



**Università di Pisa**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA  
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

# **Metodi Monte Carlo per il Modello di Ising**

Autori: Calandriello Gennaro, Paradiso Raffaele

---

**Anno Accademico 2021-2022**

# Indice

<b>1</b>	<b>Modello di Ising classico bidimensionale</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Metodi Monte Carlo</b>	<b>2</b>
2.1	Metropolis . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Analisi Numerica</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Osservabili fisiche</b>	<b>8</b>
4.1	Analisi delle Osservabili . . . . .	8
4.2	Analisi degli errori . . . . .	8
4.3	Magnetizzazione . . . . .	9
4.4	Suscettività . . . . .	10
4.5	Calore specifico . . . . .	11
4.6	Cumulante di Binder . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Finite Size Scaling - <i>FSS</i></b>	<b>14</b>
5.1	Ipotesi di scaling . . . . .	14
5.2	Grandezze riscalate . . . . .	15
5.3	Esponenti critici . . . . .	18

# 1 Modello di Ising classico bidimensionale

Il modello di Ising è un modello statistico utilizzato per descrivere il comportamento dei magneti ed è il modello più semplice a presentare una transizione di fase nel caso bidimensionale. Nel caso  $2D$  classico ogni spin  $s_i$  è localizzato su un sito reticolare  $i = (i_x, i_y)$  e può assumere i valori  $\pm 1$ . L'insieme di tutti gli spin assegnati ai siti reticolari definisce una configurazione del sistema. In presenza di  $N$  siti reticolari il numero delle configurazioni che il sistema può assumere è  $2^N$  e l'Hamiltoniana è data dalla seguente espressione:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - B \sum_i s_i \quad (1)$$

In (1)  $J$  è il termine di energia d'interazione tra primi vicini  $\langle ij \rangle$  e  $B$  il valore del campo esterno che nelle simulazioni effettuate viene posto uguale a zero.

I segni negativi nell'Hamiltoniana sono una convenzione e per  $J > 0$ ,  $J < 0$  si ha rispettivamente un comportamento *ferromagnetico* (la configurazione che minimizza l'energia è quella in cui tutti gli spin si dispongono parallelamente) e *antiferromagnetico*. Di seguito si assumerà  $J = 1$ .

Il sistema in esame presenta una transizione di fase (continua) ad una temperatura critica  $T_c$  detta temperatura di Curie. Assegnata una generica configurazione di spin  $\{s_i\}$  la probabilità che tale configurazione si verifichi ad una certa temperatura è data dalla distribuzione di Boltzmann:

$$P(\{s_i\}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(\{s_i\})} \quad \text{con} \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad e \quad Z = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta E(\{s_i\})} \quad (2)$$

con  $Z$  funzione di partizione del sistema.

## 2 Metodi Monte Carlo

I metodi Monte Carlo trovano impiego in una grande quantità di problematiche fisiche. Solitamente sono utilizzati per stimare quantità del tipo:

$$\langle f \rangle = \int Dq p(q) f(q) \quad (3)$$

dove  $q \equiv \{q^1, q^2, \dots, q^k\}$  è un insieme di variabili stocastiche distribuite secondo la distribuzione di probabilità  $Dq p(q) \equiv dq^1 \dots dq^k p(q^1, \dots, q^k)$  e l'obiettivo è calcolare il valor medio di una funzione  $F(q)$  delle variabili stocastiche.

Il metodo Monte Carlo risolve il problema nei seguenti step:

- viene generato un campione di  $N$  copie delle variabili stocastiche estratte secondo la distribuzione  $Dqp(q)$ ;
- vengono effettuate le misure sul set delle variabili estratte:  
 $f_1 = F(q_1), \dots, f_N = F(q_N)$  e se ne valuta la media campionaria:

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_i^N f_i \quad (4)$$

le variabili  $f_i$  e  $\bar{f}$  sono stocastiche poiché funzioni a loro volta di variabili stocastiche. Di  $\bar{f}$  se ne conosce la distribuzione nel limite di grandi  $N$  ed è data dal *Teorema del Limite Centrale*:

$$P(\bar{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}^2}} e^{-\frac{\bar{f}-\langle F \rangle}{2\tilde{\sigma}^2}} \quad (5)$$

dove  $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2/N$  e  $\sigma^2 = \langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2$ .

## 2.1 Metropolis

L'algoritmo utilizzato per il calcolo di tutte le grandezze di interesse, quali energia, magnetizzazione, calore specifico e suscettività, è l'algoritmo Monte Carlo **Metropolis** (Nicholas Metropolis *et al* 1953). Molti algoritmi Monte Carlo tra cui il Metropolis sono definiti a partire da processi di Markov che permettono all'algoritmo di partire da uno stato iniziale  $\mu$  e generare un nuovo stato  $\nu$  del sistema. La probabilità che ciò avvenga è detta probabilità di transizione  $P(\mu \rightarrow \nu)$ . Per un processo di Markov le probabilità di transizione devono soddisfare 2 condizioni: (1) non devono variare nel tempo, (2) devono dipendere solo dallo stato corrente del sistema e non dalla storia degli stati passati. Inoltre deve valere:

$$\sum_{\nu} P(\mu \rightarrow \nu) = 1 \quad (6)$$

In una simulazione Monte Carlo i processi di Markov vengono usati ripetitivamente per generare una Markov Chain di stati. Il processo di Markov è scelto in modo tale da campionare la distribuzione di Boltzmann dopo un tempo detto *tempo di termalizzazione*. Per poter raggiungere questo risultato inoltre, il processo di Markov deve essere ergodico e rispettare la condizione di bilancio dettagliato.

L'algoritmo Metropolis è un algoritmo di tipo locale, infatti le modifiche proposte riguardano un solo sito reticolare (*single spin-flip dynamics*) e il cambiamento verrà accettato o meno in accordo con la distribuzione da campionare. Data una qualsiasi configurazione iniziale, dopo un numero sufficiente di step dell'algoritmo (*tempo di termalizzazione*) si otterrà la configurazione  $\{s_i\}$  con probabilità data da  $P[\{s_i\}]$ . Data la configurazione iniziale  $\{s_i\}$  i passi dell'algoritmo sono i seguenti:

- viene selezionato un sito reticolare in modo casuale scegliendo una coppia di indici  $i_0 = (i_x, i_y)$ ;
- viene proposto un update del valore dello spin sul sito:

$$s_i^p = \begin{cases} -s_{i0} & \text{se } i = i_0 \\ s_i & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (7)$$

dove il termine  $s_i^p$  è il valore dello spin proposto dall'update;

- sul sito reticolare viene calcolato il rapporto tra i contributi di interazione con i primi vicini:

$$r = \frac{P[\{s_i^p\}]}{P[\{s_i\}]} = \exp [-\beta(E[\{s_i^p\}] - E[\{s_i\}])]$$

$$r = \exp \left[ -2\beta s_{i0} \left( \sum_{n.n.} s_i \right) \right] \quad (8)$$

Infine si estrae un numero random  $x$  distribuito uniformemente nell'intervallo  $[0, 1]$  e lo si confronta con il valore in equazione (8).

