



**Università di Pisa**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

**Simulazione Numerica PDE:  
Fokker-Planck di un oscillatore di Van der Pol**

Autori: Calandriello Gennaro, Paradiso Raffaele

---

**Anno Accademico 2021-2022**

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione all'equazione di Fokker-Planck</b>	<b>2</b>
1.1	Generalità . . . . .	2
1.2	Sistema non lineare di Van der Pol . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Discretizzazione e metodi di risoluzione</b>	<b>4</b>
2.1	Discretizzazione . . . . .	4
2.2	Metodo esplicito . . . . .	5
2.3	Metodo implicito . . . . .	7
2.4	Metodo Crank-Nicolson . . . . .	8
2.5	Alternate Direction Implicit Method . . . . .	9
2.6	Caso di drift periodico . . . . .	11
2.7	Confronto con il ciclo limite . . . . .	12
2.8	Condizioni iniziali random . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Convergenza, consistenza e stabilità</b>	<b>14</b>
3.1	Errore e stabilità . . . . .	15
<b>A</b>	<b>Algoritmo di Thomas</b>	<b>18</b>

# 1 Introduzione all'equazione di Fokker-Planck

## 1.1 Generalità

L'equazione di Fokker-Planck (**FP**) è un'equazione differenziale alle derivate parziali che descrive l'evoluzione temporale della funzione di densità di probabilità (*PDF*) di un'osservabile (solitamente la posizione) associata ad un sistema dinamico eccitato da un processo random. Dato un processo di Itô in più dimensioni l'equazione differenziale stocastica (*SDE*) che descrive tale processo è:

$$d\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t, t)dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t, t)d\mathbf{W}_t \quad (1)$$

dove  $\mathbf{X}_t$  è un vettore random  $N$ -dimensionale,  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}_t, t)$  un vettore  $N$ -dimensionale,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}_t, t)$  è una matrice  $N \times M$  e  $\mathbf{W}_t$  è un processo di Wiener standard  $M$ -dimensionale. La densità di probabilità  $u(\mathbf{x}, t)$  per  $\mathbf{X}_t$  che soddisfa l'equazione di *FP* associata alla *SDE* sarà:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} [\mu_i(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t)] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [D_{ij}(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t)] \quad (2)$$

con  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)$  vettore di drift e  $\mathbf{D}$  tensore di diffusione con espressione:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}^\top = D_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \sigma_{ik}(\mathbf{x}, t) \sigma_{jk}(\mathbf{x}, t).$$

La condizione di normalizzazione per la PDF con condizioni iniziali  $u_0 = u(\mathbf{x}_0, 0)$  sarà:

$$\int u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (3)$$

## 1.2 Sistema non lineare di Van der Pol

L'oscillatore di Van der Pol è un oscillatore con un dumping non-lineare che evolve in accordo con la seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (4)$$

dove il parametro  $a$  indica l'intensità del dumping e determina la forma del ciclo limite. L'equazione sopra è riscrivibile come un sistema di *ODE* del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a(1-x^2)y - x \end{cases} \quad (5)$$

La Fokker-Planck di un oscillatore di *VdP* soggetto a un processo random è la seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(-g(y)u) + \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)u) + D\frac{\partial^2}{\partial y^2}u \quad (6)$$

L'equazione (6) è un'equazione differenziale alle derivate parziali *parabolica* dove sono presenti due funzioni di drift,  $g(y)$ ,  $f(x,y)$  e un termine di diffusione dato dal coefficiente (*diffusivo*  $D$ ) della derivata seconda. Nel caso in esame le funzioni per i termini di drift e diffusivi sono:

$$g(y) = y \quad f(x,y) = (x - a(1-x^2)y) \quad D = \text{costante} \quad (7)$$

Per il termine di drift  $f(x,y)$  il parametro  $a$  è stato valutato in due scenari differenti:

- *costante* :  $a = 0.1$ ;
- *variabile* :  $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$  con  $a_0 = 0.1$  e  $\omega = 0.1$ ;

Affinché lo schema abbia senso il coefficiente di diffusione deve essere  $D > 0$ .

## 2 Discretizzazione e metodi di risoluzione

Essendo la **FP** una *PDE* è possibile risolverla analiticamente solo in alcuni casi particolari. L'obiettivo del seguente lavoro è quello di studiare i risultati numerici ottenuti applicando alcuni schemi di discretizzazione ad un'equazione di FP in 2D per un oscillatore di Van Der Pol. Esistono diversi modi per discretizzare una PDE, qui si è fatto uso delle differenze finite ed in particolare sono stati utilizzati e/o valutati i metodi: *esplicito*, *implicito*, *Crank-Nicholson* e *ADI: Alternating-Direction Implicit*.

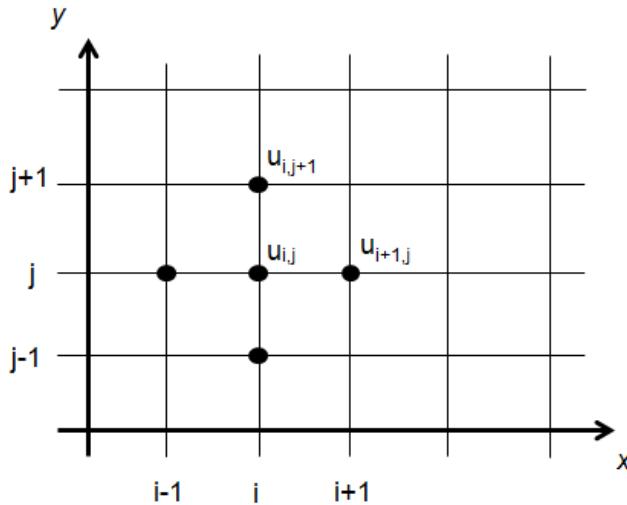
### 2.1 Discretizzazione

Prima di introdurre i metodi utilizzati è necessario definire il campo su cui verranno valutati i vari operatori discretizzati. Definita la regione  $R$  di interesse come la parte di piano tale per cui vale:

$$R = [-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi] \quad (8)$$

è necessario scegliere un ricoprimento o griglia per poter lavorare su  $R$ .

