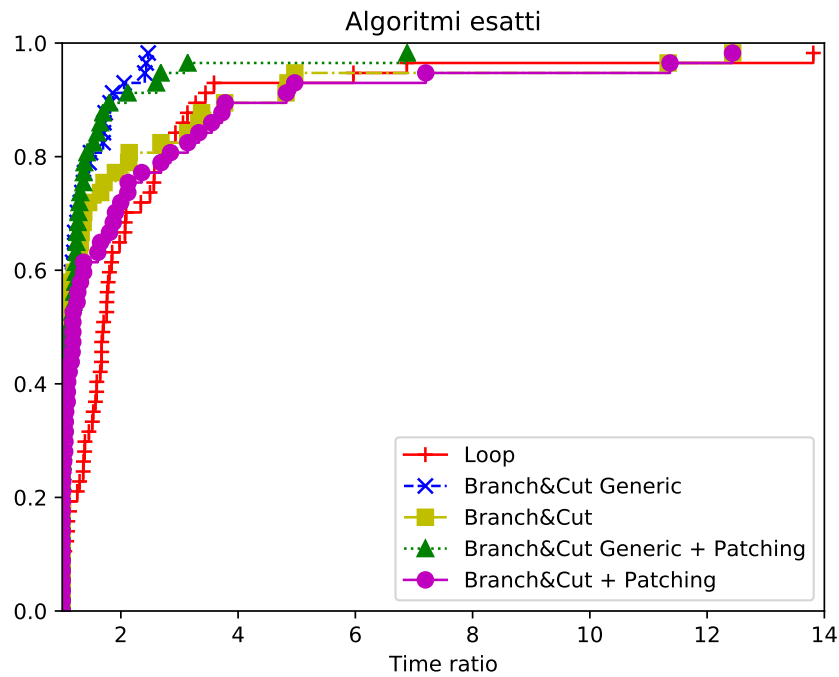


Figura 4.2: Performance profile degli algoritmi esatti.

4.4.1.2 Modelli compatti

- att48.tsp
- berlin52.tsp
- burma14.tsp
- eil101.tsp
- eil51.tsp
- eil76.tsp
- gr96.tsp
- kroA100.tsp
- kroB100.tsp
- kroB150.tsp
- kroC100.tsp
- kroD100.tsp
- kroE100.tsp
- pr124.tsp
- pr136.tsp
- pr76.tsp
- rat99.tsp
- rd100.tsp
- st70.tsp
- ulysses16.tsp

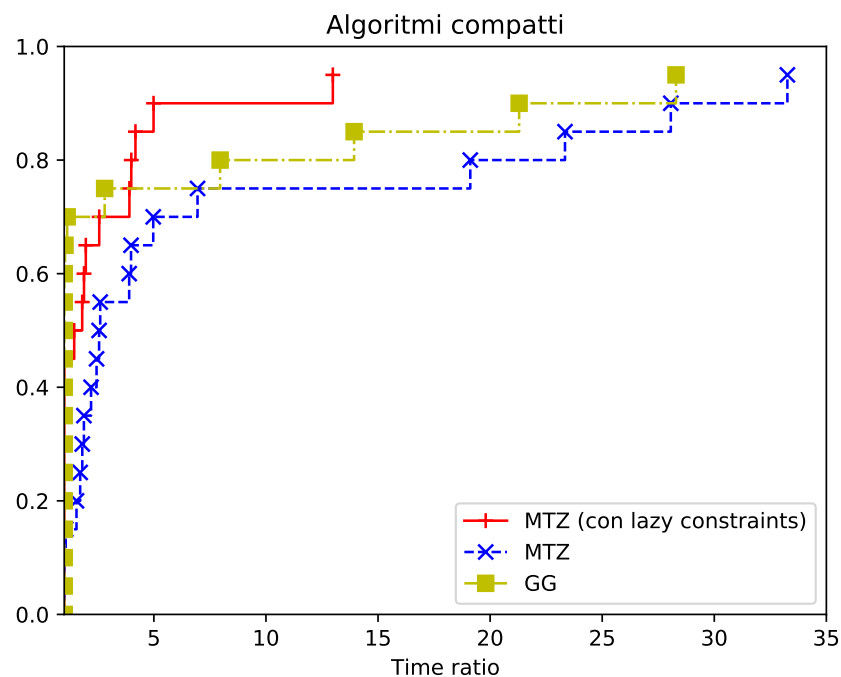


Figura 4.3: Performance profile degli algoritmi compatti.

4.4.2 Algoritmi math-euristici

4.4.3 Algoritmi euristici

4.4.3.1 Multi-start

- a280.tsp
- ali535.tsp
- att532.tsp
- d1291.tsp
- d1665.tsp
- d2103.tsp
- d493.tsp
- d657.tsp
- dsj1000.tsp
- fl1400.tsp
- fl1577.tsp
- fl417.tsp
- gil262.tsp
- gr431.tsp
- gr666.tsp
- lin318.tsp
- nrw1379.tsp
- p654.tsp
- pcb1173.tsp
- pcb442.tsp

- pr1002.tsp • rat783.tsp • rl1889.tsp • u574.tsp
- pr299.tsp • rd400.tsp • u1060.tsp • u724.tsp
- pr439.tsp • rl1304.tsp • u1432.tsp • vm1084.tsp
- rat575.tsp • rl1323.tsp • u1817.tsp • vm1748.tsp