Se  $x < r$  l'algoritmo modifica il valore dello spin e la configurazione finale diventa  $s_i^p$ , altrimenti il sistema resta nella configurazione  $s_i$ .

### 3 Analisi Numerica

Scopo dell'elaborato è studiare il comportamento del modello di Ising nell'intorno della transizione di fase, che avviene quando  $\beta$  acquista il seguente valore, determinato dalla soluzione analitica esatta di Onsager:

$$\beta_c = \frac{1}{T_c} = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{2} \approx 0.44068... \quad (9)$$

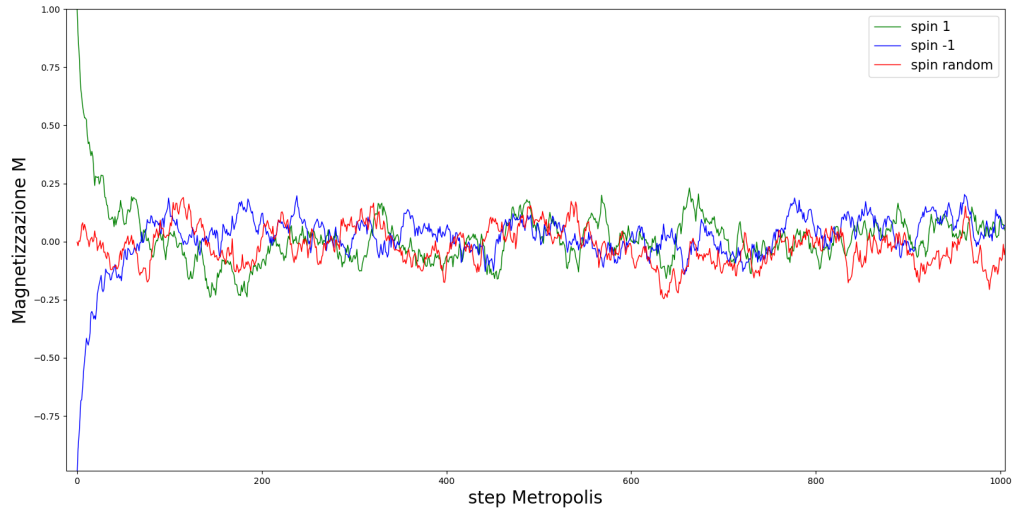
$T_c$  è detta *temperatura critica (o di Curie)*. In seguito alla transizione di fase si presenta una *rottura spontanea della simmetria*  $Z_2$ . In assenza di un campo magnetico esterno,  $B = 0$ , il sistema è invariante sotto simmetria  $Z_2$ . Per studiare il comportamento del sistema in prossimità del punto critico è necessario un **parametro d'ordine** che per il modello di Ising è la **magnetizzazione**  $M$ , definita come:

$$M(\sigma) = \sum_i \langle s_i \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z \quad (10)$$

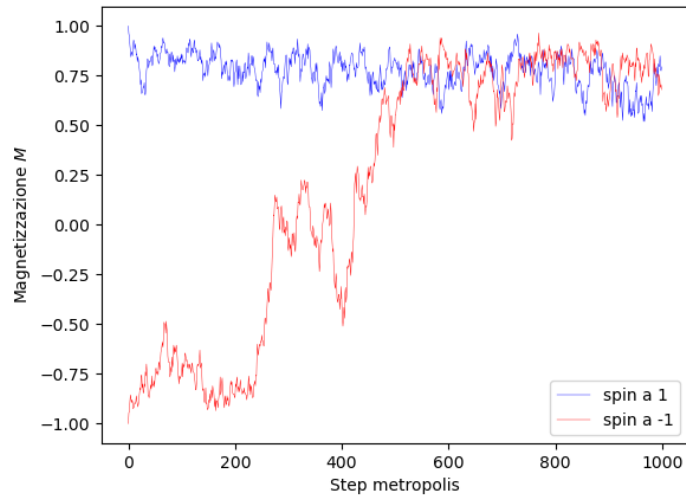
La rottura spontanea di simmetria si presenta quando compare una magnetizzazione spontanea, cioè quando  $\langle M \rangle \neq 0$ . Di seguito i grafici della magnetizzazione in funzione della storia Monte Carlo nelle due diverse fasi del sistema, per due valori di  $\beta$ , prima e dopo la transizione ferromagnetica, per un reticolo con  $L = 50$ .

La configurazione iniziale del sistema (i.e. i valori degli spin di partenza) è stata inizializzata in 3 modi differenti:

- tutti gli spin random;
- tutti gli spin con valore -1;
- tutti gli spin con valore +1.



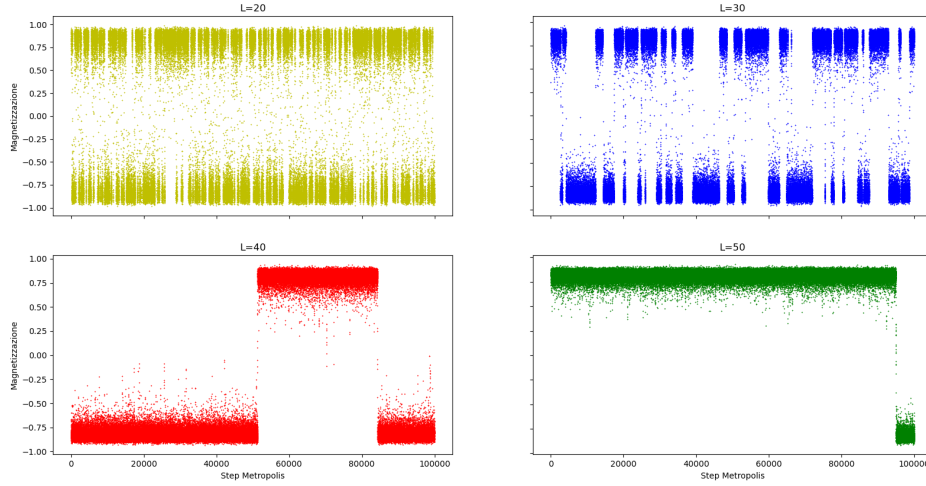
**Figura 1:** Termalizzazione per  $\beta = 0.35$  per le configurazioni di partenza. Il sistema termalizza dopo circa 300-350 steps metropolis.



