Corso di
Architettura degli Elaboratori
a.a. 2022/2023

Codifica dell'informazione:
Numeri a Virgola Mobile

Numeri in virgola mobile

In un calcolo *astronomico* è necessario esprimere:

la massa dell'elettrone: 9×10^{-28} grammi

0.0000000000000000000000000009

la massa del sole: 2×10^{33} grammi

2000000000000000000000000000000000

Quante cifre occorre usare?

62 cifre: 34 alla sinistra della virgola e 28 a destra

0000000000000000000000000000000000.0000000000000000000000000009

2000000000000000000000000000000000.0000000000000000000000000000

Problema: anche se la gamma dei numeri necessari è molto grande, i numeri significativi sono pochi……

Soluzione: notazione scientifica

Numeri in virgola mobile

- La notazione scientifica è un tipo di rappresentazione in cui la “**gamma**” dei numeri esprimibili è indipendente dal numero delle cifre significative.

$$n = m \times 10^{e}$$

mantissa o frazione

esponente

- la versione informatica di questa notazione è la rappresentazione in **virgola mobile** o **floating point**

Numeri in virgola mobile

Esempi:

3,14	$= 0{,}314 \times 10^{1}$	$= 3{,}14 \times 10^{0}$	$= 314 \times 10^{-2}$
- 0,0000005	$= -5 \times 10^{-7}$	$= -0{,}5 \times 10^{-6}$	
127000000	$= 127 \times 10^{6}$	$= 1{,}27 \times 10^{8}$	

La rappresentazione non è unica; esistono convenzioni che permettono di ottenere una rappresentazione unica, ad es. imponendo che la prima cifra significativa della mantissa si trovi immediatamente a destra della virgola; queste forme si dicono ***rappresentazioni normalizzate***:

3,14	$= 0{,}314 \times 10^{1}$
- 0,0000005	$= -0{,}5 \times 10^{-6}$
127000000	$= 0{,}127 \times 10^{9}$

Numeri in virgola mobile

Pensando ad una utilizzazione per il calcolatore si possono stabilire ulteriori convenzioni:

- *fissare la lunghezza* della mantissa ad un valore costante
- *limitare l'esponente* ad opportuni intervalli
- utilizzare un *esponente* convenzionale che lo renda *sempre positivo* (notazione in eccesso)
- disporre i tre elementi: <segno, esponente, mantissa> in un ordine stabilito

segno	*esponente*	*mantissa*

Numeri in virgola mobile

Esempio

- lunghezza mantissa: 8 cifre
- valore effettivo esponente: da -50 a +49
- in notazione eccesso 50 l'esponente e' sempre positivo (0 - 99)

i numeri – 0,0000005 e 127000000 si scrivono nel seguente modo:

	segno	***esponente***	***mantissa***
$- 0{,}5 \times 10^{-6}$	-	44	50 000 000
$0{,}127 \times 10^{9}$	+	59	12 700 000

Numeri in virgola mobile

- La *gamma (range)* è determinata dal numero di cifre dell'esponente e la *precisione* dal numero di cifre della mantissa.

ATTENZIONE!!

- Con i numeri floating-point si può "simulare" il sistema dei numeri reali, pur con grandi differenze:

i numeri reali hanno la potenza del continuo

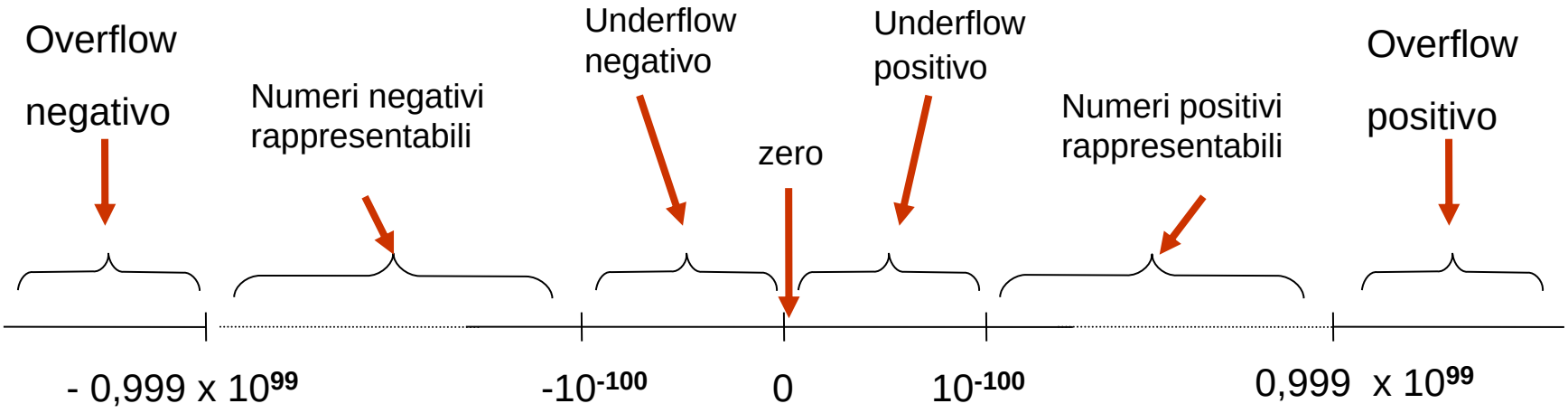
i numeri floating point sono in numero finito