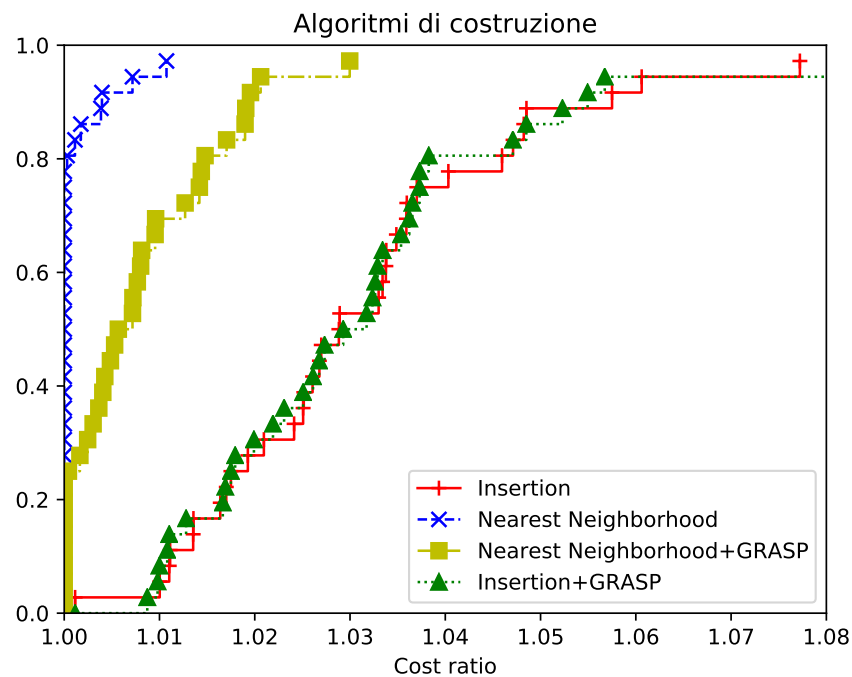


Figura 4.4: Confronto dei vari multistart in base all'algoritmo di costruzione.

4.4.3.2 Algoritmi meta-euristici

- d1291.tsp • pcb1173.tsp • u1432.tsp
- d1655.tsp • pr1002.tsp • u1817.tsp
- d2103.tsp • pr2392.tsp • u2152.tsp
- dsj1000.tsp • rl1304.tsp • u2319.tsp
- fl1400.tsp • rl1323.tsp • vm1084.tsp
- fl1577.tsp • rl1889.tsp • vm1748.tsp
- nrw1379.tsp • u1060.tsp

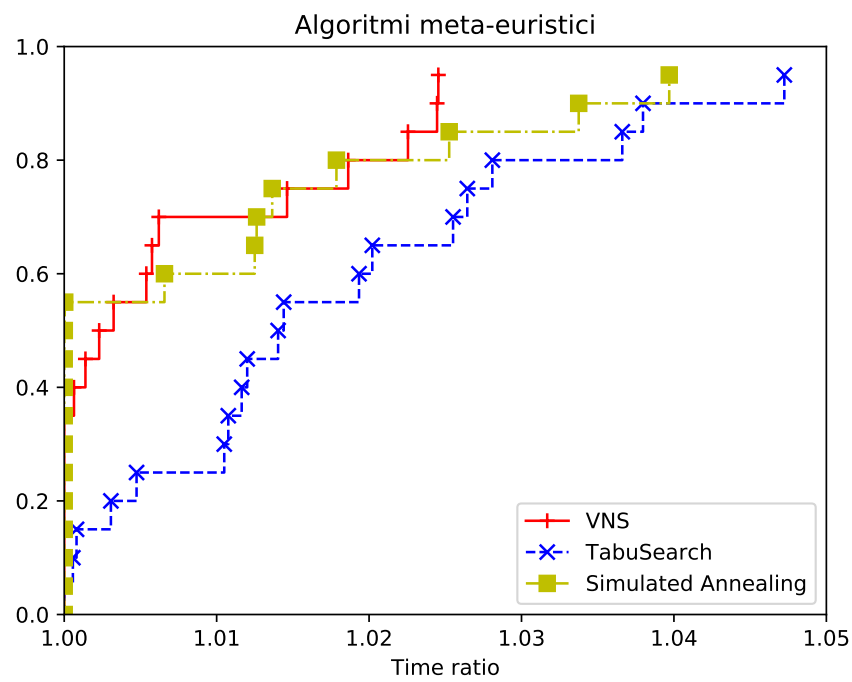


Figura 4.5: Confronto degli algoritmi meta-euristici sviluppati utilizzando il Nearest Neighborhood come algoritmo di costruzione.

Appendice A

TSPlib

Un'istanza di tale problema viene definita normalmente da un grafo, per cui ad ogni nodo viene associata un numero intero (Ex. $\Pi = \{1, 2, 3, \dots, n\}$).

Una soluzione del problema è una sequenza di nodi che corrisponde ad una permutazione dell'istanza (es. $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tale che $x_i = x_j \iff x_i \in \Pi \wedge x_j \in S \wedge x_i \neq x_j \iff i \neq j$). Poichè in questa variante non esiste alcuna origine, ogni tour può essere descritto da due versi di percorrenza e l'origine può essere un nodo qualsiasi del grafo.

La rappresentazione di tali istanze è stata svolta attraverso l'utilizzo del programma Gnuplot. Per avere dettagli riguardanti il suo utilizzo vedi Sezione C.

Le istanze del problema, analizzate durante il corso, sono punti dello spazio 2D, identificati quindi da due coordinate (x, y) . Per generare istanze enormi del problema, si utilizza un approccio particolare in cui viene definito un insieme di punti a partire da un'immagine già esistente.

La vicinanza dei punti generati dipende dalla scala di grigi all'interno dell'immagine (es. generazione di punti a partire dal dipinto della Gioconda[2]).

Le istanze che vengono elaborate dai programmi, creati durante il corso, utilizzano il template **TSPlib**. Di seguito viene riportato il contenuto di un file di questa tipologia.

```
1 NAME : esempio
2 COMMENT : Grafo costituito da 5 nodi
3 TYPE : TSP
4 DIMENSION : 5
5 EDGE_WEIGHT_TYPE : ATT
6 NODE_COORD_SECTION
7 1 6734 1453
8 2 2233 10
9 3 5530 1424
10 4 401 841
11 5 3082 1644
12 EOF
```

Listing A.1: esempio.tsp

Le parole chiave più importanti, contenute in questi file A.1, sono:

- **NAME**
seguito dal nome dell'istanza TSPlib
- **COMMENT**
seguito da un commento associato all'istanza
- **TYPE**
seguito dalla tipologia dell'istanza
- **DIMENSION**
seguito dal numero di nodi nel grafo (num_nodi)
- **EDGE_WEIGHT_TYPE**
seguito dalla specifica del tipo di calcolo che viene effettuato per ricavare il costo del tour

- **NODE_COORD_SECTION**

inizio della sezione composta di *num_nodi* righe in cui vengono riportate le caratteristiche di ciascun nodo, nella forma seguente:

indice_nodo	coordinata_x	coordinata_y
-------------	--------------	--------------

- **EOF**

decreta la fine del file

Appendice B

ILOG CPLEX

In questa sezione verranno approfondite alcune funzioni di CPLEX necessarie ad implementare gli algoritmi descritti nei capitoli precedenti.