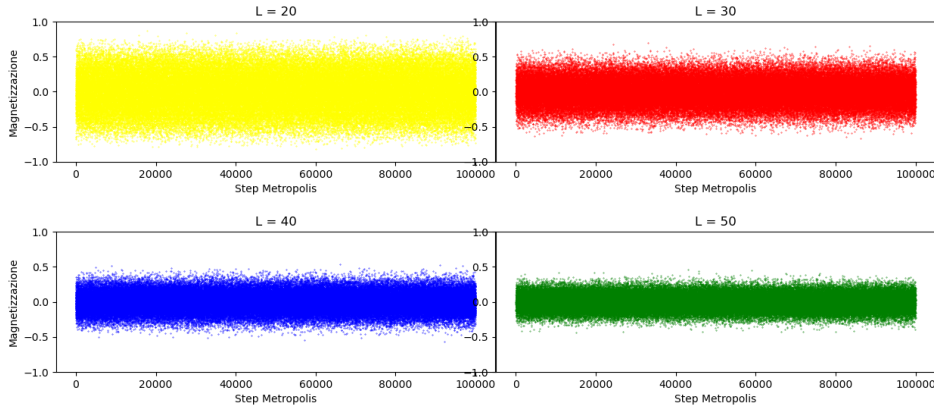
**Figura 2:** Termalizzazione per  $\beta = 0.45$  per le configurazioni di partenza. Il sistema termalizza dopo circa 600 steps metropolis.

Si nota che i tempi Monte Carlo per la termalizzazione del sistema aumentano avvicinandosi alla temperatura critica.

I grafici che seguono mostrano invece la magnetizzazione in funzione del tempo Monte Carlo e della grandezza del reticolo  $L = [20, 30, 40, 50]$ . Si nota che sopra un certo valore di  $\beta$  le variazioni di segno per la magnetizzazione sono sempre più rare e questo risulta essere vero anche per dimensioni maggiori del reticolo. Per valori di  $L$  crescenti il sistema, a parità di temperatura, inverte il valore della magnetizzazione sempre più raramente. Per  $L \rightarrow \infty$  il sistema si stabilizza su una certa configurazione.



**Figura 3:** Magnetizzazione dopo la transizione di fase con  $\beta = 0.46$



**Figura 4:** Magnetizzazione prima della transizione di fase con  $\beta = 0.38$



## 4 Osservabili fisiche

### 4.1 Analisi delle Osservabili

Le osservabili fisiche calcolate sono state magnetizzazione media, suscettività, calore specifico e cumulante di Binder, con e senza il rescaling tramite esponenti critici.

Tali grandezze generalmente sono funzionali di valori medi di energia o magnetizzazione. Ogni storia Monte Carlo contiene 100000 misure, prese ciascuna ogni 100 chiamate della funzione Metropolis. I valori di  $\beta$  considerati variano nell'intervallo  $[0.2, 0.8]$  a step di 0.05 e poiché nell'intervallo  $[0.3, 0.5]$  si è in prossimità del punto critico, per osservare in maniera più fine il sistema e come quest'ultimo si comporta è stata costruita una storia Monte Carlo ad intervalli di 0.01. I reticoli presi in esame sono stati  $L = 10, 20, 30, 40, 50$ . Lo stato iniziale di ogni reticolo è una configurazione random di spin (*partenza a caldo*). Come generatore di numeri random è stata utilizzata una libreria basata sull'algoritmo *Mersenne Twister*. Il periodo di ogni sequenza pseudo-random utilizzata è di  $2^{19937} - 1$ , con 19937 numero primo di Mersenne, da cui il nome.

### 4.2 Analisi degli errori

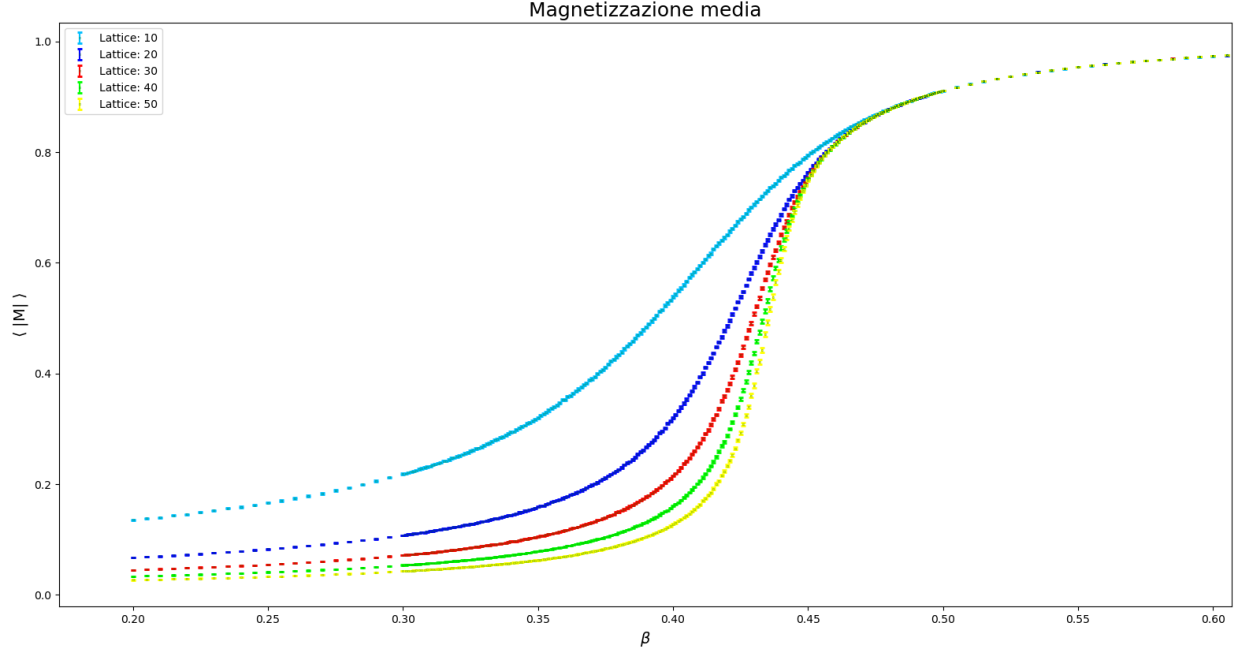
Dato che tutti i calcoli e/o misure sono stati effettuati a partire da funzionali di magnetizzazione ed energia e dato che quest'ultime sono state generate da algoritmi di Markov Chain Monte Carlo è naturale aspettarsi la presenza di autocorrelazioni nelle misure. Per poter stimare correttamente gli errori è stato utilizzato il *bootstrap con binning*, in parallelo per ottimizzare i tempi di esecuzione. Il bootstrap è una tecnica statistica di ricampionamento che consente di ottenere una buona stima dell'errore statistico dei dati attraverso vari ricampionamenti dell'array originale.