La griglia è definita scegliendo  $\Delta x$  e  $\Delta y$  (spesso è conveniente scegliere  $\Delta x = \Delta y$ ) o alternativamente  $N_x$  e  $N_y$  (numero di punti per  $x$  e  $y$ ). Per identificare i punti si usano coppie ordinate di indici  $(i, j)$  che fanno riferimento al punto  $(x, y) = (i\Delta x, j\Delta y)$  in  $R$ , con  $i = 0, \dots, N_x$  e  $j = 0, \dots, N_y$ . Una funzione  $v = v(x, y, t)$  approssimata sul punto griglia  $(i, j)$  e all' $n$ -esimo step temporale sarà indicata con  $u_{ij}^n$ .



## 2.2 Metodo esplicito

L'uso di un metodo esplicito, come il Forward Time Centered Space (*FTCS*), consente di risolvere direttamente l'equazione differenziale alle derivate parziali senza incorrere in costi computazionali elevati. Il valore  $u_{i,j}^{n+1}$  può essere calcolato direttamente (*esplicitamente*) da  $u_{i,j}^n$ . Chiaramente un'approssimazione così semplice nasconde problemi di stabilità. Inoltre l'accuratezza di un *FTCS* è  $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ . Di seguito la discretizzazione per l'equazione (6):

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = u_{i,j}^n \left[ -\frac{g(x + dx, y) - g(x - dx, y)}{2\Delta x} + \frac{f(x, y + dy) - f(x, y - dy)}{2\Delta y} \right] \\ + g(x, y) \left[ \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right] + f(x, y) \left[ \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] + D \left[ \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right]$$

che può essere riscritta come:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \beta_x \left[ g_{i+1,j}^n u_{i+1,j}^n - g_{i-1,j}^n u_{i-1,j}^n \right] + \beta_y \left[ f_{i,j+1}^n u_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n u_{i,j-1}^n \right] \\ + \alpha_y \left[ u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n \right] \quad (9)$$

Le funzioni  $g_{i,j}^n$  e  $f_{i,j}^n$  indicano le due funzioni di drift allo step temporale  $n$  e i coefficienti sono:

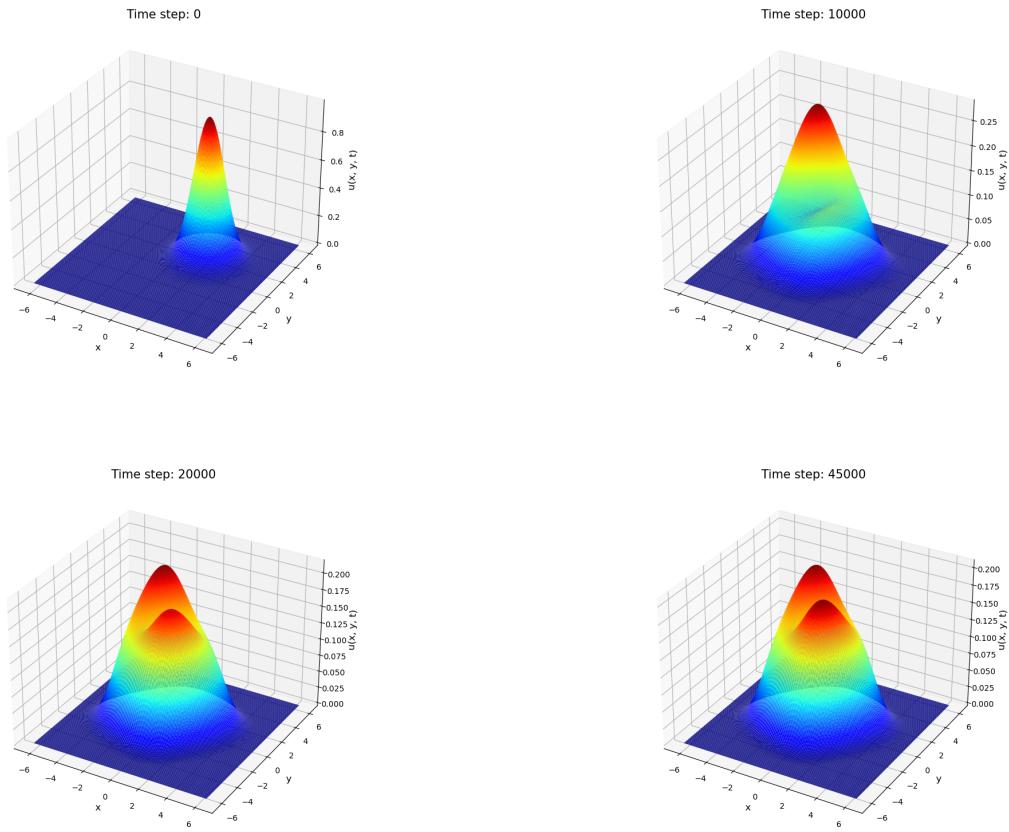
$$\alpha_y = \frac{D\Delta t}{\Delta y^2}; \quad \beta_x = \frac{\Delta t}{2\Delta x}; \quad \beta_y = \frac{\Delta t}{2\Delta y};$$

La condizione iniziale (*CI*) è una distribuzione Gaussiana 2D con  $L = 2\pi$  estensione spaziale del reticolo

$$u_0(x, y, 0) = e^{-((x-s\cdot L)^2 + (y-s\cdot L)^2)} \quad (10)$$

La costante  $s = 0.3$  corrisponde ad uno shift in entrambe le direzioni spaziali, introdotto nella *CI* per fare in modo che la Gaussiana non sia centrata in 0 e mostrare, in questo modo, come venga attratta verso il ciclo limite dell'oscillatore.