B.1 Funzionamento

Per poter utilizzare gli algoritmi di risoluzione forniti da CPLEX è necessario costruire il modello matematico del problema, legato all'istanza precedentemente descritta.

CPLEX ha due meccanismi di acquisizione dell'istanza:

1. **modalità interattiva:**
in cui il modello viene letto da un file precedentemente generato (*model.lp*)
2. **creazione nel programma:**
il modello viene creato attraverso le API del linguaggio usato per la scrittura del programma

Le strutture utilizzate da CPLEX sono due (vedi Figura B.1):

- **ENV (enviroment):** contiene i parametri necessari all'esecuzione e al salvataggio dei risultati
- **LP:** contiene il modello che viene analizzato da CPLEX durante la computazione del problema di ottimizzazione

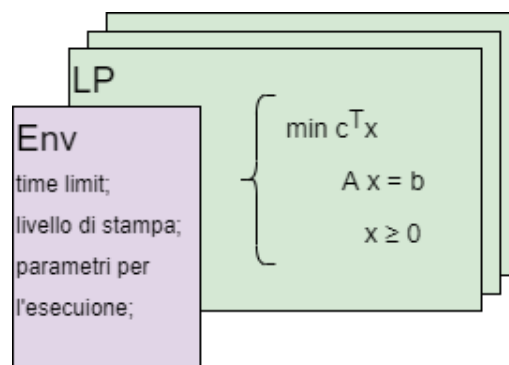


Figura B.1: Strutture CPLEX

Ad ogni ENV è possibile associare più LP, in modo da poter risolvere in parallelo più problemi di ottimizzazione, ma nel nostro caso ne sarà sufficiente solo uno.

Per convenzione è stato deciso di etichettare i rami (i, j) dell'istanza rispettando la proprietà $i < j$. In Figura B.2 è riportato lo schema degli indici che vengono utilizzati per etichettare le variabili.

In questa figura le celle (i, j) bianche, sono quelle effettivamente utilizzate per indicare un arco secondo la convenzione. Il numero all'interno di queste caselle rappresenta invece l'ordine in cui queste variabili vengono inserite nel modello e quindi gli indici associati da CPLEX per accedere alla soluzione.

Il modello così strutturato richiede però l'inserimento di un esponenziale numero di vincoli per l'eliminazione dei sub-tour, vengono quindi ora descritti altri modelli che ovvino a questo problema.

j		0	1	2	3	4	5
i	0		0	1	2	3	4
1				5	6	7	8
2					9	10	11
3						12	13
4							14
5							

Figura B.2: Indici della matrice

B.2 Funzioni

B.2.1 Costruzione e modifica del modello

Per poter costruire il modello da analizzare, come prima cosa, è necessario creare un puntatore alle due strutture dati utilizzate da CPLEX.

```

1  int error;
2  CPXENVptr env = CPXopenCPLEX(&error);
3  CPXLPptr lp = CPXcreateprob(env, &error, "TSP");

```

Listing B.1: modelTSP.txt

La funzione alla riga 2 alloca la memoria necessaria e riempie la struttura con valori di default. Nel caso in cui non termini con successo memorizza un codice d'errore in *error*.

La funzione invocata nella riga successiva, invece, associa la struttura LP all'ENV che gli viene fornito. Il terzo parametro passato, nell'esempio "TSP", sarà il nome del modello creato. Al termine di queste operazioni verrà quindi creato un modello vuoto. All'interno del nostro programma per inizializzarlo è stata costruita la seguente funzione:

```
void cplex_build_model(istanza_problema, env, lv);
```

All'interno di `cplex_build_model()` viene aggiunta una colonna alla volta al modello, definendo quindi anche la funzione obiettivo. Le variabili aggiunte corrispondono agli archi del grafo e per ciascuno di questi viene calcolato il costo come distanza euclidea. La funzione necessaria ad inserire colonne e definire la funzione di costo è la seguente:

```
CPXnewcols(env, lp, num_colonne, costi, lower_bound,
           upper_bound, tipi_variabili, nomi_variabili);
```


istanza_problema:	puntatore alla struttura che contiene l'istanza del problema (letta dal file TSPlib)
env:	puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata
lp:	puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata
env:	puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata
lp:	di tipo CPXLPptr, è un puntatore alla struttura LP precedentemente creata
num_colonne:	numero di colonne da inserire
costi:	vettore dei costi relativi agli archi da inserire
lower_bound:	vettore contenente i lower bound dei valori assumibili dalle variabili da inserire
upper_bound:	vettore contenente gli upper bound dei valori assumibili dalle variabili da inserire
tipi_variabili:	vettore contenente la tipologia delle variabili da inserire
nomi_variabili:	vettore di stringhe contenenti i nomi delle variabili da inserire

La generica colonna **i**, aggiunta dalla funzione, sarà definita dalle informazioni contenute all'interno della posizione **i** degli array, ricevuti come parametri. Nel programma elaborato durante il corso, viene aggiunta una colonna alla volta all'interno del modello. Per far ciò, è necessario comunque utilizzare riferimenti alle informazioni da inserire, in modo da ovviare il problema riguardante la tipologia di argomenti richiesti, che sono array. Ad esempio, nel nostro caso, la tipologia di una nuova variabile inserita sarà un riferimento al carattere '**B**', che la identifica come binaria. Per poter inserire il primo insieme di vincoli del problema

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 \quad \forall v \in V$$

viene invece sfruttata la seguente funzione:

```
CPXnewrows(env, lp, numero_righe, termini_noti,
           tipi_vincoli, range_valori, nomi_vincoli);
```

In modo analogo all'inserimento delle colonne, nel nostro programma viene aggiunta una riga alla volta nel modello. L'*i*-esima riga aggiunta corrisponderà al vincolo imposto sul nodo *i*-esimo, imponendo a 1 il coefficiente della variabile $x_{k,j}$ se $k = i$ $j = i$ per ogni variabile del modello. In questo modo però viene aggiunto un vincolo in cui è necessario cambiare i coefficienti delle variabili che ne prendono parte. Per fare ciò è necessaria la funzione:

```
CPXchgcoef(env, lp, i, j, new_value);
```