L'algoritmo implementato è il seguente:

- si sceglie un set di bin con dimensione differente con cui ricampionare l'array (nel caso in esame sono stati utilizzati 8 bins in cui il successivo è il doppio del precedente);
- ogni array della magnetizzazione viene ricampionato 100 volte per ciascun bin, calcolando ogni volta l'osservabile di interesse  $(\chi, \langle M \rangle, C)$ . Si ottiene così un array di osservabili di cui se ne calcola la deviazione standard;
- la procedura viene ripetuta per tutti i bin, scegliendo come errore il massimo degli errori ottenuti da ciascuno di essi. Questi step vengono reiterati per ogni valore di  $\beta$  nell'intervallo considerato;

### 4.3 Magnetizzazione

Nella Figura 5 si riporta il plot di  $\langle |M| \rangle$  per i vari valori di  $\beta$  e  $L$ .



**Figura 5:**  $\langle |M| \rangle$  in funzione di  $\beta$  per varie dimensioni del reticolo

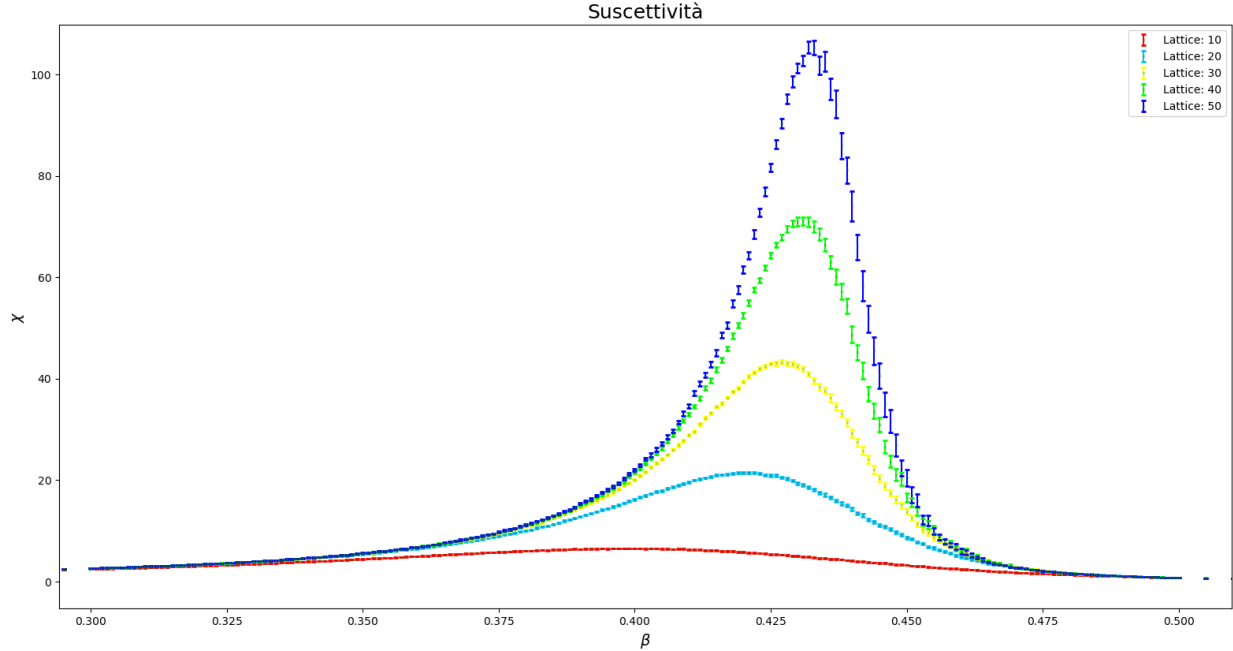
Si osserva immediatamente che l'andamento della magnetizzazione è quello atteso; per  $\beta < \beta_c$ ,  $\langle |M| \rangle$  diminuisce all'aumentare delle dimensioni del reticolo senza mai essere zero. Per  $\beta > \beta_c$  il sistema acquista una magnetizzazione diversa da zero fino ad arrivare al valore asintotico di 1, previsto dalla teoria per  $\beta \rightarrow \infty$ .

## 4.4 Suscettività

La suscettività è stata calcolata mediante la seguente formula:

$$\chi \propto V[\langle M^2 \rangle - \langle |M| \rangle^2] \quad (11)$$

che differisce dalla varianza per via della presenza del valore assoluto di  $M$ . Ciò è fondamentale per un'analisi numerica in quanto, in presenza di un reticolo infinito, sopra la transizione, non si avrebbero inversioni di segno nel valore di  $M$ , come si osserva dal semplice plot delle storie Monte Carlo in Figura 3. Queste inversioni di segno darebbero un valor medio di  $M$  nullo e una conseguente sovrastima della suscettività. Questo inconveniente si ovvia mediando  $M$  in valore assoluto, per reticolo finito.