Di seguito sono riportati alcuni plot ottenuti dalla simulazione con metodo FTCS a vari step temporali.



**Figura 1:** Slice temporali della FP integrata con il metodo esplicito.  
L'estensione del reticolo è  $N = 200$ .

Fisicamente le scale caratteristiche della diffusione devono essere inferiori allo step spaziale. Ciò rappresenta un problema se siamo interessati a scale  $\lambda \gg \Delta x$ , poiché lo schema *FTCS* risulta essere inaccurato per lunghezze d'onda corte ( $k\Delta x \ll 1$ ) per via della condizione sulla stabilità dello schema stesso. Una possibile soluzione è usare un metodo implicito che smorza le piccole scale (*grandi k*) ma che risulta accurato come  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$  oppure utilizzare uno schema che preserva le piccole scale ma che integra le grandi scale con fluttuazioni spurie (*CN*).

## 2.3 Metodo implicito

Uno schema *fully implicit* è più stabile rispetto ad uno esplicito. Un esempio è il *BTCS* che nel caso in esame (6) prevede la seguente discretizzazione:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^n = & u_{i,j}^{n+1} + \beta_x \left[ g_{i+1,j}^{n+1} u_{i+1,j}^{n+1} - g_{i-1,j}^{n+1} u_{i-1,j}^{n+1} \right] \\ & - \beta_y \left[ f_{i,j+1}^{n+1} u_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1} u_{i,j-1}^{n+1} \right] \\ & - \alpha_y \left[ u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

E' chiaro, dunque, che per ottenere  $u$  allo step  $n$  è necessario risolvere un sistema di equazioni lineari dove a destra è presente  $u$  allo step temporale  $n+1$ .

Riscrivendo la discretizzazione per evidenziare i vari elementi di matrice si ottiene:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^n = & u_{i,j}^{n+1} (1 + 2\alpha_y) + u_{i+1,j}^{n+1} \beta_x g_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1} \beta_x g_{i-1,j}^{n+1} \\ & + u_{i,j+1}^{n+1} (-\beta_y f_{i,j+1}^{n+1} - \alpha_y) + u_{i,j-1}^{n+1} (\beta_y f_{i,j-1}^{n+1} - \alpha_y) \end{aligned} \quad (12)$$

Le matrici associate alle due variabili sono *tridiagonali*, per cui la loro inversione risulta semplice. Di seguito si riporta l'espressione matriciale dello schema:

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & \beta_x g_{i+1,j}^{n+1} & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_x g_{i-1,j}^{n+1} & 1 & \beta_x g_{i+1,j}^{n+1} & \dots & 0 \\ 0 & \beta_x g_{i-1,j}^{n+1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \end{bmatrix}_{N-1 \times N-1} \quad (13)$$

$$M_y = \begin{bmatrix} (1 + 2\alpha_y) & -\beta_y f_{j+1}^{n+1} - \alpha_y & \dots & \dots & 0 \\ \beta_y f_{j-1}^{n+1} - \alpha_y & (1 + 2\alpha_y) & -\beta_y f_{j+1}^{n+1} - \alpha_y & \dots & 0 \\ 0 & \beta_y f_{j-1}^{n+1} - \alpha_y & (1 + 2\alpha_y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & (1 + 2\alpha_y) & \dots \end{bmatrix}_{N-1 \times N-1} \quad (14)$$

Una volta definiti 2 array bidimensionali, essi vengono aggiornati iterativamente per le 2 variabili. Il metodo risulta incondizionatamente stabile. Il principale svantaggio per uno schema puramente implicito, oltre al fatto di dover risolvere  $N-1$  equazioni algebriche, con  $N$  numero di step spaziali in entrambe le dimensioni, è l'accuratezza,  $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ .

## 2.4 Metodo Crank-Nicolson

Lo schema Crank-Nicolson (*CN*) è un metodo alle differenze finite ottenuto facendo un *averaging* tra uno schema implicito ed uno esplicito. È uno schema implicito nel tempo con accuratezza pari a  $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$ , ed è incondizionatamente stabile. Ciononostante la soluzione approssimata può contenere oscillazioni spurious (smorzate) se il rapporto  $\frac{\Delta t D}{\Delta x^2}$  è molto grande (maggiore di 1/2 secondo l'analisi di stabilità di Von Neumann). Per questo motivo, quando sono necessari time steps più grandi o una risoluzione spaziale migliore, altri metodi sono preferibili anche se con un'accuratezza minore. Di seguito la discretizzazione di (6) attraverso lo schema  $\theta - Method$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = & \theta \left[ -\frac{g_{i+1,j}^{n+1} u_{i+1,j}^{n+1} - g_{i-1,j}^{n+1} u_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{f_{i,j+1}^{n+1} u_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1} u_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} + \right. \\ & D \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \Big] + (1-\theta) \left[ -\frac{g_{i+1,j}^n u_{i+1,j}^n - g_{i-1,j}^n u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \right. \\ & \left. \left. \frac{f_{i,j+1}^n u_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + D \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \right] \end{aligned} \quad (15)$$

dove lo schema dipende da valore di  $\theta$ :

- se  $\theta = 0 \rightarrow Explicit (FTCS)$ ;
- se  $\theta = 1/2 \rightarrow Crank-Nicolson (CN)$ ;
- se  $\theta = 1 \rightarrow Fully Implicit$ ;

per cui lo schema  $CN = \frac{1}{2}(Fully Implicit) + \frac{1}{2}(Explicit)$ .

Uno schema di *CN* in una dimensione restituisce matrici tridiagonali, la cui inversione risulta numericamente efficiente. In 2 o più dimensioni lo schema perde di efficienza dato che le matrici sono sparse e ciò rende laboriosa la risoluzione del sistema di equazioni algebriche associate. Si può ovviare a questo inconveniente utilizzando tecniche di *split operator*, come l'*ADI* descritto nel seguito.