L'utilizzo di questa metodo per inserire nuovi vincoli è però considerato inefficiente. Al suo posto è consigliato l'utilizzo di una funzione che inserisca il vincolo con già i coefficienti delle variabili

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata

numero_righe: numero di righe (vincoli) da inserire

termini_noti: vettore dei termini noti dei vincoli

tipi_vincoli: vettore di caratteri che specifica il tipo di vincoli da inserire. Ogni carattere può assumere:
 'L' per vincolo \leq
 'E' per vincolo $=$
 'G' per vincolo \geq
 'R' per vincolo definito in un intervallo

range_valori: vettore di range per i valori di ogni vincolo (nel nostro caso è NULL)

nomi_vincoli vettore di stringhe contenenti i nomi

delle variabili da inserire

impostati al valore corretto:

```
CPXaddrows(env, lp, num_nc, num_nr, nnz, const_term, type_constr,
           rmatbeg, rmatind, rmatval, col_name, row_name);
```

Per rimuovere invece delle righe, viene utilizzata la seguente funzione:

```
CPXdelrows( CPXENVptr env, CPXLPptr lp, int begin, int end );
```

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata

i: intero che specifica l'indice della riga in cui modificare il coefficiente

j: intero che specifica la colonna in cui si trova la variabile di cui modificare il coefficiente

new_value: nuovo valore del coefficiente

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata

B.2.2 Calcolo della soluzione

Per ottenere la soluzione ottima del problema di ottimizzazione del problema correlato al modello definito in cplex, vengono utilizzate due fasi:

- **Risoluzione del problema di ottimizzazione**

```
CPXmipopt(env, lp);
```

- **Ottenimento della soluzione**

```
CPXgetmipx(env, lp, x, inizio, fine);
```

Questa funzione salva in x tutte le variabili che hanno indice $i \in [\text{inizio}, \text{fine}]$ e quindi x deve essere un vettore di almeno $\text{fine} - \text{inizio} + 1$ valori. Nel nostro programma, vengono analizzati i valori di tutte le variabili in gioco.

Per questo motivo **inizio=0** e **fine=num_colonne - 1**¹². In seguito il nostro programma analizza la correttezza della soluzione svolgendo la verifica su:

¹ numero di variabili=CPXgetnumcols(env,lp);

² numero di vincoli=CPXgetnumrows(env,lp);

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata
num_nc: numero di nuove colonne che devono essere aggiunte
num_nr: numero di nuove righe che devono essere aggiunte
nnz: numero di coefficienti non nulli nel vincolo aggiunto
const_term: vettore con i termini noti per ogni vincolo da aggiungere
type_costr: vettore con il tipo di vincoli da aggiungere, scelto tra:
 'L' per vincolo \leq
 'E' per vincolo $=$
 'G' per vincolo \geq
 'R' per vincolo definito in un intervallo
rmatbeg: vettore per definire le righe da aggiungere
rmatind: vettore per definire le righe da aggiungere
rmatval: vettore per definire le righe da aggiungere
col_name: vettore contenente i nomi delle nuove colonne
row_name: vettore contenente i nomi dei nuovi vincoli

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata
lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata

- *valori assunti dalle variabili*
ciascun $x_{i,j}$ assume valore 0 o 1 con una tolleranza di $\epsilon = 10^{-5}$
- *grado di ciascun nodo*
il tour è composto al massimo da due archi che toccano lo stesso nodo

• Gap relativo

La seguente funzione permette di ottenere il gap relativo della funzione obiettivo per un'ottimizzazione MIP.

```
CPXgetmiprelgap( CPXENVptr env, CPXCLPptr lp, double * gap_p);
```

Per un problema di minimizzazione il gap relativo viene calcolato come:

$$\frac{\text{bestinteger} - \text{bestobjective}}{10^{-10} + |\text{bestinteger}|}$$

dove **bestinteger** è il valore restituito dalla funzione **CPXgetobjval()** mentre **bestobjective** da **CPXgetbestobjval()**.

B.2.3 Lazy constraints

Nel caso in cui si voglia sfruttare la possibilità di verificare se è stato rispettato un vincolo, solo al termine della computazione della soluzione, è necessario inserire un "lazy constraint". Per fare ciò viene utilizzata la seguente funzione:

begin: indice numerico della prima riga
da cancellare

end: indice numerico dell'ultima riga
da cancellare

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV
precedentemente creata

lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP
precedentemente creata

```
CPXaddlazyconstraints(env, lp, num_vincoli, nnz,
    termine_costante, tipo_vincolo, posizione_iniziale,
    indici, valori, nome_vincolo);
```

In modo analogo alle due funzioni precedentemente descritte per l'aggiunta di righe e colonne, nel nostro modello viene inserito un vincolo per volta. Per impostare correttamente i coefficienti delle variabili presenti nel vincolo, vengono sfruttati i due array *indici* e *valori*. Come rappresentato in Figura B.3, all'interno della posizione i -esima del vettore di indici è presente la posizione dell' i -esima variabile del vincolo da inserire (nell'esempio in figura $indici[i] = j$). Mentre l' i -esima posizione del vettore di valori contiene il corrispondente coefficiente (in questo caso c_j).