**Figura 6:** Plot della  $\chi$  per vari reticoli a vari  $\beta$

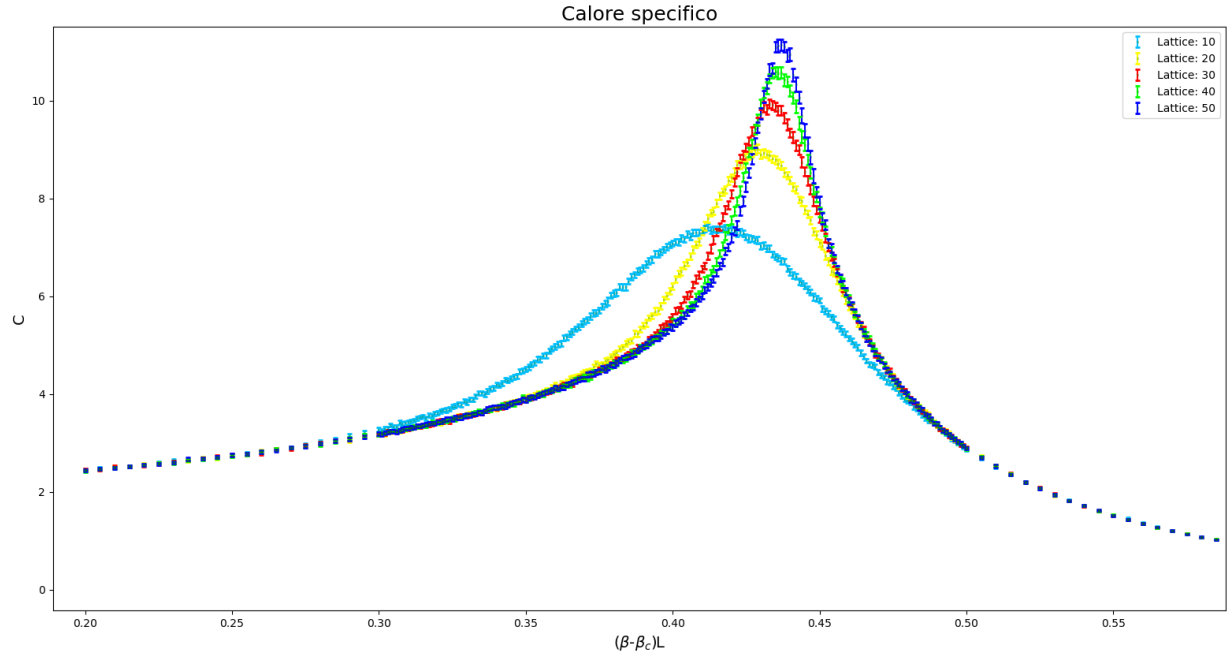
Si nota che il massimo della suscettività aumenta con le dimensioni del reticolo, questo poiché l'andamento teorico della  $\chi$  per  $L \rightarrow \infty$  è divergente in corrispondenza della transizione di fase.

## 4.5 Calore specifico

In figura seguente si riporta il plot del calore specifico in funzione di  $\beta$  per vari L, calcolato con la seguente formula:

$$C \propto V[\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2] \quad (12)$$

dove  $\epsilon$  indica la densità di energia



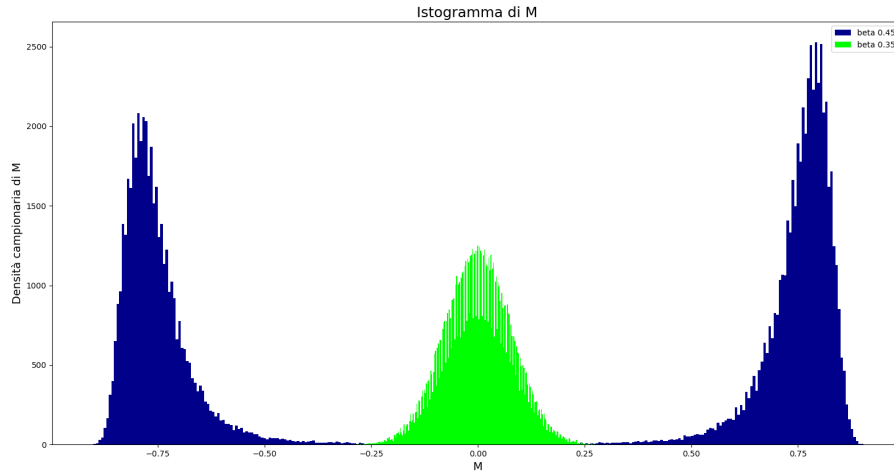
**Figura 7:** Plot di  $C$  vs  $\beta$  per vari  $L$  con rispettive barre di errore. Lo shift dei massimi svanisce se le grandezze vengono riscalate. Nel caso del calore specifico il rescaling consisterebbe nell'aggiunta di alcune correzioni, oltre a riscalare  $\beta$  come si vede nel seguito.

## 4.6 Cumulante di Binder

Per capire se si è nella fase rotta o meno a seguito di una transizione di fase del sistema è necessario studiare l'andamento della *distribuzione di probabilità*  $P(M)$ :

- Per  $\beta < \beta_c$ :  $P(M)$  è una Gaussiana centrata in  $M = 0$  con larghezza che decade come  $\frac{1}{L}$ ;
- Per  $\beta > \beta_c$ :  $P(M)$  è una distribuzione simmetrica che presenta due picchi. Nel limite di  $L \rightarrow \infty$  si ottiene:

$$P(M) = \frac{1}{2}(\delta(M - m) + \delta(M + m)) \quad \text{con} \quad m = \lim_{L \rightarrow \infty} \langle |M| \rangle$$



**Figura 8:** Istogramma non normalizzato dei valori di  $M$  per  $\beta = \{0.35, 0.45\}$  per  $L = 50$

Una grandezza utile per determinare se si è in presenza di una rottura spontanea di simmetria è il *cumulante di Binder*, un cumulante del quarto ordine di una certa grandezza, nel caso in esame  $M$ , definito come:

$$B = \frac{\langle M^4 \rangle}{\langle M^2 \rangle^2} \quad (13)$$

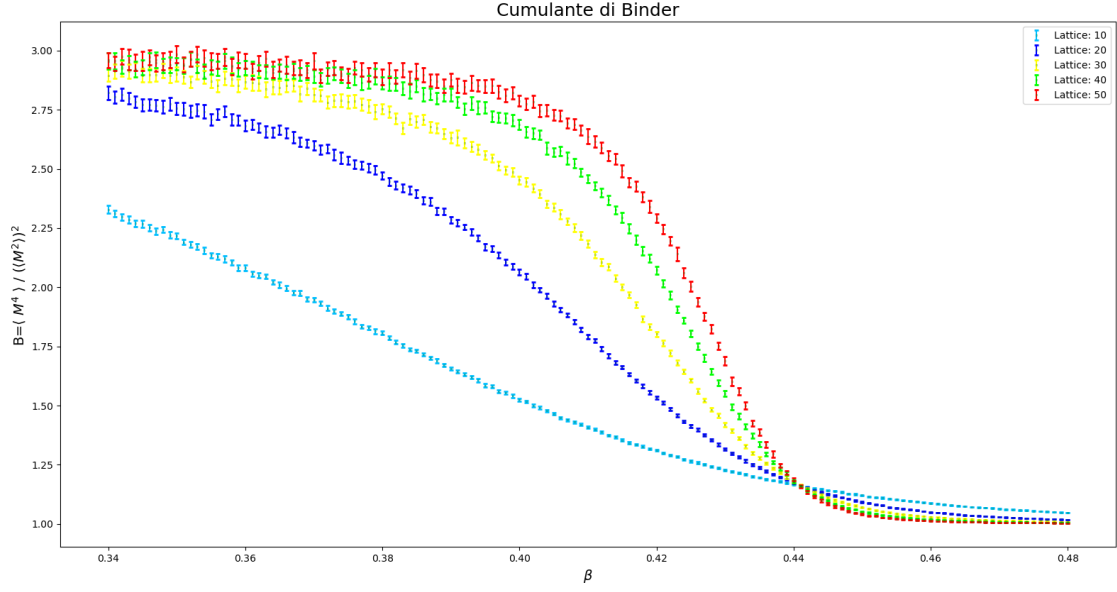
Ed assume i seguenti valori asintotici (nel limite di  $L \rightarrow \infty$ ):