## 2.5 Alternate Direction Implicit Method

L'*Alternate Direction Implicit Method*, o *ADI* è uno schema alle differenze finite in cui gli step in ogni direzione sono risolti separatamente, e in ciascuno step si costruisce una struttura implicita per una direzione spaziale ed esplicita per l'altra. Il maggior vantaggio di una tecnica di *split operator* come l'*ADI*, è che le matrici per la parte implicita in ciascuna direzione sono tridiagonali, per cui l'inversa può essere calcolata facilmente con l'algoritmo di Thomas, ad esempio. Di seguito si riportano i due steps necessari per discretizzare la **FP** oggetto di studio (6).

Come primo step si considera l'implicito su  $x$  e l'esplicito su  $y$ :

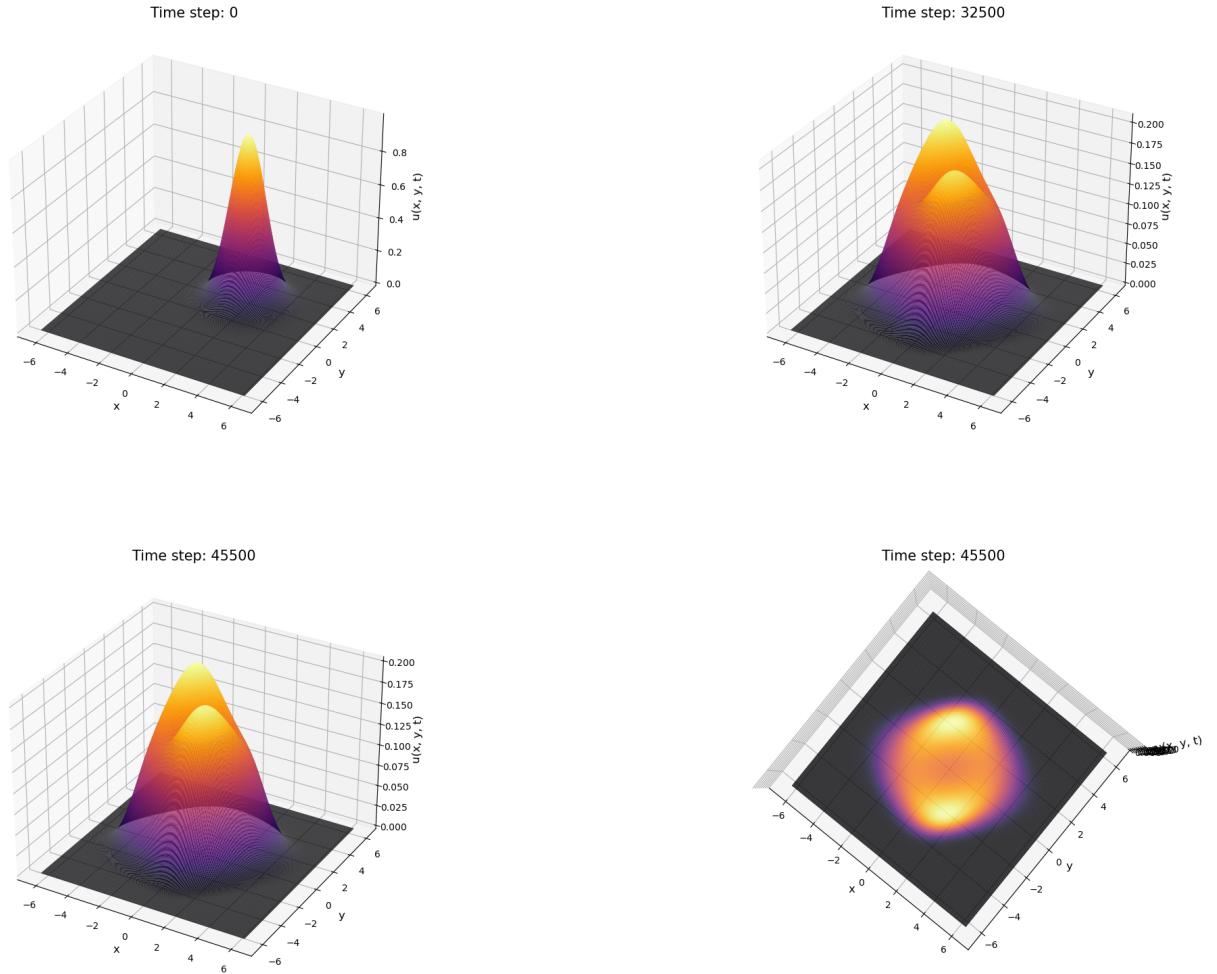
$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{\Delta t/2} &= -(g_{i+1,j}^{n+1/2} u_{i+1,j}^{n+1/2} - g_{i-1,j}^{n+1/2} u_{i-1,j}^{n+1/2}) \frac{1}{2\Delta x} + \\ &(f_{i,j+1}^n u_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n u_{i,j-1}^n) \frac{1}{2\Delta y} + D \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (16)$$

Dopo che l'espressione (16) è stata valutata si procede a far aggiornare l'array delle soluzioni attraverso lo step successivo,隐式 su  $y$  ed esplicito su  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} &= -(g_{i+1,j}^{n+1/2} u_{i+1,j}^{n+1/2} - g_{i-1,j}^{n+1/2} u_{i-1,j}^{n+1/2}) \frac{1}{2\Delta x} + \\ &(f_{i,j+1}^{n+1} u_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1} u_{i,j-1}^{n+1}) \frac{1}{2\Delta y} + D \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (17)$$

dove le funzioni di drift sono state definite in (7).

Di seguito si riportano alcuni snapshot dell’evoluzione della PDF a vari step temporali, integrata con il metodo appena descritto.