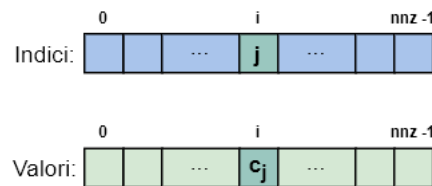


Figura B.3: Array lazy constraints

B.2.4 Lazy Constraint Callback

Per poter utilizzare una lazy constraint callback, precedentemente implementata, all'interno del programma, prima di tutto è necessario installarla. Questo viene fatto attraverso la seguente funzione:

```
CPXsetlazyconstraintcallbackfunc(env, mylazycallback, tsp_in);
```

Una volta installata la callback è necessario cambiare l'impostazione del numero di thread utilizzati dal programma. Infatti CPLEX, non sapendo se la funzione implementata dall'utente è thread safe, impedisce lo svolgimento di elaborazioni in parallelo con le callback. A meno che questo non venga esplicitamente dichiarato dall'utente con l'impostazione del corrispondente parametro. Per questo può tornare utile la seguente funzione, che restituisce il numero di core presenti nel computer:

```
CPXgetnumcores(env, ncores);
```

- env:** puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata
- lp:** puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata
- x:** puntatore a un vettore di double in cui verranno salvati i valori delle variabili ottenuti dalla soluzione ottima
- inizio:** primo indice della variabile di cui si vuole memorizzare ed analizzare il valore
- fine:** indice dell'ultima variabile di cui si vuole memorizzare ed analizzare il valore

Come descritto nella sezione dedicata, le callback sono funzioni lasciate appositamente vuote da CPLEX, affinché l'utente possa implementarle in maniera personalizzata. Hanno però una dichiarazione standard, qui riportata:

```
static int CPXPUBLIC name_function(CPXENVptr env, void* cbdata,
                                int wherefrom, void* cbhandle,
                                int* useraction_p)
```

Nell'implementarla bisogna fare particolare attenzione a renderla thread safe, se si vuole utilizzarla su più processi in parallelo. Infatti, nel caso in cui il programma lavorasse contemporaneamente con più processori, non si devono verificare interferenze di accesso agli stessi dati da parte di invocazioni diverse della callback. Quest'aspetto è lasciato a completa gestione dell'utente. Per avere accesso alle variabili utilizzate dal nodo che invoca la callback è possibile chiamare la seguente funzione:

```
CPXgetcallbacknodex(env, cbdata, wherefrom, x_star, start, end);
```

Invece, per ottenere informazioni riguardanti il problema di ottimizzazione che si sta risolvendo all'interno di una callback implementata dall'utente, è possibile utilizzare:

```
CPXgetcallbackinfo(env, cbdata, wherefrom, which_info, result);
```

Macro utili da utilizzare come parametro *which_info* possono essere:

Per conoscere il valore della funzione obiettivo del problema legato al nodo corrente che invoca la callback:

```
CPXgetcallbacknodeobjval(env, cbdata, wherefrom, objval);
```

All'interno della lazy callback è necessario aggiungere il taglio voluto al nodo corrente che la invoca. Questo può essere fatto in due diverse modalità: globale o locale.

Nel primo caso il vincolo aggiunto sarà visibile da tutti i nodi. Inoltre, in caso non lo ritenga più necessario, CPLEX potrà eliminarlo dal modello. Quest'operazione viene detta *purge* e si verifica, ad esempio, quando un taglio non viene applicato per molte iterazioni consecutive. Per un vincolo globale viene chiamata la seguente funzione, che ne aggiunge uno alla volta:

```
CPXcutcallbackadd(env, cbdata, wherefrom, nnz, const_term,
                  type_constraint, indices, values,
                  purgeable);
```

Nella seconda modalità, locale, il taglio aggiunto sarà visibile solo ai nodi discendenti di quello che invoca la callback. Viene implementata con la seguente chiamata:

- env:** puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata
- lp:** puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata
- gap_p:** puntatore a un double in cui verrà salvato il gap

```
CPXcutcallbackaddlocal(env, cbdata, wherefrom, nnz, const_term,
                        type_constraint, indices, values);
```

B.2.5 Heuristic Callback

Per poter suggerire a CPLEX una soluzione del problema in esame calcolata dall'utente, è necessario utilizzare un particolare tipo di callback, detta *heuristic callback*. Questa, dopo essere stata installata, verrà invocata ad ogni nodo dell'albero del branch and cut.

Per installare la callback viene utilizzata la seguente funzione:

```
CPXsetheuristiccallbackfunc(env, heuristiccallback, cbhandle);
```

La callback dell'utente deve avere la dichiarazione specificata di seguito:

```
int callback (CPXENVptr env, void *cbdata, int wherefrom, void *cbhandle, double *objval_p,
             double *x, int *checkfeas_p, int *useraction_p);
```

B.2.6 Lazy Constraint Callback General

Per evitare che alcune procedure interne a CPLEX vengano disattivate nel momento dell'installazione di una callback, è possibile utilizzarla con una diversa modalità rispetto a quella descritta nella sezione precedente, detta *general*. Per quest'operazione viene invocata la seguente funzione, che si occupa anche di specificare il contesto in cui invocare la callback:

```
CPXcallbacksetfunc (env, lp, contextmask, callback, userhandle);
```

Il parametro **contextmask** può variare a seconda dello scopo della callback creata. Alcuni possibili valori sono:

- **CPX_CALLBACKCONTEXT_CANDIDATE:**
la callback verrà invocata quando viene trovata da CPLEX una nuova soluzione possibile che l'utente avrà la possibilità di rifiutare;
- **CPX_CALLBACKCONTEXT_LOCAL_PROGRESS:**
la callback verrà invocata nel momento in cui un thread effettua un progresso, non ancora noto globalmente, nella soluzione del problema. In questo contesto l'utente può suggerire a CPLEX una soluzione da cui proseguire la computazione (analogamente alle heuristic callback).

L'utente può specificare più contesti con una sola installazione, è sufficiente separare le macro desiderate con l'operatore or bitwise ('|').

La user-callback implementata deve avere questa dichiarazione:

```
static int CPXPUBLIC name_general_callback(CPX_CALLBACKCONTEXTptr
                                           context, CPXLONG contextid, void* cbhandle)
```

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV precedentemente creata
lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP precedentemente creata
num__vincoli: numero di vincoli da inserire
nnz: vettore con il numeri di variabili per ogni vincolo
termine__costante: vettore dei termini noti dei vincoli
tipi__vincoli: vettore di caratteri che specifica il tipo di vincoli da inserire. Ogni carattere può assumere:
 'L' per vincolo \leq
 'E' per vincolo $=$
 'G' per vincolo \geq
 'R' per vincolo definito in un intervallo
posizione__iniziale: vettore con le posizione iniziali dei coefficienti nei vincoli
indici: vettore di vettori contenenti gli indici delle variabili appartenenti al vincolo
valori: vettore di vettori con i coefficienti delle variabili del vincolo
nome__vincolo: vettore con i nomi dei vincoli

env: puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV
mylazycallback: puntatore di tipo CPXPUBLIC * alla callback chiamata
tsp__in: puntatore di tipo void* ad una struttura dati contenente le informazioni da passare alla callback

in cui L'utente può installare una sola user-callback, ma al suo interno può distinguere il contesto in cui è stata invocata grazie al parametro **contextid**.