$$B = \begin{cases} 1 & \text{se } T < T_c \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per  $\beta = \beta_c$  l'andamento atteso del cumulante di Binder è il seguente:

$$B \approx 1 + 1/L^2$$

per cui B deve essere monotono decrescente.



**Figura 9:** Cumulante di Binder per vari  $\beta$ . Il plot è stato realizzato utilizzando gli stessi array di magnetizzazione dei grafici precedenti. Si nota come in corrispondenza della transizione di fase, nel grafico a  $\beta = 0.441$ , il cumulante per varie dimensioni reticolari coincide.

## 5 Finite Size Scaling - *FSS*

### 5.1 Ipotesi di scaling

In tutti i grafici precedentemente osservati, nonostante le varie proprietà fisiche mostrino un comportamento crescente al crescere della dimensione reticolare del sistema, in corrispondenza del punto critico non compare in realtà nessuna divergenza delle osservabili. Questo accade poiché non può svilupparsi una lunghezza di correlazione infinita in un reticolo con dimensione  $L$  finita. Quando la lunghezza caratteristica che descrive la fisica del sistema diventa confrontabile con la grandezza del reticolo esplorato nella simulazione,  $\xi \leq L$ , si osserva un effetto di size finito. Nella seguente sezione viene effettuato il rescaling delle varie grandezze fisiche misurate nelle sezioni precedenti e viene applicata l'**Ipotesi di scaling**. Il sistema in corrispondenza della transizione di fase perde completamente memoria della struttura microscopica e nel limite termodinamico la lunghezza di correlazione diverge  $\xi \rightarrow \infty$ . In corrispondenza della transizione di fase, dunque, il sistema risulta *invariante di scala* e le grandezze fisiche in un intorno di  $\beta_c$  hanno un comportamento che è descritto dagli esponenti critici in funzione della temperatura ridotta  $t \equiv \frac{(T-T_c)}{T_c} \propto (\beta - \beta_c)$ . Un altro modo per descrivere il comportamento critico di queste quantità fisiche, è quello di esprimerle in funzione della lunghezza di correlazione, ottenendo:

$$\langle M \rangle \sim \xi^{-\beta/\nu} \quad \chi \sim \xi^{\gamma/\nu} \quad C \sim \xi^{\alpha/\nu}$$

Le varie grandezze vengono riscalare attraverso opportune funzioni dipendenti dagli esponenti critici del sistema che per il modello di Ising bidimensionale sono:

$$\nu = 1; \quad \beta = 1/8; \quad \gamma = 7/4; \quad \alpha = 0;$$

I valori sopra sono quelli teorici, ma è possibile comunque ottenerli, entro l'errore, attraverso dei fit con i dati misurati per le varie grandezze fisiche.

## 5.2 Grandezze riscalate

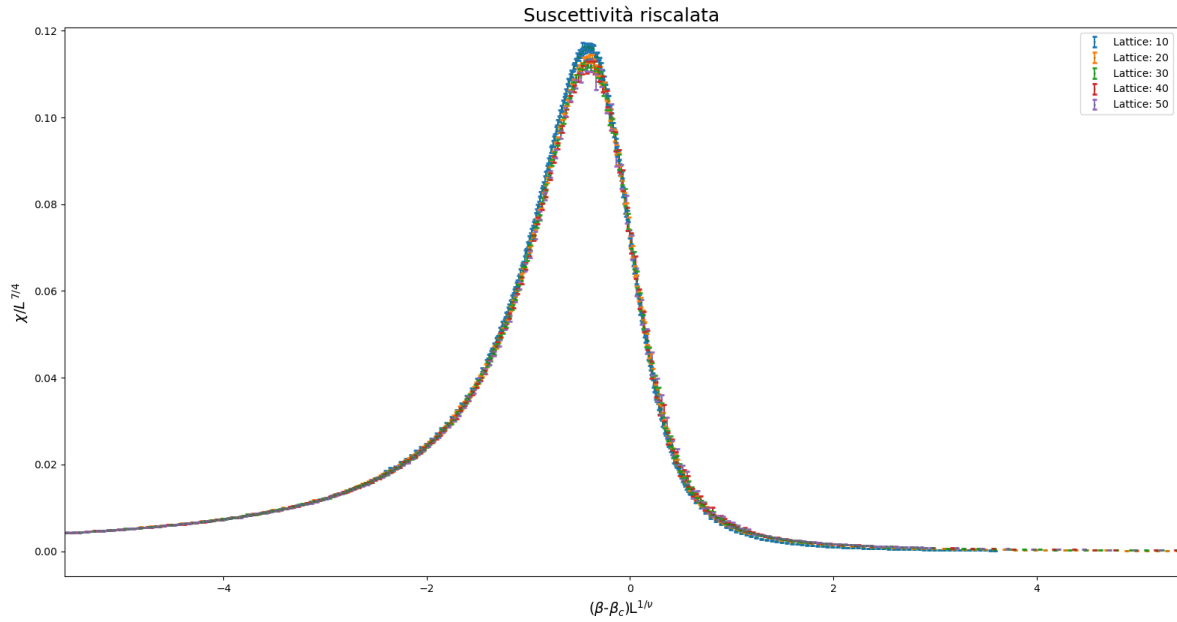
Si può definire un valore pseudo-critico per la temperatura  $\beta_{pc}(L)$  come quel valore in corrispondenza del quale la suscettività ha un massimo. Tale valore nel limite termodinamico tende al valore analitico  $\beta_c$ . Si può dimostrare che esiste una funzione  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale per cui:

$$\chi(\beta, L) = L^{\gamma/\nu} \Phi((\beta - \beta_c) L^{1/\nu}) \quad (14)$$

La funzione  $\Phi$  rappresenta l'andamento di  $\chi$  in corrispondenza dei picchi di altezza  $L^{\gamma/\nu}$ . In un intorno del punto critico il sistema ha come unica grandezza rilevante il rapporto  $L/\xi$ , per cui si può scrivere:

$$\chi(\beta, L) = L^{\gamma/\nu} \Phi(L/\xi) = L^{\gamma/\nu} \bar{\Phi}(t L^{1/\nu}) = L^{\gamma/\nu} \Phi((\beta - \beta_c) L^{1/\nu}) \quad (15)$$

dove vale  $\xi \propto t^{-\nu}$  e  $t \propto (\beta - \beta_c)$ . Di seguito si riporta un plot della suscettività magnetica riscalata:

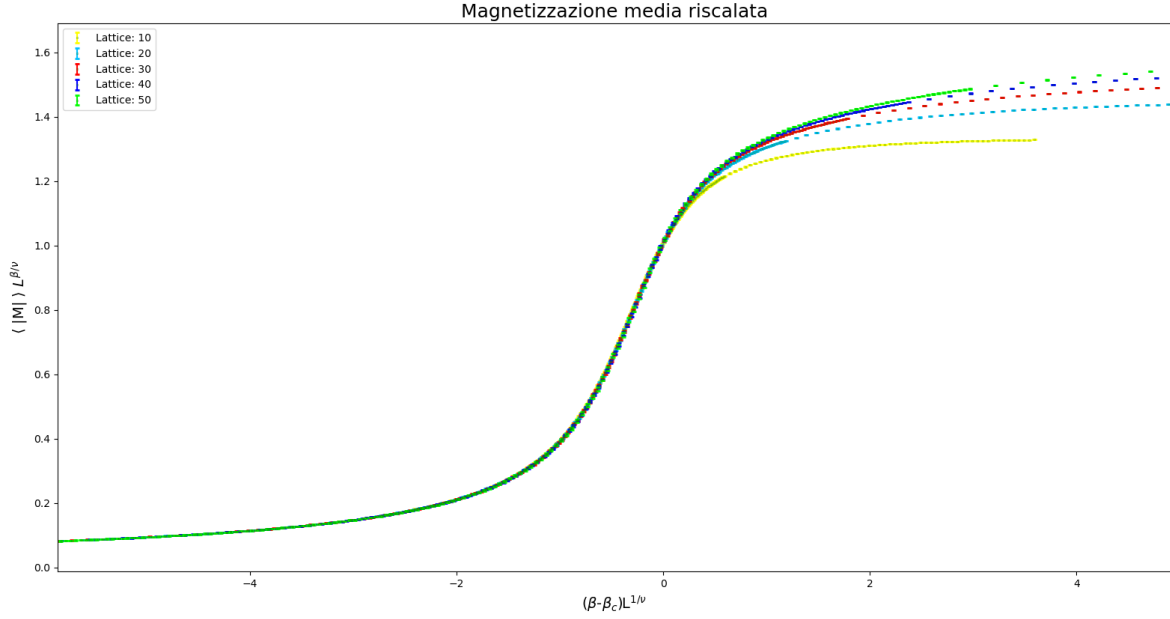


**Figura 10:** Suscettività riscalata



In figura è riportato il plot della magnetizzazione media riscalata per tutti i reticoli presi in esame. Il rescaling (con  $\nu = 1$  e  $\beta/\nu = 1/8$ ) assume la forma:

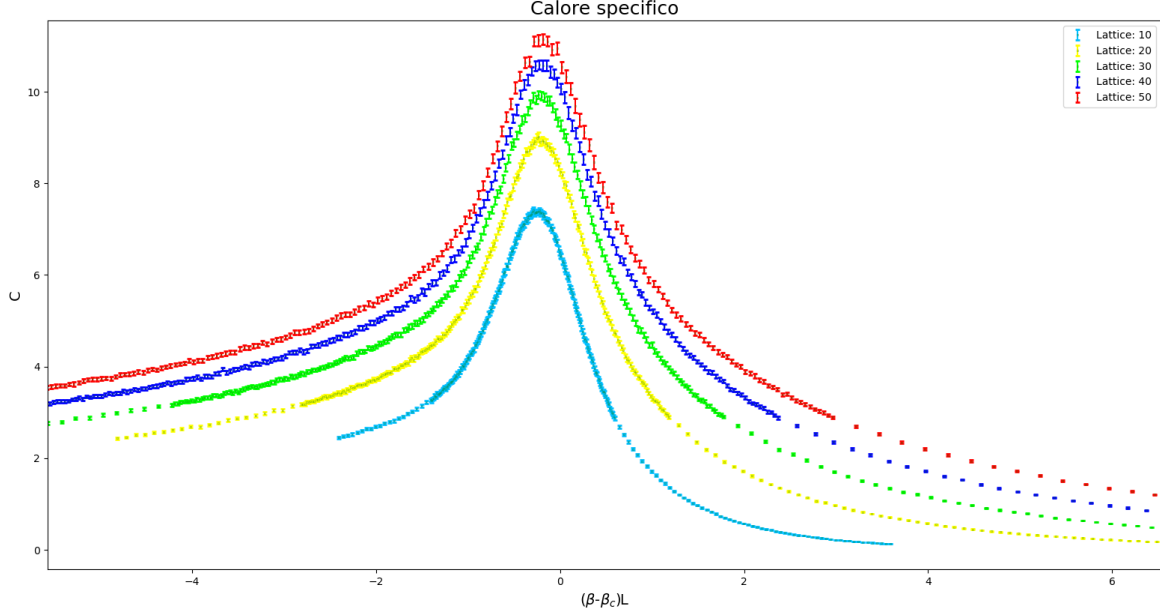
$$|M(\beta, L)| = L^{-\beta/\nu} \Phi\left((\beta - \beta_c)L^{1/\nu}\right)$$



**Figura 11:** Scaling della magnetizzazione

In figura è riportato il plot del calore specifico per tutti i reticoli presi in esame. Il rescaling (con  $\alpha = 0$  e  $\nu = 1$ ) assume la forma:

$$C(\beta, L) = L^{\alpha/\nu} \Phi((\beta - \beta_c)L^{1/\nu})$$



**Figura 12:** Scaling del calore specifico

Si nota che le curve, per vari valori della dimensione del reticolo, non tendono a sovrapporsi, come per la magnetizzazione e per la suscettività riscalate, bensì sembrano shiftate tra loro di un valore che non dipende da  $\beta$ . Inoltre il fatto che  $\alpha$  teorico sia 0 non vuol dire che il calore specifico rimanga costante in prossimità della transizione, ma che cresca al più logaritmicamente. Per ritrovare l'ipotesi di scaling occorrerebbe aggiungere una correzione logaritmica a ciascuna delle curve, diversa per ogni L, tale che esse si sovrappongano.