Numeri in virgola mobile

- Per esempio, consideriamo rappresentazioni (espresse in base 10) con una ***mantissa di tre cifre*** con segno nella ***gamma*** $\mathbf{0{,}1 \leq |m| < 1}$ piu zero ed esponente di due cifre (con segno).
  - minimo numero negativo: $-0{,}999 \times 10^{99}$
  - massimo numero negativo: $-0{,}100 \times 10^{-99}$
  - minimo numero positivo: $+0{,}100 \times 10^{-99}$
  - massimo numero positivo: $+0{,}999 \times 10^{99}$

- Si rappresentano un numero finito di numeri negativi e numeri positivi, oltre allo zero, che ha tante rappresentazioni.

Numeri in virgola mobile



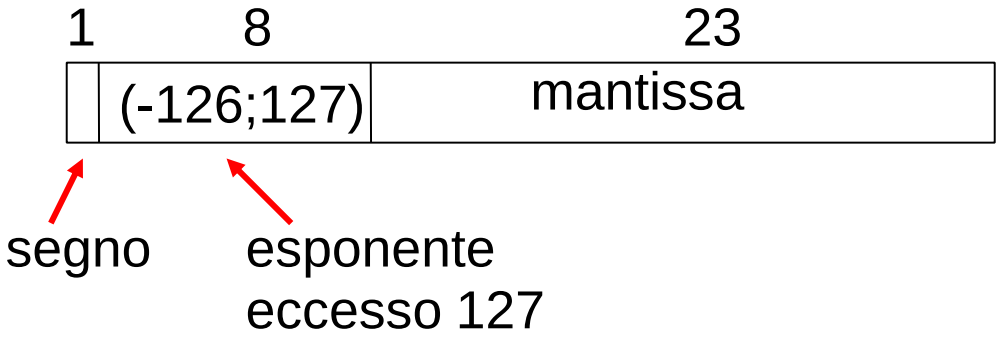
- “Spazio” tra numeri adiacenti non costante
- Arrotondamento
- Il numero di cifre della mantissa determina la densità dei punti, cioè la *precisione* delle approssimazioni
- Il numero di cifre dell’esponente determina la *dimensione degli intervalli* dei numeri rappresentabili