Per poter accedere alla soluzione candidata e al suo costo, deve essere presente la seguente chiamata, che è specifica per il contesto **CPX_CALLBACKCONTEXT_CANDIDATE**:

```
CPXcallbackgetcandidatepoint(context, x_star, begin, end, obj_p);
```

Per poter scartare una soluzione, nel caso in cui violi alcuni tagli specificati nella chiamata stessa, viene utilizzata la seguente funzione. Anche questa è specifica per il contesto **CPX_CALLBACKCONTEXT_CANDIDATE**:

```
CPXcallbackrejectcandidate(context, rcnt, nnz, const_term,
                           type_constraint, rmatbeg, rmatind,
                           rmatval);
```

Per suggerire a CPLEX la soluzione da cui proseguire nella computazione dev'essere utilizzata la funzione:

- env:** puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV
- ncores:** puntatore alla variabile in cui viene scritto il numero di core
- env:** puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV
- cbdata:** puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback
- wherefrom:** contiene dove è stata invocata la callback durante l'ottimizzazione
- cbhandle:** puntatore a dati privati dell'utente
- useraction_p:** specifica le azioni da eseguire al termine della callback:
 - CPX_CALLBACK_DEFAULT: usa il nodo di CPLEX selezionato
 - CPX_CALLBACK_FAIL: esci dell'ottimizzazione
 - CPX_CALLBACK_SET: usa il nodo selezionato come definito nel valore di ritorno

```
CPXcallbackpostheursoln ( context , cnt , ind , val , obj , strat );
```

CPLEX utilizzerà la soluzione proposta dall'utente solo nel caso in cui questa abbia costo inferiore all'incumbent.

B.2.7 Algoritmi Euristici

Per poter impostare una variabile $x_{i,j}$ ad un valore fissato è necessario rendere i suoi lower e upper bound alla quantità voluta. Per cambiare questi parametri viene utilizzata la seguente funzione:

```
CPXchgbds( env , lp , num_bouds , indices , which_bound , values );
```

B.3 Parametri

Con le seguenti funzioni è possibile modificare i parametri di impostazione di CPLEX, altrimenti impostati ai valori di default. Nel caso in cui si tratti di parametri di tipo INT è necessario invocare:

```
CPXsetintparam( env , numero_parametro , nuovo_valore );
```

mentre se di tipo DOUBLE:

```
CPXsetdblparam( env , numero_parametro , nuovo_valore );
```

In entrambe le funzioni:

B.4 Costanti utili

Di seguito sono riportate alcune macro utili di CPLEX, insieme ai loro corrispondenti valori:

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV
cbdata: puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback
wherefrom: contiene in che punto dell'ottimizzazione è stata invocata la callback
x_star: vettore in cui memorizzare le variabili
begin indice della prima variabile che si vuole venga restituita
end indice dell'ultima variabile che si vuole venga restituita

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV
cbdata: puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback
wherefrom: contiene in che punto dell'ottimizzazione è stata invocata la callback
which_info: macro che specifica l'informazione che si desidera conoscere
result: puntatore di tipo void in cui verrà memorizzata l'informazione richiesta

CPX_CALLBACK_INFO_MY_THREAD_NUM:	identifica il thread che ha eseguito la chiamata
CPX_CALLBACK_INFO_BEST_INTEGER:	valore della miglior soluzione intera

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV
cbdata: puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback
wherefrom: contiene in che punto dell'ottimizzazione è stata invocata la callback
objval: puntatore ad una variabile *double* in cui memorizzare il costo

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV
cbdata: puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback
wherefrom: contiene in che punto dell'ottimizzazione è stata invocata la callback
nnz: numero di coefficienti non nulli
const_term: valore del termine noto
type_constraint: tipologia del taglio da aggiungere, a scelta tra
 '*L*' per vincolo \leq
 '*E*' per vincolo $=$
 '*G*' per vincolo \geq
indices: vettore contenente gli indici dei coefficienti del taglio
values: vettore contenente i coefficienti delle variabili nel

	taglio
purgeable:	intero che specifica in che modo CPLEX deve trattare il taglio, consigliato 0
env:	puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV
cbdata:	puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback
wherefrom:	contiene in che punto dell'ottimizzazione è stata invocata la callback
nnz:	numero di coefficienti non nulli
const_term:	valore del termine noto
type_constraint:	tipologia del taglio da aggiungere, a scelta tra 'L' per vincolo \leq 'E' per vincolo $=$ 'G' per vincolo \geq
indices:	vettore contenente gli indici dei coefficienti del taglio
values:	vettore contenente i coefficienti delle variabili nel taglio
env:	puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV
heuristiccallback:	puntatore all'heuristic callback scritta dall'utente
cbhandle:	puntatore a dati privati dell'utente
env:	puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV
cbdata:	puntatore che contiene specifiche informazioni per la callback
wherefrom:	contiene in che punto dell'ottimizzazione è stata invocata la callback
cbhandle:	puntatore a dati privati dell'utente
objval_p:	puntatore ad una variabile che in ingresso contiene il valore della funzione obiettivo del problema e in uscita il valore della funzione obiettivo trovata nella funzione stessa, se esiste
x:	vettore che in ingresso contiene una soluzione valida per il problema e in uscita i valori della soluzione trovata nella funzione, se presente
checkfeas_p:	puntatore che specifica se CPLEX deve verificare la soluzione trovata oppure no
useraction_p:	puntatore ad un intero che specifica a CPLEX come proseguire la computazione al termine della <i>CPX_CALLBACK_DEFAULT</i> : nessuna soluzione trovata <i>CPX_CALLBACK_FAIL</i> : uscire dall'ottimizzazione <i>CPX_CALLBACK_SET</i> : usare la soluzione fornita dall'utente