### 5.3 Esponenti critici

Per ritrovare i valori teorici attesi degli esponenti critici occorre fittare i dati ottenuti tramite opportune funzioni. Nel caso della suscettività, ad esempio, ciò che si può fare è un fit della funzione  $f(x) = a \cdot x^b$  dove  $(f(x), x) = (\chi_{max}, L)$  e  $\chi_{max}$  corrisponde al massimo della suscettività per ogni estensione reticolare  $L$ . In questo modo si ottiene la seguente stima per  $a$ ,  $b$ :

$$a = 0.116 \pm 0.003, \quad b = \gamma/\nu = 1.739 \pm 0.007$$

Il valore teorico del rapporto  $\gamma/\nu$  è di  $7/4 = 1.75$  per cui il risultato è in perfetto accordo entro l'errore. Si noti che, fissato  $L$ , il massimo della suscettività si ritrova per un certo  $\tilde{x} = (\beta_{pc}(L) - \beta_c)L^{1/\nu}$ , dove il  $\beta_{pc}$  è il valore per cui si ha il picco di  $\chi$  per ciascun valore di  $L$ . Ricavare il valore dell'esponente  $\nu$  è immediato, invertendo l'equazione appena scritta:

$$\beta_{pc}(L) = \tilde{x}L^{-1/\nu} + \beta_c \quad (16)$$

dove  $\tilde{x}$  lo si può assumere come il valore massimo tra tutti i  $\beta_{pc}$ . Il fit restituisce un valore per  $\nu$  pari a:  $\nu = 1.010 \pm 0.004$ , in perfetto accordo con il valore teorico. Dal rapporto fittato precedentemente è immediato ricavare anche il valore di  $\gamma$ . Inoltre è possibile stimare l'esponente critico  $\beta$  conoscendo il comportamento critico della magnetizzazione intorno alla transizione di fase, cioè:

$$\langle |M| \rangle \sim \xi^{-\beta/\nu}$$

Per poter stimare il valore di  $\beta$  è necessario seguire una tecnica differente:

1. si considera una funzione che approssimi l'andamento della magnetizzazione (valida per ciascun valore di  $L$ ) del tipo:

$$f(x) = a + b \tanh(cx - d) \quad (17)$$

2. si effettua un fit con  $(f(x), x) = (|M|, \beta_t)$ ;
3. se ne calcola la derivata prima:  $f'(x) = bc(1 - \tanh^2(cx - d))$  e i punti di massimo corrisponderanno ai punti di flesso in cui la  $|M|$  cambia concavità;
4. si sostituiscono, per ciascun  $L$ , i valori di  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ritrovati dal fit al punto 2., con  $x = \beta_t$ ;

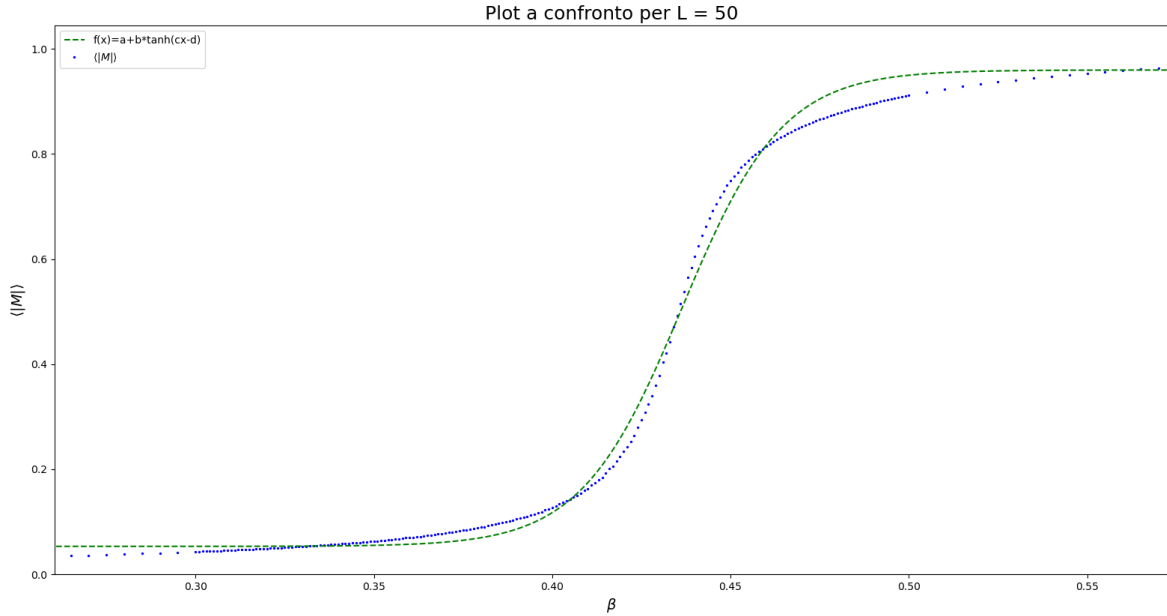
5. si fanno corrispondere i valori dei vari massimi della  $f'$  (ovvero i vari  $\beta_c$  dei punti di flesso di  $M$ ) ai corrispettivi valori della magnetizzazione, per ogni reticolo;
6. si fitta una funzione del tipo  $f(x) = x^{-b}$  dove  $b = \beta/\nu$  con  $(f(x), x) = (\tilde{M}, L)$  ( $\tilde{M}$  corrisponde all'array dei valori di  $M$  per cui si ha il picco nella  $f'$ );

Il valore teorico è  $\beta = 0.125 = 1/8$  mentre quello ottenuto con il fit è il seguente:

$$\beta = 0.18 \pm 0.06$$

Per completezza si riporta un plot di confronto per  $L = 50$  tra la magnetizzazione media e l'equazione (17) con i parametri ottenuti mediante il fit sopra descritto:

1.  $a = 0.506 \pm 0.002$
2.  $b = 0.453 \pm 0.002$
3.  $c = 35.38 \pm 0.66$
4.  $d = 15.44 \pm 0.29$



**Figura 13:** Confronto tra i dati sperimentali e l'equazione (17) per  $L = 50$

## Riferimenti bibliografici

- [1] M. E. J. Newman G. T.: Barkema Monte Carlo Methods In Statistical Physics.  
*Oxford University Press*, (1999)
- [2] M. D'Elia: Appunti lezioni