Standard IEEE 754

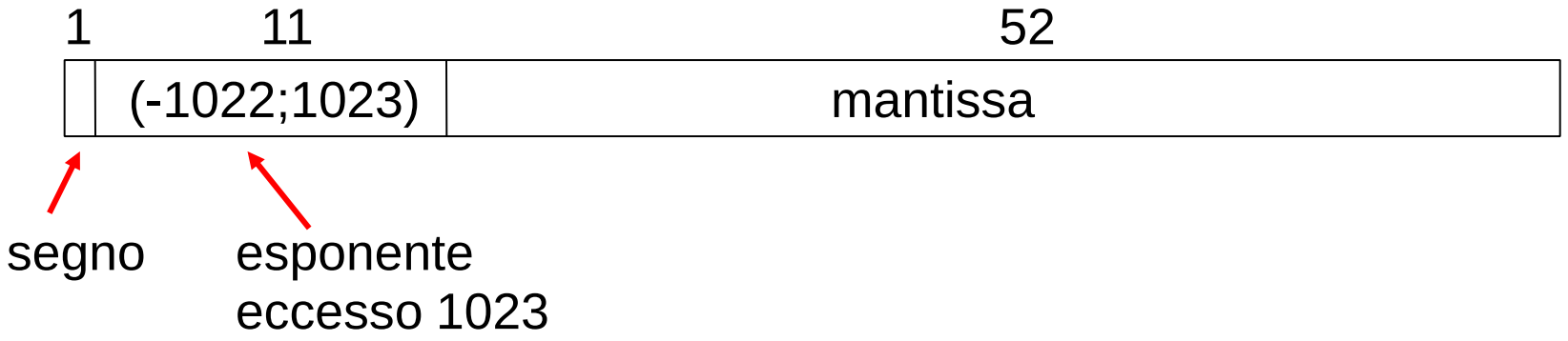
- Ogni produttore aveva un suo formato floating-point
- Fine anni '70 la **IEEE** costituisce un comitato al fine di *standardizzare* l'aritmetica floating-point
- Diversi Formati:
  «half precision» (16 bit), *«single precision»* (32 bit), *«double precision»* (64 bit), *«quad precision»* (128 bit)
- *Base 2* per mantissa, *notazione in eccesso* per esponente
- Mantissa *normalizzata*: la parte intera è sempre 1, questo bit è nascosto quindi la mantissa si compone della sola parte frazionaria