env: puntatore di tipo CPXENVptr ad una struttura ENV
lp: puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP
contextmask: specifica in quali contesti deve essere invocata la callback,
 è possibile metterne in or anche più di uno e gestire poi
 i singoli casi dall'interno della funzione
callback: puntatore alla callback scritta dall'utente
userhandle: puntatore ad una struttura che contiene i dati da passare
 alla callback

context: puntatore ad una struttura di contesto della callback
contextid: intero che specifica il contesto in cui invocare la callback
cbhandle: argomento passato alla callback nell'installazione

context: contesto, come passato alla callback scritta dall'utente
x_star: vettore dove memorizzare i valori richiesti
begin: indice prima colonna richiesta
end: indice dell'ultima colonna richiesta
obi_p: buffer in cui memorizzare il costo della soluzione candidata,
 può essere NULL

context: contesto, come passato alla callback scritta
 dall'utente
rcnt: numero di vincoli che tagliano la soluzione
nnz: numero di coefficienti non nulli nel vincolo
const_term: vettore di termini noti
type_constraint: vettore con la tipologia dei vincoli specificati
rmatbeg: vettore di indici che specifica dove inizia ogni
 vincolo
rmatind: vettore di indici delle colonne con coefficienti non
 nulli
rmatval: coefficienti non nulli delle colonne specificate

- contex:** contesto, come passato alla callback scritta dall'utente
- cnt:** numero di elementi nei vettori ind e val
- ind:** vettore di indici non nulli dei valori della soluzione
- val:** vettore di valori non nulli della soluzione, possono essere NaN nel caso in cui la soluzione sia parziale
- obj:** costo della nuova soluzione
- strat:** strategia con cui CPLEX deve completare la nuova soluzione,, nel caso sia parziale, scelta tra
CPXCALLBACKSOLUTION_NOCHECK affinché CPLEX non controlli l'attuabilità della soluzione (che deve essere completa)
CPXCALLBACKSOLUTION_CHECKFEAS affinché CPLEX controlli solamente se la soluzione è attuabile (la soluzione proposta deve essere completa)
CPXCALLBACKSOLUTION_PROPAGATE affinché CPLEX cerchi di completare la soluzione attraverso la propagazione del bound
CPXCALLBACKSOLUTION_SOLVE affinché CPLEX fissi le variabili specificate nella soluzione e cerchi di risolvere il risultante problema ridotto
- env:** puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV
- lp:** puntatore di tipo CPXLPptr alla struttura LP
- num_bound:** numero totale di bound da cambiare
- indices:** vettore con gli indice delle colonne corrispondenti alle variabili di cui cambiare il bound
- which_bound:** array di caratteri che specificano il bound da modificare, a scelta tra:
 'U' per upper bound
 'L' per lower bound
 'B' per entrambi
- values:** vettore con i nuovi valori
- env:** puntatore di tipo CPXENVptr alla struttura ENV di cui si vogliono cambiare i parametri
- numero_parametro:** intero corrispondente al parametro da modificare (vedi Tabella B.1)
- nuovo_valore:** nuovo valore (rispettivamente intero o double) del parametro

CPX_PARAM_EPGAP	tolleranza dell'intervallo tra la migliore funzione obiettivo intera e la funzione obiettivo del miglior nodo rimanente.
CPX_PARAM_NODELIM	massimo numero di nodi da risolvere prima che l'algoritmo termini senza aver aggiunto l'ottimalità (0 impone di fermarsi alla radice).
CPX_PARAM_POPULATELIM	limita il numero di soluzioni MIP generate per il pool di soluzioni durante ogni chiamata alla procedura populate.
CPX_PARAM_SCRIND	visione o meno dei messaggi di log di CPLEX
CPX_PARAM_MIPCBREDLP	permette, dalla callback chiamata, di accedere al modello originale del problema e non a quello ridotto .
CPX_PARAM_THREADS	imposta il numero massimo di thread utilizzabili.
CPX_PARAM_RINSHEUR	imposta la frequenza (ogni quanti nodi) con cui deve essere invocato da CPLEX l'algoritmo euristico Rins.
CPX_PARAM_POLISHTIME	imposta quanto tempo in secondi deve dedicare CPLEX a fare il polish della soluzione.

Tabella B.1: Parametri.

CPX_ON	1 valore da assegnare ad alcuni parametri per abilitarli
CPX_OFF	0 valore da assegnare ad alcuni parametri per disabilitarli
CPX_INFBOUND	$+\infty$ massimo valore intero utilizzabile in CPLEX

Appendice C

Gnuplot

Una volta ottenuta la soluzione del problema di ottimizzazione, viene disegnato il grafo per facilitare all'utente la comprensione della sua correttezza. Per fare ciò viene utilizzato Gnuplot, un programma di tipo command-driven.

Per poterlo utilizzare all'interno del proprio programma esistono due metodi:

- Collegare la libreria ed invocare le sue funzioni all'interno del nostro programma
- Collegare l'eseguibile interattivo al proprio programma. In questo caso i comandi devono essere passati all'eseguibile attraverso un file di testo e l'utilizzo di un pipe.

In questa trattazione è stato scelto il secondo metodo. All'interno del file è possibile specificare a Gnuplot le caratteristiche grafiche che deve aver il grafo. Di seguito viene riportato un esempio di tale file.

```
1 set style line 1 \
2   linecolor rgb '#0000ff' \
3   linetype 1 linewidth 1 \
4   pointtype 7 pointsize 0.5
5
6 plot 'solution.dat' with linespoints linestyle 1 title "Solution"
7   ,'' using 1:2:(sprintf("%d", $3)) notitle with labels center
8   offset 1
9
10 set term png
11 set output "solution.png"
12 replot
```

Listing C.1: style.txt

Nell'esempio sopra riportato, nella prima parte viene definito lo stile, il colore delle linee e la tipologia di punti, che verranno in seguito visualizzati all'interno del grafico prodotto.

In seguito viene effettuato il plot del grafo in una finestra, utilizzando il primo e secondo valore di ciascuna riga del file **solution.dat** come coordinate mentre il terzo valore viene utilizzato come etichetta.