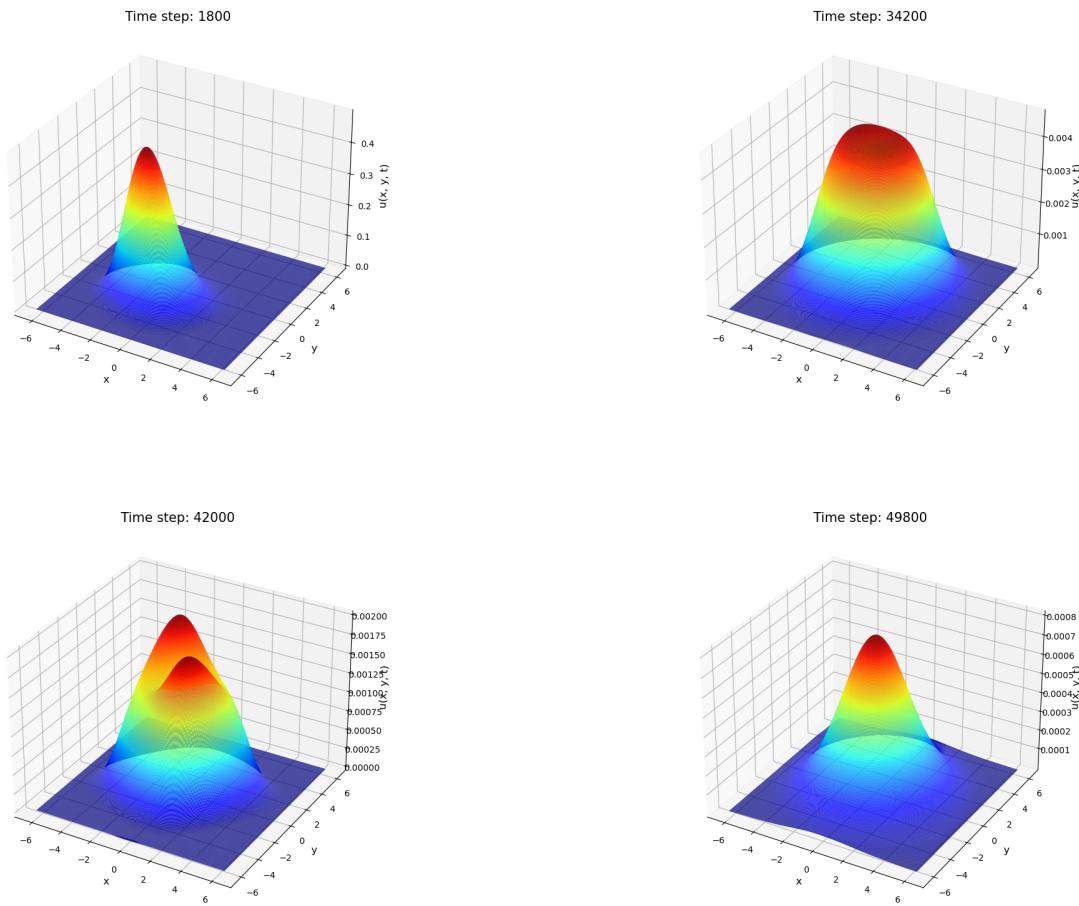
**Figura 2:** Alcune slice temporali della **FP** integrata con il metodo *ADI*. L’estensione del reticolo è  $N = 400$ . In questo caso la maggiore stabilità del metodo ha consentito di costruire una meshgrid più fitta e ottenere un risultato più preciso. Nell’ultima figura è riportato lo stesso grafico visto dall’alto per evidenziare il ciclo limite.

## 2.6 Caso di drift periodico

Una volta costruito lo schema *ADI* è stato possibile inserire una funzione periodica nel drift della funzione  $f(x, y, t)$ , ottenendo come risultato una *PDF* che si contrae ed espande sul ciclo limite con una certa frequenza  $\omega = 0.1$ . In particolare il drift periodico è stato introdotto nel parametro dell'attenuazione non lineare  $a$ :

$$f(x, y, t) = x - a_0 \cos(\omega t)y(1 - x^2) \quad \omega = 0.1 \quad a_0 = 0.1 \quad (18)$$

Nello schema di integrazione non cambia nulla.



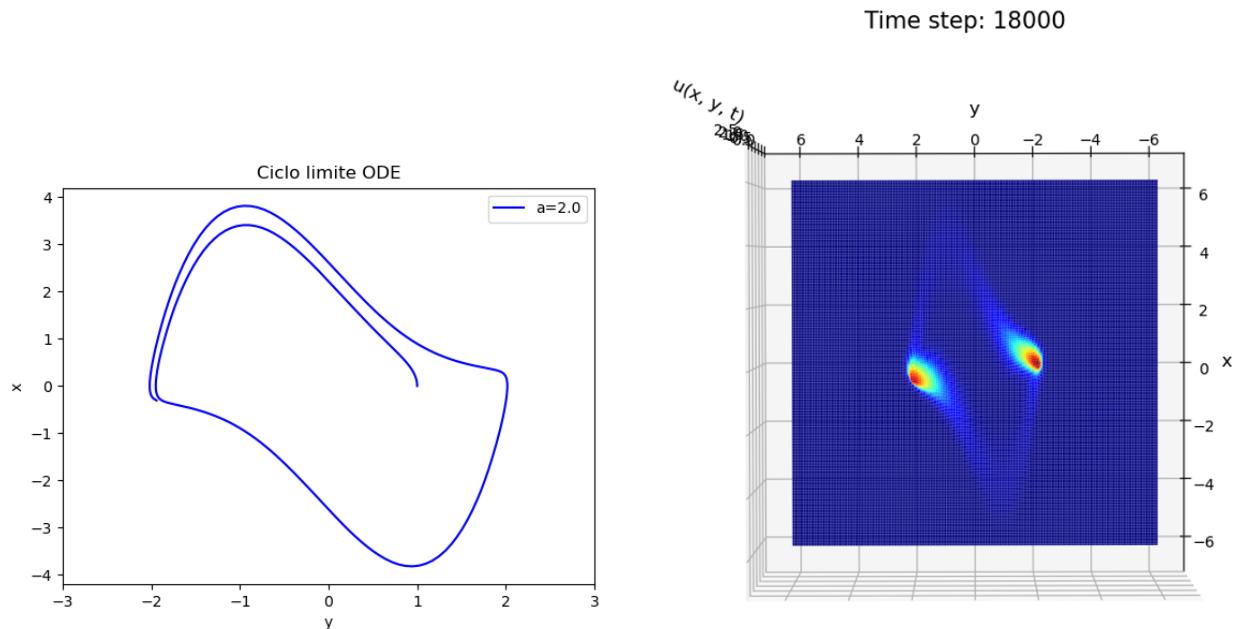
**Figura 3:** Alcune slices temporali della **FP** integrata con il metodo *ADI*, con  $N = 400$  e drift periodico.