Standard IEEE 754

Semplice precisione: 32 bit

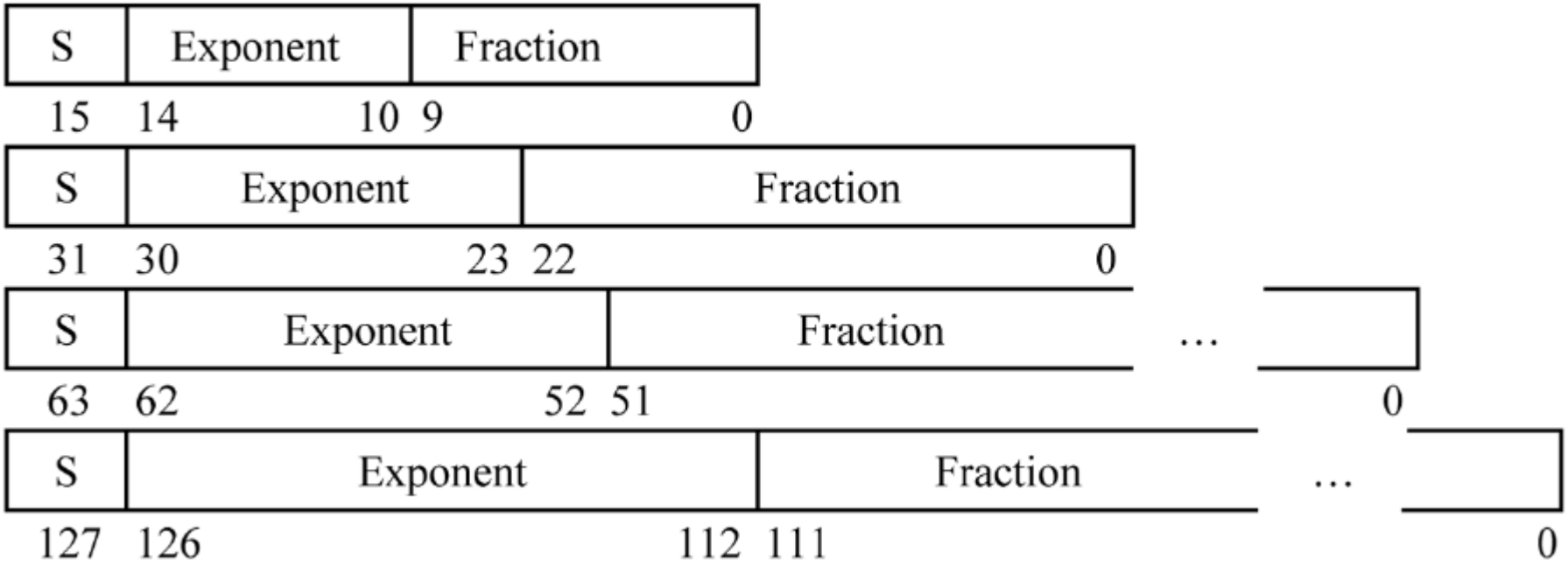


Doppia precisione: 64 bit

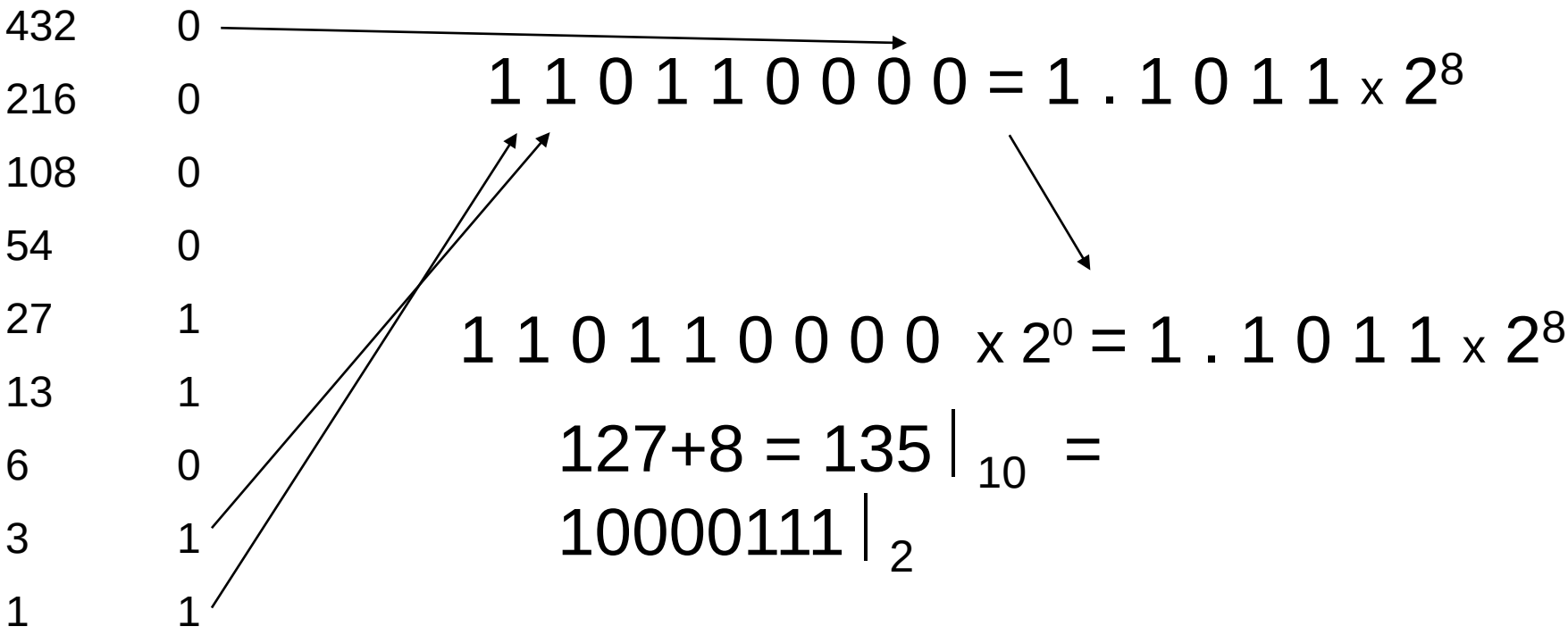


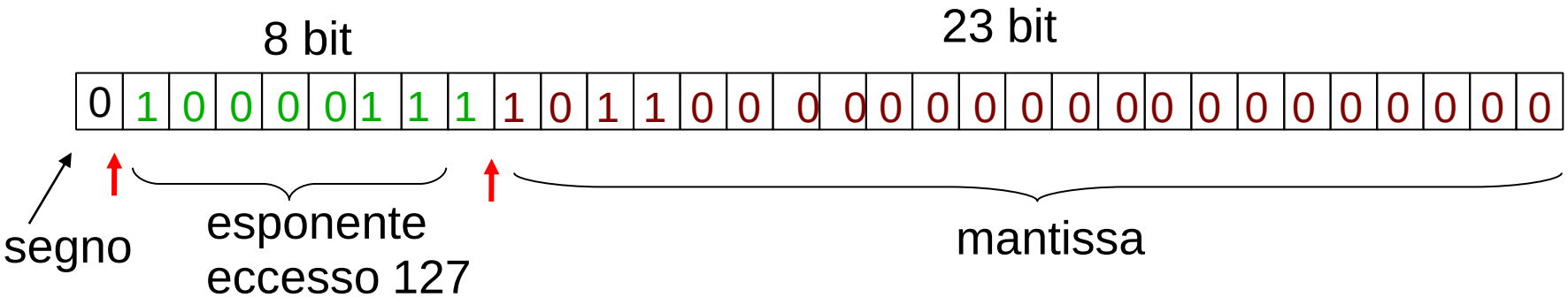
Standard IEEE 754

IEEE Half-, Single-, Double-, and Quad-Precision Formats:



Standard IEEE 754





Standard IEEE 754

- Numeri normalizzati e denormalizzati
- Formati speciali per identificare infinito e NaN (Not a Number, esempio se dividiamo infinito per infinito)

Minimo numero positivo rappresentabile: 0 00000001 00000000000000000000000

ovvero, l'esponente più piccolo e la mantissa più piccola

$1.00000000000000000000000 \times 2^{(1-127)} = 2^{-126}$ (10^{-38})

Massimo numero positivo rappresentabile: 0 11111110 11111111111111111111111

ovvero, l'esponente più grande e la mantissa più grande

$1.11111111111111111111111 \times 2^{(254-127)} \approx 2 \times 2^{127} = 2^{128}$ (10^{38})

	esp	*mantissa M*	*valore v*
Numero normalizzato	$0 < esp < 255$	qualunque	$v = (-1)^s(1,M)2^{esp-127}$
Numero denormalizzato	$esp = 0$	$M \neq 0$	$v = (-1)^s(0,M)2^{-126}$
Zero	$esp = 0$	$M = 0$	$v = (-1)^s 0$
Infinito	$esp = 255$	$M = 0$	$v = (-1)^s \infty$
NaN	$esp = 255$	$M \neq 0$	$v = NaN$

Virgola mobile nel RISC-V

Nome	Esempio	Commenti
32 registri virgola mobile	`f0, f1, f2, … f31`	I registri in virgola mobile del RISC-V possono contenere un numero in virgola mobile in precisione singola o in doppia precisione