Il file **solution.dat** contiene le informazioni relative alla soluzione del grafico in cui ciascuna riga ha la seguente forma:

coordinata_x	coordinata_y	posizione_in_tour
--------------	--------------	-------------------

coordinata_x rappresenta la coordinata x del nodo;

posizione_in_tour rappresenta la coordinata y del nodo;

posizione_in_tour rappresenta l'ordine del nodo all'interno del tour, assunto come nodo di origine il nodo 1.

Il grafico viene generato dal comando **plot**, leggendo tutte le righe non vuote e disegnando un punto nella posizione (**coordinata_x,coordinata_y**) del grafico 2D. In seguito viene tracciata una linea solo tra coppie di punti, legati a righe consecutive non vuote all'interno di **solution.dat**.

Attraverso le istruzioni riportate nelle righe 10-12 di **style.txt**, viene invece salvato il grafico appena generato nell'immagine **solution.png**.

Di seguito vengono riportate le varie fasi necessarie alla definizione di un pipe e al passaggio di questo al programma GNUpot:

- **Definizione del pipe**

```
1 FILE* pipe = _popen(GNUPLOT_EXE, "w");
```

dove **GNUPLOT_EXE** è una stringa composta dal percorso completo dell'eseguibile di GNUpot, seguita dall'argomento **-persistent** (es. *"D:/Programs/GNUpot/bin/gnuplot -persistent"*).

- **Passaggio delle istruzioni a GNUpot**

```
2 f = fopen("style.txt", "r");
3
4 char line[180];
5 while (fgets(line, 180, f) != NULL)
6 {
7     fprintf(pipe, "%s ", line);
8 }
9
10 fclose(f);
```

viene passata una riga alla volta, del file **style.txt**, a GNUpot mediante il pipe precedentemente creato.

- **Chiusura del pipe**

```
11 _pclose(pipe);
```


Appendice D

Performance profile in python

Il programma utilizzato per la creazione del performance profile dei diversi algoritmo è `perprof.py`[3]. Di seguito vengono riportati i principali argomenti da linea di comando che possono essere utilizzati:

-D delimiter	specifica che delimiter verrà usato come separatore tra le parole in una riga
-M value	imposta value come il massimo valore di ratio (asse x)
-S value	value rappresenta la quantità che viene sommata a ciascun tempo di esecuzione prima del confronto. Questo parametro è utile per non enfatizzare troppo le differenze di pochi ms tra gli algoritmi.
-L	stampa in scala logaritmica
-T value	nel file passato al programma, il TIME LIMIT=value
-P "title"	title è il titolo del plot
-X value	nome dell'asse x (default='Time Ratio')
-B	plot in bianco e nero

Di seguito viene riportato un esempio dell'esecuzione del programma, del suo input e del suo output:

- **comando**

```
python perprof.py -D , -T 3600 -S 2 -M 20 esempio.csv  
out.pdf -P "all_instances_shift_2_sec.s"
```

- **file di input con i dati**

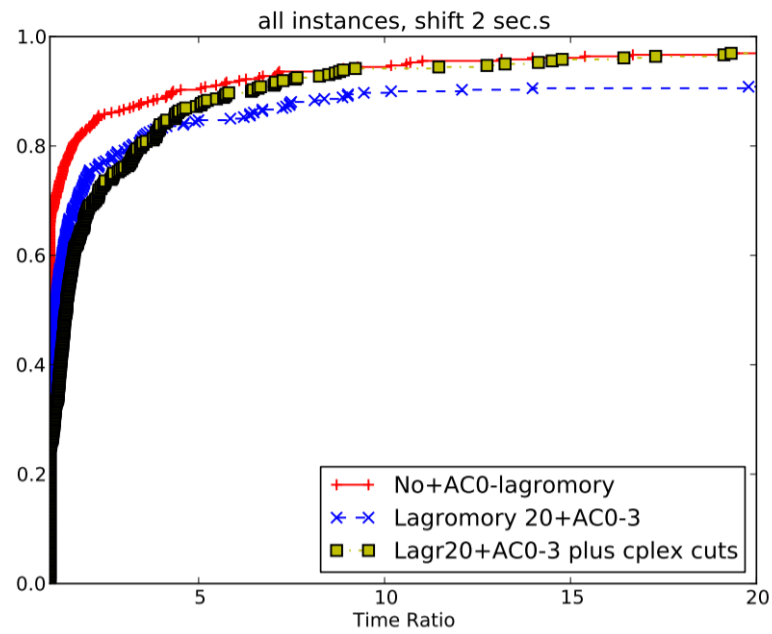
Viene riportato parte del contenuto di `esempio.csv`.

```
3, Alg1, Alg2, Alg3  
model_1.lp, 2.696693, 3.272468, 2.434147  
model_2.lp, 0.407689, 1.631921, 1.198957  
model_3.lp, 0.333669, 0.432553, 0.966638
```

La prima riga deve necessariamente contenere in ordine il numero di algoritmi analizzati e i loro nomi. Nelle righe seguenti viene riportato invece il nome del file lp e i tempi di esecuzione elencati secondo la sequenza di algoritmi specificata all'inizio. Ogni campo di ciascuna riga deve essere separato dal delimitatore specificato all'avvio del programma attraverso l'opzione -D.

- **immagine di output**

Il grafico viene restituito nel file out.pdf specificato da line di comando chiamando il programma.



Bibliografia

- [1] <http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde/index.html>.
- [2] <http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/data/ml/monalisa.html>.
- [3] E. D. Dolan and J.J. Moré. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91(2):201–213, 2002.
- [4] Matteo Fischetti. Alcuni problemi np-difficili. In *Lezioni di Ricerca Operativa*, pages 183–185. Kindle Direct Publishing, 2018.
- [5] P. Hansen, N. Mladenovic, J. Brimberg, J. A. Moreno Pérez, M. Gendreau, and J. Potvin. Variable neighborhood search. In *Handbook of Metaheuristics*, pages 61–86. Springer, 2010.
- [6] A. Lodi M. Fischetti. Local branching. *Ser. B*, 98:23–47, 2003.
- [7] Anup Dewanji Samrat Hore, Aditya Chatterjee. Improving variable neighborhood search to solve the traveling salesman problem. volume 98, pages 83–91. Elsevier, 2018.
- [8] E. Taillard, A. Hertz, and D. de Werra. A tutorial on tabu search.