## 2.7 Confronto con il ciclo limite

Di seguito si effettua un rapido confronto tra la soluzione dell'*ODE* in equazione (4) e la soluzione della Fokker-Planck associata, con lo stesso parametro che regola il dumping,  $a = 2$ . L'*ODE* è la seguente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(1 - x^2) \frac{dx}{dt} - x \quad (19)$$

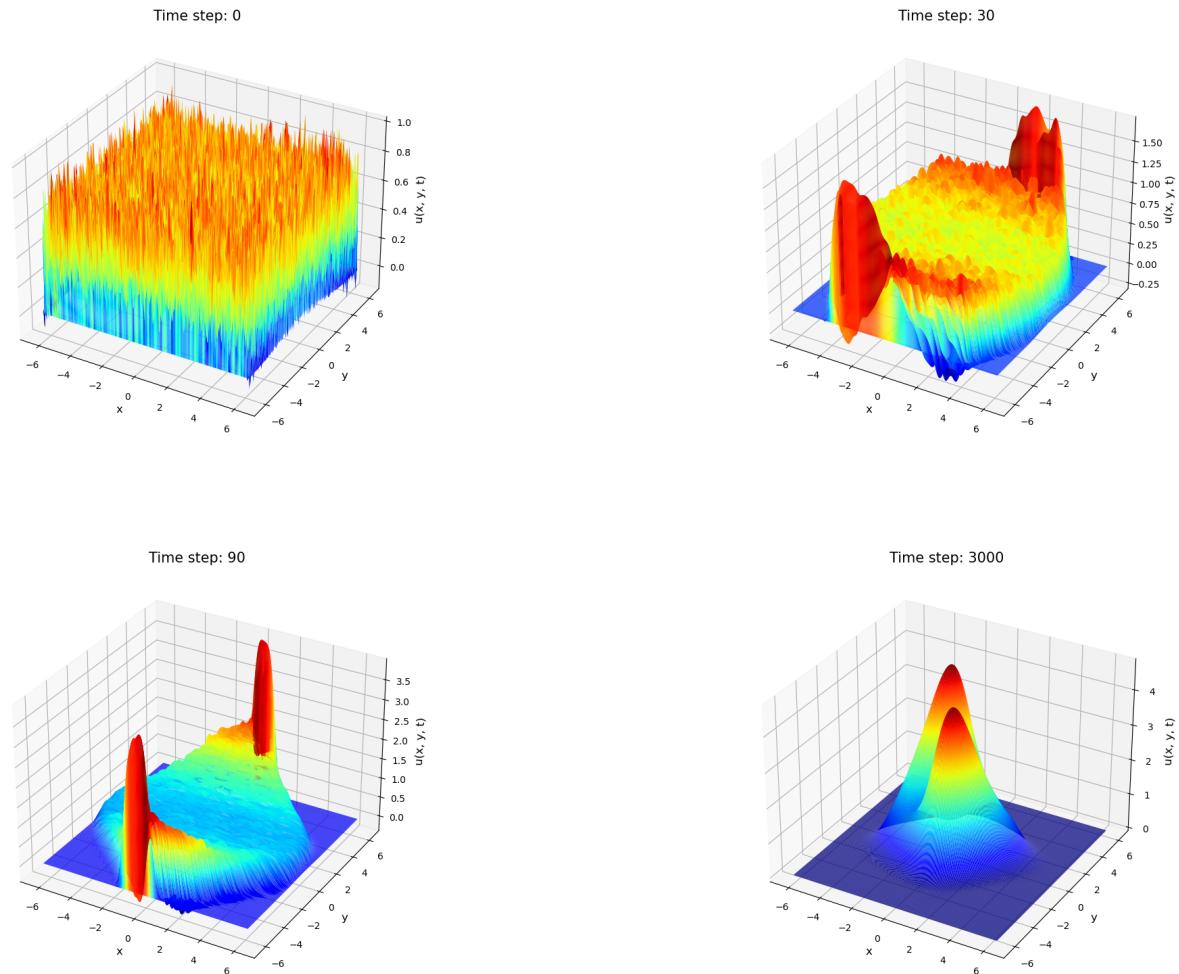
L'equazione differenziale è stata risolta con la libreria `solve_ivp` di `scipy` che utilizza uno schema Runge-Kutta al IV ordine. Di seguito i grafici a confronto:



**Figura 4:** Sinistra: ciclo limite soluzione di (19). Destra: evoluzione della *PDF* tramite *ADI* dopo 18000 steps temporali.