2^{61} parole doppie di memoria	Memoria[0], Memoria[8], … , Memoria[18 446 744 073 709 551 608]	Si accede solo tramite le istruzioni di trasferimento dati. Il RISC-V utilizza l'indirizzamento al byte, per cui gli indirizzi sequenziali delle parole doppie differiscono di 8. La memoria mantiene le strutture dati, come i vettori, e il contenuto scaricato dai registri

Convenzioni di chiamata

`f0–7`	`ft0–7`	FP temporaries	Caller
`f8–9`	`fs0–1`	FP saved registers	Callee
`f10–11`	`fa0–1`	FP arguments/ret. values	Caller
`f12–17`	`fa2–7`	FP arguments	Caller
`f18–27`	`fs2–11`	FP saved registers	Callee
`f28–31`	`ft8–11`	FP temporaries	Caller

Virgola mobile nel RISC-V

Categoria	Istruzione	Esempio	Significato	Commenti
Aritmetica	Somma VM singola prec.	`fadd.s f0,f1,f2`	f0 = f1 + f2	somma VM (singola precisione)
	Sottrazione VM singola prec.	`fsub.s f0,f1,f2`	f0 = f1 – f2	sottraz VM (singola precisione)
	Moltiplicaz VM singola prec.	`fmul.s f0,f1,f2`	f0 = f1 × f2	moltiplicaz VM (singola precisione)
	Divisione VM singola prec.	`fdiv.s f0,f1,f2`	f0 = f1 / f2	divisione VM (singola precisione)
	Radice quadrata VM singola prec.	`fsqrt.s f0,f1`	f0 = $\sqrt{f1}$	Radice quadrata VM (singola precisione)
	Somma VM doppia prec.	`fadd.d f0,f1,f2`	f0 = f1 + f2	somma VM (doppia precisione)
	Sottrazione VM doppia prec.	`fsub.d f0,f1,f2`	f0 = f1 – f2	sottraz VM (doppia precisione)
	Moltiplicaz VM doppia prec.	`fmul.d f0,f1,f2`	f0 = f1 × f2	moltiplicaz VM (doppia precisione)
	Divisione VM doppia prec.	`fdiv.d f0,f1,f2`	f0 = f1 / f2	divisione VM (doppia precisione)
	Radice quadrata VM doppia prec.	`fsqrt.d f0,f1`	f0 = $\sqrt{f1}$	radice quadrata VM (doppia precisione)