## 2.8 Condizioni iniziali random

Di seguito un esempio di come l'imposizione di una condizione iniziale in cui tutti gli elementi dell'array bidimensionale  $u(x, y, 0)$  sono presi random da una distribuzione uniforme, faccia evolvere il sistema sul ciclo limite:



**Figura 5:** Esempio di come una CI random venga attratta sul ciclo limite stabile.

### 3 Convergenza, consistenza e stabilità

Le equazioni differenziali alle derivate parziali sono di rado risolvibili analiticamente. Una volta approssimata la *PDE* è possibile conoscere in che modo l'equazione alle differenze finite approssima l'equazione di partenza, ma questo non fornisce informazioni su quanto le due soluzioni siano differenti. È chiaro, inoltre, che l'evoluzione temporale dell'equazione alle differenze finite dal punto di vista numerico introduca degli errori che possono accumularsi step dopo step. È possibile definire l'*errore* come la differenza tra la soluzione esatta del problema originale e la soluzione dell'approssimazione alle differenze finite ricavata numericamente, cioè se  $\mathbf{U} = [U_1, U_2, \dots, U_n]^T$  è la soluzione approssimata generata dallo schema utilizzato (escludendo errori di *round-off*) e  $\mathbf{v} = [v(x_1), v(x_2), \dots, v(x_n)]$  è la soluzione esatta nei punti  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , l'errore globale sarà la quantità  $\mathbf{E} = \mathbf{U} - \mathbf{v}$ . Sia  $Pv = f$  una *PDE* per l'incognita  $v$  definita in una regione di  $\mathbb{R}$ , è possibile definire la nozione di convergenza, consistenza e stabilità per lo schema alle differenze finite utilizzato:

- lo schema alle differenze finite  $P_i^n u_i^n = F_i^n$  con  $u_i^n$  soluzione approssimata, è definito **convergente** punto a punto  $\forall(x, t)$  se per  $(i\Delta x, (n+1)\Delta t)$  che converge a  $(x, t)$ ,  $u_i^n$  converge a  $v(t)$  con  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$ ;
- lo schema sarà convergente di ordine  $(p, q)$  se  $[(n+1)\Delta t \rightarrow t]$  con  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$  e vale la seguente relazione:

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1}\| = \mathcal{O}(\Delta x^p) + \mathcal{O}(\Delta t^q)$$

- lo schema alle differenze finite è definito **consistente** se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} T(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (P_h u - Pv) = 0$$

- lo schema alle differenze finite è detto schema **stabile** rispetto alla norma  $\|\cdot\|$  se esistono delle costanti positive  $\Delta x_0$  e  $\Delta t_0$  e delle costanti non negative  $K$  e  $\beta$  tali che:

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq K e^{\beta t} \|\mathbf{u}_0\|$$

per  $0 \leq t = (n+1)\Delta t$ ,  $0 < \Delta x < \Delta x_0$  e  $0 < \Delta t < \Delta t_0$ .

Da notare che questa definizione di stabilità non esclude la possibilità che la soluzione dell'equazione discretizzata cresca con il tempo.

- **teorema di equivalenza di Lax:** uno schema alle differenze finite a 2 livelli consistente per un problema ai valori iniziali ben definito è convergente se e solo se è stabile.

$$consistenza + stabilità \Leftrightarrow convergenza$$

È possibile effettuare un'analisi di stabilità in modo analitico. Uno schema risulta stabile alla Von Neumann se l'errore non viene amplificato durante l'evoluzione. Per analizzare l'errore è necessario decomporre la soluzione discretizzata in serie di Fourier. Per il caso  $2D$  la forma della soluzione sarà la seguente:

$$u_{sp}^n = \xi^n e^{[ik(s\Delta x) + il(p\Delta y)]} \quad (20)$$

con  $k, l$  vettori d'onda in ciascuna direzione spaziale e  $\xi$  fattore di amplificazione che impone il vincolo per lo schema sulla discretizzazione in  $\Delta t$  e  $\Delta x$ . Affinchè lo schema risulti stabile deve valere  $|\xi| \leq 1$ . La definizione di stabilità esposta è riferita a schemi con termini omogenei, ma la consistenza e la stabilità di uno schema omogeneo sono sufficienti per provare la stabilità dello stesso schema non omogeneo.

Nel caso preso in esame nessuna delle precedenti definizioni è direttamente applicabile poiché non si ha a disposizione una soluzione analitica.

### 3.1 Errore e stabilità

Nel caso in esame l'errore è stato calcolato numericamente come segue:

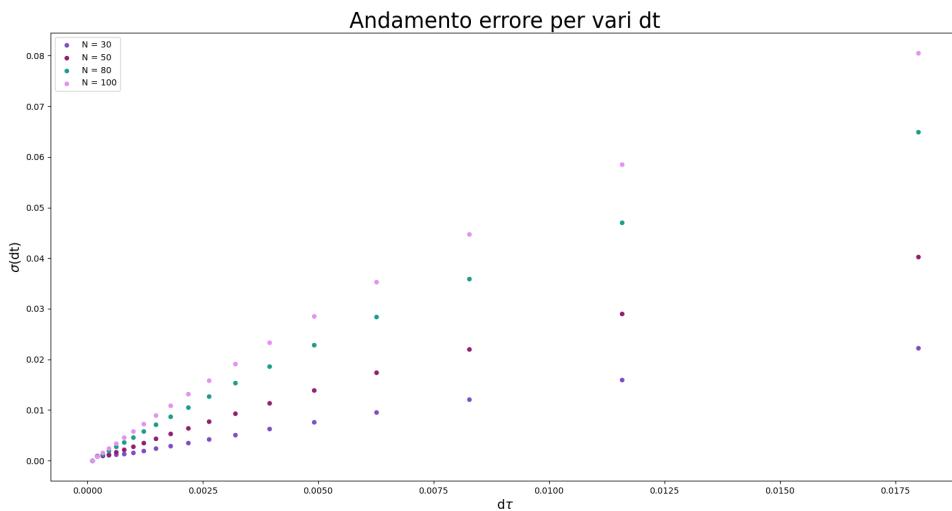
- è stato definito un array i cui elementi sono le spaziature temporali  $dt$  prese tra  $2 \cdot 10^{-3}$  e  $2 \cdot 10^{-2}$ ;
- variando la spaziatura temporale, occorre modificare anche il massimo numero di step temporali per ogni simulazione, in quanto il sistema evolve con tempi diversi. Per permettere al sistema di evolvere sempre allo stesso modo, nelle simulazioni è stata mantenuta costante la quantità  $dtN_t = 200$  con  $N_t$  numero massimo di step temporali; nel caso in cui vengano considerate più slices temporali, occorre che durante le varie simulazioni ciascuna di esse venga analizzata nello stesso istante (ciò è fondamentale poiché il sistema evolve più rapidamente per  $dt$  più grandi);
- per l'errore è stato considerato il massimo della differenza tra il valore assunto da  $u_{i,j}^n$  nelle varie slice temporali e il valore di  $u_{i,j}^{n_{dt_0}}$  ad una slice di riferimento fissata al valore di  $dt$  più piccolo:

$$\sigma = \max \left| u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n_{dt_0}} \right|, \quad u_{i,j}^{n_{dt_0}} \quad t.c. \quad dt_0 = 2 \cdot 10^{-3}, \quad N_t = 100000$$

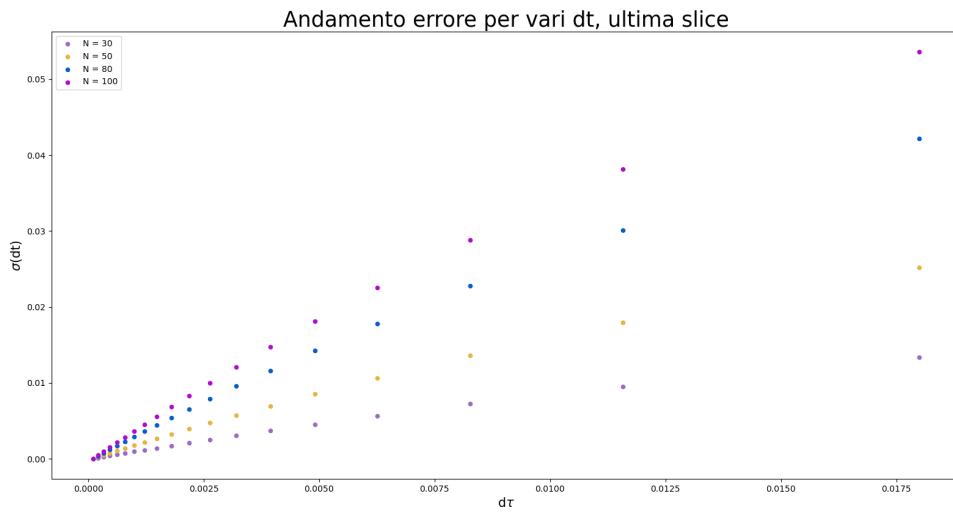
- l'analisi è stata effettuata in 2 modi differenti:
  - è stato calcolato l'errore soltanto sull'ultima slice temporale dopo aver fatto evolvere il sistema su lunghi tempi;
  - è stato calcolato l'errore su più istanti temporali per ogni simulazione al variare di  $dt$  come il massimo tra gli errori a varie slice temporali durante ogni simulazione.

Per simulazioni con tempi molto lunghi i 2 modi restituiscono risultati simili.

- sono state effettuate diverse simulazioni per confrontare diverse discretizzazioni spaziali. La griglia di partenza è stata suddivisa in  $N = 30, 50, 80, 100$  e i risultati ottenuti mostrano comportamenti analoghi per l'andamento degli errori.



**Figura 6:** Errori per diversi valori di  $N$ , dove si è valutata la differenza di varie slice temporali per ogni valore di  $dt$  e se n'è considerato il massimo. Sull'asse  $x$  è riportato  $d\tau = dt_i - dt_0$  con  $dt_0$  spaziatura temporale minima.



**Figura 7:** Errori per diversi valori di  $N$ , dove si è confrontato l'errore relativo all'ultima slice temporale dopo lunghi tempi di evoluzione. Sull'asse  $x$  è riportato  $d\tau = dt_i - dt_0$  con  $dt_0$  spaziatura temporale minima.

## A Algoritmo di Thomas

L'algoritmo di Thomas viene utilizzato per risolvere sistemi di equazioni tridiagonali ed è un'alternativa al metodo di riduzione di Gauss. Rispetto a quest'ultimo, che conta un numero  $O(N^3)$  di step, dove  $N$  è la dimensione della matrice tridiagonale, l'algoritmo di Thomas prevede  $O(N)$  steps. Si procede come segue: dato un sistema di equazioni tridiagonali nella forma

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{N-1} \\ 0 & & & a_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} \quad (21)$$

Il sistema di equazioni si può scrivere come:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = s_i \quad \text{con } a_1 = c_N = 0 \quad (22)$$

I coefficienti sono modificati nel seguente modo (*forward substitution*):

$$c'_i = \begin{cases} \frac{c_i}{b_i} & i = 1 \\ \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}} & i = 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

e

$$s'_i = \begin{cases} \frac{s_i}{b_i} & i = 1 \\ \frac{s_i - a_i s'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}} & i = 2, \dots, N \end{cases}$$

le soluzioni del sistema sono ottenute sostituendo i nuovi coefficienti (*backward substitution*):

$$\begin{aligned} x_N &= s'_N \\ x_i &= s'_i - c'_i x_{i+1} \quad i = N-1, N-2, \dots, 1. \end{aligned}$$

## Riferimenti bibliografici

- [1] V. A. Galaktionov J. L. Vazquez: A Stability Technique for Evolution Partial Differential Equations, *Birkhauser Boston*, 2004
- [2] J. Naprstek R. Král: Multi-dimensional Fokker-Planck equation analysis using the modified finite element method, *J. Phys.: Conf. Ser.* **744** 012177, 2016
- [3] R. Mannella: PDEs, Introduction to Numerical Analysis, 2008 *appunti lezioni*
- [4] J. W. Thomas: Numerical Partial Differential Equations, *Springer Science+Business Media*, 1995