Virgola mobile nel RISC-V

Categoria	Istruzione	Esempio	Significato	Commenti
Confronto	Uguaglianza VM singola prec.	`feq.s x5,f0,f1`	`x5 = 1 if (f0 == f1), else x5 = 0`	Confronto in VM (precisione singola)
	Test di minoranza VM singola prec.	`flt.s x5,f0,f1`	`x5 = 1 if (f0 < f1), else x5 = 0`	Confronto in VM (precisione singola)
	Test di minore uguale VM singola prec.	`fle.s x5,f0,f1`	`x5 = 1 if (f0 <= f1), else x5 = 0`	Confronto in VM (precisione singola)
	Uguaglianza VM doppia prec.	`feq.d x5,f0,f1`	`x5 = 1 if (f0 == f1), else x5 = 0`	Confronto in VM (doppia precisione)
	Test di minoranza VM doppia prec.	`flt.d x5,f0,f1`	`x5 = 1 if (f0 < f1), else x5 = 0`	Confronto in VM (doppia precisione)
	Test di minore uguale VM doppia prec.	`fle.d x5,f0,f1`	`x5 = 1 if (f0 <= f1), else x5 = 0`	Confronto in VM (doppia precisione)
Trasferimento dati	Lettura di una parola in VM	`flw f0,4(x5)`	`f0 = Memoria[x5+4]`	Leggi da memoria dato in singola precisione
	Lettura di una parola doppia in VM	`fld f0,8(x5)`	`f0 = Memoria[x5+8]`	Leggi da memoria dato in doppia precisione
	Scrittura di una parola in VM	`fsw f0,4(x5)`	`Memoria[x5+4] = f0`	Trasferisci in memoria dato in singola precisione
	Scrittura di una parola doppia in VM	`fsd f0,8(x5)`	`Memoria[x5+8] = f0`	Trasferisci in memoria dato in doppia precisione

Ricapitolando

- Una sequenza di N bit da sola non rappresenta nulla: si deve sempre specificare il contesto (la codifica) nella quale deve avvenire la sua interpretazione (decodifica)
- Per cui, cosa rappresenta la sequenza che segue?

111000001010111110101011

  - il carattere ௫ in codifica UTF-8 (è il 5 della lingua Tamil)
  - Il colore (224,239,171) in RGB
  - 375 µs di voce umana
  - il numero 14725035 se in binario puro (divisioni successive per 2)
  - il numero -2052181 in complemento a 2 su 24 bit
  - Il numero -6336427 in modulo e segno su 24 bit
  - …. continuate voi ……

Ricapitolando

- Un informatico deve saper:
  - Cos'è la notazione scientifica per un numero
  - Cos'è una rappresentazione normalizzata e perché se ne ha bisogno
  - Essere consapevole dei limiti di rappresentazione rispetto all'insieme dei numeri reali
  - Conoscere i vari formati dello standard IEEE 754
  - Saper codificare un numero reale in uno degli standard IEEE 754
  - Saper decodificare una sequenza di bit in uno degli standard IEEE 754 nel corrispondente numero reale

Qualche problema

- Problema 1: Ipotizziamo l'esistenza del formato IEEE 754 in precisione ***scarsa*** su 8 bit con 1 bit di segno, 4 bit di esponente e 3 bit di mantissa (nell'ordine)***.*** Esso condivide tutte le caratteristiche dei formati a precisione singola e doppia dello standard IEEE 754, ovvero, la codifica dei numeri normalizzati, denormalizzati, dello zero, dell'infinito, del NaN, con le stesse convenzioni di codifica. Dire:
  - In eccesso a quale valore sarebbe codificato l'esponente?
  - Che numero sarebbe rappresentato dalla sequenza 11011100?
- Problema 2: Descrivere la notazione standard IEEE 754 in semplice precisione, specificando i campi che la compongono e descrivendo i passi da eseguire per codificare il numero 13,75.
- Problema 3: Decodificare la sequenza
  1 10000011 11100000000000000000000
  assumendo che rappresenti un numero in formato IEEE 754 in precisione singola